CONTROLE POR REALIMENTAÇÃO DOS ESTADOS REGULADOR DE ESTADOS

1. Motivações

- O controle de sistemas dinâmicos no espaço dos estados é realizado por meio da realimentação dos estados do sistema.

- O controle por realimentação dos estados é muito mais eficiente e mais potente do que o controle por realimentação das saídas.

- Pode-se fazer uma analogia entre controle por realimentação do estados (Controle Moderno) e controle por realimentação da saída (Controle Clássico):
    - Considere um médico tratando um doente com febre alta.
    - Se o médico tratar o doente segundo os conceitos de Controle Clássico, ele vai medir a temperatura do paciente e vai dar remédio para abaixar a febre quando ela estiver alta e não fazer nada quando a febre estiver baixa.
    - Se o médico tratar o doente segundo os conceitos de Controle Moderno, ele vai examinar o paciente, identificar a causa da febre e dar remédio para a doença e não para a febre, ou seja, o médico vai tratar a doença eliminando a causa da febre e não somente o sintoma da doença.

- O grande problema do controle por realimentação dos estados é exigir que os estados do sistema estejam disponíveis para serem realimentados, ou seja, é necessário medir todos os estados do sistema ou pelo menos estimá-los (observador de estados).

- Existem dois tipos básicos de controladores:
    - Regulador de estados $\Rightarrow$ tem o objetivo de manter o sistema em uma condição fixa de operação;
    - Sistema servo $\Rightarrow$ tem o objetivo de fazer com que as saídas do sistema sigam um comando desejado.

- Exemplos de sistemas reguladores:
    - Controle da posição de uma plataforma semi-submersível de extração/perfuração de petróleo $\Rightarrow$ nesse sistema o regulador tem a função de manter a plataforma em uma posição fixa em relação ao poço de petróleo localizado no fundo do mar;
    - Piloto automático de avião $\Rightarrow$ nesse sistema o regulador tem a função de manter o avião em vôo com velocidade, altura e direção constantes.

- Exemplos de sistemas servos:
    - Controle de posição da ferramenta de corte de uma máquina de usinagem CNC $\Rightarrow$ o controlador de movimento da ferramenta tem que fazer com que ela se mova segundo uma trajetória determinada pela geometria desejada da peça sendo fabricada;

- Controle da trajetória de um foguete lançador de satélites $\Rightarrow$ o controle do foguete tem que garantir que o mesmo siga uma trajetória desejada de modo que o satélite seja posicionado no espaço na posição e velocidade desejadas.

2. Regulador de estados

- Um sistema regulador de estados consiste em uma malha fechada na qual as referências para as saídas são todas iguais a zero, ou seja:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{0}\,. \tag{1}$$

- Dado um sistema LIT na forma:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{cases} \tag{2}$$

onde $\mathbf{x}(t) \in R^n$, $\mathbf{u}(t) \in R^m$ e $\mathbf{y}(t) \in R^p$.

Assume-se que o sistema composto por (**A**, **B**) seja controlável e composto por (**A**, **C**) seja observável.

- O controle por realimentação dos estados é definido por:

$$\boxed{\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t)\,,} \tag{3}$$

onde **K é uma matriz de ganhos com dimensão *mxn***.

No o controlador por realimentação do estados a entrada do sistema é calculada em função dos estados do sistema multiplicados por uma matriz de ganhos constante.

Note que a realimentação dos estados é negativa.

- Malha fechada do regulador:

Substituindo a eq. (3) na eq. (2) tem-se,

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}[-\mathbf{K}\mathbf{x}(t)], \tag{4}$$

ou

$$\boxed{\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}_{\mathbf{mf}}\mathbf{x}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \end{cases}.} \tag{5}$$

- **Deve-se escolher a matriz de ganhos $\mathbf{K}$ de forma que a matriz da malha fechada ($\mathbf{A}_{mf}$) tenha as propriedades desejadas.**

- **O mais simples é escolher os ganhos do controlador de forma a localizar os pólos da malha fechada em posições desejadas no plano *s*.**

3. Alocação de pólos em sistemas SISO

- Para um sistema SISO, a matriz de ganhos do controlador por realimentação de estados possui n elementos $\Rightarrow$ portanto, como o sistema tem n pólos, para sistemas SISO pode-se localizar os pólos da malha fechada em quaisquer posições no plano s.

- Existem vários métodos para calcular os ganhos do controlador por realimentação de estados de forma a localizar os pólos da malha fechada nas posições desejadas.

