Local Variable Selection and Parameter Estimation of Spatially Varying Coefficient Regression Models

Wesley Brooks

Abstract			
intentionally empty			

- 1. Simulation
- 1.1. Simulation results
- 2. References

References

Preprint February 6, 2014

	step			gradient				parabola				
	G	WEN	G	WAL	G'	GWEN GWAL		GWEN		GWAL		
		st	ер			gradient			parabola			
	G	WEN	G	WAL	GWEN		GWAL		G	WEN	G	WAL
location	β_1	β_2 - β_5										
	0.96	0.00	0.96	0.00	0.99	0.00	0.99	0.00	0.42	0.00	0.44	0.00
1	0.96	0.04	0.95	0.02	0.96	0.01	0.95	0.01	0.34	0.00	0.31	0.01
	0.81	0.22	0.85	0.06	0.79	0.23	0.85	0.04	0.14	0.03	0.28	0.04
	0.94	0.00	0.97	0.00	0.98	0.00	0.96	0.00	0.61	0.01	0.63	0.01
2	0.94	0.04	0.92	0.00	0.90	0.01	0.90	0.01	0.59	0.01	0.62	0.00
	0.66	0.18	0.72	0.08	0.62	0.17	0.72	0.08	0.23	0.06	0.39	0.08
	0.74	0.01	0.74	0.01	0.88	0.00	0.90	0.00	0.74	0.01	0.76	0.00
3	0.69	0.03	0.74	0.00	0.79	0.01	0.84	0.00	0.74	0.00	0.78	0.01
	0.38	0.09	0.59	0.06	0.52	0.13	0.60	0.07	0.37	0.05	0.53	0.06
	0.54	0.01	0.55	0.01	0.83	0.00	0.82	0.00	0.57	0.00	0.60	0.00
4	0.44	0.01	0.52	0.00	0.72	0.00	0.75	0.00	0.61	0.01	0.60	0.01
	0.22	0.04	0.38	0.06	0.36	0.10	0.52	0.07	0.28	0.05	0.47	0.06
	0.41	0.00	0.44	0.00	0.68	0.00	0.66	0.00	0.32	0.00	0.34	0.00
5	0.35	0.01	0.40	0.00	0.57	0.00	0.60	0.01	0.34	0.00	0.38	0.01
	0.16	0.02	0.28	0.03	0.21	0.05	0.42	0.04	0.08	0.01	0.28	0.06
			-		•		-				-	

Table 1: Selection frequency for the indicated variables.

