Inatel – Instituto Nacional de Telecomunicações

Sistemas de Coordenadas

M002-E – Álgebra Linear e Geometria Analítica

Prof. Edson J. C. Gimenez

2019/Sem1

Referências

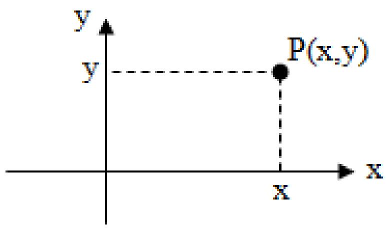
1. MUNEM, Mustafá A. **Cálculo - Vol. 1.** Coautor David J. Foulis. Rio de Janeiro, RJ: Editora Guanabara Dois, 1986.
2. LARSON, Ron; HOSTETLER, Robert P.; EDWARDS, Bruce H. **Cálculo - Vol. 2.** 8. ed. São Paulo, SP: Editora McGraw-Hill, 2006.
3. ANTON, Howard. **Cálculo - Vol.2:** um novo horizonte. 6. ed. São Paulo, SP: Editora Bookman, 2000. v. 2
4. SWOKOWSKI, Earl William. **Cálculo com geometria analítica - Vol.2.** 2. ed. São Paulo, SP: Makron Books, 1994. v. 2
5. SIMMONS, George F. **Cálculo com geometria analítica - Vol.2.** São Paulo, SP: McGraw-Hill, 1988.
6. SPIEGEL, Murray Ralph. **Cálculo avançado.** São Paulo, SP: McGraw-Hill, 1975

Sistema de Coordenadas Retangulares

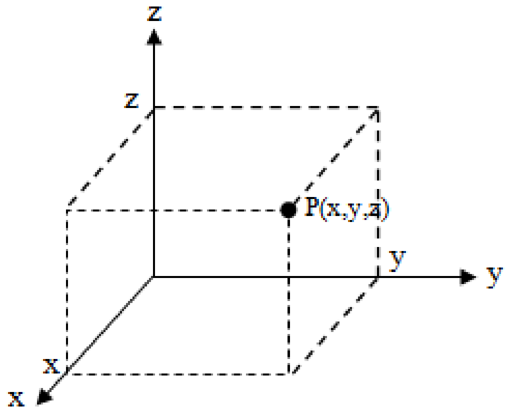
a) No espaço bidimensional

b) No espaço tridimensional

(a)



(b)



