INSTITUTO NACIONAL DE TELECOMUNICAÇÕES

INATEL

M002
ÁLGEBRA E GEOMETRIA ANALÍTICA

Prof. Edson Josias Gimenez
Profª. Karina Perez Mokarzel Carneiro
Prof. Luiz Felipe S. de Godoy
Prof. Rodrigo Guaracy Santana

2º Semestre de 2018

SUMÁRIO

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. **STEINBRUCH**, Alfredo; WINTERLE, Paulo. Álgebra Linear. 2a ed. São Paulo: McGraww-Hill, 1987.

2. **STEINBRUCH**, Alfredo; WINTERLE, Paulo. Geometria Analítica. 2a ed. São Paulo: Makron Books do Brasil Editora Ltda, 1987.

3. **LEITHOLD**, Louis. O Cálculo com Geometria Analítica Vol 1. São Paulo: Harbra, 3ª ed., 1994.

4. **LEITHOLD**, Louis. O Cálculo com Geometria Analítica Vol 2. São Paulo: Harbra, 3ª ed., 1994.

5. **PAIVA,** Manoel Rodrigues. Matemática: conceitos, linguagem e aplicações. 1ª ed. Moderna, São Paulo, 2002.

OBS:

a) Estas notas de aula foram baseadas nos livros acima.
b) As notas de aula não dispensam a leitura do livro.
c) Consulte sempre o plano de ensino da disciplina.

CAPÍTULO 1
ÁLGEBRA VETORIAL

1.1 – INTRODUÇÃO

Existem dois tipos de grandezas físicas: as escalares e as vetoriais

As grandezas escalares ficam completamente definidas por apenas um número real acompanhado de uma unidade adequada. Podemos citar como exemplos: comprimento, área, volume, massa, temperatura, densidade.

As grandezas vetoriais ou simplesmente vetores como velocidade, força, impulso, quantidade de movimento, para serem completamente identificadas precisam, além da intensidade (módulo), a direção e o sentido. Geometricamente, vetores são representados por segmentos (de retas) orientados (segmentos de retas com um sentido de percurso) no plano ou no espaço. A ponta da seta do segmento orientado é chamada ponto final ou extremidade e o outro ponto extremo é chamado de ponto inicial ou origem do segmento orientado. Segmentos orientados com mesma direção, mesmo sentido e mesmo comprimento representam o mesmo vetor. A direção, o sentido e o comprimento do vetor são definidos como sendo a direção, o sentido e o comprimento de qualquer um dos segmentos orientados que o representam. A definição de igualdade de vetores é análoga a igualdade de números racionais. Dizemos que dois vetores são iguais se eles possuem o mesmo comprimento, a mesma direção e o mesmo sentido.

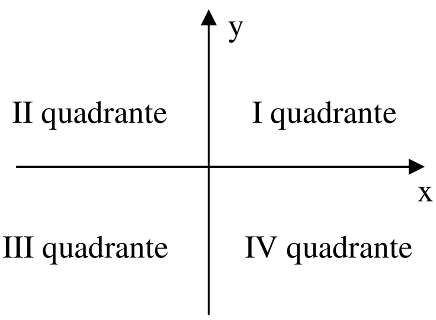
No estudo de vetores dois tratamentos se completam: geométrico e algébrico.

1.2 – PLANO CARTESIANO R^2

É o conjunto de todos os pares ordenados (x, y) de números reais, em linguagem matemática temos: $\Re^2 = \Re\, x\, \Re = \{(x, y) \mid x \in \Re, y \in \Re\}$

A cada par ordenado (*x, y*) é associado um ponto P do plano cartesiano. No qual P é o ponto do plano cartesiano definido a partir das coordenadas cartesianas *x* e *y*. A coordenada *x* é denominada *abscissa de P* enquanto a coordenada *y* é a *ordenada de P*.

Obs: É importante observar que o plano cartesiano R^2 se divide em quatro regiões, denominadas quadrantes, conforme estão mostrados a seguir.

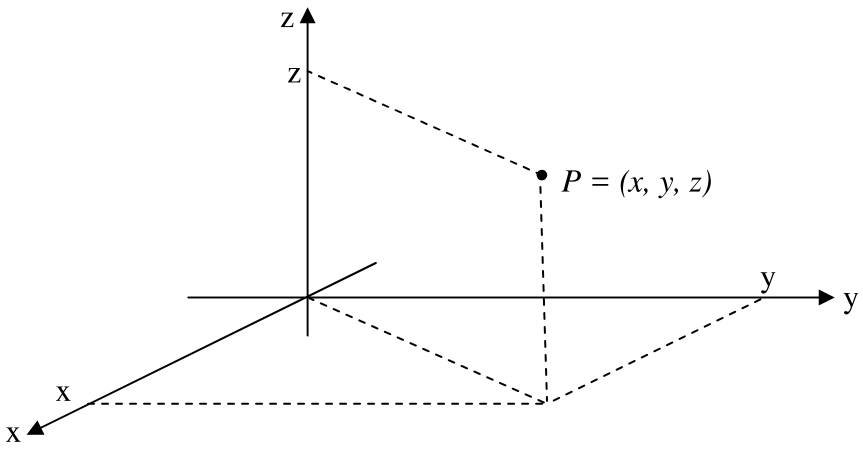


Exercício: Represente geometricamente os pares ordenados (-2, 3), (3, 2), (2, -2) e (-3, -3) .

1.3 – ESPAÇO CARTESIANO R^3

É o conjunto de todas as triplas ordenadas de números reais *(x, y, z)*, em linguagem matemática podemos escrever: $\Re^3 = \Re \times \Re \times \Re = \{(x, y, z) \mid x \in \Re, y \in \Re, z \in \Re\}$.

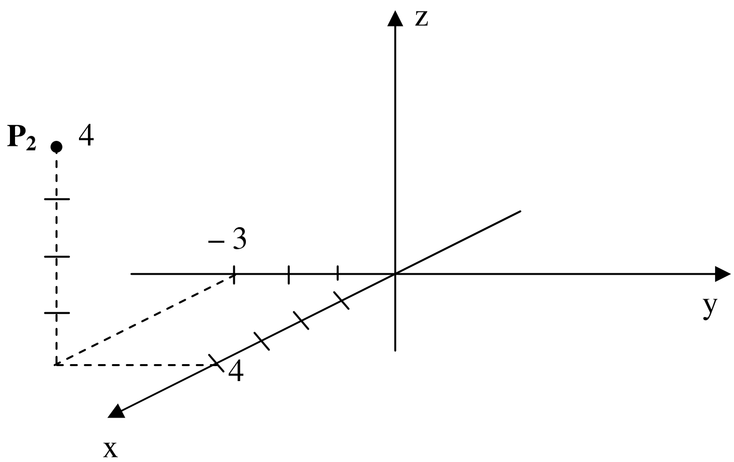
A cada tripla ordenada *(x, y, z)* é associado um ponto P no espaço. No qual P é o ponto do espaço cartesiano definido a partir das coordenadas cartesianas *x, y* e *z* que recebem, respectivamente, as denominações *abscissa, ordenada e cota* de *P*.



Obs: É fácil perceber que o plano cartesiano R^2 é um subconjunto do R^3, para z = 0.

Exercícios: Represente geometricamente os pontos:

a) $P_1 = (2, 3, 5)$
b) $P_2 = (4, -3, 4)$ *Resolvido como exemplo*
c) $P_3 = (-3, 4, 3)$
d) $P_4 = (-2, -2, -2)$



1.4 – ÊNUPLAS (Generalizando)

Usando-se a notação anterior de R^2 e R^3, pode-se extrapolar para uma formação algébrica mais genérica.

$$\Re^n = \Re \times \Re \times \Re \times \cdots \Re = \{(\beta_1, \beta_2, \beta_3 ..., \beta_n) / \beta_1, \beta_2, \beta_3, ..., \beta_n \in \Re\}$$

Onde $(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$ é chamada de ênupla. O conjunto R^n não pode ser representado geometricamente, porém possui a mesma lei de formação algébrica que o R^2 e o R^3.

1.5 – DEFINIÇÕES

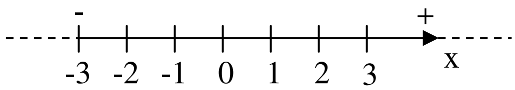
1.5.1 – Reta

Conjunto de pontos

1.5.2 – Reta orientada (eixo)

Uma reta r é orientada quando se fixa nela um sentido de percurso, considerado positivo e indicado por uma seta.

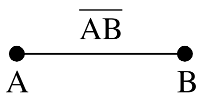
Para todo eixo deve-se definir a origem O, a unidade de comprimento e o sentido positivo.



Obs: Considerado o sentido positivo de orientação, o sentido oposto é negativo.

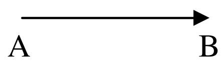
1.5.3 – Segmento de reta

Determinado por um par ordenado de pontos



1.5.4 – Segmento de reta orientado

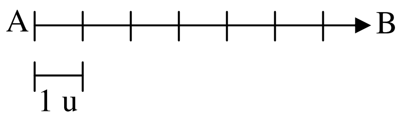
Um segmento de reta orientado é determinado por um par ordenado de pontos, o primeiro chamado origem do segmento e o segundo chamado extremidade (ponto final). O segmento orientado de origem A, e extremidade B será representado por *AB* e geometricamente, indicado por uma seta que caracteriza visualmente o sentido do segmento.



Características:
- Módulo
- Direção
- Sentido

Módulo (comprimento): Fixada uma unidade de comprimento, a cada segmento orientado pode-se associar um número real, positivo, que é a medida do segmento em relação àquela unidade.

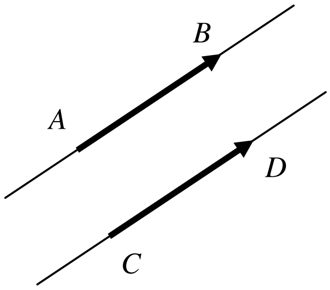
Exemplo:



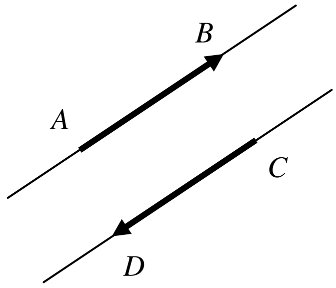
O comprimento do segmento AB acima é de 7 unidades de comprimento e é representado por $\overline{AB} = 7$ u.c.

Direção e sentido: Dois segmentos orientados não nulos AB e CD tem a mesma direção se as retas suportes desses segmentos são:

a) Paralelas

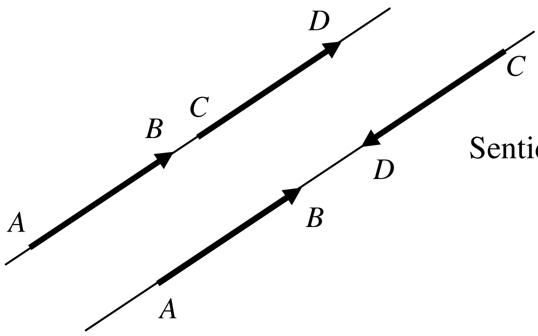


Mesma direção
Mesmo sentido



Mesma direção
Sentidos opostos

b) Coincidentes



Sentidos opostos

1.5.5 – Segmento nulo

É aquele cuja extremidade coincide com a origem.

1.5.6 – Segmentos opostos

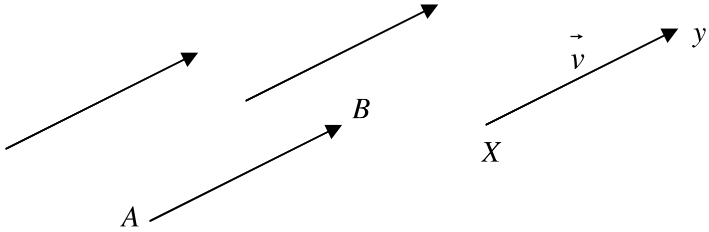
Se AB é um segmento orientado, o segmento BA é oposto de AB.

1.5.7 – Segmentos equipolentes

Dois segmentos orientados AB e CD são eqüipolentes quando têm a mesma direção, o mesmo sentido e o mesmo comprimento (módulo). AB ~ CD *equipolência*

1.5.8 – Vetor

Vetor determinado por um segmento orientado AB é o conjunto de todos os segmentos orientados eqüipolentes a AB.



Se indicarmos por $\vec{v}$ este conjunto, simbolicamente poderemos escrever: $\vec{v} = \{XY / XY \sim AB\}$ onde *XY* é um segmento qualquer do conjunto.

O vetor determinado por AB é indicado por $\overrightarrow{AB}$ ou $B - A$ ou $\vec{v}$. O módulo de $\vec{v}$ se indica por $|\vec{v}|$

1.5.9 – Vetor nulo

É um vetor cuja origem coincide com a extremidade e tem módulo igual a zero, e é indicado por $\vec{0}$.

1.5.10 – Vetores opostos

Possuem mesmo módulo, mesma direção e sentidos opostos.

Dado um vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, o vetor $\overrightarrow{BA}$ é o oposto de $\overrightarrow{AB}$ e indicamos por $-\overrightarrow{AB}$ ou por $-\vec{v}$.

1.5.11 – Vetores iguais

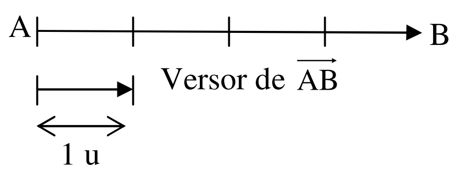
Dois vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ são iguais se, e somente se, AB~CD. Se $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$ então $\vec{u} = \vec{v}$ se, e somente se, $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$

1.5.12 – Vetor unitário

É um vetor de módulo igual a um e serve para caracterizar uma direção. É representado por um acento circunflexo acima da letra.

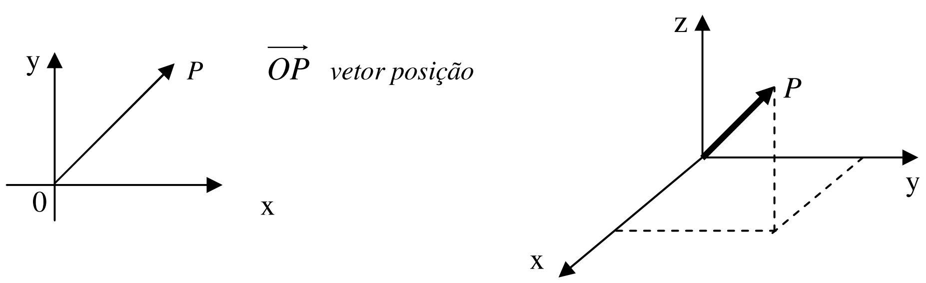
1.5.13 – Versor

O versor de um vetor não nulo $\vec{v}$ é o vetor unitário de mesma direção e mesmo sentido de $\vec{v}$.



1.5.14 – Vetor posição:

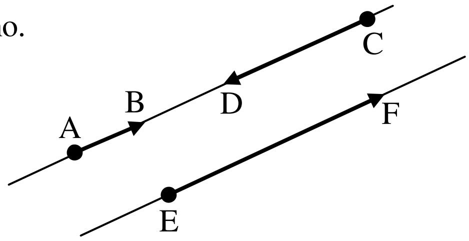
É um vetor cuja origem coincide com a origem do sistema de coordenadas.



1.5.15 – Vetores colineares

Dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares se tiverem a mesma direção, ou seja são colineares se pertencerem a uma mesma reta ou a retas paralelas.

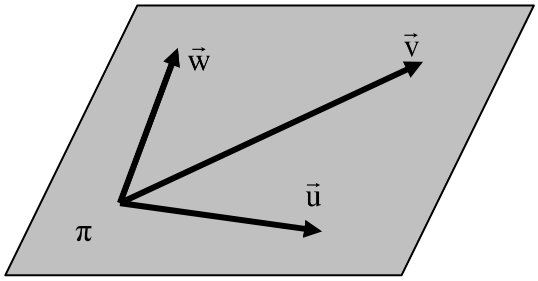
Obs: Dois vetores não colineares formam um plano.



1.5.16 – Vetores coplanares

Se os vetores não nulos $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ (o número de vetores não importa) possuem representantes AB, CD e EF pertencentes a um mesmo plano π, diz-se que eles são coplanares.

Obs: Dois vetores são sempre coplanares

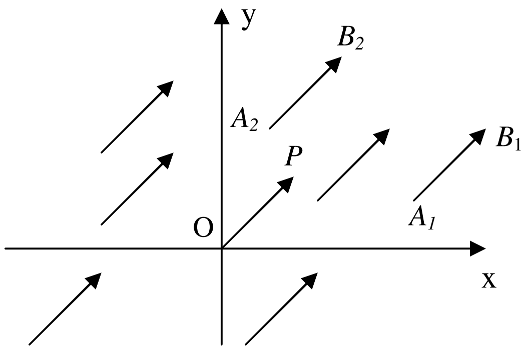


1.6 – VETORES NO PLANO R^2

Neste tópico o par ordenado (x,y) será associado a um segmento orientado, representante geométrico da grandeza vetor.

