Tabelas de Espalhamento

Prof. Dr. Wesin Ribeiro Alves

Neste capítulo

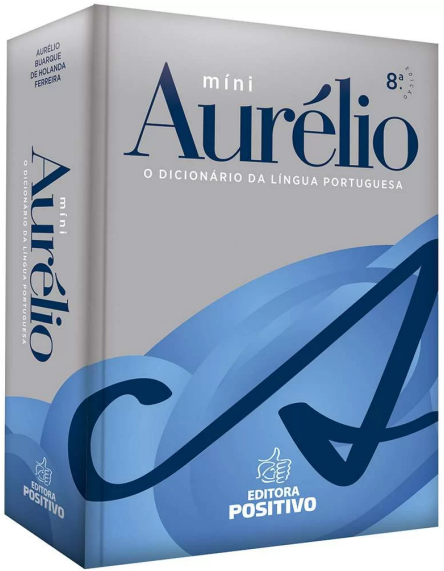
- Introdução
- Tabelas de endereço direto
- Tabelas de espalhamento
- Função Hash
- Endereçamento Aberto
- Hash perfeito
- revisão

Introdução

Tabela de espalhamento é uma estrutura de dados eficaz para implementar dicionários.

Ela generaliza a noção mais simples de arranjo comum fazendo o uso do endereçamento direto.

Normalmente, a tabela de espalhamento é usada em situações onde precisa-se apenas de operações inserir, buscar e remover.



Dicionários

A implementação das operações é trivial.

```
DIRECT-ADDRESS-SEARCH(T, k)
1   return T[k] = x

DIRECT-ADDRESS-INSERT(T, x)
1   T[x.chave] = x

DIRECT-ADDRESS-DELETE(T, x)
1   T[x.chave] = NIL
```

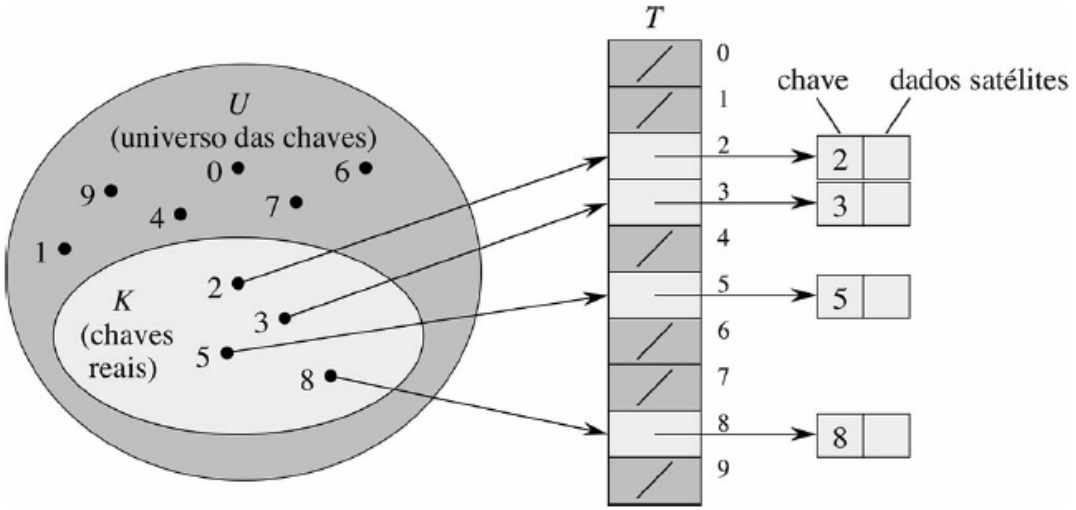
O tempo médio para implementação é O(1).

Tabelas de endereçamento direto

O endereçamento direto é uma técnica simples que funciona bem quando o número de chaves é razoavelmente pequeno.

T é uma tabela de endereços diretos T=[0..m-1], na qual, cada posição corresponde a uma chave no universo U = {0..m-1}.

Podemos armazenar o objeto na própria posição da tabela e assim economizar espaço.