x = abscisa

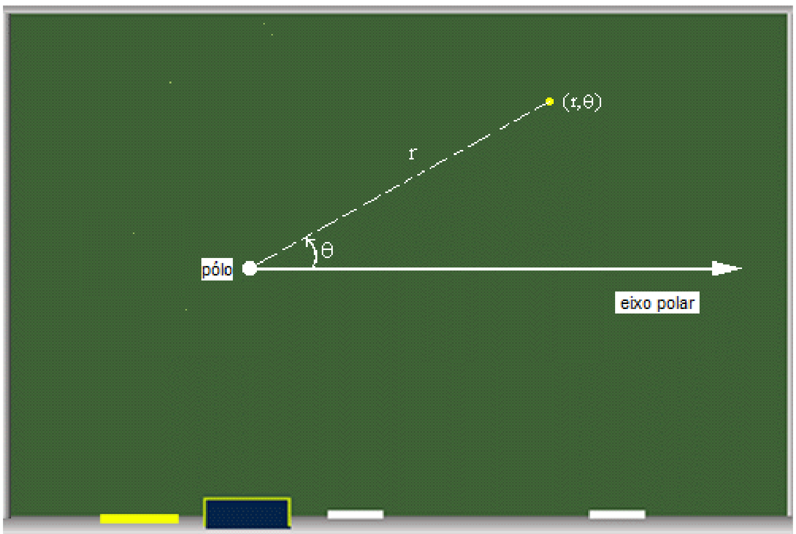
y = ordenada

z = cota

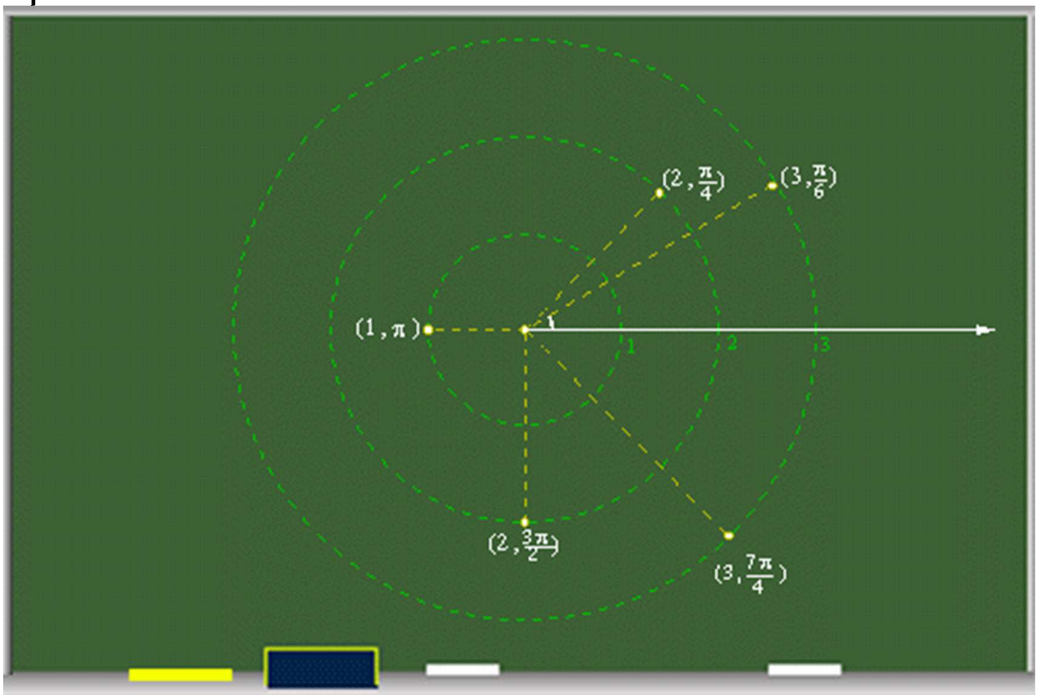
Sistema de Coordenadas Polares

Para construir um sistema de coordenadas polares (no plano), fixamos um ponto O, chamado de **pólo** (ou **origem**), e traçamos, a partir de O, um raio inicial, orientado, chamado de ***eixo polar***. Com isto, podemos associar a cada ponto do plano suas ***coordenadas polares***, designadas por **(*r*, θ)**, onde: ***r*** = é a distância *de* ***O*** *a* ***P*** *e* ***θ*** = é o ângulo, no sentido anti-horário, do eixo polar ao segmento OP.

* *θ* negativo qdo no sentido horário.



A figura mostra vários pontos no sistema de coordenadas polares. Observemos que, neste sistema, é conveniente localizar os pontos em relação a um conjunto de circunferências concêntricas e linhas radiais que passam pelo pólo.