- Para sistemas de ordem baixa (até terceira ordem) simplesmente escreve-se a equação característica em função do ganhos do controlador e iguala-se com a equação característica deseja.

- Os métodos os mais conhecidos para calcular os ganhos do controlador por realimentação dos estados para sistemas SISO são os seguintes:
  - Fórmula de Ackerman (Kailath, T., *Linear Systems*, Prentice-Hall, 1980, p. 201);
  - Método modal.

Fórmula de Ackerman

A Fórmula de Ackerman pode ser resumida pelo seguinte algoritmo:

$$\boxed{\mathbf{K} = \mathbf{e}\mathbf{M}_c^{-1}\mathbf{P}(\mathbf{A})} \tag{6}$$

onde: $\mathbf{e}$ é um vetor linha de dimensão 1xn, dado por:

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}; \tag{7}$$

$\mathbf{M}_c$ é a matriz de controlabilidade do sistema,

$$\mathbf{M}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \cdots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \end{bmatrix}; \tag{8}$$

$\mathbf{P}(\mathbf{A})$ é uma matriz formada a partir do polinômio característico desejado para a malha fechada. Seja o polinômio característico da malha fechada,

$$p(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0 . \tag{9}$$

No polinômio característico (eq. 9) substitui-se a variável *s* pela matriz do sistema, assim, tem-se,

$$\mathbf{P}(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^n + a_{n-1}\mathbf{A}^{n-1} + \ldots + a_1\mathbf{A} + a_0\mathbf{I}\,. \tag{10}$$

Observa-se que essa fórmula apresenta características numéricas muito ruins.

Método modal.

O método modal pode ser resumido pelas seguintes expressões:

$$\boxed{\mathbf{K} = \mathbf{hW}\,,} \tag{11}$$

onde $\mathbf{W}$ é a matriz dos autovetores da esquerda da matriz $\mathbf{A}$ do sistema, ou seja:

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{w_1} \\ \mathbf{w_2} \\ \vdots \\ \mathbf{w_n} \end{bmatrix}_{(nxn)} \quad ; \tag{12}$$

$\mathbf{h}$ é um vetor linha de dimensão 1xn, dado por:

$$\mathbf{h} = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 & \cdots & h_n \end{bmatrix} \tag{13}$$

e cujos elementos são calculados por:

$$\boxed{h_i = \frac{\prod_{k=1}^{n}(\lambda_i - \mu_k)}{\mathbf{w_i B}\prod_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}(\lambda_i - \lambda_k)}, \text{ para } i = 1,\ldots,n} \tag{14}$$

onde λ_i são os pólos da planta e μ_i são os pólos desejados para a malha fechada.

Observações:

1) Pela eq. (6) nota-se que se o sistema não for controlável a inversa da matriz de controlabilidade ($\mathbf{M_c}$) não existe, assim, não é possível calcular os ganhos do controlador;

2) Pela eq. (14) nota-se que se o modo *i* do sistema é não controlável então $\mathbf{w_i B} = 0$, ou se for fracamente controlável então $\mathbf{w_i B} \cong 0$. Assim, nesses casos o ganho h_i será infinito ou muito grande;

3) Pela eq. (14) nota-se que a diferença entre os pólos da malha aberta e da malha fechada fornece uma indicação dos valores dos ganhos, ou seja:

- Se os pólos desejados estão perto dos pólos da planta $\Rightarrow$ os ganhos do controlador são pequenos;
- Se os pólos desejados estão longe dos pólos da planta $\Rightarrow$ os ganhos do controlador são grandes.

4. Exemplos

Exemplo 1: Método algébrico.

Dado o sistema SISO:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) .$$

- Primeiro deve-se verificar a controlabilidade do sistema, assim:

$$\mathbf{M_c} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rank}(\mathbf{M_c}) = 2 \Rightarrow \text{sistema é controlável.}$$

- Pólos do sistema:

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \det \begin{bmatrix} s-1 & -1 \\ -1 & s-2 \end{bmatrix} = (s-1)(s-2) + 1 = s^2 - 3s + 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 2{,}62; \\ \lambda_2 = 0{,}38. \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Observa-se que o sistema é instável.