O vetor $\vec{v} = (x, y)$ possui no plano cartesiano, infinitas representações geométricas, pois:

$$\vec{v} = \overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{A_2B_2} = ... = \overrightarrow{A_nB_n} = \overrightarrow{OP}$$



$\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{A_2B_2} = ... = \overrightarrow{A_nB_n}$ são vetores livres (origem arbitrária)

$\overrightarrow{OP}$ vetor posição

$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = B - A$ ➔ $\vec{v} = (x, y) = (x_B - x_A, y_B - y_A)$

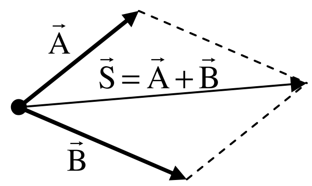
$\vec{v} = (x, y)$ x e y são as coordenadas canônicas do vetor $\vec{v}$.

1.7 – <u>OPERAÇÕES GRÁFICAS COM VETORES</u>

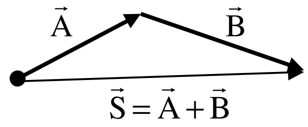
1.7.1 – <u>Soma de vetores</u>:

Sejam dois vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ não nulos, a soma gráfica será:

a) *Método do paralelogramo*



b) *Método da linha poligonal*



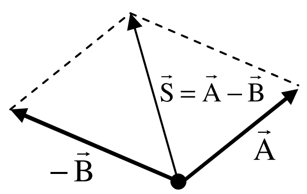
<u>*Propriedades da soma*</u>:

1) comutativa: $\vec{A}+\vec{B}=\vec{B}+\vec{A}$
2) associativa: $(\vec{A}+\vec{B})+\vec{C}=\vec{A}+(\vec{B}+\vec{C})$
3) Elemento Neutro: $\vec{A}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{A}=\vec{A}$
4) Elemento Oposto: $\vec{A}+(-\vec{A})=(-\vec{A})+\vec{A}=\vec{0}$

1.7.2 – <u>Subtração de vetores</u>:

Sejam dois vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ não nulos, a subtração gráfica será:

$\vec{T}=\vec{A}-\vec{B}=\vec{A}+(-\vec{B})$



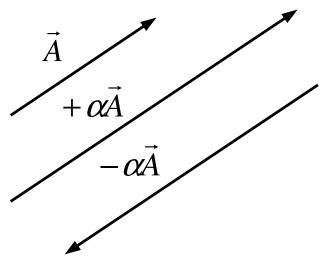
Obs: valem as mesmas propriedades da soma vetorial.

1.7.3 – <u>Multiplicação por um escalar</u> (real)

Dado um vetor $\vec{A}\neq\vec{0}$ e um número real $\alpha\neq 0$, o produto do escalar α pelo vetor $\vec{A}$ será:

$$\vec{P}=\alpha\vec{A}$$

$$\vec{P}\begin{cases}\text{Módulo: } |\vec{P}|=|\alpha||\vec{A}| \\ \text{Direção: a mesma de } \vec{A} \text{ (vetores colineares)} \\ \text{Sentido: } \begin{cases}\alpha>0 & \rightarrow \quad \text{mesmo sentido de } \vec{A} \\ \alpha=0 & \rightarrow \quad \vec{P}=\vec{0} \\ \alpha<0 & \rightarrow \quad \text{sentido oposto ao de } \vec{A}\end{cases}\end{cases}$$



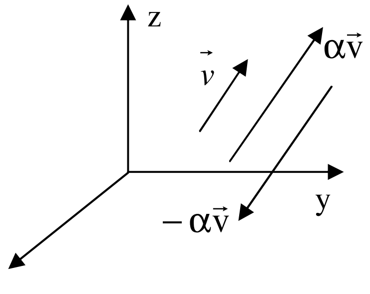
Propriedades da multiplicação por um escalar:

Sejam os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ e os escalares $\alpha, \beta \in \Re$.

1) Associativa $\alpha\,\beta\,\vec{u} = \alpha\left(\beta\,\vec{u}\right) = \beta\left(\alpha\,\vec{u}\right)$
2) Distributiva em relação à adição de vetores $\alpha\left(\vec{u} + \vec{v}\right) = \alpha\,\vec{u} + \alpha\,\vec{v}$
3) Distributiva em relação à adição de escalares $(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\,\vec{u} + \beta\,\vec{u}$
4) Se $\vec{0} = (0,0,0)$ e $\alpha\,\vec{v} = \vec{0}$ então $\alpha = 0$ ou $\vec{v} = \vec{0}$
5) $-\vec{v} = (-1)\,\vec{v} = \vec{v'}$ onde $\vec{v'}$ é o oposto de $\vec{v}$

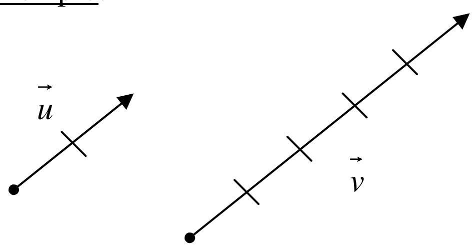
Obs:

a) O vetor $\alpha\vec{v}$ é sempre paralelo ao vetor $\vec{v}$ para $\alpha \neq 0$ e $\vec{v} \neq \vec{0}$



b) Seja um vetor $\alpha\,\vec{v}$, com $\alpha \neq 0$ e $\vec{v} \neq \vec{0}$. Se fizermos com que o número α, percorra o conjunto dos Reais, teremos infinitos vetores colineares a $\vec{v}$ e, portanto colineares entre si, isto é, qualquer um deles é sempre múltiplo escalar do outro.

Exemplo:



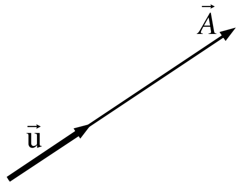
$\vec{u} = \frac{2}{5}\vec{v}$ ou $\vec{v} = \frac{5}{2}\vec{u}$

1.7.4 – Versor:

O versor de um vetor $\vec{A} \neq \vec{0}$ é o vetor unitário $\vec{u} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$ ou $\hat{u} = \frac{1}{|\vec{A}|}.\vec{A}$

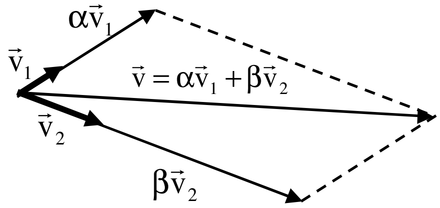
Podemos escrever $\vec{v} = |\vec{v}|.\hat{v}$, isto é, o vetor $\vec{v}$ é o produto de seu módulo pelo vetor unitário de mesma direção e sentido de $\vec{v}$.

Pois, $|\vec{u}| = \left|\frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}\right| = \frac{|\vec{A}|}{|\vec{A}|} = 1$



1.8 – VETORES NO R^2 E NO R^3

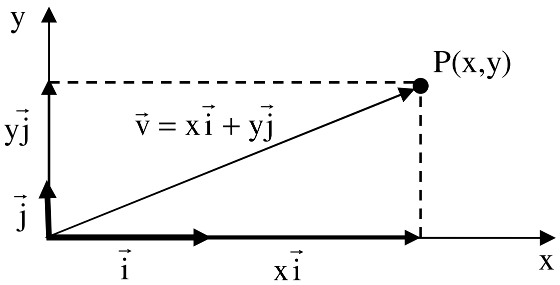
Dois vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, não colineares, são sempre coplanares. Como $\alpha\vec{v}_1$ tem a direção de $\vec{v}_1$ e $\beta\vec{v}_2$ a direção de $\vec{v}_2$, o vetor $\vec{v} = \alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2$ será sempre em vetor representado no mesmo plano de $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, sejam quais forem os reais α e β.



O vetor $\vec{v}$ é combinação linear de $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$. O par de vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ é chamado *base* no plano. Aliás, qualquer conjunto $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ de vetores não colineares constitui uma base no plano. Os números α e β são chamados componentes ou coordenadas do vetor $\vec{v}$, na base $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$.

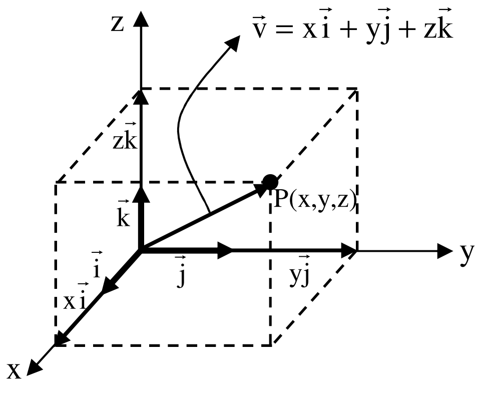
Na prática, as bases mais utilizadas são as bases ortogonais. Uma base é dita ortogonal quando seus vetores são ortogonais e unitários.

Existem infinitas bases ortogonais no plano x0y, porém, a mais importante é a base canônica, simbolizada por $\{\vec{i}, \vec{j}\}$.



No espaço, qualquer conjunto $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ de vetores não coplanares é uma base. Todo vetor $\vec{v}$ do espaço é combinação linear dos vetores da base e pode ser escrito como $\vec{v} = \alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 + \gamma\vec{v}_3$. Os escalares α, β e γ são as componentes de $\vec{v}$ na base considerada.

Uma base no espaço é ortogonal se os três vetores forem unitários e dois a dois, ortogonais. Dentre as infinitas bases ortogonais existentes, a mais importante é a base canônica representada por $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.



1.9 – OPERAÇÕES ALGÉBRICAS COM VETORES

Sejam os vetores $\vec{A}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$, $\vec{B}=b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}$ e $\vec{C}=c_1\vec{i}+c_2\vec{j}+c_3\vec{k}$ e sendo α um número real.

1.9.1 – Igualdade

Os vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ são iguais quando $a_1=b_1$, $a_2=b_2$ e $a_3=b_3$

1.9.2 – Soma

$$\vec{s}=\vec{A}+\vec{B}=(a_1+b_1)\vec{i}+(a_2+b_2)\vec{j}+(a_3+b_3)\vec{k}$$

Exemplo: Se $=(-3,2,5)$ e $\vec{v}=(4,-4,8)$ encontre os vetores $\vec{u}+\vec{v}$ e $\vec{v}+\vec{u}$

$\vec{u}+\vec{v}=(-3+4,2-4,5+8)=(1,-2,13)$ $\qquad$ $\vec{v}+\vec{u}=(4-3,-4+2,8+5)=(1,-2,13)$

1.9.3 – Subtração

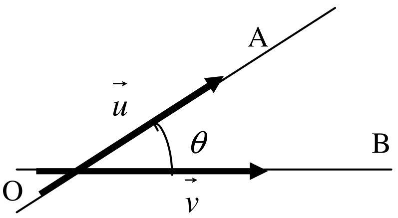
$$\vec{t}=\vec{A}-\vec{B}=(a_1-b_1)\vec{i}+(a_2-b_2)\vec{j}+(a_3-b_3)\vec{k}$$

1.9.4 – Multiplicação de um número real por um vetor

$$\vec{p}=\alpha\vec{A}=\alpha\left(a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}\right)=\alpha a_1\vec{i}+\alpha a_2\vec{j}+\alpha a_3\vec{k}$$

1.10 – ÂNGULO ENTRE DOIS VETORES

O ângulo entre dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não nulos é o ângulo θ formado pelas semirretas AO e OB tal que $0\leq\theta\leq\pi$.



Obs:

a) O vetor nulo é considerado ortogonal a qualquer vetor.
b) Se $\vec{u}$ é ortogonal a $\vec{v}$ e α é um número real qualquer, $\vec{u}$ é ortogonal a $\alpha\vec{v}$.

1.11 – CONDIÇÃO DE PARALELISMO

Se $\vec{u}=(x_1,y_1,z_1)$ e $\vec{v}=(x_2,y_2,z_2)$ são colineares (paralelos), existe um número k tal que $\vec{u}=k\vec{v}$, logo,

$$(x_1,y_1,z_1)=k(x_2,y_2,z_2) \quad\Rightarrow\quad (x_1,y_1,z_1)=(kx_2,ky_2,kz_2)$$

Assim, pela definição de igualdade de vetores:

$x_1 = k x_2 \Rightarrow k = \frac{x_1}{x_2}$

$y_1 = k y_2 \Rightarrow k = \frac{y_1}{y_2}$ ➔ $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2} = k$

$z_1 = k z_2 \Rightarrow k = \frac{z_1}{z_2}$

<u>Exemplo</u>: Dois vetores são paralelos quando suas coordenadas são proporcionais. Os vetores $\vec{u} = (-2, 3, -4)$ e $\vec{v} = (-6, 9, -12)$ são paralelos, pois:

$$k = \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2} \Rightarrow k = \frac{-2}{-6} = \frac{3}{9} = \frac{-4}{-12} \Rightarrow k = \frac{1}{3}$$

1.12 – <u>PRODUTO ESCALAR</u>

Chama-se *produto escalar* (produto interno usual) de dois vetores $\vec{u} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$ e $\vec{v} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$, e se representa por $\vec{u}$ e $\vec{v}$ ao número real (escalar):

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

O produto escalar de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ também é indicado por $<\vec{u}, \vec{v}>$ e se lê "$\vec{u}$ escalar $\vec{v}$".

<u>Exemplo</u>: Se $\vec{u} = 3\vec{i} - 5\vec{j} + 8\vec{k}$ *e* $\vec{v} = 4\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$ tem-se:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \cdot 4 + (-5) \cdot (-2) + 8 \cdot (-1) = 14$$

<u>Propriedades do Produto Escalar</u>

Para quaisquer que sejam os vetores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ e $\vec{w} = (x_3, y_3, z_3)$ e $\alpha \in \Re$, é fácil verificar que:

1) $\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0$ e $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0$ somente se $\vec{u} = \vec{0} = (0,0,0)$
2) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ (comutativa)
3) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ (distributiva à adição de vetores)
4) $(\alpha\vec{u}) \cdot \vec{v} = \alpha(\vec{u} \cdot \vec{v}) = \vec{u} \cdot (\alpha\vec{v})$
5) $\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2$

1.12.1 – Módulo de um vetor

Módulo de um vetor $\vec{v} = (x, y, z)$, representado por $|\vec{v}|$, é o número real não negativo,

$$|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v}.\vec{v}}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{(x, y, z)\cdot(x, y, z)} \qquad \rightarrow \qquad |\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Exemplo: Se $\vec{v} = (2, 1, -2)$ então, $|\vec{v}| = \sqrt{(2)^2 + (1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{4+1+4} = \sqrt{9} = 3$

1.12.2 – Versor de um vetor

Se o versor do vetor $\vec{v}$ do exemplo for designado por $\vec{u}$, tem-se:

$$\vec{u} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{1}{3}(2, 1, -2) = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$$

O versor é, na verdade, um vetor unitário, pois:

$$\left|\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)\right| = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{4}{9}} = 1$$

1.12.3 – Distância entre os pontos

A distância d entre dois pontos $A\,(x_1, y_1, z_1)$ e $B\,(x_2, y_2, z_2)$ é assim definida:

$$d = |\overrightarrow{AB}| = |B - A| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Exemplos**:**

1. Sabendo que a distância entre os pontos A (-1, 2, 3,) e B (1, -1, m) é 7, calcular m.

$\overrightarrow{AB} = B - A = (1 - (-1), -1 - 2, m - 3) = (2, -3, m - 3)$ assim $d = |\overrightarrow{AB}| = 7$

$|(2, -3, m - 3)| = 7 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{(2)^2 + (-3)^2 + (m-3)^2} = 7$ resolvendo a equação temos

$m = -3$ ou $m = 9$

2. Determinar α para que o vetor $\vec{v} = \left(\alpha, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ seja unitário.