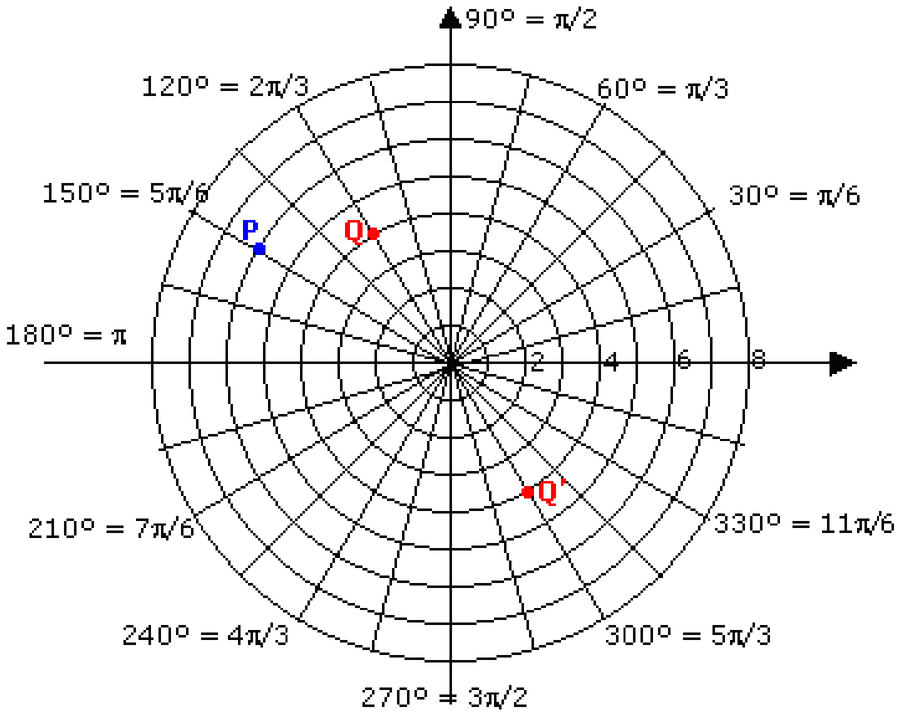


Exemplos: coordenadas polares

P(6,150º)

Q(4,120º)

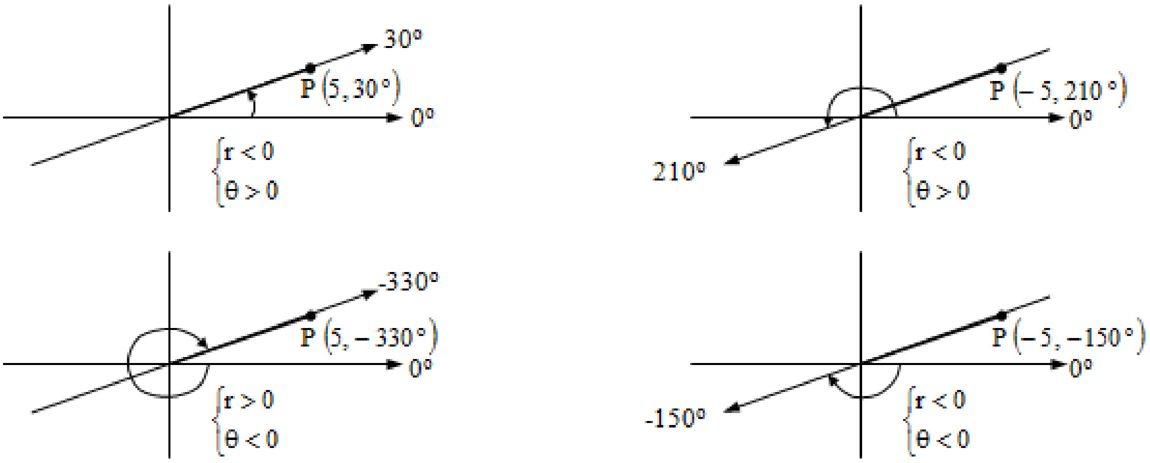
Q'(4,300º)



Em coordenadas retangulares, cada ponto (x, y) tem uma representação única. Isto não ocorre em coordenadas polares. Exemplos:

- as coordenadas (r, θ) e (r, $\theta + 2\pi$), representam um mesmo ponto.
- as coordenadas ($-r$, θ) e (r, $\theta + \pi$), representam um mesmo ponto.

Exemplo 2: Um dado ponto tem um número ilimitado de conjuntos de coordenadas polares. Basta lembrarmos da trigonometria e veremos que o ponto $P(5, 30^\circ)$ é o mesmo que o ponto $P(5, 390^\circ)$, $P(5, -330^\circ)$, $P(-5, 210^\circ)$ ou $P(-5, -150^\circ)$.