function	location	GWEN	GWAL	GWEN- LLE	GWAL- LLE	oracle	GWR
		0.235	0.222	0.240	0.244	0.162	0.152
	1	0.250	0.219	0.273	0.238	0.194	$\boldsymbol{0.192}$
		0.428	0.316	0.496	0.330	0.185	0.550
		0.255	0.222	0.132	0.106	0.093	$\boldsymbol{0.092}$
	2	0.271	0.235	0.137	0.145	0.088	0.093
		0.502	0.379	0.408	0.309	0.094	0.181
		0.055	0.055	0.060	0.060	0.017	0.016
step	3	0.064	0.054	0.067	0.064	0.015	0.016
		0.114	0.086	0.113	0.092	0.017	0.069
		0.076	0.082	0.070	0.074	0.102	0.104
	4	0.046	0.067	0.059	0.073	0.102	0.104
		0.021	0.051	0.023	0.044	0.099	0.183
	_	0.082	0.089	0.023	0.025	0.000	0.125
	5	0.047	0.072	0.027	0.024	0.000	0.172
		0.017	0.053	0.036	0.039	0.000	0.370
		0.231	0.226	0.109	0.126	0.063	0.046
	1	0.303	0.275	0.121	0.127	0.061	0.092
		0.454	0.363	0.510	0.332	0.067	0.391
	2	0.029	0.033	0.024	0.030	0.011	0.012
	2	0.063	0.054	0.054	0.049	0.013	0.025
		0.164	0.115	0.164	0.114	0.017	0.111
1.		0.035	0.030	0.036	0.031	0.007	0.007
gradient	3	0.061	0.046	0.057	0.048	0.009	0.014
		0.131	0.101	0.129	0.104	0.009	0.051
	4	0.039	0.041	0.043	0.044	0.014	0.014
	4	0.056	0.049	0.055	0.051	0.012	0.018
		0.118	0.089	0.123	0.090	0.011	0.063
	F	0.128	0.130	0.026	0.024	0.000 0.000	0.046
	5	$0.091 \\ 0.026$	0.115	$0.016 \\ 0.046$	0.021	0.000	$0.072 \\ 0.277$
			0.073		0.015		
	1	$0.040 \\ 0.029$	$0.044 \\ 0.033$	$0.060 \\ 0.081$	$0.059 \\ 0.073$	$\begin{array}{c} 0.001 \\ 0.001 \end{array}$	$0.126 \\ 0.151$
	1	$0.029 \\ 0.011$	0.033 0.028	0.081 0.027	0.073 0.051	0.001	0.131 0.374
		$\frac{0.011}{0.100}$	0.028	0.027	0.031	0.029	0.029
	2	0.100	0.094 0.096	0.090	0.094 0.093	$\begin{matrix} 0.029 \\ 0.028 \end{matrix}$	0.029 0.037
	2	0.108 0.176	0.030 0.176	0.039 0.173	0.093 0.197	$\begin{array}{c} 0.028 \\ 0.032 \end{array}$	0.037 0.109
		$\frac{0.170}{0.103}$	0.170	0.173	0.137	$\frac{0.032}{0.035}$	0.042
parabola	3	0.103 0.112	0.097	0.091 0.093	0.087	$\begin{array}{c} 0.033 \\ 0.029 \end{array}$	0.042 0.043
parabora	J	0.112 0.198	0.090 0.155	0.093 0.191	0.050 0.150	$\begin{array}{c} 0.029 \\ 0.036 \end{array}$	$0.043 \\ 0.080$
		$\frac{0.198}{0.108}$	0.101	0.104	0.190	0.030	0.031
	4	0.108	0.101	0.104	0.098 0.097	$\begin{array}{c} \textbf{0.030} \\ \textbf{0.024} \end{array}$	0.034
	1	0.172	0.129	0.030 0.173	0.037	0.024	0.082
		$\frac{0.112}{0.036}$	0.035	0.054	0.125	0.001	0.109
	5	0.028	0.040	0.042	0.059	0.001	0.139
	<u> </u>	0.009	0.025	0.012	0.036	0.001	0.424
		0.003	0.020	0.010	0.000	0.001	0.444

Table 2: Mean squared error of $\hat{\beta_1}$ (**minimum**, next best).