Deve-se ter $|\vec{v}| = 1$, ou seja, $\sqrt{\alpha^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2} = 1$

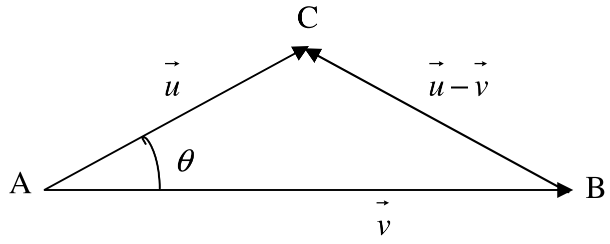
resolvendo temos: $\alpha = \pm\frac{\sqrt{11}}{4}$

1.12.4 – Ângulo de dois vetores

Já foi mostrado que o ângulo formado entre dois vetores não nulos varia de 0º a 180º. Vejamos agora como o produto escalar de dois vetores está relacionado com o ângulo por eles formado. Se $\vec{u} \neq 0$, $\vec{v} \neq 0$ e se θ é o ângulo dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, então:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}|\ |\vec{v}|\ \cos\theta$$

Podemos demonstrar essa relação aplicando a lei dos cossenos ao triangulo ABC, a seguir:



$$|\vec{u}-\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2\,|\vec{u}|\ |\vec{v}|\ \cos\theta$$

Porém das propriedades temos que:

$$|\vec{u}-\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2\,\vec{u}\cdot\vec{v}$$

Assim, comparando as duas expressões:

$$|\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2\,\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2\,|\vec{u}|\ |\vec{v}|\ \cos\theta$$

Logo teremos:

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}|\ |\vec{v}|\ \cos\theta} \qquad \text{(I)}$$

Concluindo: O produto escalar de dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é o produto dos seus módulos pelo cosseno do ângulo por eles formado.

Casos particulares:

a) Se $\vec{u}\cdot\vec{v} > 0$ o ângulo é agudo ou nulo $0º \leq \theta < 90º$

b) Se $\vec{u}\cdot\vec{v} < 0$ o ângulo é obtuso ou raso $90º < \theta \leq 180º$

c) Se $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$ o ângulo é reto $\theta = 90º$ Caso de Ortogonalidade

Importante:

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \begin{cases} \text{Se } \vec{u} = \vec{0} \text{ ou} \\ \text{se } \vec{v} = \vec{0} \text{ ou} \\ \text{se } \theta = 90º \rightarrow \text{vetores perpendiculares} \end{cases}$$

Pela equação (I) podemos calcular o ângulo entre dois vetores por: $\cos\theta = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\ |\vec{v}|}$

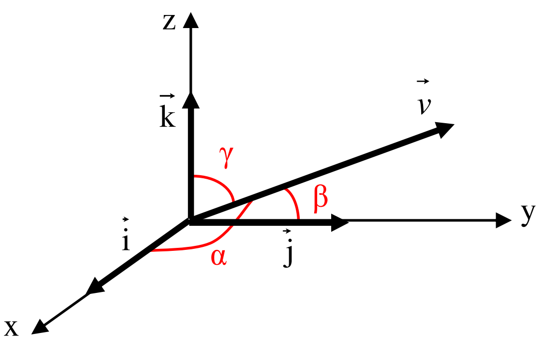
Exemplo: Calcular o ângulo entre os vetores $\vec{u} = (1, 1, 4)$ e $\vec{v} = (-1, 2, 2)$

$$\cos\theta = \frac{(1,1,4)\cdot(-1,2,2)}{\sqrt{1^2+1^2+4^2}\times\sqrt{(-1)^2+2^2+2^2}} = \frac{-1+2+8}{\sqrt{18}\times\sqrt{9}} = \frac{9}{3\sqrt{2}\times 3} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 45^\circ$$

1.12.5 – Ângulo diretores e Cossenos diretores de um vetor

Seja o vetor $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Os ângulos diretores de $\vec{v}$ são os ângulos α, β e γ formados com os vetores $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$.



Cossenos diretores de $\vec{v}$ são os cossenos de seus ângulos diretores, isto é, $\cos\alpha$, $\cos\beta$, e $\cos\gamma$.

Para o cálculo dos cossenos diretores utilizaremos a Fórmula:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{v}\cdot\vec{i}}{|\vec{v}|\,|\vec{i}|} = \frac{(x,y,z)\cdot(1,0,0)}{|\vec{v}|\ 1} = \frac{x}{|\vec{v}|}$$

$$\cos\beta = \frac{\vec{v}\cdot\vec{j}}{|\vec{v}|\,|\vec{j}|} = \frac{(x,y,z)\cdot(0,1,0)}{|\vec{v}|\ 1} = \frac{y}{|\vec{v}|}$$

$$\cos\gamma = \frac{\vec{v}\cdot\vec{k}}{|\vec{v}|\,|\vec{k}|} = \frac{(x,y,z)\cdot(0,0,1)}{|\vec{v}|\ 1} = \frac{z}{|\vec{v}|}$$

Propriedades:

a) As componentes do versor de um vetor são os cossenos diretores deste vetor.

$$\hat{v} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{(x,y,z)}{|\vec{v}|} = \left(\frac{x}{|\vec{v}|}, \frac{y}{|\vec{v}|}, \frac{z}{|\vec{v}|}\right) = (\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma)$$

b) Como o versor de $\vec{v}$ é um vetor unitário, tem-se que:

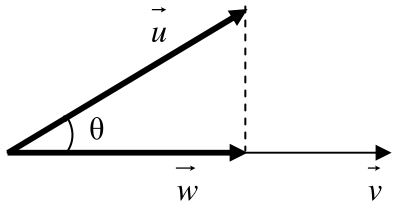
$$|(\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma)| = \sqrt{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma} = 1$$

o que decorre: $$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

Portanto, a soma dos quadrados dos cossenos diretores de um vetor é igual a 1.

1.12.6 – <u>Projeção de um vetor</u>

Sejam os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, com $\vec{u} \neq 0$ e $\vec{v} \neq 0$ e θ o ângulo formado por eles. Pretendemos calcular o vetor $\vec{w}$ que representa a projeção de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$.



Do triângulo retângulo vem: $|\vec{w}| = |\vec{u}|\ |\cos\theta| = |\vec{u}| \dfrac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}|\ |\vec{v}|} = \dfrac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{v}|}$

Como os vetores $\vec{w}$ e $\vec{v}$ têm a mesma direção, segue-se que: $\vec{w} = k\vec{v}$, com $k \in \Re$

$$\text{Então}: \quad |\vec{w}| = |k|\ |\vec{v}| \quad \text{ou} \quad |k| = |\vec{w}| \frac{1}{|\vec{v}|} = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{v}|}\frac{1}{|\vec{v}|} \quad \therefore \quad k = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|^2}$$

$$\text{Assim}: \quad \vec{w} = \left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|^2}\right)\vec{v}$$

Portanto, o vetor projeção de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$ $(\text{proj}_{\vec{v}}\vec{u} = \vec{w})$ é:

$$\text{proj}_{\vec{v}}^{\vec{u}} = \left(\vec{u}\cdot\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}\right)\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \quad \text{ou} \quad \text{proj}_{\vec{v}}^{\vec{u}} = \left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\vec{v}\cdot\vec{v}}\right)\vec{v}$$

<u>Exemplo</u>: Determine o vetor projeção de $\vec{u} = (2, 3, 4)$ sobre $\vec{v} = (1, -1, 0)$

$$\text{proj}_{\vec{v}}^{\vec{u}} = \left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\vec{v}\cdot\vec{v}}\right)\vec{v} = \left(\frac{(2, 3, 4)\cdot(1, -1, 0)}{(1, -1, 0)\cdot(1, -1, 0)}\right)(1, -1, 0)$$

$$\text{proj}_{\vec{v}}^{\vec{u}} = \left(\frac{2-3}{2}\right)(1, -1, 0) = -\frac{1}{2}(1, -1, 0) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$$

1.13 – <u>PRODUTO VETORIAL</u>

Há uma operação espacial para vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ em $\Re^3$, chamada *produto vetorial,* e denotada por $\vec{u} \times \vec{v}$ (lê-se: $\vec{u}$ vetorial $\vec{v}$).

Sejam $\vec{u} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ e $\vec{v} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$, tem-se que:

$$\vec{u} \times \vec{v} = (a_2b_3 - a_3b_2)\,\vec{i} - (a_3b_1 - a_1b_3)\,\vec{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\,\vec{k}$$

Note-se que $\vec{u} \times \vec{v}$ é um vetor, daí a designação de *produto vetorial* (também chamado de *produto externo*) de $\vec{u} \times \vec{v}$.

Utilizando a notação de determinante, onde $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$, o produto vetorial também pode ser expresso como: $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\vec{k}$ ou equivalente,

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Na verdade, o símbolo à direita da igualdade não é um determinante, pois a primeira linha contém vetores ao invés de escalares. No entanto usaremos esta notação pela facilidade de memorização que ela propicia no cálculo do produto vetorial.

Observemos que os determinantes de 2º ordem estabelecidos a partir do produto vetorial eliminam na sequência a 1ª coluna, a 2ª coluna e a 3ª coluna.

<u>Exemplo</u>: Calcule o produto vetorial dos vetores $\vec{u} = 5\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}$ e $\vec{v} = \vec{i} + \vec{k}$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\vec{k}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = (4-0)\,\vec{i} - (5-3)\,\vec{j} + (0-4)\,\vec{k}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = 4\vec{i} - 2\vec{j} - 4\vec{k}$$

Refaça este exercício trocando a ordem dos fatores no produto vetorial e perceba que não existe comutatividade nesta operação vetorial.

Propriedades do produto vetorial:

Sejam $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ vetores em $\Re^3$

1) o vetor $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$ é ortogonal a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$

2) $\vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}$, qualquer que seja $\vec{u}$

desta propriedade resulta que: $\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}$

3) $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$

desta propriedade resulta que: $\vec{i} \times \vec{j} = -\vec{j} \times \vec{i}$; $\vec{j} \times \vec{k} = -\vec{k} \times \vec{j}$; $\vec{k} \times \vec{i} = -\vec{i} \times \vec{k}$

4) $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$

5) $(\alpha\,\vec{u}) \times \vec{v} = \alpha\,(\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{u} \times (\alpha\,\vec{v})$

6) os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{u} \times \vec{v}$ têm as direções das arestas de um triedro.

observando os vetores da base canônica $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ temos que:

$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$; $\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$; $\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$

7) $\left|\vec{u} \times \vec{v}\right|^2 = \left|\vec{u}\right|^2 \left|\vec{v}\right|^2 - \left(\vec{u} \cdot \vec{v}\right)^2$, conhecida como identidade de Lagrange, também pode ser escrita como:

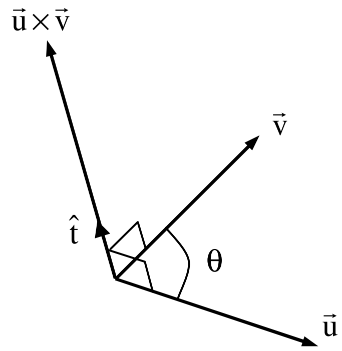
$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = \left(\vec{u} \cdot \vec{u}\right)\left(\vec{v} \cdot \vec{v}\right) - \left(\vec{u} \cdot \vec{v}\right)^2$$

8) O produto vetorial **não é associativo**, isto é**,** $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) \neq (\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$

9) Se $\vec{u} \neq \vec{0}$, $\vec{v} \neq \vec{0}$ e se θ é o ângulo dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$:

$$|\,\vec{u} \times \vec{v}\,| = |\,\vec{u}\,|\;|\,\vec{v}\,|\,\mathrm{sen}\,\theta$$

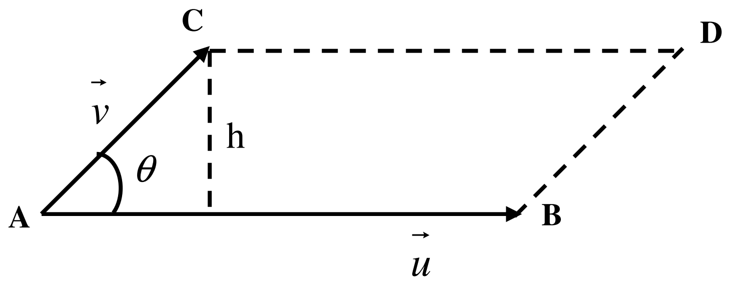
$$\vec{u} \times \vec{v} = |\vec{u}|\,|\vec{v}|\,\mathrm{sen}\theta\,\hat{t} \quad ➔ \quad \text{vetor}$$



10) $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$ $\begin{cases} \text{Se } \vec{u} = \vec{0} \text{ ou} \\ \text{se } \vec{v} = \vec{0} \text{ ou} \\ \text{se } \theta = 0^\circ \text{ ou } 180^\circ \rightarrow \text{vetores colineares} \end{cases}$

Interpretação geométrica do módulo do produto vetorial de dois vetores

Geometricamente, o módulo do produto vetorial dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ mede a área do paralelogramo ABCD determinado pelos vetores $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ da figura abaixo:



Como a Área $ABCD = |\vec{u}|\, h$ e $h = |\vec{v}| \operatorname{sen} \theta$

podemos escrever: Área $ABCD = |\vec{u}|\,|\vec{v}| \operatorname{sen} \theta$

mas como $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}|\,|\vec{v}| \operatorname{sen} \theta$

logo teremos: $|\vec{u} \times \vec{v}| =$ Área ABCD

<u>Exemplo</u>: Dados os vetores $\vec{u} = \hat{x} + 2\hat{y} - \hat{z}$ e $\vec{v} = -\hat{y} + 3\hat{z}$ calcular a área do paralelogramo determinado pelos vetores $3\vec{u}$ e $\vec{v} - \vec{u}$.

Sabemos que a área A é dada por $A = |\vec{u} \times \vec{v}|$ assim:

$A = |(3\vec{u}) \times (\vec{v} - \vec{u})|$ como $3\vec{u} = (3, 6, -3)$ e $\vec{v} - \vec{u} = (-1, -3, 4)$

$$(3\vec{u}) \times (\vec{v} - \vec{u}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 6 & -3 \\ -1 & -3 & 4 \end{vmatrix} = (15, -9, -3)$$

$$A = |(15, -9, -3)| = \sqrt{225 + 81 + 9} = \sqrt{315} = 3\sqrt{35} \text{ u.a.}$$

1.14 – <u>PRODUTO MISTO</u>

Dados os vetores abaixo:

$$\vec{u} = x_1\,\vec{i} + y_1\,\vec{j} + z_1\,\vec{k}\ ; \quad \vec{v} = x_2\,\vec{i} + y_2\,\vec{j} + z_2\,\vec{k} \quad \text{e} \quad \vec{w} = x_3\,\vec{i} + y_3\,\vec{j} + z_3\,\vec{k}$$

Tomados nesta ordem, chama-se ***produto misto*** dos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ ao número real $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$. Indica-se o produto misto por $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ e lê-se: $\vec{u}$ escalar $\vec{v}$ vetorial $\vec{w}$.

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = x_1 \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} - y_1 \begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix} + z_1 \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

$$\left(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \quad \Rightarrow \text{ escalar}$$

<u>Exemplo</u>: Calcular o produto misto dos vetores abaixo:

$\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}$; $\vec{v} = -\vec{i} + 3\vec{j} + 3\vec{k}$ e $\vec{w} = 4\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$

$$\left(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 3 & 3 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 27$$

<u>Propriedades do produto misto</u>

$$1)\ \vec{u} \bullet \vec{v} \times \vec{w} = 0 \begin{cases} \text{Se } \vec{u} = \vec{0} \text{ ou } \vec{v} = \vec{0} \text{ ou } \vec{w} = \vec{0} \text{ ou} \\ \text{se dois deles forem colineares ou} \\ \text{se os três vetores forem coplanares} \end{cases}$$

a) se $\vec{u}$ é nulo as suas componentes são $(0, 0, 0)$ desta forma:

$$\left(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0$$

b) se nem $\vec{u}$, nem $\vec{v}$ são nulos, mas se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares, temos:

$\vec{u} = \alpha \vec{v}$ ou $\vec{u} = \alpha\, x_2\, \vec{i} + \alpha\, y_2\, \vec{j} + \alpha\, z_2\, \vec{k}$

$$\left(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right) = \begin{vmatrix} \alpha\, x_2 & \alpha\, y_2 & \alpha\, z_2 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0$$

c) se $\vec{u}$ e $\vec{v} \times \vec{w}$ são ortogonais, o produto escalar $\vec{u} \cdot \left(\vec{v} \times \vec{w}\right)$ é nulo.

O anulamento de $\left(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right)$ significa que $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são coplanares.

2) O produto misto independe da ordem circular dos vetores (propriedade cíclica):

$$\left(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right) = \left(\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}\right) = \left(\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}\right)$$

Entretanto o produto misto muda de sinal se trocam as posições de dois vetores consecutivos, isto é:

$$\left(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right) = -\left(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}\right)$$

Resulta desta propriedade que os sinais $\cdot$ e $\times$ permutam entre si:

$$\vec{u}\cdot\left(\vec{v}\times\vec{w}\right)=\left(\vec{u}\times\vec{v}\right)\cdot\vec{w}$$

3) $\left(\vec{u},\vec{v},\vec{w}+\vec{r}\right)=\left(\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right)+\left(\vec{u},\vec{v},\vec{r}\right)$

4) $\left(\vec{u},\vec{v},\alpha\vec{w}\right)=(\vec{u},\alpha\vec{v},\vec{w})=\left(\alpha\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right)=\alpha\left(\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right)$

Obs: *O produto vetorial e o produto misto* ***não*** *são definidos para* $\Re^2$

<u>Exemplo</u>: Qual deve ser o valor de *m* para que os vetores abaixo sejam coplanares?