Coordenadas Polares

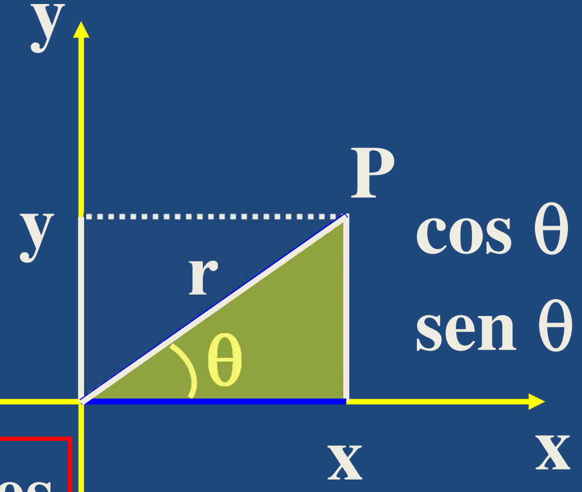
$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$\theta = \text{arctg } y/x^*$$

retang. ⇒ polares

polares ⇒ retang.

$$x = r \cos \theta$$
$$y = r \text{ sen } \theta$$

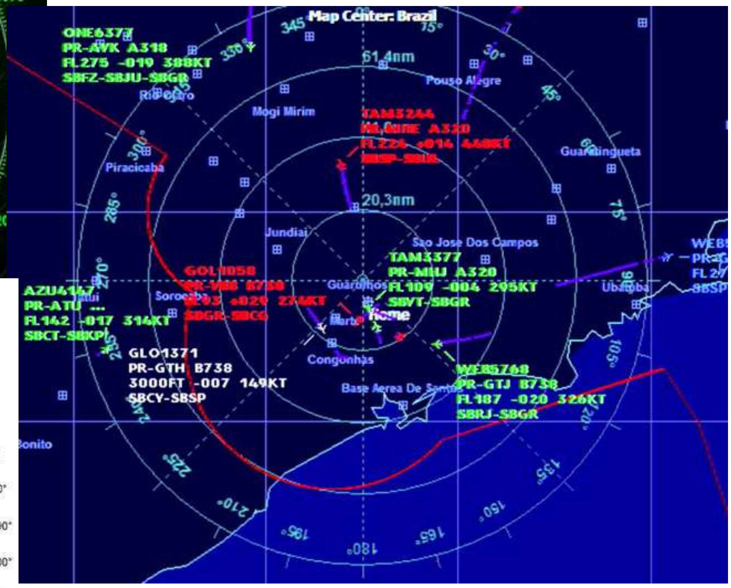


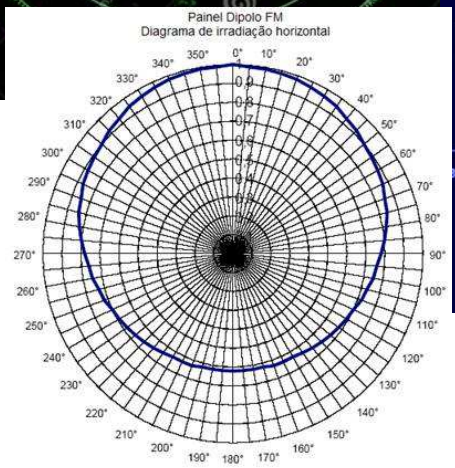
$$\cos \theta = x/r$$

$$\text{sen } \theta = y/r$$

*Obs.: cuidado com o quadrante que se encontra o ponto. Se no 2º ou 3º → +180º

Exemplos de aplicações: Sistema de Coordenadas Polares





(Apostila)

$$\text{Polar} \rightarrow \text{retangular:} \quad x = r \cdot \cos\theta \quad ; \quad y = r \cdot \operatorname{sen}\theta$$

$$\text{Retangular} \rightarrow \text{polar:} \quad r = \pm\sqrt{x^2 + y^2} \quad ; \quad \operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x}$$

Exemplo 4: Dado o ponto cujas coordenadas polares são $P(-6, 315^\circ)$. Encontre suas coordenadas cartesianas retangulares.

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\operatorname{sen}\theta$$

$$x = -6\cos 315^\circ \qquad y = -6\operatorname{sen} 315^\circ$$

$$x = -6\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad y = -6\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$x = -3\sqrt{2} \qquad y = 3\sqrt{2}$$

$$P\left(-3\sqrt{2}, 3\sqrt{2}\right)$$

(Apostila)

Polar $\rightarrow$ retangular: $x = r \cdot \cos\theta$; $y = r \cdot \text{sen}\ \theta$

Retangular $\rightarrow$ polar: $r = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$; $\text{tg}\ \theta = \dfrac{y}{x}$

Exemplo 5: Dado que a equação polar de um gráfico é $r^2 = 4\ sen\ 2\theta$ ache a equação cartesiana.

