Núcleo Básico das Engenharias

M002-A
Álgebra e Geometria Analítica

Cap. 3 – Planos

Prof. Edson J. C. Gimenez
soned@inatel.br

2019/Sem1

Referências

- Material adaptado da Apostila Álgebra e Geometria Analítica (NB020).
  - Profª. Karina Peres Mokarzel Carneiro, Prof. Luiz Felipe S. de Godoy, Prof. Rodrigo Guaracy Santana e Prof. Giovani Henrique F. Floriano.

Outras referências importantes:

- Geometria Analítica – Alfredo Steinbruch e Paulo Winterle.
- Geometria Analítica: um tratamento vetorial. Ivan de Camargo e Paulo Boulos.
- Vetores e Geometria Analítica – Paulo Winterle.

Plano

<u>Definição:</u>

- Um plano é uma entidade geométrica formada por infinitas retas e infinitos pontos.
- Para traçar um plano, três pontos não alinhados são necessários.
- O plano tem duas dimensões, ou seja, tem altura e largura ou altura e comprimento ou largura e comprimento, por isso, é chamado de bidimensional.
- Um plano é representado por uma letra minúscula do alfabeto grego.

Equação Geral do Plano

Sendo A(x_1, y_1, z_1) um ponto $\in$ ao plano π e $\vec{n} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ um vetor não nulo, normal (ortogonal) ao plano.

Para que P(x, y, z) $\in$ ao plano π é necessário que: $\boxed{\vec{n} \cdot \overrightarrow{AP} = 0}$

Sendo: $\overrightarrow{AP} = P - A = (x - x_1)\vec{i} + (y - y_1)\vec{j} + (z - z_1)\vec{k}$

Vem:

$$\left((x - x_1)\vec{i} + (y - y_1)\vec{j} + (z - z_1)\vec{k}\right) \cdot \left(a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}\right) = 0$$

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$$

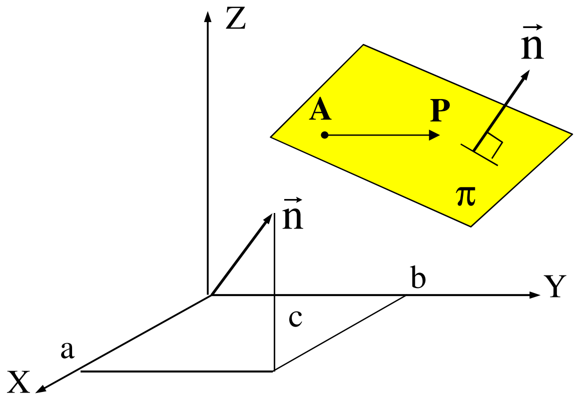
$$ax + by + cz - ax_1 - by_1 - cz_1 = 0$$

Fazendo: $-ax_1 - by_1 - cz_1 = d$

Resulta:

$$\boxed{\mathrm{ax + by + cz + d = 0}}$$

Equação cartesiana do plano



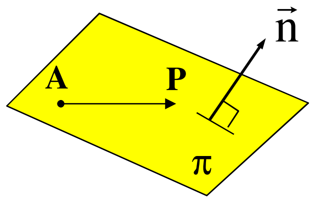
Equação Geral do Plano

Obs.:

1) Como $\vec{n} = (a, b, c)$ é um vetor normal a π, qualquer vetor $k \cdot \vec{n}$, $k \neq 0$, também é vetor normal a π.

2) Os coeficientes a, b e c da equação geral do plano representam os componentes de um vetor normal ao plano: $\vec{n} = (a, b, c)$.

3) Para obter os pontos de um plano dado por uma equação geral, basta atribuir valores arbitrários a duas das variáveis e calcular o valor da outra variável na equação geral.