1	function	location	GWEN	GWAL	GWEN- LLE	GWAL- LLE	oracle	GWR
			-0.416	-0.402	0.219	0.231	0.226	0.289
		1	-0.441	-0.399	0.203	0.180	0.237	0.289
step -0.668 -0.5551 -0.255 -0.267 -0.256 -0.268 step 3 -0.157 -0.109 -0.098 -0.049 -0.133 -0.076 -0.075 step 3 -0.157 -0.100 -0.067 -0.026 0.080 0.077 -0.094 -0.280 -0.150 -0.249 -0.112 0.077 0.094 -0.001 0.086 0.001 0.075 0.293 0.301 -0.001 0.086 0.001 0.075 0.295 0.331 -0.018 0.159 -0.072 -0.078 0.000 -0.283 -0.180 0.167 -0.062 -0.062 0.000 -0.283 -0.181 -0.161 -0.062 -0.000 -0.283 -0.0453 -0.441 -0.014 -0.016 -0.010 0.026 -0.244 -0.421 -0.007 -0.015 0.027 0.153 -0.249 -0.503 -0.283 -0.295 0.024			-0.595	-0.465	-0.056	0.019	0.254	0.408
step -0.668 -0.551 -0.337 -0.439 -0.271 -0.237 step -0.098 -0.089 -0.035 -0.033 0.076 0.075 -0.280 -0.150 -0.249 -0.112 0.077 0.094 -0.280 -0.150 -0.249 -0.112 0.077 0.094 -0.0159 0.171 0.154 0.162 0.293 0.301 -0.001 0.086 0.001 0.075 0.295 0.331 -0.001 0.086 0.001 0.075 0.029 0.021 -0.013 0.180 0.195 -0.072 -0.078 0.000 -0.231 -0.047 0.118 -0.0167 -0.062 -0.062 0.000 -0.230 -0.043 0.141 -0.014 0.016 -0.010 0.026 -0.042 -0.133 -0.441 0.014 0.015 0.046 0.089 -0.024 -0.023 -0.020 -0.026 0.015 0.022 0.0			-0.471	-0.443	-0.296	-0.267	-0.275	-0.273
step 3 -0.157 -0.100 -0.067 -0.026 0.080 0.077 -0.280 -0.157 -0.100 -0.049 -0.112 0.077 0.094 -0.280 -0.150 -0.249 -0.112 0.077 0.094 0.159 0.171 0.154 0.162 0.293 0.301 4 0.092 0.144 0.112 0.152 0.300 0.296 -0.001 0.086 0.001 0.075 0.295 0.331 0.180 0.195 -0.072 -0.078 0.000 -0.228 0.047 0.118 -0.035 -0.052 0.000 -0.283 0.047 0.118 -0.035 -0.052 0.000 -0.280 1 -0.524 -0.441 -0.017 0.015 0.046 0.089 -0.629 -0.503 -0.280 -0.015 0.025 0.024 2 -0.181 -0.140 -0.018 -0.023 0.015 0.025 0.0		2	-0.477	-0.426	-0.255	-0.267	-0.256	-0.265
$ \begin{array}{c c c c c c c c c c c c c c c c c c c $			-0.668	-0.551	-0.537	-0.439	-0.271	-0.237
			-0.098	-0.089	-0.035	-0.033	0.076	0.075
$\begin{array}{c ccccccccccccccccccccccccccccccccccc$	step	3	-0.157	-0.100	-0.067	-0.026	0.080	0.077
$ \begin{array}{c c c c c c c c c c c c c c c c c c c $			-0.280		-0.249	-0.112	$\boldsymbol{0.077}$	0.094
			0.159	0.171	0.154	0.162	0.293	0.301
$ \begin{array}{c c c c c c c c c c c c c c c c c c c $		4	$\boldsymbol{0.092}$	0.144	0.112	0.152	0.300	0.296
$ \begin{array}{c c c c c c c c c c c c c c c c c c c $			-0.001	0.086	0.001	0.075	0.295	0.331
$ \begin{array}{c c c c c c c c c c c c c c c c c c c $			0.180	0.195	-0.072	-0.078	0.000	-0.271
$\begin{array}{c ccccccccccccccccccccccccccccccccccc$		5	0.123	0.167	-0.062	-0.062	0.000	-0.283
$ \begin{array}{c c c c c c c c c c c c c c c c c c c $			0.047	0.118	-0.035	-0.052	0.000	-0.290
$ \begin{array}{ c c c c c c c c } \hline & -0.629 & -0.503 & -0.280 & -0.095 & 0.027 & 0.153 \\ \hline & -0.103 & -0.105 & 0.028 & 0.015 & 0.025 & 0.024 \\ \hline & -0.181 & -0.140 & -0.018 & -0.023 & 0.029 & 0.044 \\ \hline & -0.342 & -0.227 & -0.270 & -0.147 & 0.017 & 0.053 \\ \hline & -0.084 & -0.069 & -0.026 & -0.017 & 0.028 & 0.027 \\ \hline & -0.084 & -0.091 & -0.072 & -0.044 & 0.018 & 0.018 \\ \hline & -0.046 & -0.091 & -0.072 & -0.044 & 0.018 & 0.018 \\ \hline & -0.048 & -0.049 & -0.029 & -0.036 & 0.026 & 0.030 \\ \hline & -0.048 & -0.049 & -0.029 & -0.036 & 0.026 & 0.030 \\ \hline & -0.048 & -0.049 & -0.029 & -0.036 & 0.026 & 0.030 \\ \hline & -0.290 & -0.195 & -0.286 & -0.193 & -0.005 & -0.012 \\ \hline & 0.290 & 0.289 & 0.056 & 0.057 & 0.000 & 0.019 \\ \hline & 0.290 & 0.289 & 0.056 & 0.057 & 0.000 & 0.019 \\ \hline & 0.068 & 0.173 & -0.041 & 0.004 & 0.000 & -0.086 \\ \hline & 0.068 & 0.173 & -0.041 & 0.004 & 0.000 & -0.086 \\ \hline & 0.068 & 0.173 & 0.105 & 0.099 & -0.034 & 0.276 \\ \hline & 