- Controlador por realimentação dos estados:

$$u(t) = -\begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = -k_1 x_1(t) - k_2 x_2(t) = -\mathbf{Kx}(t)$$

- Matriz da malha fechada:

$$\mathbf{A_{mf}} = \mathbf{A} - \mathbf{BK} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-k_1 & 1-k_2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

- Equação característica da malha fechada:

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A_{mf}}) = \det \begin{bmatrix} s-1+k_1 & -1+k_2 \\ -1 & s-2 \end{bmatrix} = (s-1+k_1)(s-2) - 1 + k_2 = 0$$

assim,

$$s^2 + (k_1 - 3)s + (1 - 2k_1 + k_2) = 0$$

Nota-se que pela escolha dos ganhos do controlador, k_1 e k_2, pode-se alocar os dois pólos da malha fechada em qualquer posição no plano s.

- Escolhendo os pólos da malha fechada em $\lambda_1 = -5$ e $\lambda_2 = -6$, a equação característica desejada para a malha fechada é dada por:

  $$(s+5)(s+6) = s^2 + 11s + 30 = 0.$$

  Comparando a equação característica desejada com a equação característica em função dos ganhos do controlador, tem-se:

  $$\begin{cases} k_1 - 3 = 11 \\ 1 - 2k_1 + k_2 = 30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1 = 14 \\ k_2 = 57 \end{cases}.$$

- A matriz da malha fechada fica $\Rightarrow$ $\mathbf{A_{mf}} = \begin{bmatrix} 1-k_1 & 1-k_2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13 & -56 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

<u>Exemplo 2:</u> Fórmula de Ackerman.

- Dado o mesmo sistema do exemplo anterior.
- Usando os mesmos pólos desejados para a malha fechada do exemplo anterior, tem-se:

$$p(s) = s^2 + 11s + 30 \Rightarrow \mathbf{P}(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^2 + 11\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + 30\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 11 & 11 \\ 11 & 22 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 30 & 0 \\ 0 & 30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 43 & 14 \\ 14 & 57 \end{bmatrix}$$

- Aplicando a Fórmula de Ackerman (eq. 6), tem-se:

$$\mathbf{K} = \mathbf{e}\mathbf{M_c^{-1}}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 43 & 14 \\ 14 & 57 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 43 & 14 \\ 14 & 57 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 29 & -43 \\ 14 & 57 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 57 \end{bmatrix}$$

- Observa-se que obviamente obtém-se o mesmo resultado anterior.

<u>Exemplo 3:</u> Método modal.

- Dado o mesmo sistema dos exemplos anteriores.

- Para usar o método modal tem-se que calcular os autovetores da esquerda da matriz sistema, assim:

$$\text{Para } \lambda_1 = 2{,}62 \Rightarrow \mathbf{w_1}(\lambda_1\mathbf{I}-\mathbf{A}) = \mathbf{0} \Rightarrow [w_{11} \quad w_{12}]\begin{bmatrix} 2{,}62-1 & -1 \\ -1 & 2{,}62-2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} 1{,}62w_{11} - w_{12} = 0 \\ -w_{11} + 0{,}62w_{12} = 0 \end{cases} \Rightarrow w_{12} = 1{,}62w_{11} \Rightarrow \mathbf{w_1} = [1 \quad 1{,}62]$$

$$\text{Para } \lambda_2 = 0{,}38 \Rightarrow \mathbf{w}_2(\lambda_2\mathbf{I}-\mathbf{A}) = \mathbf{0} \Rightarrow [w_{21} \quad w_{22}]\begin{bmatrix} 0{,}38-1 & -1 \\ -1 & 0{,}38-2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} -0{,}62w_{21} - w_{22} = 0 \\ -w_{21} - 1{,}62w_{22} = 0 \end{cases} \Rightarrow w_{22} = -0{,}62w_{21} \Rightarrow \mathbf{w_2} = [1 \quad -0{,}62]$$

- Para os pólos desejados da malha fechada localizados em $\lambda_1 = -5$ e $\lambda_2 = -6$ os elementos do vetor **h** calculados pela eq. (14) são dados por:

$$h_1 = \frac{(2{,}62+5)(2{,}62+6)}{[1 \quad 1{,}62]\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}(2{,}62-0{,}38)} = \frac{7{,}62x8{,}62}{2{,}24} = 29{,}32\,;$$

$$h_2 = \frac{(0{,}38+5)(0{,}38+6)}{[1 \quad -0{,}62]\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}(0{,}38-2{,}62)} = \frac{5{,}38x6{,}38}{-2{,}24} = -15{,}32\,.$$

- Os ganhos do controlador são dados pela eq. (11), assim:

$$\mathbf{K} = \mathbf{hW} = [29{,}32 \quad -15{,}32]\begin{bmatrix} 1 & 1{,}62 \\ 1 & -0{,}62 \end{bmatrix} = [14 \quad 57].$$

- Observa-se que obviamente obtém-se o mesmo resultado anterior.

