Pêndulo Invetido
Estudo Teorias de controle moderno

21 de Junho de 2020

1 Introdução

Adquirir conhecimentos em controle usando destes as tecnicas classicas quanto as mordernas. Resolver, com tais tecnicas, problema pêndulo invertido e simulalo usando Coppelian (antigo V-rep).

2 Modelo matemático

Todo inicio de trabalho se inicia com estudo matemático. A primeira pergunta que nos fazemos é "qual ou quais são as leis da física a planta esta sujeita ?". A planta é o objeto físico na qual se deseja controlar.

2.1 Primeiros passos

Pêndulo é sistema instável, a menos que uma força u seja aplicada no carro. u é então o sinal de controle a se inserido na planta.

O centro gravidade da haste é dado por:

$$(Xg, Yg) = (x + lsin(\theta))$$

Do diagrama de corpo livre. O momento inercia é igual ao somatório de momentos torque. Temos movimento rotacional da haste em torno do centro de grávidade (CG) como sendo:

$$I\ddot{\theta} = Vlsin(\theta) - Hlcos(\theta)$$

O pêndulo, descreve movimento tanto vertical quanto horizontal. Escrevendo as equações de movimento em relação ao centro de massa, temos:

1. Movimento horizontal. Das equações de Newton sabemos que F = ma, Portanto:
$$H = m\frac{dx(x + lsin(\theta))}{dy}$$

FIGURA 3.5
(a) Sistema de pêndulo invertido;
(b) diagrama de corpo livre.

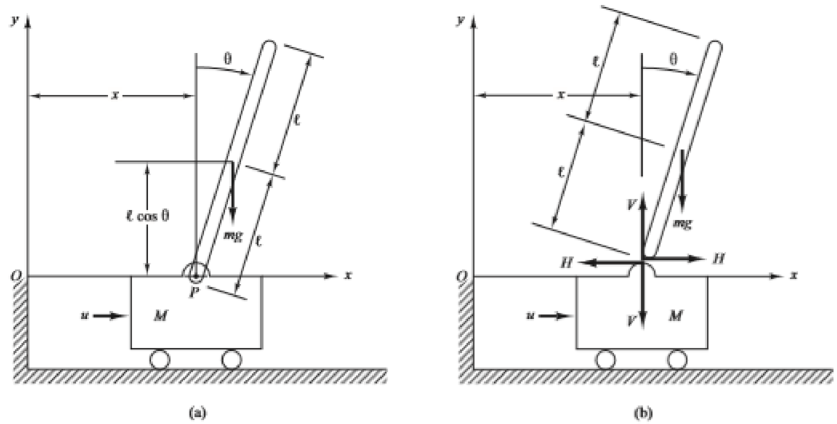

Figura 1:

2. Movimento vertical

$$V - mg = m\frac{d^2(lcos(\theta))}{dt^2}$$

O movimento do carro são restritos exclusivamente na direção x.

$$u - H = M\frac{d^2x}{dt^2}$$

Para variação de angulo pequenas entre -30º e + 30º. Podemos simplificar:

$$cos(\theta) = 1esin(\theta) = \theta.$$

Dessa forma podemos reescrever as equações acima já simplificando. Ficando da forma:

$$I\ddot{\theta} = Vl\theta - Hl$$

$$H = m(\ddot{x} + l\ddot{\theta})$$

$$V - mg = 0$$

Juntandos as equações matemáticas temos:

$$u = (M + m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta}$$

$$(I + ml^2)\ddot{\theta} + ml\ddot{x} = mgl\theta$$

As equações acima formam modelo matemático do sistema. Um caso particular do sistema é quando a massa está toda alocada na ponta. Isso faz com que momento de inercia I seja igual a 0. Adotaremos tal simplificação a parti de agora. Assim temos as seguintes novas equações:

$$ml^2\ddot{\theta} + ml\ddot{x} = mgl\theta$$
$$(M+m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} = u$$

2.2 Função transferencia

Das equações anteriores vamos escrever a função de transfêrencia do ângulo sobre o sinal u. Issolando as derivadas das equações anteriores temos:

$$Ml\ddot{\theta} = (M+m)g\theta - u$$
$$M\ddot{x} = u - mg\theta$$

Da primeira equação deduzimos função transferência como sendo

$$\frac{\theta(s)}{-u(s)} = \frac{1}{Mls^2 - (M+m)g} = \frac{1}{Ml((s+\sqrt{\frac{M+mg}{Ml}})(s-\sqrt{\frac{M+mg}{Ml}}))}$$

A planta possui semi seixo negativo/ positivo real, portando a planta é instável em malha aberta.

2.3 Metodo planta estado

Seja definido as variaveis da planta estado como X1, ... , x4 da forma:

$$x1 = \theta$$
$$x2 = \dot{\theta}$$
$$x3 = x$$
$$x4 = \dot{x}$$

Considerando theta e x como saídas do sistema. Trabalhando com equações já com derivadas isoladas temos:

$$\dot{x1} = x2$$
$$\dot{x2} = \frac{M+m}{ml}gx1 - \frac{1}{ml}u$$
$$\dot{x3} = x4$$
$$\dot{x4} = \frac{-m}{M}gx1 + \frac{1}{m}u$$

Escrevendo as equações acima na forma matrícial.

3 Teoria controle

3.1 Teoria clássica

3.2 Teoria moderna

4 Resolução Pêndulo invertido

4.1 Simulação Coppelian

4.2 LQR - Optimal control

5 Conclusão