0.007 & 0.060 & 0.022 & 0.079 & -0.034 & 0.245 \\ \hline & 0.007 & 0.060 & 0.022 & 0.079 & -0.034 & 0.245 \\ \hline & 0.007 & 0.060 & 0.022 & 0.079 & -0.034 & 0.245 \\ \hline & 0.257 & -0.245 & -0.210 & -0.203 & -0.125 & -0.137 \\ \hline & -0.257 & -0.245 & -0.210 & -0.203 & -0.128 & -0.145 \\ \hline & 0.0257 & -0.245 & -0.210 & -0.203 & -0.159 & -0.186 \\ \hline & 0.026 & -0.254 & -0.240 & -0.203 & -0.159 & -0.186 \\ \hline & 0.080 & -0.254 & -0.240 & -0.230 & -0.135 & -0.137 \\ \hline & -0.289 & -0.254 & -0.240 & -0.230 & -0.135 & -0.137 \\ \hline & -0.289 & -0.254 & -0.240 & -0.230 & -0.135 & -0.137 \\ \hline & -0.289 & -0.254 & -0.240 & -0.230 & -0.135 & -0.137 \\ \hline & -0.389 & -0.305 & -0.372 & -0.290 & -0.136 & -0.078 \\ \hline & -0.389 & -0.305 & -0.372 & -0.290 & -0.136 & -0.078 \\ \hline & -0.080 & 0.084 & 0.092 & 0.097 & -0.034 & 0.248 \\ \hline & -0.080 & 0.084 & 0.092 & 0.097 & -0.034 & 0.248 \\ \hline & -0.080 & 0.084 & 0.092 & 0.097 & -0.034 & 0.248 \\ \hline & -0.080 & 0.084 & 0.092 & 0.097 & -0.034 & 0.248 \\ \hline & -0.080 & 0.084 & 0.092 & 0.097 & -0.034 & 0.248 \\ \hline & -0.080 & 0.084 & 0.092 & 0.097 & -0.034 & 0.248 \\ \hline & -0.080 & 0.084 & 0.092 & 0.097 & -0.034 & 0.248 \\ \hline & -0.080 & 0.084 & 0.092 $			-0.453	-0.441	0.014	0.016	-0.010	0.026
$\begin{array}{c ccccccccccccccccccccccccccccccccccc$		1	-0.524	-0.491	-0.007	0.015	0.046	0.089
$\begin{array}{c ccccccccccccccccccccccccccccccccccc$			-0.629	-0.503	-0.280	-0.095	0.027	0.153
$\begin{array}{c ccccccccccccccccccccccccccccccccccc$			-0.103	-0.105	0.028	0.015	0.025	0.024
$ \begin{array}{c ccccccccccccccccccccccccccccccccccc$		2	-0.181	-0.140	-0.018	-0.023	0.029	0.044
$ \begin{array}{c ccccccccccccccccccccccccccccccccccc$			-0.342	-0.227	-0.270	-0.147	0.017	0.053
$\begin{array}{c ccccccccccccccccccccccccccccccccccc$			-0.084	-0.069	-0.026	-0.017	0.028	0.027
$\begin{array}{c ccccccccccccccccccccccccccccccccccc$	gradient	3	-0.146	-0.091	-0.072	-0.044	0.018	0.018
$\begin{array}{c ccccccccccccccccccccccccccccccccccc$			-0.303	-0.214	-0.266	-0.180	0.013	0.022
$\begin{array}{c ccccccccccccccccccccccccccccccccccc$			-0.048	-0.049	-0.029	-0.036	0.026	0.030
$\begin{array}{c ccccccccccccccccccccccccccccccccccc$		4	-0.127	-0.088	-0.105	-0.098	-0.016	-0.015
$\begin{array}{c ccccccccccccccccccccccccccccccccccc$			-0.290	-0.195	-0.286	-0.193	-0.005	-0.012
$\begin{array}{c ccccccccccccccccccccccccccccccccccc$			0.290	0.289	0.056	0.057	0.000	0.019
$\begin{array}{c ccccccccccccccccccccccccccccccccccc$		5	0.221	0.257	-0.034	-0.029	0.000	-0.086
$\begin{array}{c ccccccccccccccccccccccccccccccccccc$			0.068	0.173	-0.041	0.004	0.000	-0.103
$\begin{array}{c ccccccccccccccccccccccccccccccccccc$			0.104	0.113	0.100	0.100	-0.034	0.276
$\begin{array}{c ccccccccccccccccccccccccccccccccccc$		1	0.071	0.073	0.115	0.099	-0.034	0.245
$\begin{array}{c ccccccccccccccccccccccccccccccccccc$			0.007	0.060		0.079	-0.034	
$\begin{array}{c ccccccccccccccccccccccccccccccccccc$			-0.249					-0.133
$\begin{array}{c ccccccccccccccccccccccccccccccccccc$		2					-0.125	
$\begin{array}{c ccccccccccccccccccccccccccccccccccc$			-0.395	-0.291	-0.377	-0.278	-0.128	-0.145
$\begin{array}{c ccccccccccccccccccccccccccccccccccc$						-0.203		
$\begin{array}{c ccccccccccccccccccccccccccccccccccc$	parabola	3				-0.190		
$\begin{array}{c ccccccccccccccccccccccccccccccccccc$	•							
$\begin{array}{c ccccccccccccccccccccccccccccccccccc$								
$ \begin{array}{c ccccccccccccccccccccccccccccccccccc$		4						
0.080 0.084 0.092 0.097 -0.034 0.247 5 0.069 0.097 0.079 0.102 -0.034 0.248								
5 0.069 0.097 0.079 0.102 -0.034 0.248								
		5						
		-	-0.007	0.054	-0.004	0.046	-0.034	0.352