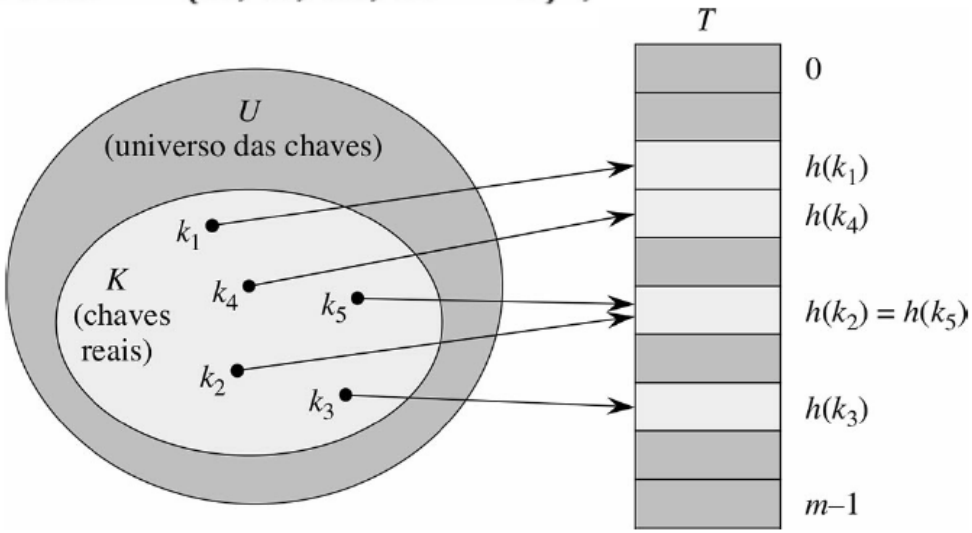


Tabelas de espalhamento

A função hash h pode ser usada para calcular a posição da chave k no arranjo.

Quando o conjunto K de chaves armazenadas em um dicionário é muito menor que o universo U de todas as chaves possíveis, uma tabela de espalhamento requer armazenamento muito menor que uma tabela de endereços diretos.

$$h : U \rightarrow \{0, 1, \ldots, m-1\} ,$$



O que é uma colisão?

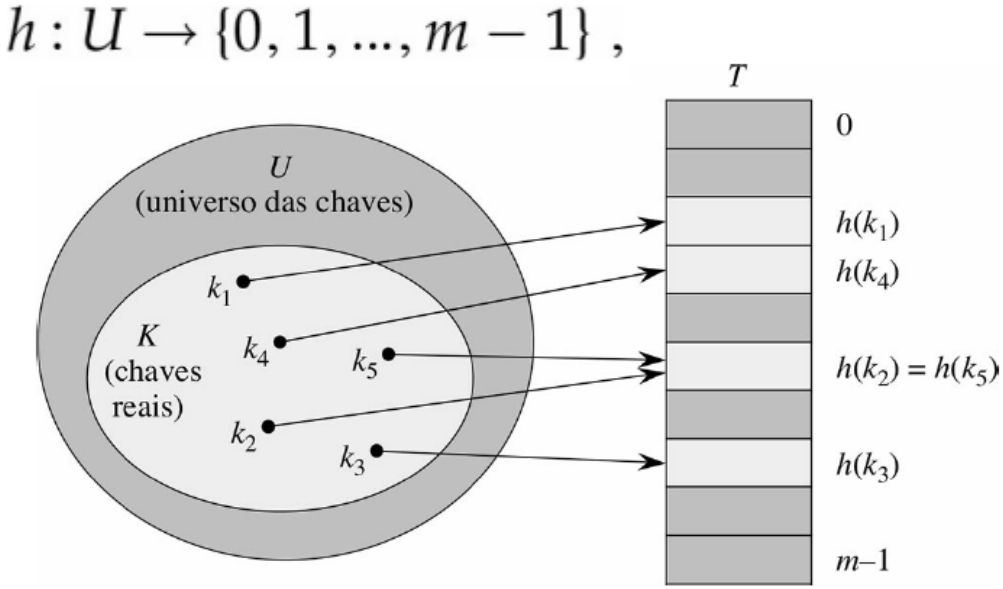
São chaves mapeadas para a mesma posição!!!