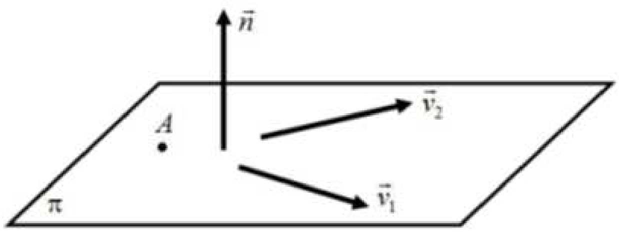
Exemplos 1/2/3

Equação Geral do Plano

Obtendo a equação geral do plano:

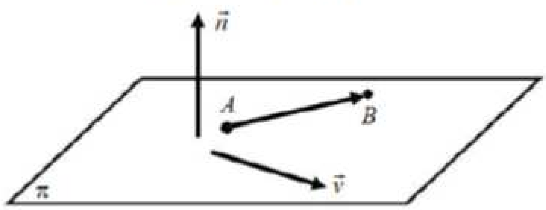
Plano paralelo a dois vetores e que passa por um ponto

$$\vec{n} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2$$



Plano paralelo a um vetor e que passa por dois pontos

$$\vec{n} = \vec{v} \times \overrightarrow{AB}$$

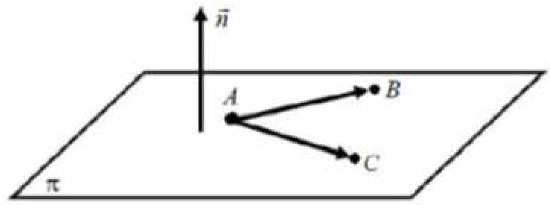


Equação Geral do Plano

Obtendo a equação geral do plano:

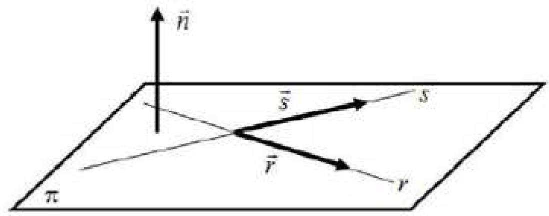
Plano que passa por três pontos

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$$



Plano que contém duas retas concorrentes

$$\vec{n} = \vec{r} \times \vec{s}$$

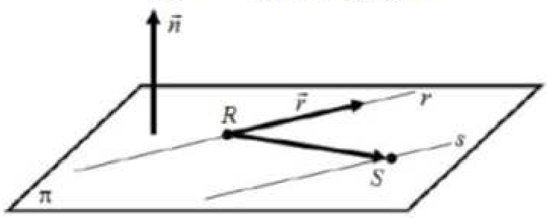


Equação Geral do Plano

Obtendo a equação geral do plano:

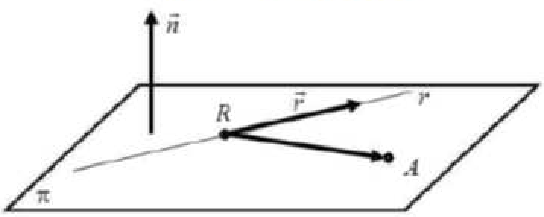
Plano que contém duas retas paralelas

$$\vec{n} = \vec{s} \times \overrightarrow{RS}$$



Plano que contém uma reta e que passa por um ponto não pertencente à reta.

$$\vec{n} = \vec{r} \times \overrightarrow{RA}$$

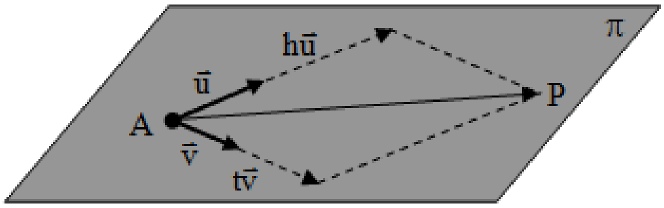


Equação Vetorial do Plano

Sejam A(x_0, y_0, z_0) um ponto $\in$ ao plano π e os vetores $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$ e $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$ não colineares, paralelos a π.