Table 3: Bias of $\hat{\beta}_1$ (minimum, next best).

function	location	GWEN	GWAL	GWEN- LLE	GWAL- LLE	oracle	GWR
		0.062	0.061	0.194	0.192	0.112	0.069
	1	0.056	0.061	0.234	0.207	0.139	0.110
		0.074	0.101	0.498	0.333	0.122	0.387
		0.033	0.027	0.045	0.036	0.017	0.018
	2	0.044	0.054	0.072	0.075	0.023	0.023
		0.056	0.076	0.121	0.118	0.020	0.126
		0.046	0.048	0.059	0.060	0.011	0.011
step	3	0.039	0.045	0.063	0.064	0.009	0.011
		0.036	0.064	0.052	0.080	0.011	0.060
		0.051	0.053	0.047	0.048	0.016	0.014
	4	0.038	0.047	0.047	0.051	0.012	0.017
		0.021	0.044	0.023	0.038	0.012	0.074
		0.050	0.052	0.018	0.019	0.000	0.052
	5	0.033	0.044	0.023	0.020	0.000	0.093
		0.015	0.039	0.035	0.037	0.000	0.289
		0.027	0.032	0.110	0.127	0.063	0.046
	1	0.029	0.034	0.122	0.128	0.060	0.085
		0.059	0.111	0.436	0.326	0.067	0.371
		0.018	0.022	0.023	0.030	0.011	0.011
	2	0.030	0.034	0.054	0.049	0.012	0.023
		0.048	0.064	0.092	0.094	0.017	0.109
		0.029	0.026	0.035	0.031	0.006	0.007
gradient	3	0.040	0.038	0.052	0.046	0.009	0.014
		0.040	0.056	0.059	0.072	0.009	0.051
		0.037	0.039	0.042	0.043	0.014	0.013
	4	0.040	0.042	0.044	0.041	0.011	0.018
		0.034	0.052	0.042	0.054	0.011	0.063
		0.044	0.047	0.023	0.021	0.000	0.046
	5	0.043	0.050	0.015	0.020	0.000	0.065
		0.022	0.044	0.045	0.015	0.000	0.269
		0.030	0.032	0.050	0.049	0.000	0.051
	1	0.024	0.028	0.069	0.064	0.000	0.092
		0.011	0.025	0.027	0.045	0.000	0.334
		0.038	0.038	0.046	0.045	0.011	0.011
	2	0.029	0.035	0.045	0.046	0.012	0.019
		0.020	0.092	0.032	0.121	0.016	0.089
		0.037	0.037	0.048	0.047	0.010	0.008
parabola	3	0.036	0.037	0.050	0.045	0.009	0.011
		0.029	0.038	0.042	0.047	0.009	0.056
		0.036	0.037	0.047	0.046	0.011	0.012
	4	0.031	0.038	0.045	0.046	0.009	0.017
		0.021	0.037	0.035	0.044	0.008	0.077
		0.030	0.029	0.046	0.046	0.000	0.049
	5	0.024	0.031	0.036	0.049	0.000	0.078
	-	0.009	0.022	0.016	0.035	0.000	0.304
		0.000	0.022	0.010	0.000	0.000	0.001