Repara na alocação da chave k2 e k3.

Após a função hash, essas chaves foram mapeadas para a mesma posição.

Portanto, houve uma colisão.

Isso é uma situação inevitável pois |U| > m

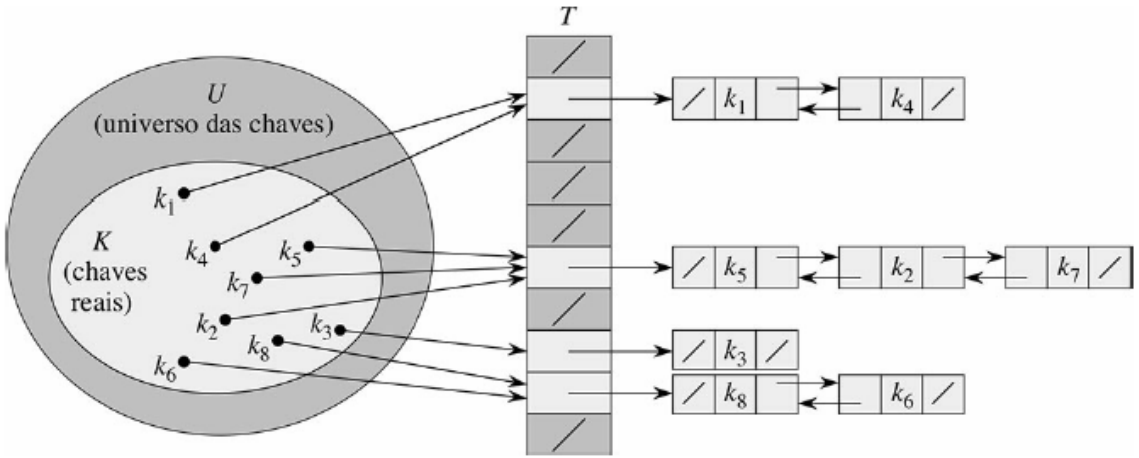


Resolução de colisões por encadeamento

Utiliza uma lista encadeada é a maneira mais simples de resolver uma colisão.

Todos os elementos resultantes do hash vão para a mesma posição em uma lista encadeada.

As operações de dicionário são fáceis de implementar.



Análise da tabela hash com encadeamento

- Complexidade de tempo
  - Inserção: O(1)
  - Remoção O(1) se usar LDE
  - Busca O(1 + alpha)

Fator de carga

- n = número de elementos na tabela
- m = capacidade da tabela
- alpha => fator de carga = n/m
- Xij = I{h(ki) = h(kj)}

$$\Pr\{h(k_i) = h(k_j)\} = 1/m$$

$$E[X_{ij}] = 1/m.$$

$$\begin{aligned}
&E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(1+\sum_{j=i+1}^{n}X_{ij}\right)\right] \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(1+\sum_{j=i+1}^{n}E[X_{ij}]\right) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(1+\sum_{j=i+1}^{n}\frac{1}{m}\right) \\
&= 1+\frac{1}{nm}\left(\sum_{i=1}^{n}n-\sum_{i=1}^{n}i\right) \\
&= 1+\frac{1}{nm}\left(n^2-\frac{n(n+1)}{2}\right) \\
&= 1+\frac{n-1}{2m} \\
&= 1+\frac{\alpha}{2}-\frac{\alpha}{2n}
\end{aligned}$$

Implementação

Resolução de colisões por encadeamento.

CHAINED-HASH-INSERT(T, x)
1 insere x no início da lista $T[h(x.chave)]$

CHAINED-HASH-SEARCH(T, k)
1 procura um elemento com a chave k na lista $T[h(k)]$

CHAINED-HASH-DELETE(T, x)
1 elimina x da lista $T[h(x.chave)]$

Funções hash

Existem três tipos de esquemas para criação de boas funções hash: por divisão, por multiplicação e por hash universal.

Uma boa função hash satisfaz (aproximadamente) a premissa do hashing uniforme simples.

cada chave tem igual probabilidade de passar para qualquer das m posições por uma operação de hash.