$\vec{a}=m\,\hat{x}+2\,\hat{y}-\hat{z}$ $\qquad \vec{b}=\hat{x}-\hat{y}+3\,\hat{z}$ $\qquad \vec{c}=-2\,\hat{y}+4\,\hat{z}$

Solução:

Para que $\vec{a},\ \vec{b}$ e $\vec{c}$ sejam coplanares, deve-se ter: $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=0$

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=\begin{vmatrix} m & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix}=0 \quad\Rightarrow\quad -4m+6m-8+2=0 \quad\Rightarrow\ m=3$$

<u>Interpretação Geométrica do Módulo do Produto Misto</u>

Geometricamente, o produto misto $\vec{u}\cdot\left(\vec{v}\times\vec{w}\right)$ é igual, em módulo, ao volume do paralelepípedo de arestas determinadas pelos vetores $\vec{u}=\overrightarrow{AD}$, $\vec{v}=\overrightarrow{AB}$ e $\vec{w}=\overrightarrow{AC}$
O volume é dado por: $V=\left|\vec{u}\cdot\left(\vec{v}\times\vec{w}\right)\right|=\left|\left(\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right)\right|$

Obs: Volume do tetraedro = 1/6 do volume do paralelepípedo.

$$V_T=\frac{1}{6}\left|\vec{u}\cdot\left(\vec{v}\ \mathrm{x}\ \vec{w}\right)\right|=\frac{1}{6}\left|\left(\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right)\right|$$

<u>Exemplo</u>: Dados os vetores $\vec{u}=(x,5,0)$, $\vec{v}=(3,-2,1)$ *e* $\vec{w}=(1,1,-1)$, calcular o valor de x para que o volume do paralelepípedo determinado por $\vec{u}$, $\vec{v}$ *e* $\vec{w}$ seja 24 u.v. (unidades de volume).

Solução: Como o volume do paralelepípedo é dado por: $\left|\left(\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right)\right|=24$, então:

$$\left(\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right)=\begin{vmatrix} x & 5 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=24 \quad\Rightarrow x+20$$

Pela equação do volume $|x + 20| = 24$

assim: $x + 20 = 24 \;\therefore\; x = 4$

$-x - 20 = 24 \;\therefore\; x = -44$

1.15 – DUPLO PRODUTO VETORIAL

Dados os vetores abaixo:

$$\vec{u} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k} \;;\quad \vec{v} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k} \quad \text{e} \quad \vec{w} = x_3\vec{i} + y_3\vec{j} + z_3\vec{k}$$

Chama-se *duplo produto vetorial* dos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ (lê-se: $\bar{u}$ vetorial $\bar{v}$ vetorial $\vec{w}$) ao vetor $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$.

Propriedades do duplo produto vetorial:

1) O produto vetorial não é associativo, então: $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) \neq (\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$

2) O duplo produto vetorial pode ser decomposto na diferença de dois vetores com coeficientes escalares (regra do termo central):

$$\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w}$$

Esta fórmula pode ser escrita sob a forma de determinante: $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = \begin{vmatrix} \vec{v} & \vec{w} \\ \vec{u} \cdot \vec{v} & \vec{u} \cdot \vec{w} \end{vmatrix}$

Exemplo: Dados os vetores $\vec{u} = 3\vec{i} - 2\vec{j} - 6\vec{k}$, $\vec{v} = 2\vec{i} - \vec{j}$ e $\vec{w} = \vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$ determine $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$.

Solução:

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \cdot 2 - 2 \cdot (-1) - 6 \cdot 0 = 8$ e $\vec{u} \cdot \vec{w} = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 3 - 6 \cdot 4 = -27$

Assim: $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = \begin{vmatrix} \vec{v} & \vec{w} \\ \vec{u} \cdot \vec{v} & \vec{u} \cdot \vec{w} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{v} & \vec{w} \\ 8 & -27 \end{vmatrix}$

$$\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = -27\vec{v} - 8\vec{w} = -27\,(2\vec{i} - \vec{j}) - 8\,(\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k})$$

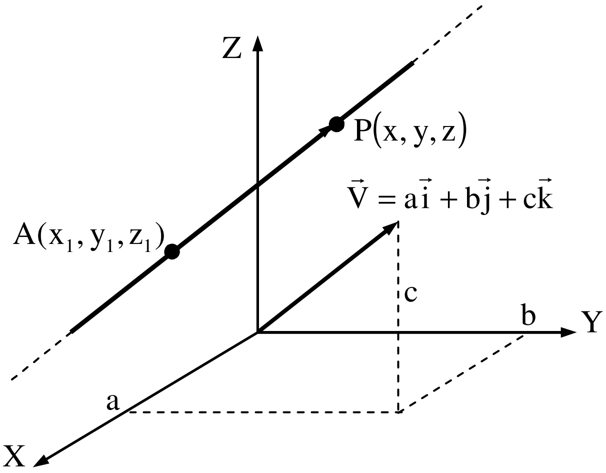
$$\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = -54\vec{i} + 27\,\vec{j} - 8\,\vec{i} - 24\,\vec{j} - 32\,\vec{k} = -62\vec{i} + 3\vec{j} - 32\vec{k}$$

CAPÍTULO 2
ESTUDO DAS RETAS

2.1 – EQUAÇÃO VETORIAL DA RETA

Seja r uma reta que passa pelo ponto A e que tem a direção do vetor não nulo $\vec{v}$. Para que o ponto P pertença à reta é necessário que:

$$\boxed{\overrightarrow{AP} = t \cdot \vec{V} \;\rightarrow\; \text{Equação paramétrica vetorial da reta}}$$



Onde o vetor $\vec{v}$ é chamado de vetor diretor da reta, e, *t* é o parâmetro.

2.2 – EQUAÇÕES PARAMÉTRICAS DA RETA

Substituindo as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AB} = (x - x_1)\vec{i} + (y - y_1)\vec{j} + (z - z_1)\vec{k}$ na equação vetorial da reta temos:

$$(x - x_1)\vec{i} + (y - y_1)\vec{j} + (z - z_1)\vec{k} = t \cdot (a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k})$$

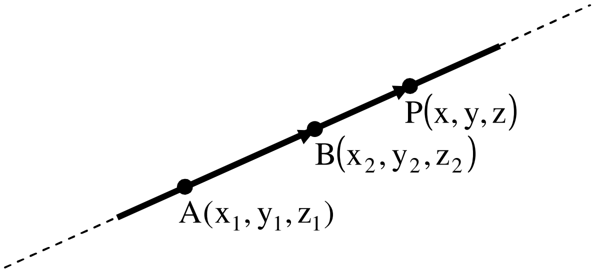
Daí vem:

$$\begin{cases} x = x_1 + t \cdot a \\ y = y_1 + t \cdot b \\ z = z_1 + t \cdot c \end{cases} \longrightarrow \text{Equações paramétricas da reta r}$$

<u>Reta definida por dois pontos</u>

A reta definida pelos pontos $A(x_1, y_1, z_1)$ e $B(x_2, y_2, z_2)$ é a reta que passa pelo A (ou B) e que tem a direção do vetor $\overrightarrow{AB}$, ou seja, é a reta definida pela equação vetorial $\overrightarrow{AP} = t \cdot \overrightarrow{AB}$

Daí: $r\begin{cases} x = x_1 + t \cdot (x_2 - x_1) \\ y = y_1 + t \cdot (y_2 - y_1) \\ z = z_1 + t \cdot (z_2 - z_1) \end{cases}$



2.3 – EQUAÇÕES SIMÉTRICAS DA RETA

Das equações paramétricas temos:

$$t = \frac{x - x_1}{a}$$
$$t = \frac{y - y_1}{b}$$
$$t = \frac{z - z_1}{c}$$

Então:

$$r\left\{\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}\right. \quad \rightarrow \quad \text{Equações simétricas} \quad \rightarrow \quad r\left\{\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}\right.$$

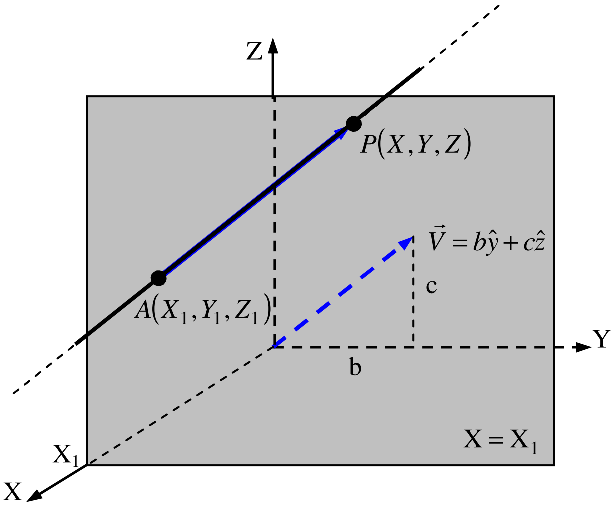
2.4 – EQUAÇÕES REDUZIDAS DA RETA

Das equações simétricas,

$\left\{\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b}\right.$ $y - y_1 = \frac{b}{a}(x - x_1)$ $y = \frac{b}{a}x - \frac{b}{a}x_1 + y_1$ Fazendo: $m = \frac{b}{a}$ $n = -\frac{b}{a}x_1 + y_1$ Tem-se: $y = mx + n$	$r\left\{\frac{x - x_1}{a} = \frac{z - z_1}{c}\right.$ $z - z_1 = \frac{c}{a}(x - x_1)$ $z = \frac{c}{a}x - \frac{c}{a}x_1 + z_1$ Fazendo: $p = \frac{c}{a}$ $q = -\frac{c}{a}x_1 + z_1$ Tem-se: $z = px + q$
$r\begin{cases} y = mx + n \\ z = px + q \end{cases}$ → Equações reduzidas da reta r em função de X	

<u>Casos particulares</u>:

a) Reta paralela ao plano coordenado YZ.



$\overrightarrow{AP} = t \cdot \vec{V}$ → Equação paramétrica vetorial

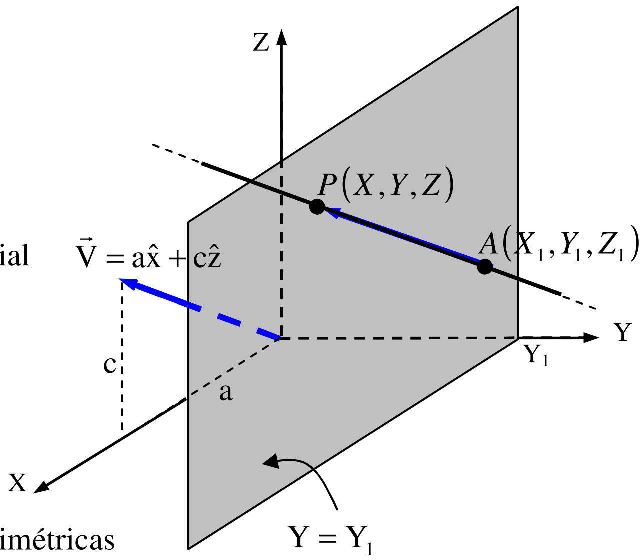
$$r\begin{cases} x = x_1 \\ y = y_1 + t \cdot b \\ z = z_1 + t \cdot c \end{cases}$$ → Equações paramétricas

$$r\begin{cases} \dfrac{y - y_1}{b} = \dfrac{z - z_1}{c}, \quad x = x_1 \end{cases}$$ → Equações simétricas

$$r\begin{cases} x = x_1 \\ z = my + n \end{cases}$$ → Equações reduzidas

b) Reta paralela ao plano coordenado XZ.

$\overrightarrow{AP} = t \cdot \vec{V}$ → Equação paramétrica vetorial

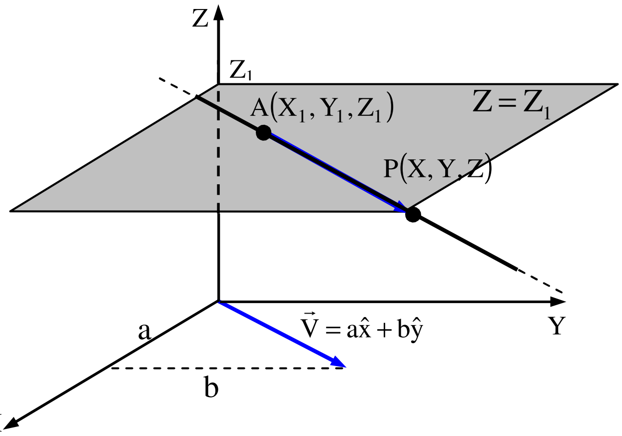


$$r\begin{cases} x = x_1 + t \cdot a \\ y = y_1 \\ z = z_1 + t \cdot c \end{cases}$$ → Equações paramétricas

$$r\begin{cases} \dfrac{x - x_1}{a} = \dfrac{z - z_1}{c}, \quad y = y_1 \end{cases}$$ → Equações simétricas

$$r\begin{cases} y = y_1 \\ z = mx + n \end{cases}$$ → Equações reduzidas em função de X

c) Reta paralela ao plano coordenado XY



$\overrightarrow{AP} = \alpha\,\vec{V}$ → Equação paramétrica vetorial

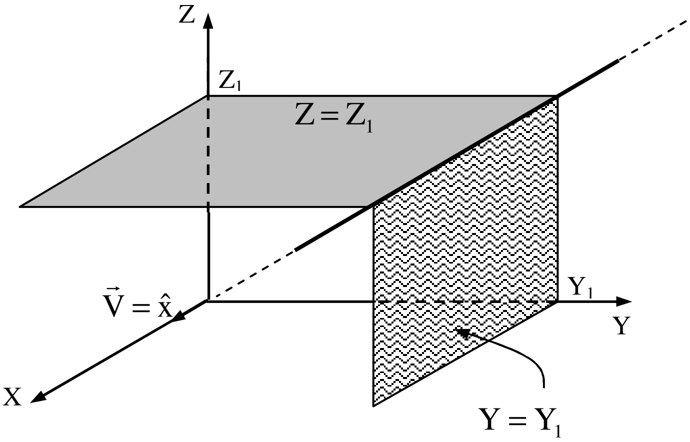
$$r\begin{cases} x = x_1 + t\cdot a \\ y = y_1 + t\cdot b \\ z = z_1 \end{cases}$$ → Equações paramétricas

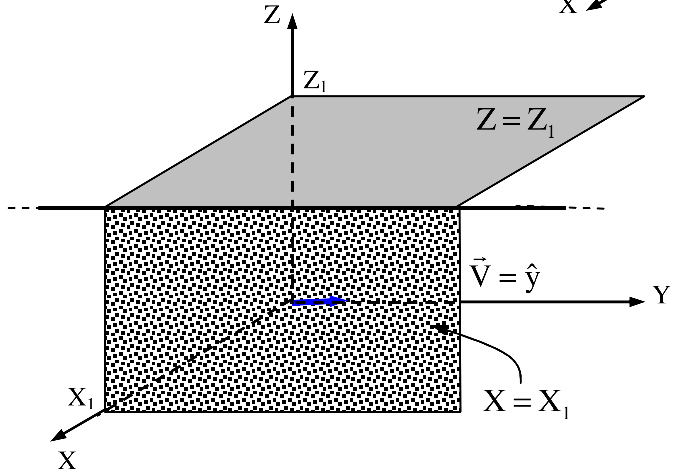
$$r\left\{\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b},\quad z = z_1\right.$$ → Equações simétricas

$$r\begin{cases} z = z_1 \\ y = mx + n \end{cases}$$ → Equações reduzidas em função de X

d) Reta paralela ao eixo coordenado OX

$$r\begin{cases} y = y_1 \\ z = z_1 \end{cases}$$



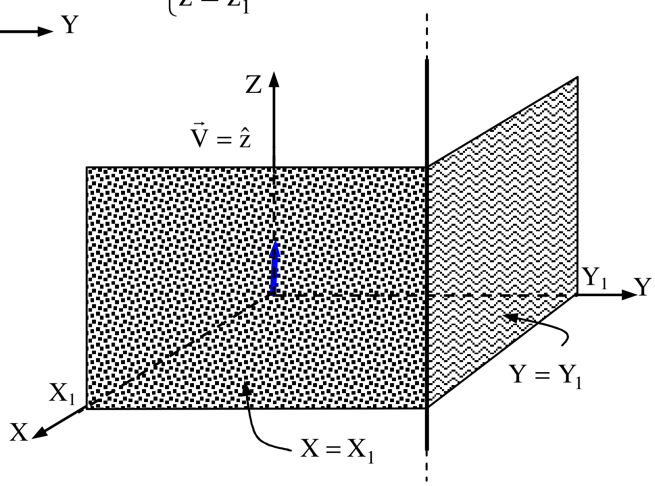


e) Reta paralela ao eixo coordenado OY

$$r\begin{cases} x = x_1 \\ z = z_1 \end{cases}$$

f) Reta paralela ao eixo coordenado OZ

$$r\begin{cases} x = x_1 \\ y = y_1 \end{cases}$$



2.5 – ÂNGULO ENTRE DUAS RETAS

Sejam as retas r_1, que passa pelo ponto A_1 e tem a direção de um vetor $\vec{v}_1$, e r_2, que passa pelo ponto A_2 e tem a direção de um vetor $\vec{v}_2$, chama-se ângulo entre duas retas r_1 e r_2 o menor ângulo entre os vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$.

$$\cos\theta = \frac{|\vec{v}_1 \bullet \vec{v}_2|}{|\vec{v}_1||\vec{v}_2|}, \quad \text{com} \quad 0 \le \theta \le 90º$$

2.6 – CONDIÇÃO DE PARALELISMO DE DUAS RETAS

Duas retas r_1 e r_2 são paralelas quando $\vec{v}_1 = m\vec{v}_2$.