Solução: Como $sen\ 2\theta = 2\ sen\theta \cos\theta$ substituindo as equações dadas para transformações, $sen\ 2\theta = 2\left(\dfrac{y}{r}\right)\left(\dfrac{x}{r}\right)$. Substituindo ainda, $r^2 = x^2 + y^2$ obtemos:

$$x^2 + y^2 = 4 \cdot 2\left(\frac{y}{r}\right)\left(\frac{x}{r}\right) \qquad \Rightarrow \qquad x^2 + y^2 = \frac{8xy}{r^2}$$

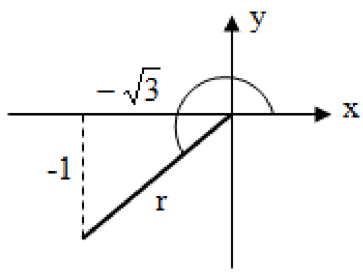
$$x^2 + y^2 = \frac{8xy}{x^2 + y^2} \qquad \Rightarrow \qquad (x^2 + y^2)^2 = 8xy$$

(Apostila)

Polar $\rightarrow$ retangular: $x = r \cdot \cos\theta$; $y = r \cdot \text{sen}\ \theta$

Retangular $\rightarrow$ polar: $r = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$; $\text{tg}\ \theta = \dfrac{y}{x}$

Exemplo 6: Ache (r, θ) se $r > 0$ e $0° < \theta < 360°$ para o ponto cuja representação cartesiana é $\left(-\sqrt{3}, -1\right)$.



Solução: Verificamos no gráfico o ponto $\left(-\sqrt{3}, -1\right)$

Como $r > 0$, temos $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3+1} = 2$

Como $tg\ \theta = \dfrac{y}{x} = \dfrac{-1}{-\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \rightarrow \theta = arctg\dfrac{1}{\sqrt{3}} = 30^0 + 180^0 \rightarrow \theta = 210$

Portanto, o ponto $(r, \theta) = (2, 210^0)$.

(Apostila)

Polar $\to$ retangular: $x = r \cdot \cos\theta$; $y = r \cdot \text{sen}\ \theta$

Retangular $\to$ polar: $r = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$; $\text{tg}\ \theta = \dfrac{y}{x}$

Exemplo 7: Ache a equação polar do gráfico cuja equação cartesiana é $x^2 + y^2 - 4x = 0$

Solução: substituindo $x = r \cdot \cos\theta$ *e* $y = r \cdot sen\theta$ na equação dada temos:

$$r^2 \cdot \cos^2\theta + r^2 \cdot \text{sen}^2\theta - 4r \cdot \cos\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad r^2(\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta) - 4r \cdot \cos\theta = 0$$

logo $r^2 - 4r\cos\theta = 0$ $\therefore$ $r(r - 4\cos\theta) = 0$, assim : $r = 0$ ou $r - 4\cos\theta = 0$

O gráfico de $r = 0$ é a origem, contudo, ele é um ponto do gráfico de $r - 4\cos\theta = 0$, pois, $r = 0$ quando $\theta = 90°$.

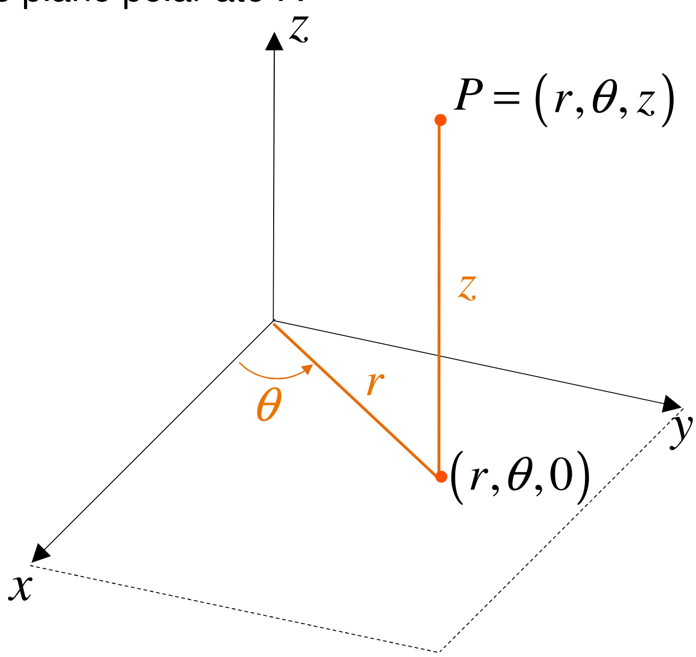
Logo, a equação polar do gráfico é $r = 4\cos\theta$.