5. Alocação de pólos em sistemas MIMO

- O controle por realimentação de estados é dado por:

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{Kx}(t)\,, \tag{15}$$

onde **K** é a matriz de ganhos do controlador com dimensão mxn, dada por:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{m1} & k_{m2} & \cdots & k_{mn} \end{bmatrix}. \tag{16}$$

Observações:

1) O sistema em malha fechada possui n pólos (o mesmo número de pólos da planta) $\Rightarrow$ portanto o polinômio característico da malha fechada tem n coeficientes que se transformam em n equações usadas para calcular os ganhos do controlador.

2) A matriz **K** possui mxn elementos $\Rightarrow$ portanto existem mais parâmetros desconhecidos do que equações para determiná-los.

3) Para localizar arbitrariamente todos os pólos da malha fechada são necessários somente n elementos da matriz de ganhos do controlador.

4) O número de elementos da matriz de ganho é nxm, que é maior do que o número de equações disponíveis (n) $\Rightarrow$ portanto o número de soluções para os ganhos do controlador é infinito se for desejado somente localizar os pólos da malha fechada.

5) Em um sistema MIMO existem muitos mais graus de liberdade do que o necessário para simplesmente localizar os pólos da malha fechada em posições desejadas.

O que fazer com os graus de liberdade a mais?

1) Podem-se atribuir valores arbitrários para alguns dos elementos de **K** até ter somente n ganhos desconhecidos, como por exemplo:
   - Pode-se atribuir uma ou mais colunas da matriz **K** iguais a zero $\Rightarrow$ assim os estados equivalentes àquelas colunas não são necessários para o controle;
   - Pode-se atribuir uma ou mais linhas da matriz **K** iguais a zero $\Rightarrow$ as entradas correspondentes àquelas linhas não são necessárias para o controle;
   - Deve-se analisar se essas opções trazem benefícios.

2) Podem-se definir especificações adicionais para a malha fechada, tais como:
   - Definir a estrutura modal da malha fechada, ou seja, podem-se especificar os autovetores da matriz da malha fechada além dos autovalores $\Rightarrow$ assim tem-se um maior controle sobre a resposta temporal do sistema;
   - Otimizar algum aspecto de desempenho da malha fechada $\Rightarrow$ por exemplo, minimizar esforço de controle, minimizar gasto de energia, maximizar rejeição às perturbações, minimizar sensibilidade a erros de modelagem etc.

➢ **Existem muitos métodos para calcular os ganhos do controlador por realimentação dos estados em sistemas MIMO:**

1) **Comando *place* do MATLAB**:

- Apresentado por: Kautsky, J. and N.K. Nichols, "Robust Pole Assignment in Linear State Feedback", *Int. J. Control,* 41 (1985), pp. 1129-1155;
- Além de localizar os pólos da malha fechada otimiza os autovetores do sistema de forma a minimizar a sensibilidade do sistema em malha fechada a alterações nos parâmetros da planta;
- Também serve para sistemas SISO ⇒ melhor do que a Fórmula de Ackerman e do que o método modal.

2) **Determinação da estrutura modal da malha fechada**:

- Apresentado por: D'Azzo, J.J. and C. P. Houpis, "Linear Control System Analysis and Design", 4ª ed., McGraw-Hill, 1995;
- Procedimento complexo;
- Em geral o número de entradas do sistema (m) é menor do que o número de estados (n) ⇒ como existem mxn graus de liberdade e não nxn existem algumas restrições nos autovetores da malha fechada que devem ser especificadas;
- Um *toolbox* para o MATLAb foi desenvolvido na Universidade de Hull para implementar esse procedimento (http://www.mathworks.com/products/connections/product_main.shtml?prod_id=183);
- A possibilidade de determinar os autovetores da malha fechada é muito útil, principalmente nos casos onde um modo do sistema é não controlável, mas estável (detectável) ⇒ embora o autovalor do modo não controlável não possa ser alterado, o autovetor associado a esse modo pode ser alterado para minimizar a influência desse modo na resposta temporal das saídas do sistema.