Table 4: Variance of $\hat{\beta}_1$ (**minimum**, next best).

function	location	GWEN	GWAL	GWEN- LLE	GWAL- LLE	oracle	GWR
		0.200	0.203	1.294	1.322	0.206	0.206
	1	0.169	0.167	1.711	1.538	0.174	0.174
		0.205	0.196	1.542	1.712	0.209	0.197
		0.216	0.211	0.775	0.784	0.212	0.208
	2	0.232	0.228	0.905	0.851	0.239	0.231
		0.189	0.190	0.506	0.612	0.194	0.184
		0.233	0.233	0.577	0.569	0.233	0.233
step	3	0.231	0.234	0.543	0.586	0.234	0.230
		0.246	0.230	0.482	$\boldsymbol{0.655}$	0.243	0.238
		0.242	0.244	0.500	0.513	0.250	0.248
	4	0.249	0.253	0.449	0.556	0.258	0.259
		0.251	0.242	0.356	0.446	0.251	0.242
		0.244	0.246	0.428	$\boldsymbol{0.452}$	0.248	0.229
	5	0.248	0.249	0.415	0.419	0.254	0.247
		0.242	0.246	0.313	0.423	0.245	0.229
		0.195	0.196	1.134	1.136	0.195	0.188
	1	0.206	0.204	1.226	1.164	0.203	0.193
		0.199	0.195	1.622	1.653	0.201	0.193
		0.246	0.241	0.668	0.611	0.243	0.244
	2	0.237	0.238	0.782	0.769	0.241	0.238
		0.245	0.239	0.757	0.942	0.243	0.244
		0.241	0.243	0.549	0.570	0.247	0.238
gradient	3	0.234	0.229	0.566	0.590	0.233	0.236
		0.230	0.234	0.466	0.605	0.238	0.236
		0.232	0.233	0.436	0.429	0.235	0.230
	4	0.246	0.246	0.616	0.743	0.250	0.240
		0.222	0.225	0.371	0.620	0.228	0.229
		0.241	0.241	0.394	0.388	0.248	0.221
	5	0.246	0.247	0.418	$\boldsymbol{0.425}$	0.250	0.241
		0.249	0.244	0.283	0.317	0.248	0.236
		0.242	0.243	0.316	0.303	0.252	0.227
	1	0.241	0.243	0.368	0.317	0.247	0.219
		0.253	0.255	0.306	0.481	0.256	0.240
		0.235	0.231	0.442	0.450	0.239	0.234
	2	0.245	0.247	0.451	$\boldsymbol{0.492}$	0.246	0.241
		0.257	0.250	0.426	0.613	0.254	0.251
		0.215	0.213	0.451	0.460	0.216	0.217
parabola	3	0.244	0.238	0.467	0.473	0.241	0.240
-		0.242	0.240	0.400	$\boldsymbol{0.492}$	0.245	0.241
		0.229	0.226	0.361	0.360	0.232	0.228
	4	0.239	0.237	0.427	0.428	0.237	0.238
		0.248	0.246	0.418	0.535	0.249	0.250
		0.247	0.247	0.384	0.383	0.249	0.230
	5	0.245	0.240	$\boldsymbol{0.372}$	0.350	0.246	0.235
	-	0.248	0.242	0.295	0.490	0.252	0.230
		0.248	0.242	0.295	0.490	0.252	0.230

Table 5: Mean squared error of \hat{y} (minimum, $next\ best$).