2.7 – CONDIÇÃO DE ORTOGONALIDADE DE DUAS RETAS

Duas retas r_1 e r_2 são ortogonais quando $\vec{v}_1 \bullet \vec{v}_2 = 0$.

2.8 – CONDIÇÃO DE COPLANARIDADE DE DUAS RETAS

A reta r_1, que passa por um ponto A_1 e tem a direção de um vetor $\vec{v}_1$, e a reta r_2, que passa por um ponto A_2 e tem a direção de um vetor $\vec{v}_2$, são coplanares se os vetores $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ e $\overrightarrow{A_1A_2}$ forem coplanares, ou seja,

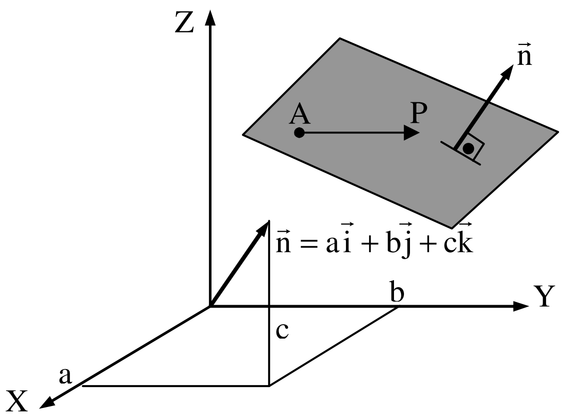
$$\vec{v}_1 \bullet \vec{v}_2 \times \overrightarrow{A_1A_2} = 0$$

CAPÍTULO 3
ESTUDO DOS PLANOS

3.1 – EQUAÇÃO GERAL DO PLANO

Seja $A(x_1, y_1, z_1)$ um ponto pertencente a um plano π e $\vec{n} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ um vetor, não nulo, normal (ortogonal) ao plano. Para que o ponto P pertença ao plano é necessário que:

$$\vec{n} \bullet \overrightarrow{AP} = 0$$



Sendo $\overrightarrow{AP} = (x - x_1)\vec{i} + (y - y_1)\vec{j} + (z - z_1)\vec{k}$ e $\vec{n} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$,

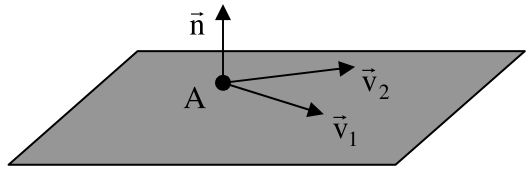
$$\left((x - x_1)\vec{i} + (y - y_1)\vec{j} + (z - z_1)\vec{k}\right) \bullet \left(a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}\right) = 0$$
$$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$$

$ax + by + cz + d = 0$	$\rightarrow$	Equação cartesiana do plano

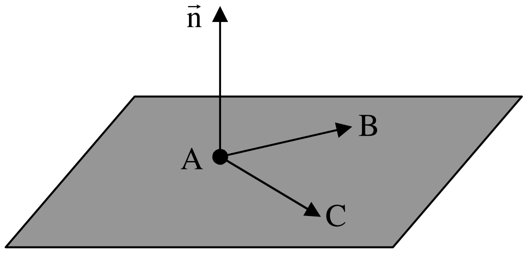
Observe que os coeficientes a, b e c da equação cartesiana representam as coordenadas do vetor normal ao plano. O coeficiente d é o que diferencia um plano dos outros planos paralelos a π.

3.2 – DETERMINAÇÃO DE UM PLANO

1) Plano que passa por um ponto A e é paralelo a dois vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ não colineares.
   Neste caso: $\vec{n} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2$



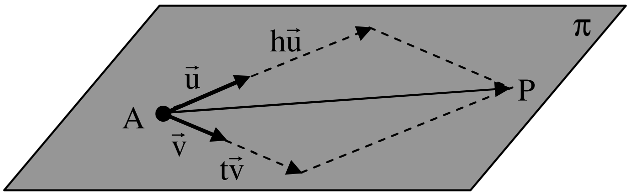
2) Plano que passa por três pontos A, B e C não colineares.
Neste caso: $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$



3.3 – EQUAÇÕES PARAMÉTRICAS DO PLANO

Seja $A(x_o, y_o, z_o)$ um ponto do plano π e $\vec{u} = a_1\vec{i} + \vec{b}_1\vec{j} + \vec{c}_1\vec{k}$ e $\vec{v} = a_2\vec{i} + \vec{b}_2\vec{j} + \vec{c}_2\vec{k}$ dois vetores não colineares. O ponto P pertence ao plano π se,

$$\overrightarrow{AP} = h\vec{u} + t\vec{v} \quad \rightarrow \quad \text{Equação paramétrica vetorial do plano}$$



Substituindo as coordenadas dos vetores $\overrightarrow{AP} = (x - x_0)\vec{i} + (y - y_0)\vec{j} + (z - z_0)\vec{k}$, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ na equação vetorial do plano temos:

$$(x - x_o)\vec{i} + (y - y_o)\vec{j} + (z - z_o)\vec{k} = h(a_1\vec{i} + b_1\vec{j} + c_1\vec{k}) + t(a_2\vec{i} + \vec{b}_2\vec{j} + \vec{c}_2\vec{k})$$

Daí vem:

$$\begin{cases} x = x_o + h\,a_1 + t\,a_2 \\ y = y_o + h\,b_1 + t\,b_2 \\ z = z_o + h\,c_1 + t\,c_2 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \text{Equações paramétricas do plano}$$

3.4 – EQUAÇÃO SEGMENTÁRIA DO PLANO

Seja o plano π de equação $ax + by + cz + d = 0$,

1) Se $y = z = 0$ e $x = m \quad \rightarrow \quad am + d = 0 \quad \rightarrow \quad m = -\dfrac{d}{a}$

O ponto $A_1(m,0,0)$ é a interseção do plano π com o eixo dos x;

2) Se $x = z = 0$ e $y = n \quad \rightarrow \quad bn + d = 0 \quad \rightarrow \quad n = -\dfrac{d}{b}$

O ponto $A_2(0,n,0)$ é a interseção do plano π com o eixo dos y;

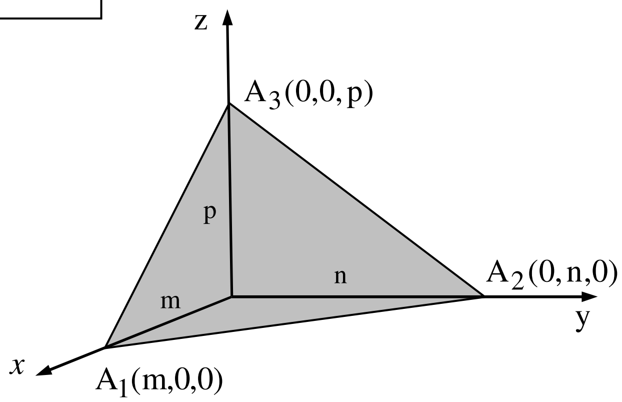
3) Se $x = y = 0$ e $z = p \quad \rightarrow \quad cp + d = 0 \quad \rightarrow \quad p = -\dfrac{d}{c}$

O ponto $A_3(0,0,p)$ é a interseção do plano π com o eixo dos z;

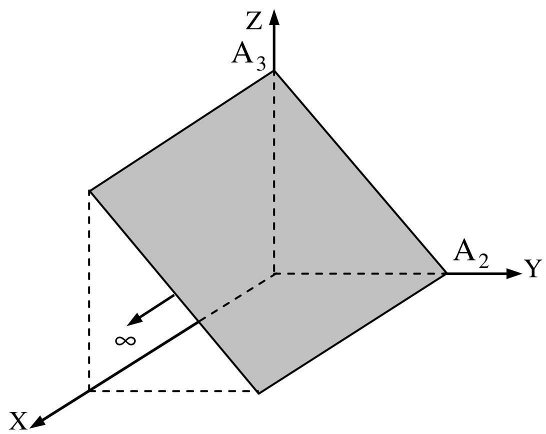
Da equação cartesiana,

$$ax + by + cz = -d \qquad \Rightarrow \qquad \frac{ax}{-d} + \frac{by}{-d} + \frac{cz}{-d} = 1 \qquad \qquad \frac{x}{-d/a} + \frac{y}{-d/b} + \frac{z}{-d/c} = 1$$

$$\boxed{\frac{x}{m} + \frac{y}{n} + \frac{z}{p} = 1}$$ Equação segmentária do plano



3.5 – <u>CASOS PARTICULARES</u>:



a) Plano paralelo ao eixo coordenado OX.

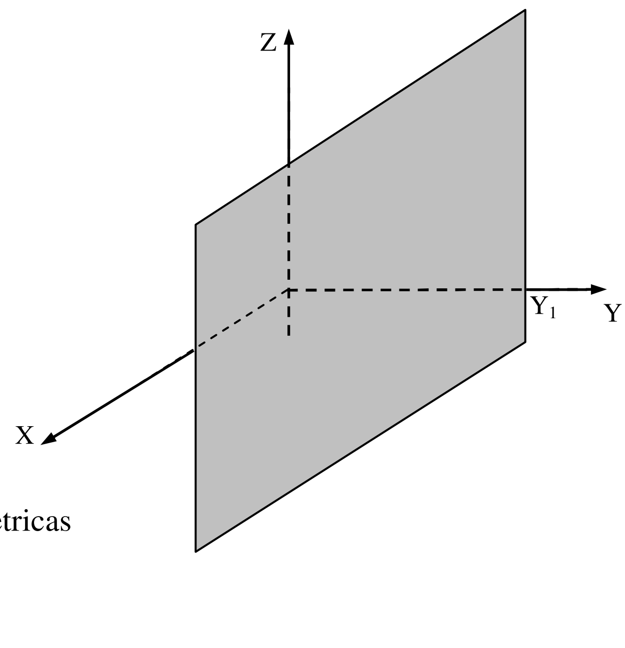
Fazendo $m \to \infty$ na equação segmentária,

$$\frac{x}{\infty} + \frac{y}{n} + \frac{z}{p} = 1 \quad \therefore \quad \frac{y}{n} + \frac{z}{p} = 1$$

Assim, na equação cartesiana $A = 0$,

$$by + cz = 0$$

b) Plano paralelo ao plano coordenado XZ.



$$r \begin{cases} x = x_1 + t \cdot a \\ y = y_1 \\ z = z_1 + t \cdot c \end{cases} \quad \rightarrow \quad \text{Equações paramétricas}$$

$$r \left\{ \frac{x - x_1}{a} = \frac{z - z_1}{c},\ x = x_1 \right. \quad \rightarrow \quad \text{Equações simétricas}$$

CAPÍTULO 4
COORDENADAS CURVILÍNIAS

4.1 – DEFINIÇÃO

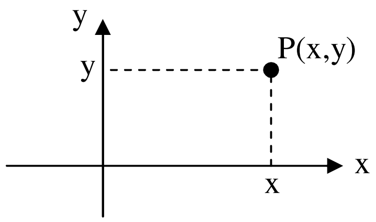
Sistema de coordenadas é um sistema de referênciamento que permite a localização de um ponto qualquer do espaço. Para especificar a posição de cada ponto neste espaço é necessário definir uma origem e uma orientação.

As coordenadas cartesianas são as mais utilizadas, porém, outros sistemas de igual importância são os sistemas de coordenadas polares, cilíndricas e esféricas.

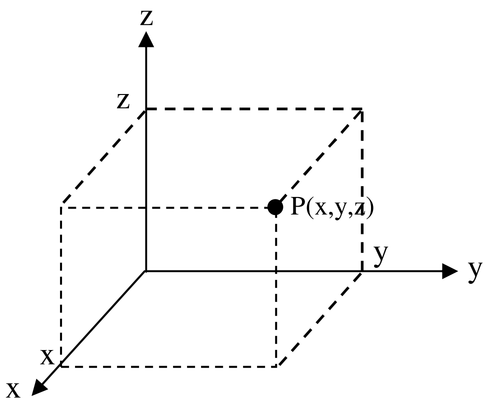
4.2 – SISTEMA DE COORDENADAS RETANGULARES

É o sistema de coordenadas, já estudado, composto pelos eixos coordenados x, y e z.

a) no espaço bidimensional (plano):



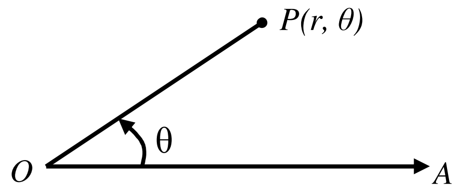
b) no espaço tridimensional:



4.3 – SISTEMA DE COORDENADAS POLARES

O sistema de coordenadas polares marca a posição de um ponto em um plano. Além disso, certas curvas têm equações mais simples quando esse sistema é usado. Nas coordenadas polares as três cônicas estudadas: parábola, elipse e hipérbole, têm uma equação.

No sistema cartesiano, as coordenadas são números chamados de abscissa e ordenada que são as medidas das distâncias orientadas a dois eixos fixos. No sistema de coordenadas polares, as coordenadas consistem em uma distância orientada e na medida de um ângulo relativo a um ponto fixo e a um eixo fixo. O ponto fixo é chamado de **pólo** (ou origem), sendo designado pela letra O. O eixo fixo é chamado de **eixo polar** (ou reta polar) e será designado por OA ou eixo de 0^o. O eixo OA é, normalmente colocado na horizontal, orientado para a direita e se estende indefinidamente.

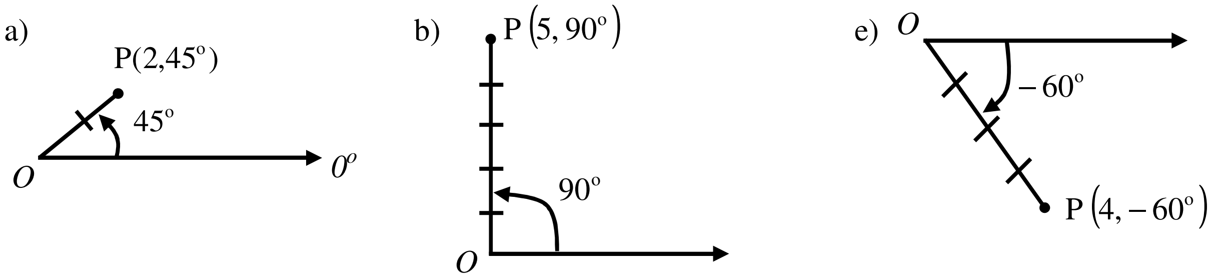


Seja P um ponto qualquer do plano, distinto de O. Seja θ a medida do ângulo AOP, positiva quando considerada no sentido anti-horário e negativa quando no sentido horário, tendo como lado inicial OA e como lado final OP. Então, se r for a distância não orientada de O a P (isto é , $r = \left|\overline{OP}\right|$), o conjunto de coordenadas polares de P será dado por r e θ, e escrevemos essas coordenadas como (r, θ).