3) **Controle ótimo**:

- No controle ótimo procura-se otimizar alguns aspectos do desempenho da malha fechada;
- Literatura sobre o assunto é muito vasta;
- Tem-se que especificar uma função de custo em uma forma adequada para otimização ⇒ usa-se em geral a seguinte função de custo quadrática:

$$J = \frac{1}{2}\int_0^{\infty}\left[\mathbf{x}^t(t)\mathbf{Q}\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^t(t)\mathbf{R}\mathbf{u}(t)\right]dt \,, \qquad (17)$$

  onde $\mathbf{Q}$ e $\mathbf{R}$ são matrizes positivas e definidas (possuem autovalores maiores do que zero);
- $\mathbf{Q}$ determina o custo relativo definido para os desvios de cada um dos estados do seu valor de equilíbrio;
- $\mathbf{R}$ determina o custo relativo para o nível de cada entrada.

6. Exemplos

Exemplo 1: Método algébrico.

Dado o sistema MIMO:

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}\mathbf{x}(t)+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\mathbf{u}(t)\,.$$

- Primeiro deve-se verificar a controlabilidade do sistema, assim:

$$\mathbf{M_c}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 2\end{bmatrix}\Rightarrow \text{rank}(\mathbf{M_c})=2\Rightarrow \text{o sistema é controlável.}$$

- Os pólos do sistema são os mesmos de exemplo 1, pois a matriz **A** é a mesma.
- Controlador por realimentação dos estados:

$$\begin{bmatrix}u_1(t)\\ u_2(t)\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}k_{11} & k_{12}\\ k_{21} & k_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-k_{11}x_1(t)-k_{12}x_2(t)\\ -k_{21}x_1(t)-k_{22}x_2(t)\end{bmatrix}=-\mathbf{Kx}(t)$$

- Matriz da malha fechada:

$$\mathbf{A_{mf}}=\mathbf{A}-\mathbf{BK}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k_{11} & k_{12}\\ k_{21} & k_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}k_{11} & k_{12}\\ k_{21} & k_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1-k_{11} & 1-k_{12}\\ 1-k_{21} & 2-k_{22}\end{bmatrix}.$$

- Equação característica da malha fechada:

$$\det\left(s\mathbf{I}-\mathbf{A_{mf}}\right)=\det\begin{bmatrix}s-1+k_{11} & -1+k_{12}\\ -1+k_{21} & s-2+k_{22}\end{bmatrix}=0$$

$$(s-1+k_{11})(s-2+k_{22})-(-1+k_{12})(-1+k_{21})=0$$

$$s^2+s(-3+k_{11}+k_{22})+(1-2k_{11}-k_{22}+k_{12}+k_{21}+k_{11}k_{22}-k_{12}k_{21})=0$$

- Escolhendo os pólos da malha fechada em $\lambda_1=-5$ e $\lambda_2=-6$, a equação característica desejada para a malha fechada é dada por:

$$(s+5)(s+6)=s^2+11s+30=0\,.$$

- Comparando a equação característica desejada com a equação característica em função dos ganhos do controlador, tem-se:

$$\begin{cases} -3+k_{11}+k_{22}=11 \\ 1-2k_{11}-k_{22}+k_{12}+k_{21}+k_{11}k_{22}-k_{12}k_{21}=30 \end{cases}.$$

Nota-se que existem 2 equações e 4 incógnitas (os quatro ganhos do controlador) $\Rightarrow$ nesse caso tem-se mais variáveis do que o necessário, assim, deve-se escolher dois ganhos e calcular os outros dois.

- Fazendo a segunda linha da matriz **K** igual a zero ($k_{21} = k_{22} = 0$), tem-se:

$$\begin{cases} -3+k_{11}=11 \\ 1-2k_{11}+k_{12}=30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_{11}=14 \\ k_{12}=57 \end{cases}.$$

A lei de controle fica:

$$\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 14 & 57 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} u_1(t) = -14x_1(t) - 57x_2(t) \\ u_2(t) = 0 \end{cases}$$

Nota-se que o controle não precisa da 2ª entrada da planta para realizar a ação de controle desejada.

- A matriz da malha fechada fica $\Rightarrow$ $\mathbf{A_{mf}} = \begin{bmatrix} 1-k_{11} & 1-k_{12} \\ 1-k_{21} & 2-k_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13 & -56 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Exemplo 2: Definição da estrutura modal da malha fechada.

- Dado o mesmo sistema do exemplo anterior.