Uma boa função hash minimiza a chance de pequenas variações nos símbolos passarem para a mesma posição após o hashing.

Uma boa abordagem deriva o valor hash de um modo que esperamos seja independente de quaisquer padrões que possam existir nos dados.

Método da Divisão

$$h(k) = k \bmod m$$

- k é a chave do tipo inteiro que queremos fazer o hash
- m é o tamanho da tabela T
- O valor de m não deve ser potência de 2
- Melhor escolha seria um número primo não muito próximo da potência de 2

Método da multiplicação

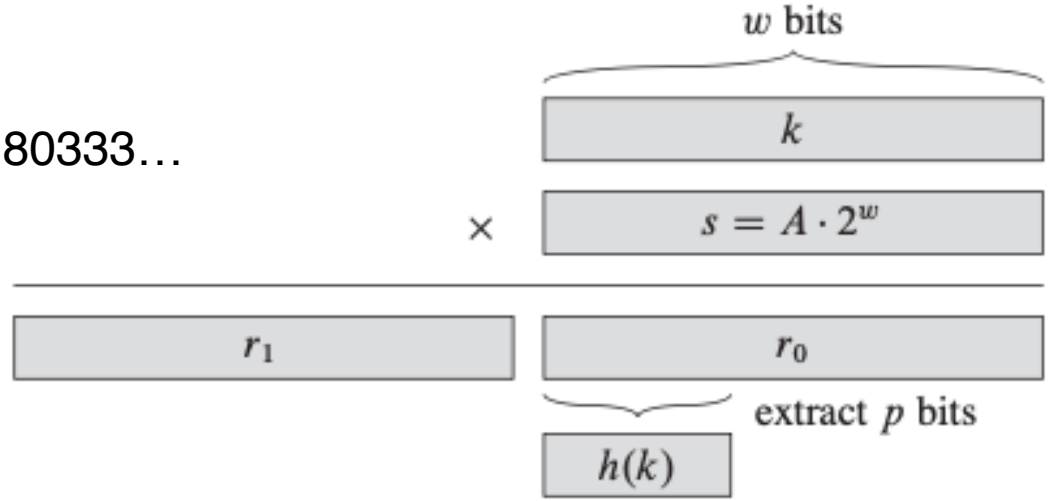
$$h(k) = \lfloor m(k\,A \bmod 1) \rfloor$$

- k é a chave do tipo inteiro que queremos fazer o hash
- m é o tamanho da tabela T
- O valor da constante A deve estar entre [0,1]
- O valor de m pode ser potência de 2

Método da multiplicação

$$h(k) = \lfloor m(k\,A \bmod 1) \rfloor$$

A = (sqrt(r) - 1) / 2 = 0,6180333…
0 < A < 1



Esquema do método da multiplicação em modo binário. h(k) corresponde aos p bits de mais alta ordem da metade inferior (r0) da multiplicação.

Hash universal

- Dado uma coleção finita de funções hash *H*
- Para cada par k, l contida em U
- |h(k) = h(l)| ~ |H| / m

$$h_{ab}(k) = ((ak + b) \bmod p) \bmod m$$

$$\mathcal{H}_{pm} = \{h_{ab} : a \in \mathbb{Z}_p^* \text{ and } b \in \mathbb{Z}_p\}$$

0 < k < p-1

$$\Pr\{h_{ab}(k) = h_{ab}(l)\} \leq 1/m$$

A chance de colisão entre duas chaves distintas é menor ou igual a 1/m

Exercícios - Resolução de colisões por encadeamento usando método da divisão

1. Insira as chaves {5, 28, 19, 15, 20, 33} em uma tabela T com 9 posições [0..8], utilizando a função hash: h(k) = k mod 9.
2. Se a i-ésima letra do alfabeto é representada pelo número i e a função dispersão h(chave) = chave mod M é utilizada para M = 7, então mostre o resultado da inserção das seguintes chaves na tabela: P E S Q U I S A.

Endereçamento Aberto

Todos os elementos ficam na própria tabela de espalhamento. Isto é, cada entrada da tabela contém um elemento do conjunto dinâmico ou nulo.