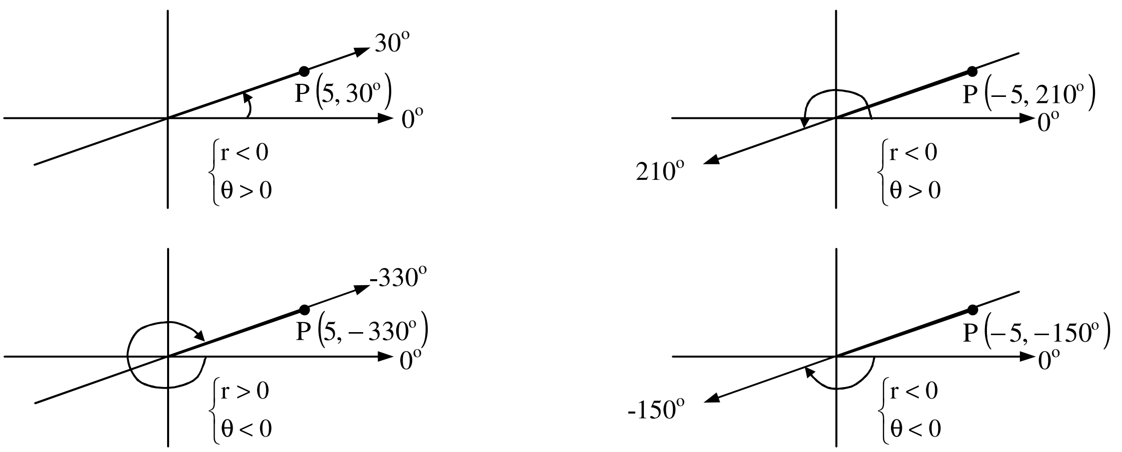
<u>Exemplo 1</u>: Represente graficamente cada um dos seguintes pontos em coordenadas polares:

a) $(2, 45^o)$ b) $(5, 90^o)$ c) $(1, 120^o)$ d) $(3, 210^o)$ e) $(4, -60^o)$ f) $\left(\frac{5}{2}, -180^o\right)$

Solução:



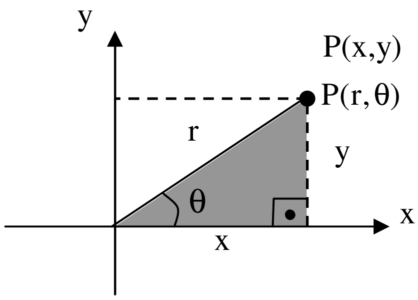
<u>Exemplo 2</u>: Um dado ponto tem um número ilimitado de conjuntos de coordenadas polares. Basta lembrarmos da trigonometria e veremos que o ponto $P(5, 30^o)$ é o mesmo que o ponto $P(5, 390^o)$, $P(5, -330^o)$, $P(-5, 210^o)$ ou $P(-5, -150^o)$.



<u>Exemplo 3</u>: Se $r = 0$ e θ é qualquer número real, temos a origem, que é designada por $(0, \theta)$.

Relações de transformação entre os sistemas de coordenadas polares e retangulares

Frequentemente, queremos nos referir às coordenadas de um ponto nos dois sistemas de coordenadas: cartesianas retangulares e polares. Para fazer isso, tomamos a origem do primeiro sistema coincidindo com a origem do segundo, o eixo polar como o eixo ox e o eixo de $\theta = 90^{o}$ como o eixo oy. Das projeções de vetores e das identidades trigonométricas podemos escrever as seguintes equações que nos permitem converter coordenada retangular em polar e vice-versa.



Polar $\rightarrow$ retangular: $x = r \cdot \cos\theta$;	$y = r \cdot \text{sen}\,\theta$
Retangular $\rightarrow$ polar: $r = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$;	$\text{tg}\,\theta = \dfrac{y}{x}$

Exemplo 4: Dado o ponto cujas coordenadas polares são $P(-6, 315^{o})$. Encontre suas coordenadas cartesianas retangulares.

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\,\text{sen}\theta$$
$$x = -6\cos 315^{o} \qquad y = -6\,\text{sen}\,315^{o}$$
$$x = -6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad y = -6\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$x = -3\sqrt{2} \qquad y = 3\sqrt{2}$$

$$P\left(-3\sqrt{2}, 3\sqrt{2}\right)$$

O gráfico de uma equação em coordenadas polares r e *θ* consiste em todos aqueles pontos *P* que têm pelo menos um par de coordenadas que satisfaçam a equação. Se a equação de um gráfico for dada em coordenadas polares, ela será chamada de equação polar.

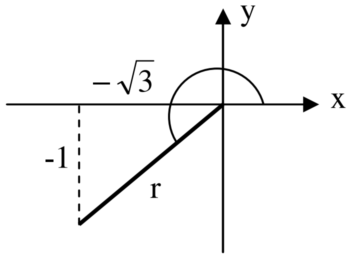
Exemplo 5: Dado que a equação polar de um gráfico é $r^2 = 4\,\text{sen}\,2\theta$ ache a equação cartesiana.

Solução: Como $\text{sen}\,2\theta = 2\,\text{sen}\theta\cos\theta$ substituindo as equações dadas para transformações, $\text{sen}\,2\theta = 2\left(\frac{y}{r}\right)\left(\frac{x}{r}\right)$. Substituindo ainda, $r^2 = x^2 + y^2$ obtemos:

$$x^2 + y^2 = 4 \cdot 2\left(\frac{y}{r}\right)\left(\frac{x}{r}\right) \qquad \Rightarrow \qquad x^2 + y^2 = \frac{8xy}{r^2}$$

$$x^2 + y^2 = \frac{8xy}{x^2 + y^2} \qquad \Rightarrow \qquad (x^2 + y^2)^2 = 8xy$$

Exemplo 6: Ache (r, θ) se $r > 0$ e $0^o < \theta < 360^o$ para o ponto cuja representação cartesiana é $\left(-\sqrt{3},-1\right)$.



Solução: Verificamos no gráfico o ponto $\left(-\sqrt{3},-1\right)$

Como r > 0, temos $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3+1} = 2$

Como $tg\ \theta = \dfrac{y}{x} = \dfrac{-1}{-\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

Considerando que $180^o < \theta < 270^o \quad \Rightarrow \quad \theta = 210^o$ portanto o ponto é $(2, 210^o)$

Exemplo 7: Ache a equação polar do gráfico cuja equação cartesiana é $x^2 + y^2 - 4x = 0$

Solução: substituindo $x = r \cdot \cos\theta$ *e* $y = r \cdot sen\theta$ na equação dada temos:

$$r^2 \cdot \cos^2\theta + r^2 \cdot sen^2\theta - 4r \cdot \cos\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad r^2(sen^2\theta + \cos^2\theta) - 4r \cdot \cos\theta = 0$$

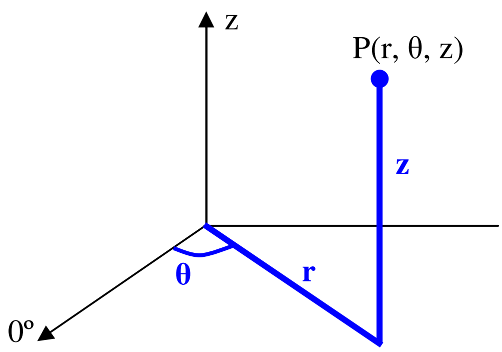
logo $r^2 - 4r\cos\theta = 0 \quad \therefore \quad r(r - 4\cos\theta) = 0,\quad$ assim : $r = 0$ ou $r - 4\cos\theta = 0$

O gráfico de $r = 0$ é a origem, contudo, ele é um ponto do gráfico de $r - 4\cos\theta = 0$, pois, $r = 0$ quando $\theta = 90^o$.

Logo, a equação polar do gráfico é $r = 4\cos\theta$.

4.4 – SISTEMAS DE COORDENADAS CILÍNDRICAS

A representação das coordenadas cilíndricas de um ponto P é (r, θ, z), onde r e θ são as coordenadas polares da projeção de P em um plano polar e z é a distância orientada desse plano polar até P.

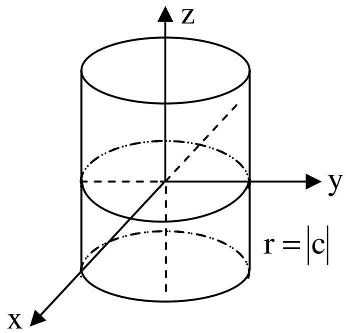


Exemplo 1: Faça um esboço do gráfico de cada uma das seguintes equações onde c é uma constante:

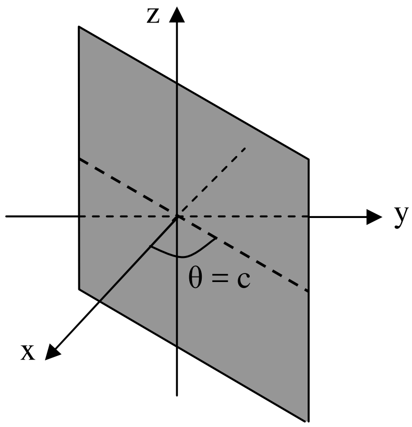
a) $r = c$ b) $\theta = c$ c) $z = c$

Solução:

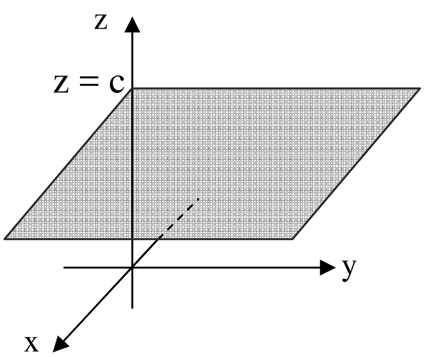
a) Para um ponto *P (r, θ, z)* do gráfico de $r = c$, θ e z podem assumir quais quer valores e *r* é uma constante. O gráfico é um cilindro circular reto, tendo $|c|$ como raio e z como seu eixo.



b) Para todos os pontos *P (r, θ, z)* do gráfico de $\theta = c$, r e z podem assumir qualquer valor, enquanto que θ permanece constante. O gráfico é um plano que passa pelo eixo z.



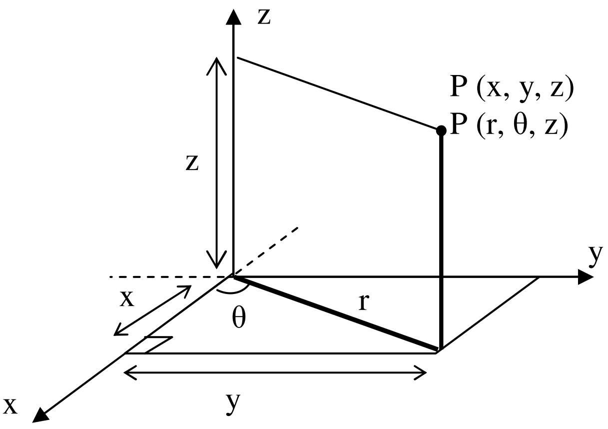
c) O gráfico de $z = c$ é um plano paralelo ao plano polar e a uma distância orientada de c unidades.



O nome coordenadas cilíndricas vem do fato de que o gráfico de $r = c$ é um cilindro circular reto, como foi mostrado no exemplo acima. Coordenadas cilíndricas são usadas em um problema físico quando há um eixo de simetria.

Relações de transformação entre os sistemas de coordenadas cilíndricas e retangulares

Suponha que sejam colocados um sistema de coordenadas cartesianas e um sistema de coordenadas cilíndricas tais que o plano *xy* seja o plano polar e o lado positivo do eixo x seja o eixo polar. Então o ponto P tem por coordenadas P(x, y, z) e P(r, θ, z) , relacionadas pelas equações:



Cilíndricas → retangulares:	$x = r \cdot \cos\theta$	$y = r \cdot \text{sen}\theta$	$z = z$	
Retangulares → cilíndricas:	$r^2 = x^2 + y^2$	$\text{tg}\ \theta = \dfrac{y}{x}$	se $x \neq 0$	$z = z$

Exemplo 2: Ache uma equação em coordenadas cartesianas das seguintes superfícies, cujas equações estão expressas em coordenadas cilíndricas e identifique a superfície:

a) $r = 6\ \text{sen}\ \theta$ b) $r \cdot (3\cos\theta + 2\text{sen}\theta) + 6z = 0$

Solução:

a) Multiplicando ambos os lados da equação por r, obtemos $r^2 = 6\, r\ \text{sen}\ \theta$. Como $r^2 = x^2 + y^2$ e $r\ \text{sen}\ \theta = y$, então $x^2 + y^2 = 6y$. Essa equação pode ainda ser escrita como $x^2 + (y-3)^2 = 9$, mostrando que o seu gráfico é um cilindro circular reto cuja secção transversal no plano *xy* é a circunferência com centro em (0, 3) e raio 3.

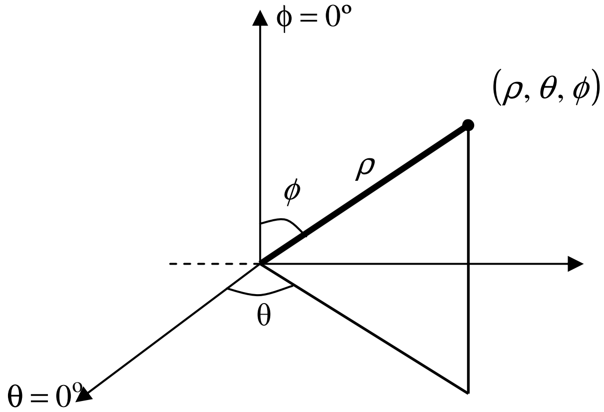
b) Substituindo $r\cos\theta$ por x e $r\ sen\ \theta$ por y, obtemos a equação $3x + 2y + 6z = 0$. Assim, o gráfico é um plano passando pela origem e com (3, 2, 6) como vetor normal.

Exemplo 3: Ache uma equação em coordenadas cilíndricas para cada uma das seguintes superfícies, cujas equações são dadas em coordenadas cartesianas (retangulares) e identifique a superfície:

a) $x^2 + y^2 = z$ b) $x^2 - y^2 = z$

4.5 – SISTEMAS DE COORDENADAS ESFÉRICAS

Num sistema de coordenadas esféricas há um plano polar e um eixo perpendicular ao plano polar (eixo z ou $\phi = 0^o$), com a origem deste eixo na origem do plano polar. Um ponto é localizado por três números e a representação deste ponto P em **coordenadas esféricas** é $P(\rho, \theta, \phi)$, onde $\rho = \left|\overrightarrow{OP}\right|$, θ é a medida do ângulo polar da projeção de P sobre o plano polar e ϕ é a medida do menor ângulo medido entre o lado positivo do eixo z e a semirreta $\overline{OP}$. A origem tem como representação com coordenadas esféricas $(0, \theta, \phi)$, onde θ e ϕ podem ser qualquer valor.

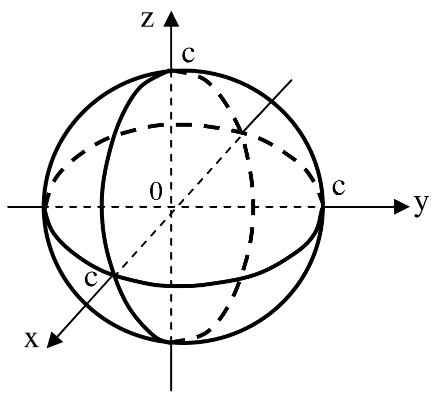


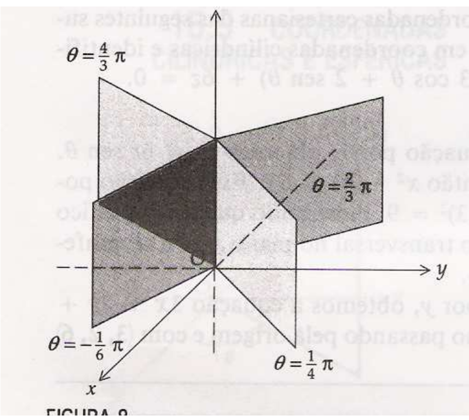
Exemplo 1: Faça um esboço do gráfico de cada uma das seguintes equações, onde c é uma constante:

a) $\rho = c$ e $c > 0$ b) $\theta = c$ c) $\phi = c$ e $0 < c < 180^o$

Solução:

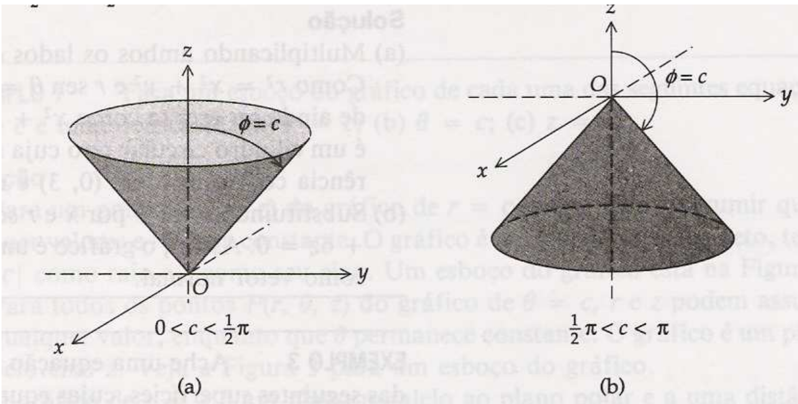
a) Todo ponto $P(\rho, \theta, \phi)$ do gráfico de $\rho = c$ tem o mesmo valor de ρ, θ pode ser qualquer número, e $0 \le \phi \le 180^o$. Segue que o gráfico é uma esfera de raio c e centro na origem.





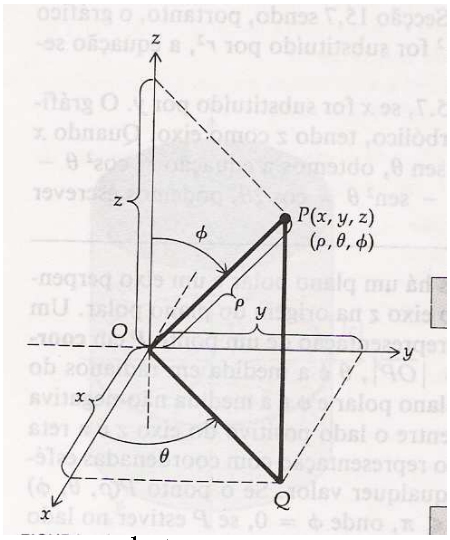
b) Para qualquer ponto $P(\rho, \theta, \phi)$ no gráfico de $\theta = c$, ρ pode ser qualquer número não-negativo e ϕ qualquer número no intervalo fechado $[0, \pi]$, e θ é constante. O gráfico é um semiplano contendo o eixo z e é obtido girando o semiplano $x \ge 0$ do plano xz de um ângulo de c radianos ou graus em torno do eixo z. A figura mostra esboços dos semiplanos para $\theta = \frac{1}{4}\pi$, $\theta = \frac{2}{3}\pi$, $\theta = \frac{4}{3}\pi$ e $\theta = -\frac{1}{6}\pi$.

c) O gráfico de $\phi = c$ contém todos os pontos $P(\rho, \theta, \phi)$ para os quais ρ é qualquer número não-negativo, θ é qualquer número e ϕ é a constante c. O gráfico é um cone, tendo seu vértice na origem e o eixo z como eixo. A figura mostra esboços do cone para $0 < c < 90^o$ e $90^o < c < 180^o$, respectivamente.



<u>*Relações de transformação entre os sistemas de coordenadas esféricas e retangulares*</u>

Como o gráfico de $\rho = c$ é uma esfera, conforme foi visto no exemplo anterior, temos o nome "coordenadas esféricas". Em problemas físicos, onde existe um ponto de simetria, as coordenadas esféricas são frequentemente utilizadas. Colocando juntos um sistema de coordenadas esféricas e um sistema de coordenadas cartesianas (retangulares), conforme mostra a figura, obtemos relações entre os dois tipos de coordenadas de um ponto P através das equações:



$x = \rho \cdot \text{sen}\, \phi \cdot \cos \theta \qquad y = \rho \cdot \text{sen}\, \phi \cdot \text{sen}\, \theta$

$z = \rho \cdot \cos \phi$

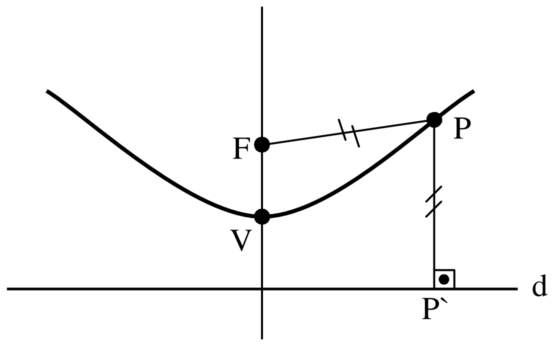
Elevando ao quadrado cada uma dessas relações anteriores, e somando temos:

$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$

CAPÍTULO 5
CÔNICAS

5.1 – PARÁBOLA

Consideremos em um plano uma reta d e um ponto F não pertencente a d.
Parábola é o lugar geométrico dos pontos do plano que são equidistantes de F e d.



P pertence a parábola se, e somente se:

$$d(F,P) = d(P`,P) \qquad \text{ou} \qquad |\overrightarrow{FP}| = |\overrightarrow{P`P}|$$

OBS: $F \notin d$, pois, caso contrário, a parábola se degeneraria numa reta.

Elementos:

foco: é o ponto F
diretriz: é a reta d.
eixo: é a reta que passa pelo foco e é perpendicular à diretriz.
vértice: é o ponto V de interseção da parábola com o seu eixo.

Equação da parábola de vértice na origem do sistema:

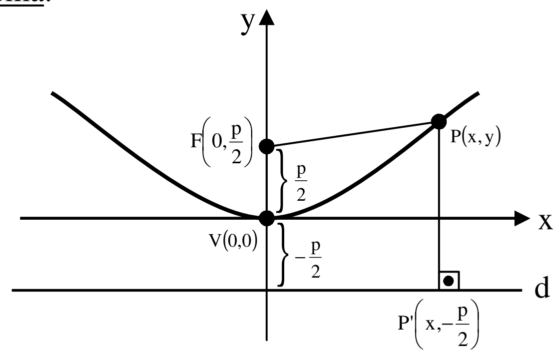
Pela definição:

$$|\overrightarrow{FP}| = |\overrightarrow{P`P}|$$

Como:

$$\overrightarrow{FP} = (x-0)\vec{i} + (y - p/2)\vec{j}$$

$$\overrightarrow{P`P} = (x-x)\vec{i} + (y + p/2)\vec{j}$$

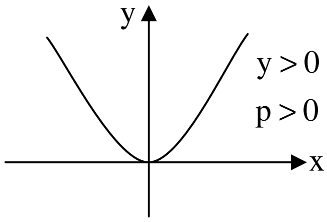


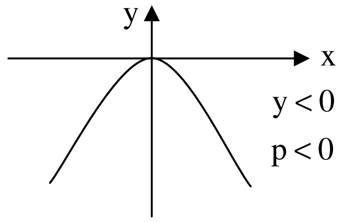
Tem-se:

$$\sqrt{x^2 + (y-p/2)^2} = \sqrt{(y+p/2)^2} \quad \Rightarrow \quad x^2 = 2py$$

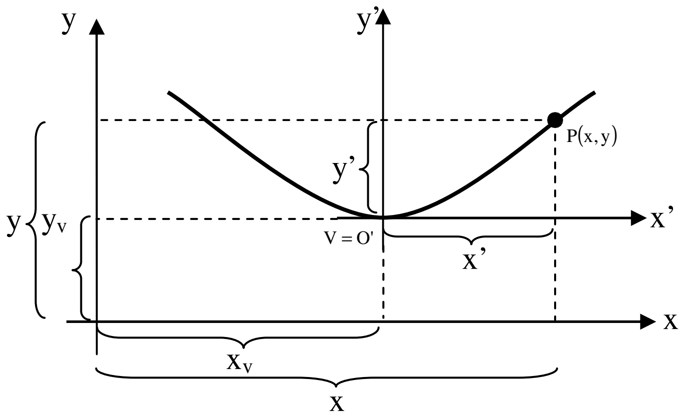
Equação reduzida da parábola

Como x^2 é sempre positivo, os sinais de p e y são sempre iguais:





<u>Equação da parábola de vértice fora da origem do sistema</u>:



Do gráfico temos:

$x = x' + x_v \quad => \quad x' = x - x_v$

$y = y' + y_v \quad => \quad y' = y - y_v$

Equação da parábola no sistema S' => $x'^2 = 2py'$

No sistema S:

$$(x - x_v)^2 = 2p(y - y_v) \quad => \quad \text{Equação padrão da parábola}$$

<u>Equação explícita da parábola</u>

Da equação padrão $(x - x_v)^2 = 2p(y - y_v)$ temos:

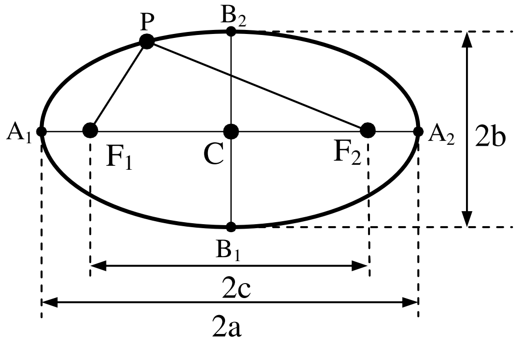
$$x^2 - 2xx_v + x_v^2 = 2py - 2py_v \quad \rightarrow \quad 2py = x^2 - 2x_v x + x_v^2 + 2py_v$$

$$y = ax^2 + bx + c \quad \rightarrow \quad \text{Equação explícita da parábola}$$

5.2 – <u>ELIPSE</u>

Elipse é o lugar geométrico dos pontos de um plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos desse plano é constante.

Sejam F_1 e F_2 dois pontos distintos de um plano,



Ao conjunto de todos os pontos P tais que,

$$d(P,F_1) + d(P,F_2) = 2a \qquad \text{ou} \qquad \left|\overrightarrow{PF_1}\right| + \left|\overrightarrow{PF_2}\right| = 2a$$

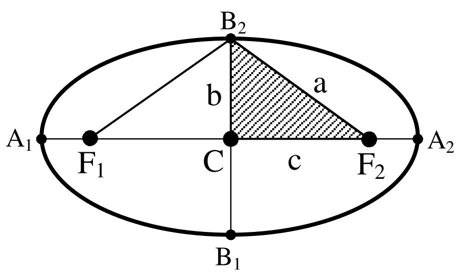
com $2a > 2c$, dá-se o nome de elipse.

<u>Elementos:</u>

<u>focos</u>: são os pontos F_1 e F_2.
<u>distância focal</u>: é a distância 2c entre os focos.
<u>centro</u>: é o ponto médio C do segmento $\overline{F_1F_2}$.
<u>eixo maior</u>: é o segmento $\overline{A_1A_2}$ de comprimento 2a.
<u>eixo menor</u>: é o segmento $\overline{B_1B_2}$ de comprimento 2b.
<u>vértices</u>: são os pontos A_1, A_2, B_1 e B_2.
<u>Excentricidade</u>: é o número e dado por $e = \dfrac{c}{a}$.

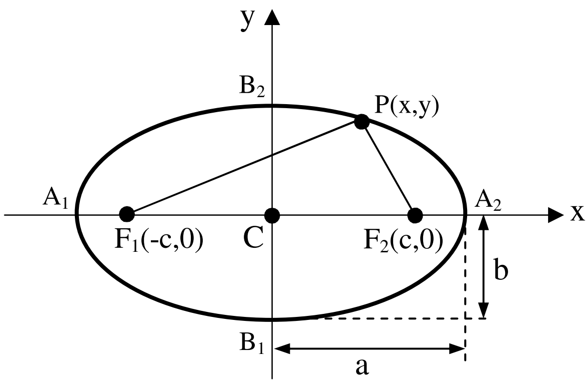
Como $c < a$, tem-se que: $0 < e < 1$.

OBS: Em toda elipse vale a relação $a^2 = b^2 + c^2$



Equação de elipse com vértice na origem do sistema:

Da definição:



$$\left|\overrightarrow{PF_1}\right| + \left|\overrightarrow{PF_2}\right| = 2a$$

Como:

$$\overrightarrow{F_1P} = (x + c)\vec{i} + (y - 0)\vec{j}$$

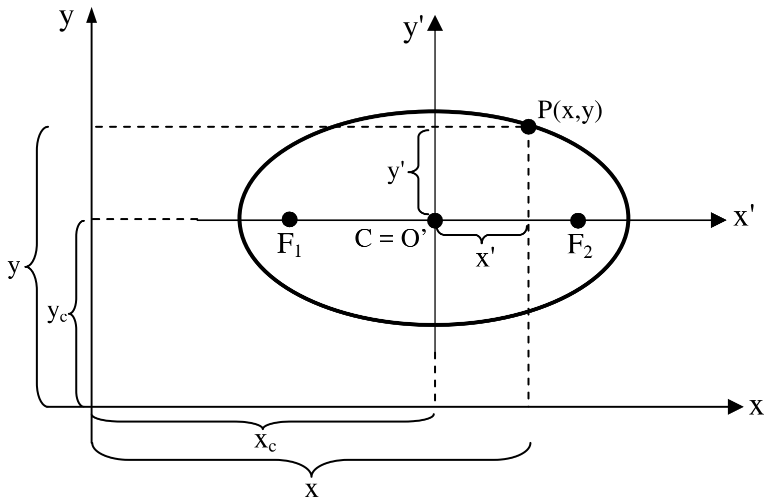
$$\overrightarrow{F_2P} = (x - c)\vec{i} + (y - 0)\vec{j}$$

Tem-se:

$$\sqrt{(x + c)^2 + (y)^2} + \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2a$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \rightarrow \qquad \text{Equação reduzida de elipse}$$

Equação da elipse de centro fora da origem do sistema:



Do gráfico temos:

$$x = x' + x_c \qquad => \qquad x' = x - x_c$$

$$y = y' + y_c \qquad => \qquad y' = y - y_c$$

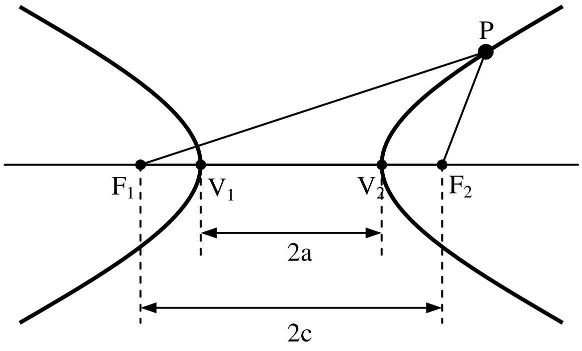
Equação da elipse no sistema S' => $\dfrac{x'^2}{a^2} + \dfrac{y'^2}{b^2} = 1$

No sistema S:

$$\frac{(x - x_c)^2}{a^2} + \frac{(y - y_c)^2}{b^2} = 1 \quad => \quad \text{Equação padrão da elipse}$$

5.3 – HIPÉRBOLE

É o lugar geométrico dos pontos de um plano cuja diferença das distâncias, em valor absoluto, a dois pontos fixos desse plano é constante.



Seja um número **a** tal que 2a < 2c. Ao conjunto de todos os pontos P do plano tais que:

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a \qquad \text{ou} \qquad \left| |\overrightarrow{F_1P}| - |\overrightarrow{F_2P}| \right| = 2a$$

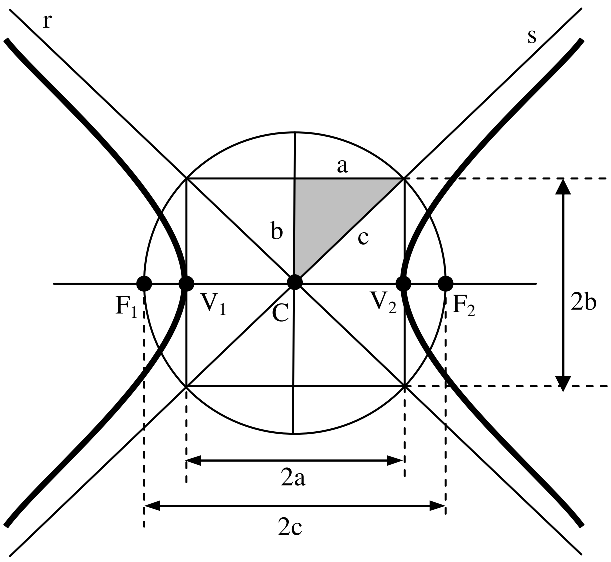
dá-se o nome de hipérbole.

Elementos:

- focos: são os pontos F_1 e F_2.
- distância focal: é a distância 2c entre os focos.
- centro: é o ponto médio C do segmento $\overline{F_1F_2}$.
- vértices: são os pontos V_1 e V_2.
- eixo real: é o segmento $\overline{A_1A_2}$ de comprimento 2a.
- eixo imaginário: é o segmento $\overline{B_1B_2}$ de comprimento 2b.
- assíntotas: são retas r e s das quais a hipérbole se aproxima cada vez mais à medida que os pontos de afastam dos focos. Esta aproximação é contínua e lenta de forma que a tendência da hipérbole é tangenciar suas assíntotas no infinito.
- excentricidade: é o número $e = \dfrac{c}{a}$. Como c > a, e > 1.

Da figura,

$$c^2 = a^2 + b^2$$



Equação da hipérbole com centro na origem do sistema:

Da definição:

$$\left| \left|\overrightarrow{F_1P}\right| - \left|\overrightarrow{F_2P}\right| \right| = 2a$$

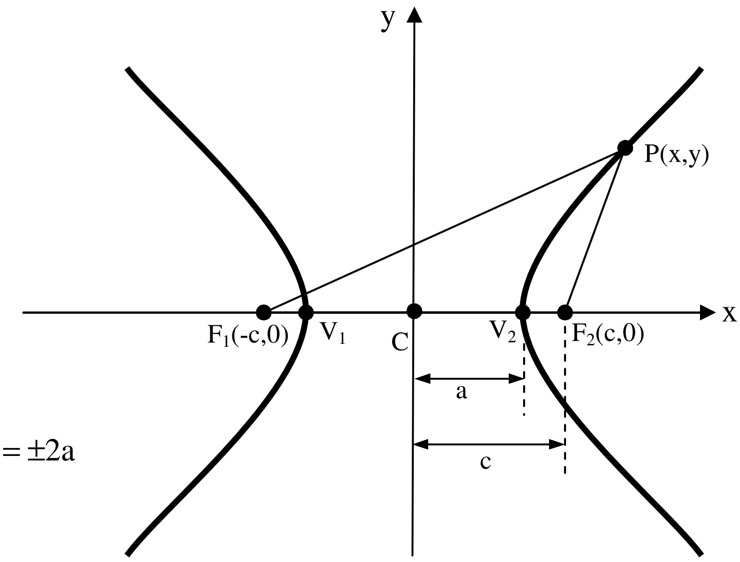
Como:

$$\overrightarrow{F_1P} = (x + c)\vec{i} + (y - 0)\vec{j}$$

$$\overrightarrow{F_2P} = (x - c)\vec{i} + (y - 0)\vec{j}$$

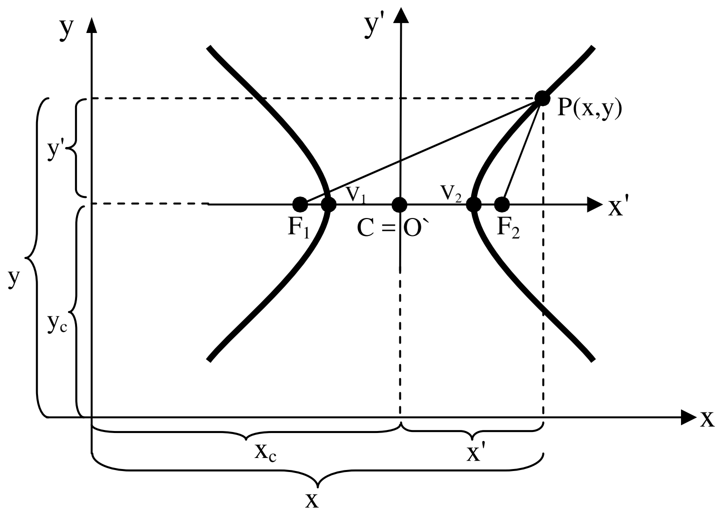
Tem-se:

$$\sqrt{(x+c)^2 + (y)^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a$$



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \rightarrow \qquad \text{Equação reduzida de hipérbole}$$

Equação da hipérbole de centro fora da origem do sistema:



Do gráfico temos:

$$x = x' + x_c \qquad => \qquad x' = x - x_c$$

$$y = y' + y_c \qquad => \qquad y' = y - y_c$$

Equação da hipérbole no sistema S' $=>$ $\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1$

No sistema S:

$$\frac{(x - x_c)^2}{a^2} - \frac{(y - y_c)^2}{b^2} = 1 \quad => \quad \text{Equação padrão da hipérbole}$$

CAPÍTULO 6
SUPERFÍCIES QUÁDRICAS

6.1 - INTRODUÇÃO:

A equação geral do 2º grau nas três variáveis x, y e z :

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz + mx + ny + pz + q = 0$$

Onde pelo menos um dos coeficientes a, b, c, d, e, ou f é diferente de zero, representa uma superfície quádrica, ou simplesmente, uma quádrica.

Se a superfície quádrica dada pela equação acima for cortada pelos planos coordenados ou por planos paralelos a eles, a curva de interseção será uma cônica denominada de Traço.

6.2 - SUPERFÍCIES QUÁDRICAS CENTRADAS

Através de mudanças de coordenadas por rotação e/ou translação, a equação geral, dada anteriormente, pode ser transformada em uma das formas:

$$\pm \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = 1$$

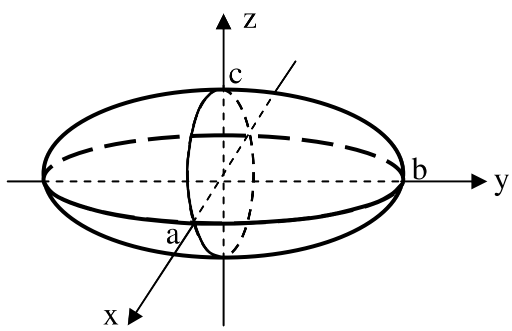
Denominadas, formas canônicas ou padrão de uma superfície quádrica centrada. As possíveis combinações de sinais nesta equação permitem concluir a existência de apenas três tipos de superfícies, conforme sejam três, dois ou um o número de coeficientes positivos dos termos do 1º membro da equação. Se os referidos coeficientes forem todos negativos, não existe lugar geométrico.

6.2.1 – ELIPSÓIDE

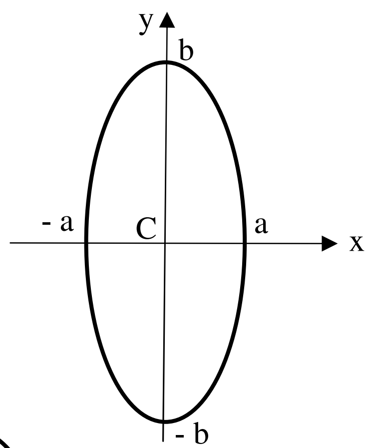
O elipsóide é a superfície representada pela equação:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

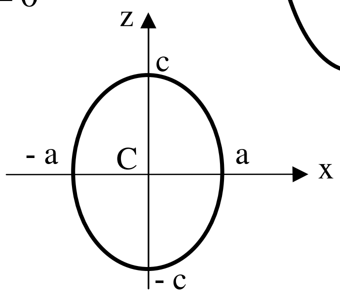
em que todos os coeficientes são positivos. E ainda, a, b e c são reais positivos e representam as medidas dos semieixos do elipsóide. Observamos ainda que os pontos $(\pm a, 0, 0)$, $(0, \pm b, 0)$, $(0, 0, \pm c)$ são soluções da equação na forma canônica do elipsóide.



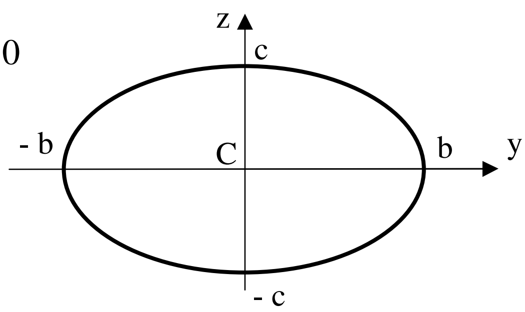
O traço no plano xOy é a elipse: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ z=0$



O traço no plano xOz é a elipse: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\ y=0$



O traço no plano yOz é a elipse: $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\quad x=0$



Se pelo menos dois dos valores de a, b e c são iguais, o elipsóide é de revolução. Podemos verificar que as interseções do elipsóide com planos x = k, y = k ou z = k (k = constante), resultam numa elipse, num ponto ou no conjunto vazio.

No caso de a = b = c, a equação do elipsóide fica: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{a^2}=1$ ou $x^2+y^2+z^2=a^2$ e representa uma superfície esférica de centro (0, 0, 0) e raio a.

Se o centro do elipsóide é o ponto (x_0, y_0, z_0) e seus eixos forem paralelos aos eixos coordenados, a equação na forma canônica, obtida por uma translação de eixos coordenados, assume a forma:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1$$

Da mesma forma, a superfície esférica de centro (x_0, y_0, z_0) e raio ***a***, tem equação:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=a^2$$

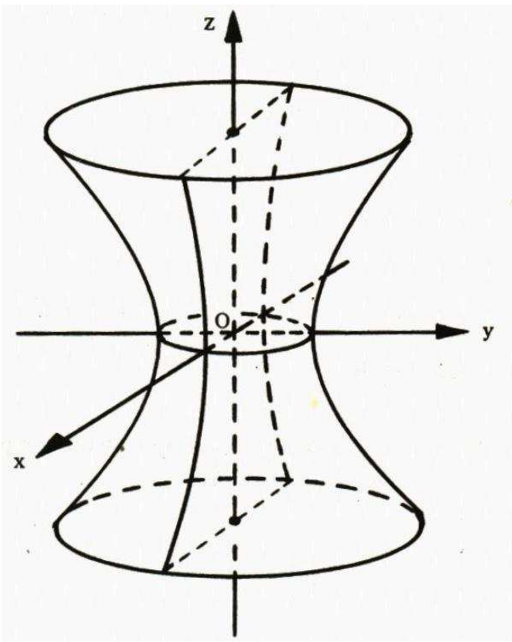
6.2.2 - <u>HIPERBOLÓIDE DE UMA FOLHA</u>

Se na equação $\pm\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}\pm\frac{z^2}{c^2}=1$ dois coeficientes dos termos do 1º membro são positivos e um é negativo, a equação representa um *hiperbolóide de uma folha.* As equações abaixo representam uma forma canônica do hiperbolóide de uma folha,

ao longo do eixo Ox ➔ $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

ao longo do eixo Oy ➔ $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

ao longo do eixo Oz ➔ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$



- O traço no plano xOy no hiperbolóide de uma folha, é uma **elipse.**
  $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad z=0$
- O traço no plano xOz no hiperbolóide de uma folha, é uma **hipérbole.**
  $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, \quad y=0$
- O traço no plano yOz no hiperbolóide de uma folha, é uma **hipérbole.**
  $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, \quad x=0$

Obs: Se na equação $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ tivermos $a=b$, o hiperbolóide é de revolução, gerado pela rotação de uma hipérbole em torno do seu eixo imaginário, no caso, o eixo Oz. O traço no plano xOy é a circunferência $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=1,\ z=0$ ou $x^2+y^2=a^2, \quad z=0$

Se o centro do hiperbolóide de uma folha é o ponto (x_0, y_0, z_0) e seus eixos forem paralelos aos eixos coordenados, a equação na forma canônica, obtida por uma translação de eixos coordenados, assume a forma:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}-\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1$$

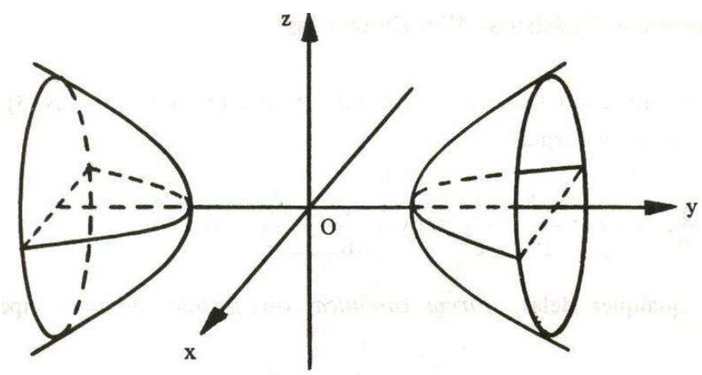
6.2.3 - HIPERBOLÓIDE DE DUAS FOLHAS

Se na equação $\pm\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}\pm\frac{z^2}{c^2}=1$ um coeficiente dos termos do 1º membro é positivo e dois são negativos, a equação representa um hiperbolóide de duas folhas. As equações a baixo são formas canônicas do hiperbolóide de duas folhas ao longo dos eixos:

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ ➔ eixo Ox.

$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ ➔ eixo Oy.

$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ ➔ eixo Oz



O traços nos planos xOy e yOz, no hiperbolóide de duas folhas são as **hipérboles**.

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1,\quad z=0$$

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,\quad x=0$$

Obs: o plano xOz não intercepta a superfície, nem qualquer plano y = k, onde $|\,k\,|<b$.

Se $|\,k\,|>b$, o traço no plano y = k é a elipse:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=\frac{k^2}{b^2}-1,\quad k=y$$

Os traços nos planos x = k e z = k são hipérboles. Se na equação $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ tivermos $a=c$, o hiperbolóide é de revolução, gerado pela rotação de uma hipérbole em torno de seu eixo real. O traço no plano y = k, $|\,k\,|>b$, é a circunferência:

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{k^2}{b^2}-\frac{z^2}{a^2}=1,\quad y=k$$

Se o centro do hiperbolóide de duas folhas é o ponto (x_0, y_0, z_0) e seus eixos forem paralelos aos eixos coordenados, a equação na forma canônica, obtida por uma translação de eixos coordenados, assume a forma:

$$-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}-\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1$$

Resumo

As equações dos elipsóides e hiperbolóides podem ser reunidas em: $\pm\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}\pm\frac{z^2}{c^2}=1$.

E conforme os sinais dos termos do 1º membro, apresentados nesta ordem, temos o seguinte quadro:

FIGURA	SINAIS	AO LONGO DO EIXO
Elipsóide	+ + +	---------------------
Hiperbolóide de uma folha	- + +	Ox
Hiperbolóide de uma folha	+ - +	Oy
Hiperbolóide de uma folha	+ + -	Oz
Hiperbolóide de duas folhas	+ - -	Ox
Hiperbolóide de duas folhas	- + -	Oy
Hiperbolóide de duas folhas	- - +	Oz

6.3 – SUPERFÍCIES QUÁDRICAS NÃO CENTRADAS

Se nenhum dos coeficientes dos termos do 1º membro da equação abaixo for nulo, a forma canônica ou padrão de uma superfície quádrica não centrada é:

$$\pm\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}=cz\,; \qquad \pm\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{z^2}{c^2}=by\,; \qquad \pm\frac{y^2}{b^2}\pm\frac{z^2}{c^2}=ax$$

As possíveis combinações de sinais nestas equações permitem concluir a existência de dois tipos de superfícies, conforme os coeficientes dos termos de segundo grau tenham o mesmo sinal ou sinais contrários.

6.3.1 – PARABOLÓIDE ELÍPTICO

Se os coeficientes dos termos de segundo grau tiverem sinais iguais, a equação representa um parabolóide elíptico. As equações a baixo são formas canônicas do parabolóide elíptico ao longo dos eixos:

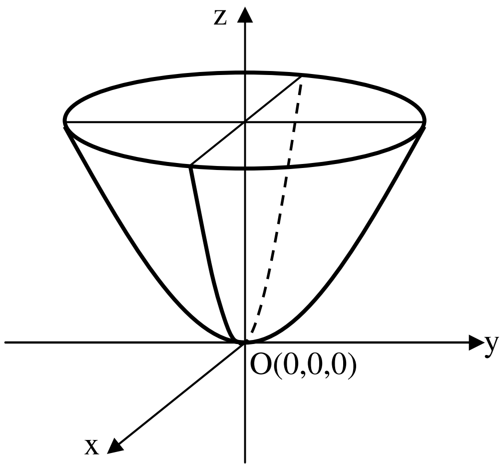
$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=ax$ ➔ eixo Ox.

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=by$ ➔ eixo Oy.

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=cz$ ➔ eixo Oz

Para um parabolóide elíptico ao longo do eixo Oz, o traço no plano xOy é a origem O(0,0,0) e os traços nos planos xOz e yOz são, respectivamente, as parábolas

$$\frac{x^2}{a^2}=cz, \quad y=0 \qquad \text{e} \qquad \frac{y^2}{b^2}=cz, \quad x=0$$



Se $c > 0$ a concavidade é para cima e, para $c < 0$ a concavidade é para baixo.

Um traço no plano $z = k,\ k > 0$, é uma elipse que aumenta de tamanho à medida que o plano se afasta do plano xOy.

Se tivermos $a = b$, o parabolóide é de revolução e pode ser gerado pela rotação da parábola $\frac{y^2}{b^2} = cz,\ x = 0$ em torno do eixo dos z. O traço no plano $z = k$ é uma circunferência.

Se o vértice do parabolóide elíptico é o ponto (x_0, y_0, z_0) e seus eixos forem paralelos aos eixos coordenados, a equação na forma canônica, obtida por uma translação de eixos coordenados, assume a forma:

$$\frac{(x - x_o)^2}{a^2} + \frac{(y - y_o)^2}{b^2} = c(z - z_o)$$

6.3.2 – PARABOLÓIDE HIPERBÓLICO

Se na equação das superfícies não centradas, os coeficientes dos termos de segundo grau tiverem sinais contrários, a equação representa um parabolóide hiperbólico.

A equação $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = cz$ é uma forma canônica ou padrão da equação do parabolóide hiperbólico ao longo do eixo dos z.