- Do exemplo anterior a malha fechada com o controle por realimentação do estados é dada por:

$$\mathbf{A_{mf}} = \mathbf{A} - \mathbf{BK} = \begin{bmatrix} 1-k_{11} & 1-k_{12} \\ 1-k_{21} & 2-k_{22} \end{bmatrix}.$$

- Nesse caso como o número de entradas é igual ao número de estados $\Rightarrow$ têm-se graus de liberdade suficientes para definir completamente e de qualquer forma desejada a matriz da malha fechada. Portanto:
  - Escolhendo $k_{12} = k_{21} = 1$ $\Rightarrow$ desacoplam-se os dois estados do sistema;
  - Escolhendo $k_{11} = 6$ e $k_{22} = 7$ $\Rightarrow$ localizam-se os pólos da malha fechada em –5 e –6;
  - Com isso a matriz de ganhos do controlador é $\Rightarrow$ $\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$.

- A matriz da malha fechada fica sendo:

$$\mathbf{A_{mf}} = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}.$$

$\Rightarrow$ Observa-se que na malha fechada os dois estados do sistema estão completamente desacoplados.

7. Localização dos pólos da malha fechada

- Ao projetar um controlador usando a técnica de localização dos pólos da malha fechada surge uma questão clássica:

  Onde localizar (escolher) os pólos da malha fechada?

- Uma solução é escolher os pólos de forma a se ter um sistema em malha fechada que se aproxime de uma dinâmica de referência que tenha o desempenho desejado.

- Os sistemas de referência mais utilizados são os seguintes:
  - Sistemas polinomiais padrão Bessel;
  - Sistemas padrão Butterworth;
  - Sistemas padrão ITAE.

- **Problemas com a técnica de localização de pólos:**
  - O esforço de controle é ignorado $\Rightarrow$ podem-se ter problemas de saturação;
  - O desempenho do sistema não é garantido $\Rightarrow$ a presença de zeros altera a resposta temporal esperada pela localização dos pólos (os zeros são difíceis de se levar em consideração);
  - A robustez da malha fechada não é garantida. Robustez é a sensibilidade da resposta do sistema a erros de modelagem e a alterações nos parâmetros da planta.

Sistemas padrão Bessel

- A Fig. 1 apresenta a resposta temporal à uma entrada na forma de degrau unitário de sistemas tipo Bessel de várias ordens e com tempo de assentamento igual a 1 segundo.

- Os sistemas padrão tipo Bessel apresentam resposta temporal um pouco lenta, mas sem praticamente nenhum sobre-sinal.

- A Tabela 1 apresenta os pólos dos sistemas tipo Bessel de ordem 1 a 8, com tempo de assentamento de 1 segundo.

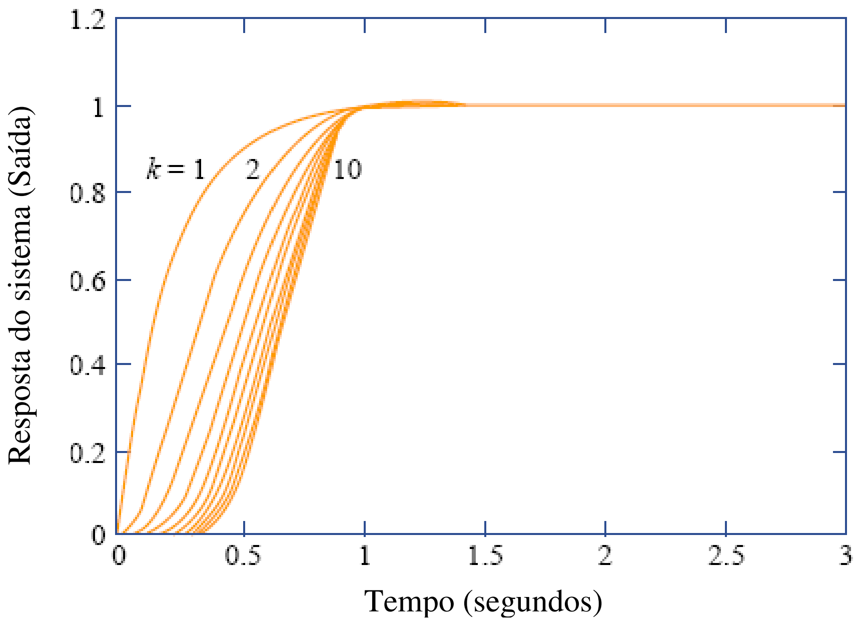

Figura 1. Resposta a degrau unitário para sistemas padrão Bessel de várias ordens e tempo de assentamento igual a 1 segundo.

Tabela 1. Pólos de sistemas padrão Bessel com tempo de assentamento de 1 segundo.