Coordenadas Cilíndricas e Esféricas

Sistema de Coordenadas Cilíndricas

A versão no espaço tridimensional do sistema de coordenadas polares do plano é chamada de sistema de coordenadas cilíndricas.

A representação das coordenadas cilíndricas de um ponto P é (r, θ, z), sendo r e θ as coordenadas polares da projeção de P em um plano polar e z a distância orientada desse plano polar até P.



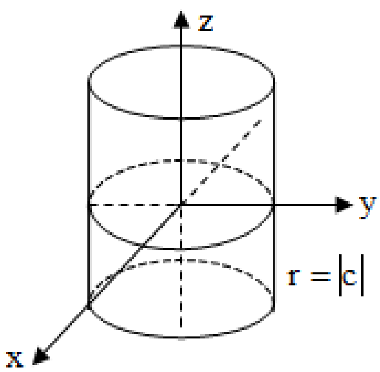
Exemplo 1 (Apostila):

Faça um esboço do gráfico de cada uma das seguintes equações onde c é uma constante:

a) r = c

Solução:

Para um ponto *P (r, θ, z)* do gráfico de r = c, θ e z podem assumir quais quer valores e *r* é uma constante. O gráfico é um cilindro circular reto, tendo $|c|$ como raio e z como seu eixo.



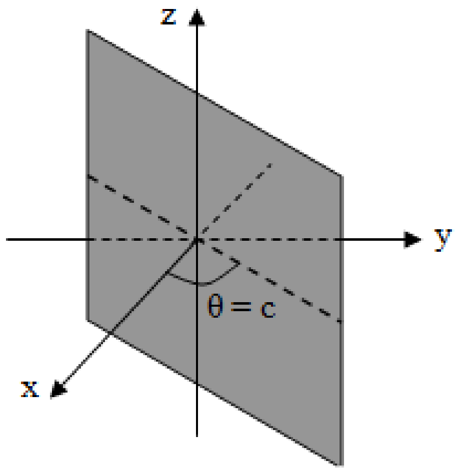
Exemplo 1 (Apostila):

Faça um esboço do gráfico de cada uma das seguintes equações onde c é uma constante:

b) θ = c

Solução:

Para todos os pontos *P (r, θ, z)* do gráfico de θ = c, r e z podem assumir qualquer valor, enquanto que θ permanece constante. O gráfico é um plano que passa pelo eixo z.



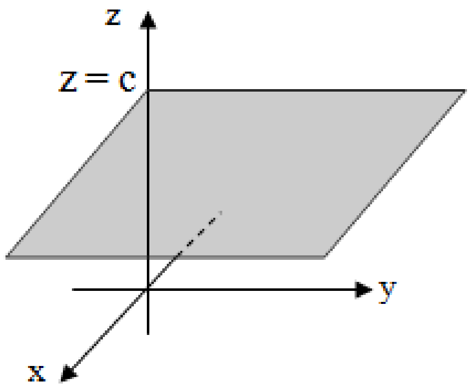
Exemplo 1 (Apostila):

Faça um esboço do gráfico de cada uma das seguintes equações onde c é uma constante:

c) z = c

Solução:

O gráfico de z = c é um plano paralelo ao plano polar e a uma distância orientada de c unidades.