Um ponto P(x, y, z) $\in$ ao plano π se:

$$\boxed{\overrightarrow{AP} = h\vec{u} + t\vec{v}}$$



Substituindo:

$$P - A = h\vec{u} + t\vec{v}$$

$$\boxed{P = A + h\vec{u} + t\vec{v}}$$

que, em coordenadas fica:

$$\boxed{(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + h(a_1, b_1, c_1) + t(a_2, b_2, c_2)}$$

Equação vetorial do plano

Equação Paramétrica do Plano

Da equação vetorial do plano

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + h(a_1, b_1, c_1) + t(a_2, b_2, c_2)$$

Obtém-se:

$$(x, y, z) = (x_0 + a_1 h + a_2 t, y_0 + b_1 h + b_2 t, z_0 + c_1 h + c_2 t)$$

Pela condição de igualdade, vem:

$$\boxed{\begin{cases} x = x_0 + a_1 h + a_2 t \\ y = y_0 + b_1 h + b_2 t \qquad h, t \in R \\ z = z_0 + c_1 h + c_2 t) \end{cases}}$$

Equações paramétricas do plano

Obs.: h e t são denominados parâmetros (variáveis auxiliares).

Equação Segmentária do Plano

Seja o plano π de equação $ax + by + cz + d = 0$.

1) Se $y = z = 0$ e $x = m$: $$am + d = 0 \rightarrow m = -\frac{d}{a}$$

O ponto $A_1(m,0,0)$ é a interseção do plano π com o eixo x.

2) Se $x = z = 0$ e $y = n$: $$bn + d = 0 \rightarrow n = -\frac{d}{b}$$

O ponto $A_2(0,n,0)$ é a interseção do plano π com o eixo y.

3) Se $x = y = 0$ e $z = p$: $$cp + d = 0 \rightarrow p = -\frac{d}{c}$$

O ponto $A_3(0,0,p)$ é a interseção do plano π com o eixo z.

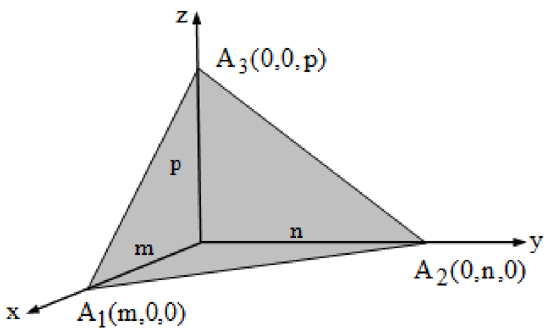
Equação Segmentária do Plano

Da equação cartesiana $ax + by + cz + d = 0$, vem:

$$ax + by + cz = -d$$

$$\frac{ax}{-d} + \frac{by}{-d} + \frac{cz}{-d} = 1$$

$$\frac{x}{-d/a} + \frac{y}{-d/b} + \frac{z}{-d/c} = 1$$



$$\boxed{\frac{x}{m} + \frac{y}{n} + \frac{z}{p} = 1}$$

Equação segmentária do plano

Exemplos 4/5/6

Sejam os planos: π_1: $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ e π_2: $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$, e sejam $\vec{n_1} = (a_1, b_1, c_1)$ e $\vec{n_2} = (a_2, b_2, c_2)$ os vetores normais a π_1 e π_2, então:

1) **Ângulo entre planos**: o menor ângulo que um vetor normal de π_1 forma com um vetor normal de π_2 é dado por:

$$\cos(\theta) = \frac{|\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}|}{|\vec{n_1}| \cdot |\vec{n_2}|}, \quad 0 \leq \theta \leq 90^{\circ}$$

2) **Condição de paralelismo entre planos**: se dois planos são paralelos, seus vetores normais também são; assim:

$$\pi_1 // \pi_2 \rightarrow \vec{n_1} // \vec{n_2} \therefore \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

3) **Condição de perpendicularismo entre planos**: se dois planos são perpendiculares, seus vetores normais também são; assim:

$$\pi_1 \perp \pi_2 \rightarrow \vec{n_1} \perp \vec{n_2} \therefore \vec{n_1} \cdot \vec{n_2} = 0 \rightarrow a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$$

Exercícios