Ordem	Localização dos pólos no plano s
1	$-4{,}6200$
2	$-4{,}0530 \pm 2{,}34j$
3	$-5{,}0093$, $-3{,}9668 \pm 3{,}7845j$
4	$-4{,}0156 \pm 5{,}0723j$, $-5{,}5262 \pm 1{,}6553j$
5	$-6{,}4480$, $-4{,}1104 \pm 6{,}3142j$, $-5{,}9268 \pm 3{,}0813j$
6	$-4{,}2169 \pm 7{,}5300j$, $-6{,}2613 \pm 4{,}4018j$, $-7{,}1205 \pm 1{,}4540j$
7	$-8{,}0271$, $-4{,}3361 \pm 8{,}7519j$, $-6{,}5714 \pm 5{,}6786j$, $-7{,}6824 \pm 2{,}8081j$
8	$-4{,}4554 \pm 9{,}9715j$, $-6{,}8554 \pm 6{,}9278j$, $-8{,}1682 \pm 4{,}1057j$, $-8{,}7693 \pm 1{,}3616j$

➢ **Procedimento de cálculo do controlador:**

1) Dado o tempo de assentamento desejado para a malha fechada (t_a) e dada a ordem da planta;
2) Dividir os pólos dados na tabela correspondente a ordem da planta pelo t_a especificado;
3) Calcular os ganhos do controlador usando um dos possíveis métodos;
4) Simular o sistema em malha fechada para verificar o desempenho;
5) Note que os sistemas padrão Bessel não possuem zeros finitos $\Rightarrow$ portanto a resposta da malha fechada do sistema em questão pode ser diferente do apresentado na Fig. 1 se o sistema tiver zeros finitos.

➢ **Exemplo:**

- Dada uma planta de 3ª ordem e tempo de assentamento desejado para a malha fechada igual a 3 segundos.
- Da Tabela 1 tem-se os pólos da malha fechada ⇒

$$\begin{cases} p_1 = \dfrac{-5{,}0093}{3} = -1{,}6698; \\ p_{2,3} = \dfrac{-3{,}9668 \pm 3{,}7845j}{3} = -1{,}3223 \pm 1{,}2615j. \end{cases}$$

- Usando algum método de projetar o controlador por realimentação de estados calcula-se a matriz de ganhos **K**.

Sistemas padrão ITAE

➢ Os pólos de um sistema ITAE são escolhidos de forma a minimizar a integral do erro multiplicado pelo tempo em uma resposta a degrau, ou seja:

$$J_{ITAE} = \int_0^{\infty} |e(t)| t dt \,. \qquad (18)$$

➢ A Fig. 2 apresenta a resposta temporal a uma entrada na forma de degrau unitário de sistemas padrão ITAE de várias ordens e com freqüência de corte igual a 1 rad/s (tempo de assentamento igual a $4\sqrt{2} \cong 5{,}6569$ segundos).

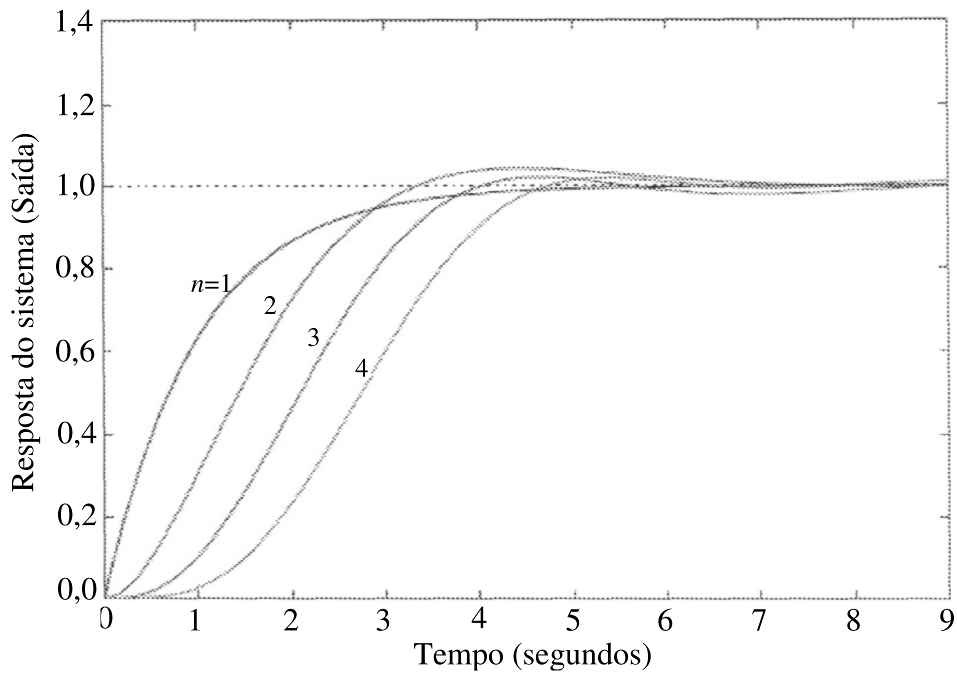

Figura 2. Resposta a degrau unitário para sistemas padrão ITAE de várias ordens e freqüência de corte de 1 rad/s.