Conversão de Coordenadas Cilíndricas / Retangulares

Para converter de **coordenadas cilíndricas** para **coordenadas retangulares**, usamos as equações:

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\,sen\theta \qquad z = z$$

Para converter de **coordenadas retangulares** para **coordenadas cilíndricas**, utilizamos as equações:

$$r^2 = x^2 + y^2 \qquad tg\,\theta = \frac{y}{x}\ (x \neq 0) \qquad z = z$$

Exemplo 2 (Apostila):

Ache uma equação em coordenadas cartesianas das seguintes superfícies, cujas equações estão expressas em coordenadas cilíndricas:

a) r = 6 sen θ b) r . (3 cos θ + 2 sen θ) + 6z = 0

Solução:

a) Multiplicando ambos os lados da equação por r, obtemos: $r^2 = 6r\,sen\theta$

Como $r^2 = x^2 + y^2$ e $r\,sen\theta = y$, então: $x^2 + y^2 = 6y$

b) Como $x = r\cos\theta$ e $y = r\,sen\theta$, temos: $3x + 2y + 6z = 0$

Exemplo 3 (Apostila):
Ache uma equação em coordenadas cilíndricas para cada uma das seguintes superfícies, cujas equações estão expressas em coordenadas cartesianas:
a) $x^2 + y^2 = z$ b) $x^2 - y^2 = z$

Solução:

a) $x^2 + y^2 = r^2$, logo $r^2 = z$

b) Sabemos que: $x = r\cos\theta$ e $y = rsen\theta$.

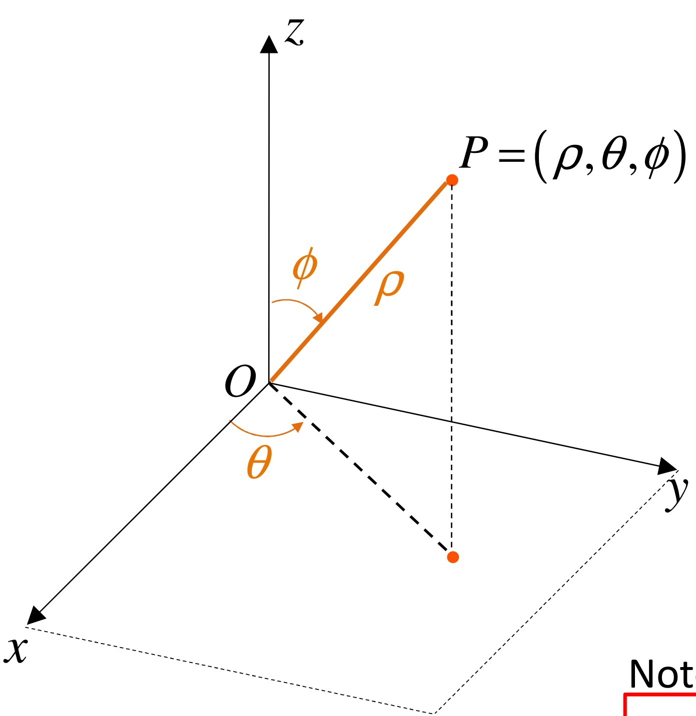
Substituindo x e y:

$$r^2\cos^2\theta - r^2 sen^2\theta = z$$

$$r^2(\cos^2\theta - sen^2\theta) = z \qquad {}^*\cos^2\theta - sen^2\theta = \cos 2\theta$$