- Não usa lista ligada
- A tabela pode ficar cheia
- Evita por completo a utilização de ponteiros
- + memória, - colisões

Sequência de sondagem

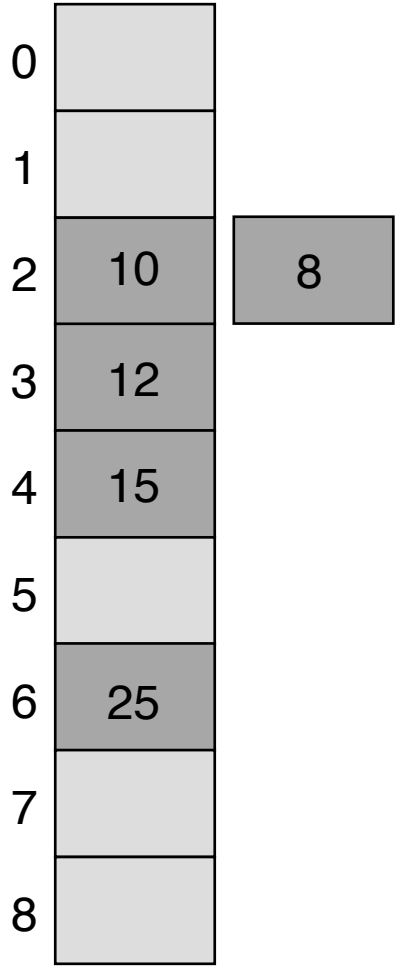
Pseudo código para operações de inserção e busca.

```
HASH-INSERT(T, k)
1  i = 0
2  repeat j = h(k, i)
3        if T[j] == NIL
4           T[j] = k
5           return j
6        else i = i + 1
7  until i == m
8  error "estouro da tabela"
```

```
HASH-SEARCH(T, k)
1  i = 0
2  repeat
3     j = h(k, i)
4        if T[j] == k
5           return j
6        i = i + 1
7  until T[j] == NIL ou i == m
8  return NIL
```

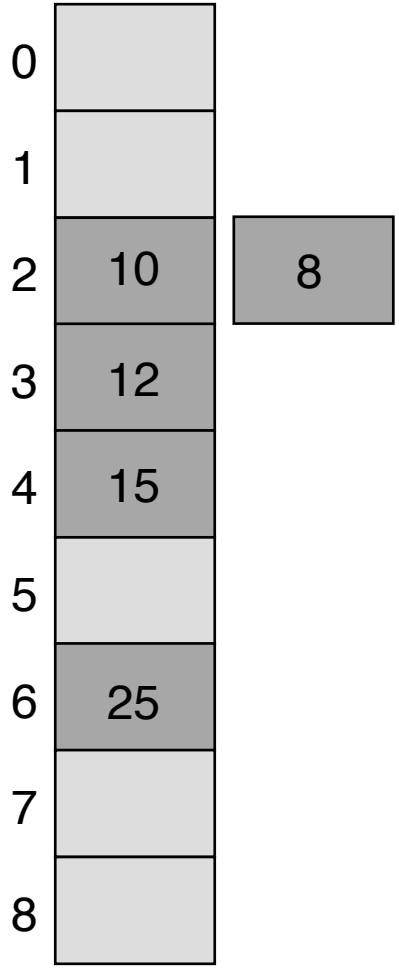
Sondagem linear

- h(k,i) = (h'(k)+i) mod m
- i=0,1,…m-1
- Fácil de implementar
- Sondagem inicial em T[h'(k)]
- Problema de agrupamento primário (longas sequências de posições ocupadas)



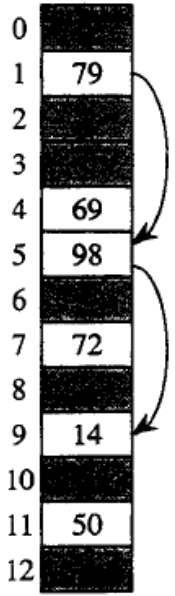
Sondagem quadrática

- h(k,i) = (h’(k) + c1*i + c2*i^2) mod m
- Sondagem inicial em T[h’(k)]
- c1 e c2 são constantes
- i=0,1…m-1
- Problema de agrupamento secundário



Hash duplo

- h(k,i) = (h1(k) + i*h2(k)) mod m
- h1 e h2 são funções de hash auxiliares
- Sondagem inicial em T[h1(k)]
- Melhor quando m é primo ou potência de 2



Exercícios - Resolução de colisões por endereçamento aberto usando sondagem linear

1. Insira as chaves {10, 22, 31, 4, 15, 28, 59} em uma tabela T com 11 posições [0..10], utilizando a função hash: h(k) = k mod 11 com sondagem linear.

2. Se a i-ésima letra do alfabeto é representada pelo número i e a função dispersão h(chave) = chave mod M é utilizada para M = 7, então mostre o resultado da inserção das seguintes chaves na tabela: P E S Q U I S A.

Exercícios - Resolução de colisões por endereçamento aberto usando sondagem quadrática

1. Insira as chaves {10, 22, 31, 4, 15, 28, 59} em uma tabela T com 11 posições [0..10], utilizando a função hash: h(k) = k mod 11 com sondagem quadrática, sendo c1=1 e c2=3.

2. Se a i-ésima letra do alfabeto é representada pelo número i e a função dispersão h(chave) = chave mod M é utilizada para M = 7, então mostre o resultado da inserção das seguintes chaves na tabela: P E S Q U I S A.

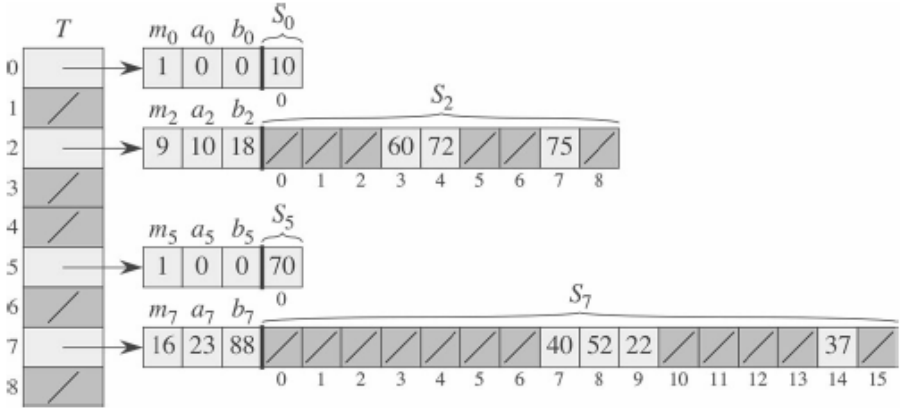
Como eliminar um elemento usando endereçamento aberto?

- O algoritmo de pesquisa (ou busca) percorre a mesma sequência de posições examinada pelo algoritmo de inserção quando a chave k foi inserida.
- Após a remoção, a posição não pode ser deixada como uma célula vazia, pois pode interferir nas buscas.
- A posição deve ser marcada de alguma maneira (com uma variável booleana, por exemplo) para que na busca possa-se saber que havia algo lá.

O Hash perfeito

Ocorre quando forem exigidos *O*(1) acessos à memória para executar uma busca no pior caso.

- Dois níveis de hash universal
  - Primeiro nível igual ao hashing com encadeamento
  - Segundo nível usa uma tabela hashing secundário Sj
  - mj = nj ^ 2
  - Complexidade de espaço O(n)



Revisão (1/2)

- Tabelas de espalhamento implementam de forma eficiente dicionários de dados
- A função hash mapea uma chave para uma espaço na tabela hash
- Boas funções hashes distribuem chaves de maneira a diminuir o número de colisões
- Uma das formas de resolver colisões é usar encadeamento

Revisão (2/2)

- O fator de carga é uma propriedade que indica quanto a tabela corre o risco de sofrer colisão.
- O endereçamento aberto resolve colisões sem precisar de uma estrutura de dados auxiliar
- O endereçamento aberto utiliza o esquema de sondagem linear, quadrática ou hash duplo.
- O Hash perfeito utiliza duas tabelas hash com método hash universal