➢ A Tabela 2 abaixo apresenta os pólos dos sistemas tipo ITAE de ordem 1 a 4 e com freqüência de corte de 1 rad/s (tempo de assentamento de 5,6569 segundos).

Tabela 2. Pólos de sistemas padrão ITAE com freqüência de corte igual 1 rad/s (tempo de assentamento de 5,6569 segundos).

Ordem	**Localização dos pólos no plano s**
1	-1
2	$-0{,}7071 \pm 0{,}7071j$
3	$-0{,}7071$, $-0{,}5210 \pm 1{,}0680j$
4	$-0{,}4240 \pm 1{,}2630j$, $-0{,}6260 \pm 0{,}4141j$

➢ **Exemplo:**

- Dada uma planta de 3ª ordem e tempo de assentamento desejado para a malha fechada igual a 3 segundos.
- Da Tabela 2 tem-se os pólos da malha fechada ⇒

$$\begin{cases} p_1 = \dfrac{-0{,}7071x5{,}6560}{3} = -1{,}3333; \\ p_{2,3} = \dfrac{(-0{,}5210 \pm 1{,}0680\,j)x5{,}6569}{3} = -0{,}9824 \pm 2{,}0139\,j \end{cases}$$

➢ Comparação entre sistemas padrão Bessel e ITAE:

- Os sistemas padrão ITAE não são muito amortecidos ⇒ apresentam sobre-sinal;
- Os sistemas Bessel são sobre-amortecidos não apresentam sobre-sinal;
- O tempo de subida dos sistemas ITAE é mais rápido do os dos sistemas Bessel.

8. <u>Exercícios</u>

1) Dado sistema na forma de espaço dos estados abaixo:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t); \\ \mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t). \end{cases}$$

Pede-se sem usar o Matlab exceto onde especificado:

a) Calcule os autovalores e autovetores do sistema (use o Matlab).

b) Calcule os zeros do sistema (use o Matlab).

c) Verifique a controlabilidade e observabilidade do sistema (use os testes clássicos).

d) Calcule a matriz de ganhos do regulador para se ter um sistema com comportamento tipo Bessel com tempo de assentamento de 0,5 segundo.

e) Calcule a matriz de ganhos do regulador para se ter um sistema com comportamento tipo ITAE com tempo de assentamento de 0,5 segundo.

f) Calcule a matriz de ganho do regulador de forma que a malha fechada apresente: dinâmica dos estados desacoplada e tempo e assentamento igual a 0,5 segundo.

g) Calcule as matrizes das malhas fechadas obtidas nos itens anteriores.

h) Simule as três malhas fechadas obtidas nos itens anteriores para uma condição inicial onde todos os estados são iguais a 1 e compare as suas respostas (use o Matlab).

2) Seja o avião F8 cuja dinâmica longitudinal é dada por:

Pede-se usando o Matlab:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1{,}5 & -1{,}5 & 0 & 0{,}0057 \\ -12 & 12 & -0{,}8 & -0{,}0344 \\ -0{,}8524 & 0{,}2904 & 0 & -0{,}0140 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0{,}16 & 0{,}6 \\ -19 & -2{,}5 \\ -0{,}0115 & -0{,}0087 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \end{cases}$$

a) Projete um regulador para o sistema usando as técnicas de localização de pólos. O objetivo é obter um tempo de assentamento menor do que 10 segundos. Localize os pólos de acordo com um sistema padrão Bessel.

b) Calcule as matrizes da malha fechadas do sistema.

c) Faça os controles do F8 iguais a zero e simule um transitório em malha aberta para a seguinte condição inicial diferentes de zero: $x_1(0) = 1°$, $x_2(0) = 1°$ e todos os outros estados iguais a zero.

d) Simule o regulador para a mesma condição do item (c). Compare a resposta do regulador com a resposta do sistema em malha aberta obtidas no item (c).

e) Verifique como ficaram os modos do sistema em malha fechada. Para isso você tem que calcular os autovalores, os autovetores e os zeros do sistema em malha fechada.