$$\therefore \qquad r^2\cos 2\theta = z$$

Sistema de Coordenadas Esféricas



$\rho = \left|\overrightarrow{OP}\right|$

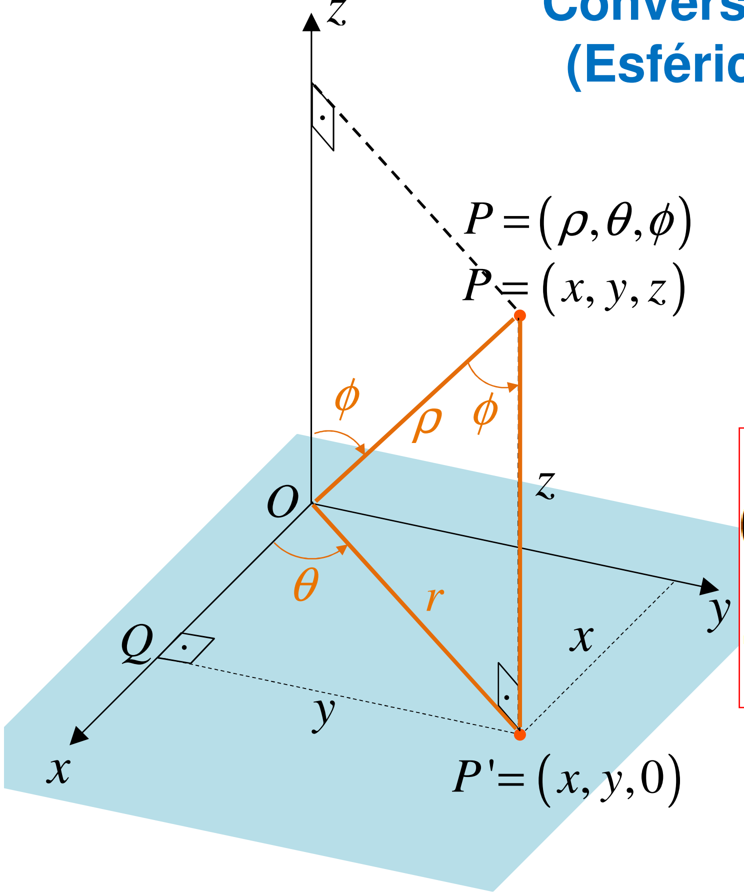
θ é o mesmo ângulo que em coordenadas cilíndricas.

ϕ é o ângulo entre o eixo positivo z e o vetor $\left|\overrightarrow{OP}\right|$.

Note que:

$$\boxed{\rho \geq 0 \qquad 0 \leq \phi \leq \pi}$$

Conversão de Coordenadas (Esféricas - Retangulares)



Do triângulo retângulo OPP', temos

$$(i)\quad \cos\phi=\frac{z}{\rho}\quad\Rightarrow\quad z=\rho\cos\phi$$

$$(ii)\quad \operatorname{sen}\phi=\frac{r}{\rho}\quad\Rightarrow\quad r=\rho\operatorname{sen}\phi$$

Do triângulo retângulo QOP', obtemos

$$(iii)\quad \cos\theta=\frac{x}{r}\quad\Rightarrow\quad x=r\cos\theta$$

$$(iv)\quad \operatorname{sen}\theta=\frac{y}{r}\quad\Rightarrow\quad y=r\operatorname{sen}\theta$$

Conversão de Coordenadas (Esféricas - Retangulares)

Para converter de **coordenadas esféricas** para **coordenadas retangulares**, substituímos (ii) em (iii) para encontrar a coordenada x e substituímos (ii) em (iv) para encontrar a coordenada y, daí:

$$x=\rho\,sen\phi\cos\theta \qquad y=\rho\,sen\phi\,sen\theta \qquad z=\rho\cos\phi$$

Também, a distância entre dois pontos nos mostra que:

$$\rho^2=\left|\overrightarrow{OP}\right|^2 = x^2+y^2+z^2$$

Usamos este resultado para converter de **coordenadas retangulares** para **coordenadas esféricas.**

Resumindo:

Polar $\to$ retangular: $x = r \cdot \cos\theta$; $y = r \cdot \text{sen}\,\theta$

Retangular $\to$ polar: $r = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$; $\text{tg}\,\theta = \dfrac{y}{x}$

Cilíndricas $\to$ retangulares: $x = r \cdot \cos\theta$ $\quad y = r \cdot \text{sen}\theta$ $\quad z = z$

Retangulares $\to$ cilíndricas: $r^2 = x^2 + y^2$ $\quad \text{tg}\,\theta = \dfrac{y}{x}$ se $x \neq 0$ $\quad z = z$

Esféricas $\to$ retangulares: $x = \rho \cdot \text{sen}\,\phi \cdot \cos\theta$ $\quad y = \rho \cdot \text{sen}\,\phi \cdot \text{sen}\,\theta$ $\quad z = \rho \cdot \cos\phi$

Retangulares $\to$ Esféricas: $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ $\quad \text{tg}\,\theta = \dfrac{y}{x}$ $\quad \cos\phi = \dfrac{z}{\rho}$

Exercícios: