MATRIZES

2.1 - <u>INTRODUÇÃO</u> – Um pouco de História

O pai do nome matriz

Foi há pouco mais de 150 anos que as matrizes tiveram sua importância detectada e saíram da sombra dos determinantes. O primeiro a lhes dar um nome parece ter sido Louis Cauchy, na França em 1826, que denominou de *tableau* (tabela). O nome matriz só veio com James Joseph Sylvester, em 1850. Sylvester usou o significado coloquial da palavra matriz, a saber: *local onde algo se gera ou cria*. Com efeito, via-as como *"...um bloco retangular de termos... o que não representa um determinante, mas é como se fosse uma MATRIZ a partir da qual podemos formar vários sistemas de determinantes, ao fixar um número p e escolher à vontade p linhas e p colunas..."* (artigo publicado na Philosophical Magazine de 1850, pag 363-370). Sylvester deve a divulgação deste termo ao seu amigo Cayley, com sua obra, *Memoir on the Theory of Matrices,* publicada em 1858. É com Cayley que as matrizes passam a ter vida própria e gradativamente começam a suplantar os determinantes em importância.

2.2– <u>DEFINIÇÃO</u>

Sejam $m \geq 1$ e $n \geq 1$ dois números inteiros. Uma matriz $m \times n$ é um quadro de elementos (números, polinômios, funções, etc.) distribuídos em m linhas e n colunas:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Abreviadamente esta matriz pode ser expressa por $A = (a_{ij})_{m \times n}$

Cada número que compõe uma matriz chama-se *termo* dessa matriz. O símbolo a_{ij} que representa indistintamente todos os termos da matriz é denominado *termo geral da matriz.*

Uma matriz deve ser representada entre parênteses ( ), entre colchetes [ ] ou entre barras duplas $\| \quad \|$.

$$A_{3x2} = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 5 & 6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$ Matriz A do tipo 3 x 2

$$B_{2x2} = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$$ Matriz B do tipo 2 x 2

$$C_{1x3} = \begin{Vmatrix} 4 & -1 & 5 \end{Vmatrix}$$ Matriz C do tipo 1 x 3

2.3 – MATRIZ RETANGULAR

É a matriz na qual $m \neq n$:

$$A_{3x2} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 0 \\ 8 & 6 \end{pmatrix} \qquad\qquad B_{1\times 3} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

2.4 – MATRIZ COLUNA

É uma matriz de ordem m por 1. Esta matriz pode representar as componentes $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$ de um vetor $\vec{v}$ do espaço vetorial E de n dimensões. Por esse motivo essa matriz é denominada *vetor-coluna*.

$$A_{3\times 1} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -9 \end{bmatrix}$$

2.5 – MATRIZ LINHA

É uma matriz de ordem 1 por n. Essa matriz é denominada *vetor-linha*.

$$B_{1\times 3} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

2.6 – MATRIZ QUADRADA

É toda matriz cujo número de linhas é igual ao número de colunas, ou seja, $m = n$:

$$A_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & -5 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$ Matriz quadrada de ordem 3.

$$B_{1\times 1} = (8)$$ Matriz quadrada de ordem 1.

OBS: Numa matriz quadrada A de ordem n, os elementos a_{ij} tais que $i = j$ formam a **diagonal principal** da matriz, e os elementos a_{ij} tais que $i + j = n + 1$ formam a **diagonal secundária.**

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Diagonal secundária   Diagonal principal

2.7 – MATRIZ DIAGONAL

É uma matriz quadrada $A = \lfloor a_{ij} \rfloor$ que tem os elementos $a_{ij} = 0$ quando $i \neq j$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_{22} & ... & 0 \\ ... & 0 & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$$

2.8 – MATRIZ ESCALAR

É uma matriz diagonal que tem os elementos a_{ij} iguais entre si quando $i = j$.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

2.9 – MATRIZ IDENTIDADE OU MATRIZ UNIDADE

É toda matriz de ordem n, que se indica por $I_n = (a_{ij})_{n \times n}$, tal que $a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}$ isto é, todos os elementos da diagonal principal são iguais a 1 e todos os demais elementos são iguais a zero.

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.10 – MATRIZ NULA OU MATRIZ ZERO

É qualquer matriz que possui todos os elementos iguais a zero.

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2.11 – OPERAÇÕES ENVOLVENDO MATRIZES

2.11.1 – Igualdade de Matrizes

Duas matrizes, A e B, do mesmo tipo $m \times n$, são iguais se, e somente se, todos os elementos que ocupam a mesma posição são iguais:

$$A = B \iff a_{ij} = b_{ij} \ \text{ para todo } 1 \le i \le m \ \text{ e todo } 1 \le j \le n$$

Por exemplo, se $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & b \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & c \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ e $A = B$, então $c = 0$ e $b = 3$.

2.11.2 – Adição

Dadas as matrizes $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{m\times n}$, a soma dessas matrizes é a matriz $C = (c_{ij})_{m\times n}$, tal que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, para todo $1 \le i \le m$ e $1 \le j \le n$. Representa-se a soma matricial da seguinte forma**:**

$$A + B = C.$$

Exemplos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2 & 4+(-1) \\ 0+0 & 7+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+3 & 3+1 & 0+1 \\ 0+1 & 1+(-1) & (-1)+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

OBS: A + B existe se, e somente se, A e B forem do mesmo tipo.

Propriedades

Sendo **A**, **B** e **C** matrizes do mesmo tipo ($m\times n$), têm-se as seguintes propriedades para a adição:

I) comutativa: A + B = B + A
II) associativa: (A + B) + C = A + (B + C)
III) elemento neutro: A + 0 = 0 + A = A, sendo 0 a matriz nula $m\times n$
IV) elemento oposto: A + (- A) = (-A) + A = 0

2.11.3 – Subtração

Dadas as matrizes $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{m\times n}$, chama-se de diferença entre essas matrizes a soma da matriz A com a matriz oposta de B. Representa-se a subtração matricial da seguinte forma**:**

$$A - B = A + (-B)$$

Exemplo:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -7 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}_{-B} = \begin{bmatrix} 3+(-1) & 0+(-2) \\ 4+0 & -7+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$$

2.11.4 – <u>Multiplicação de um número real por uma matriz</u>

Dados um número real α e uma matriz **A** do tipo $m \times n$, o produto de α por **A** é uma matriz **B** do tipo $m \times n$ obtida pela multiplicação de cada elemento de **A** por α, ou seja, $b_{ij} = \alpha a_{ij}$. Tem-se:

$$B = \alpha A$$

<u>Exemplo</u>:

$$3.\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.2 & 3.7 \\ 3.(-1) & 3.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 21 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

<u>Propriedades</u>:

Sendo A e B matrizes do mesmo tipo ($m \times n$) e α e β números reais quaisquer, valem as seguintes propriedades:

I) associativa: $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$
II) distributiva de um número real em relação à adição de matrizes: $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$
III) distributiva de uma matriz em relação à adição de dois números reais: $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$
IV) elemento neutro: $\alpha A = A$, para α = 1, ou seja, 1 . A = A

2.11.5 – <u>Multiplicação de matrizes</u>

O produto de uma matriz por outra não é determinado por meio do produto dos seus respectivos elementos. Assim, o produto das matrizes $A = (a_{ij})_{m \times p}$ e $B = (b_{ij})_{p \times n}$ é a matriz $C = (c_{ij})_{m \times n}$ em que cada elemento c_{ij} é obtido por meio da soma dos produtos dos elementos correspondentes da i-ésima linha de A pelos elementos da j-ésima coluna B.

<u>Exemplos</u>:

1) Multiplicar as matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

1ª linha e 1ª coluna

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overset{C_{11}}{\boxed{1.(-1) + 2.4}} & \\ & \end{bmatrix}$$

1ª linha e 2ª coluna

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.(-1) + 2.4 & \overset{C_{12}}{\boxed{1.3 + 2.2}} \\ & \end{bmatrix}$$

2ª linha e 1ª coluna

$$C = \begin{bmatrix} \boxed{1 \quad 2} \\ 3 \quad 4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \boxed{-1} & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overset{C_{21}}{\boxed{1.(-1)+2.4}} & 1.3+2.2 \\ 3.(-1)+4.4 & \end{bmatrix}$$

2ª linha e 2ª coluna

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ \boxed{3 \quad 4} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -1 & \boxed{\begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix}} \\ 4 & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.(-1)+2.4 & 1.3+2.2 \\ 3.(-1)+4.4 & \underset{C_{22}}{\boxed{3.3+4.2}} \end{bmatrix}$$

Assim, $A.B = \begin{bmatrix} 7 & 7 \\ 13 & 17 \end{bmatrix}$

Observe que:

$$B.A = \begin{bmatrix} \boxed{-1 \quad 3} \\ \boxed{4 \quad 2} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 3 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 2 \\ 4 \end{matrix}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overset{C_{11}}{\boxed{(-1).1+3.3}} & \overset{C_{12}}{\boxed{(-1).2+3.4}} \\ \underset{C_{21}}{\boxed{4.1+2.3}} & \underset{C_{22}}{\boxed{4.2+2.4}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 10 \\ 10 & 16 \end{bmatrix}$$

Portanto, $A.B \neq B.A$, ou seja, para a multiplicação de matrizes não vale a propriedade comutativa. Vejamos outro exemplo com as matrizes

2) Multiplicar as matrizes abaixo:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A.B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.1+3.(-2) & 2.2+3.0 & 2.3+3.4 \\ 0.1+1.(-2) & 0.2+1.0 & 0.3+1.4 \\ -1.1+4.(-2) & -1.2+4.0 & -1.3+4.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 4 & 18 \\ -2 & 0 & 4 \\ -9 & -2 & 13 \end{bmatrix}$$

$$B.A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.2+2.0+3.(-1) & 1.3+2.1+3.4 \\ -2.2+0.0+4.(-1) & -2.3+0.1+4.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 17 \\ -8 & 10 \end{bmatrix}$$

Da definição, temos que a matriz produto A . B só existe se o número de colunas de A for igual ao número de linhas de B:

$$A_{m \times p} \cdot B_{p \times n} = (A.B)_{m \times n}$$

A matriz produto terá o número de linhas de A (m) e o número de colunas de B (n):

Se $A_{3 \times 2}$ e $B_{2 \times 5}$, então $(A . B)_{3 \times 5}$
Se $A_{4 \times 1}$ e $B_{2 \times 3}$, então não existe o produto
Se $A_{4 \times 2}$ e $B_{2 \times 1}$, então $(A . B)_{4 \times 1}$

<u>Propriedades</u>:

Verificadas as condições de existência para a multiplicação de matrizes, valem as seguintes propriedades:

I) Associativa: $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
II) Distributiva em relação à adição: $A.(B + C) = A.B + A.C$ ou $(A + B).C = A.C + B.C$
III) Elemento neutro: $A \cdot I_n = I_n \cdot A = A$, sendo I_n a matriz identidade de ordem n

Vimos que a propriedade comutativa, geralmente, não vale para a multiplicação de matrizes. Não vale também o anulamento do produto, ou seja: sendo $0_{m \times n}$ uma matriz nula, $A.B = 0_{m \times n}$ não implica, necessariamente, que $A = 0_{m \times n}$ ou $B = 0_{m \times n}$.

2.12 – <u>MATRIZE TRANSPOSTA</u>

A matriz transposta da matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$, é a matriz $A^T = (b_{ji})_{n \times m}$, tal que $b_{ji} = a_{ij}$, para $\forall i, j$ com $1 \le i \le m$ e $1 \le j \le n$, ou seja, cada coluna j de A^T é, ordenadamente, igual à linha i de A.

$$A_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 0 \\ 8 & 6 \end{pmatrix} \qquad A^T{}_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

<u>Propriedades</u>:

I) $(A + B)^T = A^T + B^T$
II) $(\alpha A)^T = \alpha A^T$, onde $\alpha \in \Re$
III) $\left(A^T\right)^T = A$
IV) $(AB)^T = B^T A^T$

2.13 – <u>MATRIZ OPOSTA</u>

A Matriz $-B = (-1)B$ é chamada de oposta da matriz B.

2.14 – MATRIZ SIMÉTRICA

Uma matriz quadrada é simétrica se $S^T = S$.

$$S = S^T = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 5 & 2 & 0 \\ 7 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

OBS:
a) Se $A = \lfloor a_{ij} \rfloor$ é uma matriz simétrica, os elementos dispostos simetricamente em relação à diagonal principal são iguais, isto é, $a_{ij} = a_{ji}$.
b) O produto de uma matriz quadrada A pela sua transposta A^T é uma matriz simétrica.

2.15 – MATRIZ ANTI-SIMÉTRICA

Uma matriz $A = \lfloor a_{ij} \rfloor$ é anti-simétrica se $A^T = -A$ ou $-A^T = A$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -7 \\ -5 & 0 & -3 \\ 7 & 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^T = \begin{pmatrix} 0 & -5 & 7 \\ 5 & 0 & 3 \\ -7 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

OBS: Se $A = \lfloor a_{ij} \rfloor$ é uma matriz anti-simétrica, os elementos dispostos simetricamente em relação à diagonal principal são opostos, isto é, $a_{ij} = -a_{ji}$ e os elementos da diagonal principal são nulos.

2.16 – MATRIZ INVERSA

Dada uma matriz **A**, quadrada, de ordem n, se existir uma matriz, de mesma ordem, tal que $A.A^{-1} = A^{-1}.A = I_n$, então A^{-1} é a matriz inversa de A.

2.17 – MATRIZ ORTOGONAL

Uma matriz A cuja inversa coincide com a transposta é denominada ortogonal, ou seja, $A^T = A^{-1}$.

2.18 – MATRIZ TRIANGULAR SUPERIOR

Matriz Triangular Superior é uma matriz quadrada onde todos os elementos abaixo da diagonal principal são nulos, isto é, $a_{ij} = 0$ para i > j.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 3 & 9 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

2.19 – MATRIZ TRIANGULAR INFERIOR

Matriz Triangular Inferior é uma matriz quadrada onde os elementos $a_{ij} = 0$ para i < j.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 6 & 0 \\ -4 & 8 & 5 & 8 \end{bmatrix}$$

2.20 – POTÊNCIA DE UMA MATRIZ

Uma matriz quadrada $A = \lfloor a_{ij} \rfloor$ pode ser multiplicada n vezes por si mesma. A matriz que resulta dessas operações, representada por A^n, é chamada potência n da matriz A.

Exemplo: Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$, então, $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 8 \\ 16 & 17 \end{bmatrix}$

2.21 – MATRIZ PERIÓDICA

Dada uma matriz quadrada A, diz que A é uma matriz periódica se $A^n = A$, sendo $n \geq 2$. O período de A é $n - 1$.

2.22 – MATRIZ IDEMPOTENTE

Uma matriz A_{mxn} é dita idempotente se o produto dela por ela mesma resulta ela própria, ou seja, A.A = A ou $A^2 = A$. O período da matriz idempotente é $2 - 1 = 1$

2.23 – MATRIZ NILPOTENTE

Uma matriz A_{mxn} é chamada Nilpotente se o produto dela por ela mesma resulta a matriz nula, ou seja, A. A = 0 ou $A^2 = 0$.

2.24 – MATRIZ SINGULAR

É uma matriz que não admite inversa.

DETERMINANTES

3.1 – INTRODUÇÃO – Um pouco de História

A teoria dos determinantes teve origem em meados do século XVII, quando eram estudados processos para resolução de sistemas lineares de equações. O determinante é um número obtido por meio de adições e multiplicações dos coeficientes de um sistema do 1º grau.

Foi em 1683, num trabalho do japonês Seki Kowa, que a idéia de determinante (como polinômio que se associa a um quadrado de números) veio à luz. Kowa, considerado o maior matemático japonês do século XVII, chegou a essa noção através do estudo de sistemas lineares, sistematizando o velho procedimento chinês (para o caso de duas equações apenas).

O uso de determinantes no Ocidente começou dez anos depois num trabalho de Leibniz, ligado também a sistemas lineares. Em resumo, Leibniz estabeleceu a condição de compatibilidade de um sistema de três equações a duas incógnitas em termos do determinante de ordem 3 formado pelos coeficientes e pelos termos independentes (este determinante deve ser nulo).

A conhecida regra de Cramer para resolver sistemas de n equações a n incógnitas, por meio de determinantes, é na verdade uma descoberta do escocês Colin Maclaurin (1698-1746), datando provavelmente de 1729, embora só publicada postumamente em 1748 no seu *Treatise of Algebra*. Mas o nome do suíço Gabriel Cramer (1704-1752) não aparece nesse episódio de maneira totalmente gratuita. Cramer também chegou à regra (independentemente), na sua *Introdução à análise das Curvas Planas* (1750), em conexão com o problema de determinar os coeficientes da cônica geral $A + By + Cx + Dy^2 + Exy + x^2 = 0$.

O francês Étienne Bézout (1730-1783), autor de textos matemáticos de sucesso em seu tempo, sistematizou em 1764 o processo de estabelecimento dos sinais dos termos de um determinante. E coube a outro francês, Alexandre Vandermonde (1735-1796), em 1771, empreender a primeira abordagem da teoria dos determinantes independente do estudo dos sistemas lineares — embora também os usasse na resolução destes sistemas. O importante teorema de Laplace, foi demonstrado no ano seguinte pelo próprio Laplace num artigo que, a julgar pelo título, nada tinha a ver com o assunto: "Pesquisas sobre o cálculo integral e o sistema do mundo".

O termo determinante, com o sentido atual, surgiu em 1812 num trabalho de Cauchy sobre o assunto. Neste artigo, apresentado à Academia de Ciências, Cauchy sumariou e simplificou o que era conhecido até então sobre determinantes, melhorou a notação (mas a atual com duas barras verticais ladeando o quadrado de números só surgiria em 1841 com Arthur Cayley) e deu uma demonstração do teorema da multiplicação de determinantes — meses antes J. F. M. Binet (1786-1856) dera a primeira demonstração deste teorema, mas a de Cauchy era superior.

3.2 – DEFINIÇÃO DE DETERMINANTES ($n \leq 3$)

Seja M uma matriz de ordem n do conjunto das matrizes quadradas de elementos reais. Chama-se determinante da matriz M (e indicamos por **det M**) ***O NÚMERO*** que podemos obter operando com os elementos de M da seguinte forma:

1º) Se M é de ordem n = 1, então det M é o único elemento de M.

$$M = [a_{11}] \Rightarrow \det M = a_{11}$$

<u>Exemplo</u>: $M = [8] \Rightarrow \det M = 8$

Podemos indicar o determinante de M pelo símbolo $|a_{11}|$, isto é, colocando uma **<u>BARRA</u> <u>VERTICAL</u>** de cada lado de M.

2º) Se M é de ordem n = 2, então o determinante será dado pelo produto dos elementos da diagonal principal menos o produto dos elementos da diagonal secundária.

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow \det M = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

<u>Exemplos</u>:

a) $M = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \det M = 4 \times (-3) - 1 \times 2 = -12 - 2 = -14$

b) $\begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 1/2 \end{vmatrix} = -3 \times \dfrac{1}{2} - (-2) \times 2 = -\dfrac{3}{2} + 4 = \dfrac{5}{2}$

3º) Se M é de ordem $n = 3$. Isto é, $M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, definimos o algoritmo de Sarrus para a determinação do det M.

$$\det M = \left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right.$$

$$- \quad - \quad - \qquad + \quad + \quad +$$

$$\det M = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

<u>Exemplos</u>:

a) $\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right. = 1 \times 1 \times 1 + 1 \times 0 \times 0 + 0 \times 0 \times 1 - 0 \times 1 \times 0 - 1 \times 0 \times 1 - 1 \times 0 \times 1 = 1$

$$\text{b) detM} = \begin{vmatrix} -3 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & -3 \\ 5 & 4 & 2 \end{vmatrix}\begin{matrix} -3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{matrix}$$

$$\text{detM} = ((-3)\times 1\times 2) + (1\times(-3)\times 5) + (7\times 2\times 4) - (7\times 1\times 5) - ((-3)\times(-3)\times 4) - (1\times 2\times 2) =$$
$$\text{detM} = -6 - 15 + 56 - 35 - 36 - 4 = -40$$

3.3 - MENOR COMPLEMENTAR

Consideremos uma matriz M de ordem $n \geq 2$; seja a_{ij} um elemento de M. Definimos *menor complementar do elemento* a_{ij}, e indicamos por D_{ij}, como sendo o determinante da matriz que se obtém suprimindo a linha i e a coluna j de M.

Exemplos:

1º) Seja $M = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$. Calcule D_{11}, D_{21}, D_{31}.

Temos: $\begin{bmatrix} 4 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ então $D_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -13$

Temos: $\begin{bmatrix} 4 & 3 & 4 \\ \mathbf{2} & 1 & 5 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ então $D_{21} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -6$

Temos: $\begin{bmatrix} 4 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \\ \mathbf{3} & 3 & 2 \end{bmatrix}$ então $D_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 11$

2º) Seja $M = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$. Calcule D_{12}, D_{22}

Temos: $\begin{bmatrix} 5 & \mathbf{6} \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$, então $D_{12} = |7| = 7$

Temos: $\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & \mathbf{8} \end{bmatrix}$, então $D_{22} = |5| = 5$

3.4 – COFATOR

Consideremos uma matriz de ordem $n \geq 2$; seja a_{ij} um elemento de M. Definimos complemento algébrico do elemento a_{ij} (ou cofator de a_{ij}), e indicamos por A_{ij}, como sendo o número:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot D_{ij}$$

Exemplo:

Seja $M = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 4 & 8 \\ 7 & 5 & 3 \end{bmatrix}$. Calcule $A_{11},\ A_{12},\ A_{13}$

Temos : $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 4 & 8 \\ 7 & 5 & 3 \end{bmatrix}$, então $A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -28$

$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 4 & 8 \\ 7 & 5 & 3 \end{bmatrix}$, então $A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = 53$

$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 4 & 8 \\ 7 & 5 & 3 \end{bmatrix}$, então $A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = -23$

3.5 – TEOREMA FUNDAMENTAL (Teorema de Laplace)

O determinante de uma matriz M, de ordem $n \geq 2$, é a ***soma dos produtos dos elementos de uma fila qualquer (linha ou coluna) pelos respectivos cofatores***.

Exemplo:

a) Se escolhermos a coluna ***j*** da matriz *M.*

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & \mathbf{a_{1j}} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & \mathbf{a_{2j}} \ldots a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \ldots \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & \mathbf{a_{nj}} \ldots a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{então: } \det M = a_{1j} \cdot A_{1j} + a_{2j} \cdot A_{2j} + \ldots + a_{nj} \cdot A_{nj}$$

b) Se escolhermos a linha ***i*** da matriz *M*.

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{a_{i1}} & \mathbf{a_{i2}} & \mathbf{\dots} & \mathbf{a_{in}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{então:} \quad \det M = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \dots + a_{in} \cdot A_{in}$$

Obs: Para calcularmos um determinante, quanto mais zeros houver em uma fila, mais fácil será o cálculo se usarmos essa fila. Como já visto, se a matriz tiver uma fila de zeros, seu determinante será zero.

3.6 – PROPRIEDADES DOS DETERMINANTES

P_1 – Quando todos os elementos de uma fila (linha ou coluna) são nulos, o determinante dessa matriz é nulo.

Exemplo:

a) $\begin{vmatrix} 4 & 9 & -8 & \sqrt{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 3 \\ 18 & 12 & 9 & 3 \end{vmatrix} = 0$ b) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 15 \\ 2 & 0 & -3 \\ -1 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 0$

P_2 – Se duas filas de uma matriz são iguais, então seu determinante é nulo.

Exemplo:

$$\begin{array}{c} L_1 \\ \\ L_3 \\ \\ \end{array} \begin{vmatrix} \boxed{2 \quad 1 \quad 3 \quad 5} \\ 4 \quad 2 \quad 9 \quad 8 \\ \boxed{2 \quad 1 \quad 3 \quad 5} \\ 9 \quad 7 \quad 4 \quad 3 \end{vmatrix} = 0$$

$=$

P_3 – Se duas filas paralelas de uma matriz são proporcionais, então seu determinante é nulo.

Exemplo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

$C_3 = 2C_1$

P_4 – Se os elementos de uma fila de uma matriz são combinações lineares dos elementos correspondentes de filas paralelas, então seu determinante é nulo.

Exemplos:

$$\begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix}1\\2\\3\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}3\\4\\2\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}4\\6\\5\end{matrix}} \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} \boxed{3 \quad 4 \quad 1} \\ \boxed{1 \quad 2 \quad 3} \\ \boxed{7 \quad 10 \quad 5} \end{vmatrix} = 0$$

$$C_1 + C_2 = C_3 \qquad 2L_1 + L_2 = L_3$$

P_5 – Teorema de Jacobi: o determinante de uma matriz não se altera quando somamos aos elementos de uma fila uma combinação linear dos elementos correspondentes de filas paralelas.

Exemplo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 9$$

Substituindo a 1ª coluna pela soma dessa mesma coluna com o dobro da 2ª, temos:

$$\begin{vmatrix} 1+2.2 & 2 & 3 \\ 2+1.2 & 1 & 2 \\ 2+4.2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 10 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 9$$

P_6 – O determinante de uma matriz e o de sua transposta são iguais.

Exemplo:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 9 \qquad \det A^T = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 9$$

P_7 – Multiplicando por um número real todos os elementos de uma fila em uma matriz, o determinante dessa matriz fica multiplicado por esse número.

Exemplos:

a) Se $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -4$, multiplicando C_1 por 2 tem-se: $\begin{array}{c} 2C_1 \\ \begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix}2\\4\\6\end{matrix}} & \begin{matrix}2\\1\\2\end{matrix} & \begin{matrix}3\\-1\\1\end{matrix} \end{vmatrix} \end{array} = 2 \times (-4) = -8$

b) Se $\begin{vmatrix} 5 & -10 & 0 \\ 3 & 7 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -145$, multiplicando L_1 por $\frac{1}{5}$: $\begin{array}{c} \frac{1}{5}L_1 \\ \begin{vmatrix} \boxed{1 \quad -2 \quad 0} \\ 3 \quad\; 7 \quad\; 4 \\ 2 \quad\; 0 \quad -1 \end{vmatrix} \end{array} = \frac{1}{5} \times (-145) = -29$

P$_8$ – Quando trocamos as posições de duas filas paralelas, o determinante de uma matriz muda de sinal.

Exemplo:

Se $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -4$, trocando de posições L_1 e L_2 : $\begin{vmatrix} \boxed{2 \quad 1 \quad -1} \\ \boxed{1 \quad 2 \quad 3} \\ 3 \quad 2 \quad 1 \end{vmatrix} = +4$

P$_9$ – Quando, em uma matriz, os elementos acima ou abaixo da diagonal principal são todos nulos, o determinante é igual ao produto dos elementos dessa diagonal.

Exemplos:

a) $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ d & b & 0 \\ e & f & \mathrm{c} \end{vmatrix} = a.b.c$ b) $\begin{vmatrix} x & g & \mathrm{h} \\ 0 & y & i \\ 0 & 0 & \mathrm{z} \end{vmatrix} = x.y.z$

P$_{10}$ – Quando, em uma matriz, os elementos acima ou abaixo da diagonal secundária são todos nulos, o determinante é igual ao produto dos elementos dessa diagonal multiplicado por $(-1)^{\frac{n\cdot(n-1)}{2}}$

Exemplos:

a) $\begin{vmatrix} 0 & a \\ b & x \end{vmatrix} = -a.b$ b) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & \mathrm{a} \\ 0 & b & x \\ c & y & \mathrm{z} \end{vmatrix} = -a.b.c$

P$_{11}$ – Teorema de Binet: Para A e B matrizes quadradas de mesma ordem n,
$\det(A.B) = \det A \cdot \det B$

Exemplo:

Se $A = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ e $A \cdot B = \begin{bmatrix} 40 & 16 \\ 16 & 10 \end{bmatrix}$ então:

$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B \quad \Rightarrow \quad 144 = 12 \cdot 12$

P$_{12}$ - Se $k \in \Re$, então $\det(k \cdot A) = k^n \cdot \det A$

Exemplo:

Se $k = 2$ e $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ e $k \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$, então:

$\det(k \cdot A) = k^n \cdot \det A \quad \Rightarrow \quad -40 = 2^2 \cdot (-10)$

3.7 – ABAIXAMENTO DE ORDEM DE UMA MATRIZ – Regra de Chió

Seja uma matriz M quadrada de ordem n ($n \geq 2$). Para reduzimos em uma unidade a ordem de uma matriz, sem alterar o valor de seu determinante fazemos:

1º) Encontre um elemento $a_{ij} = 1$ na matriz M. Se não existir esse elemento, através das propriedades vistas anteriormente, faça combinações lineares (Teorema de Jacobi) até que se tenha um elemento $a_{ij} = 1$.

2º) Elimine a linha e a coluna que contém o elemento $a_{ij} = 1$.

3º) De cada elemento restante da matriz M subtraia o produto dos elementos eliminados da sua respectiva linha e coluna.

4º) Multiplique o resultado por $(-1)^{i+j}$.

5º) Com as diferenças obtidas, construímos uma matriz de ordem (n-1) cujo determinante é igual ao da matriz M.

Exemplo 1:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 \\ 3 & 7 & 5 & 6 \\ 1 & 10 & -4 & 5 \\ 3 & 8 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 7-6 & 5-12 & 6-6 \\ 10-2 & -4-4 & 5-2 \\ 8-6 & 2-12 & 3-6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -7 & 0 \\ 8 & -8 & 3 \\ 2 & -10 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -8+56 & 3-0 \\ -10+14 & -3-0 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 48 & 3 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -144 - 12 = -156$$

Exemplo 2:

$$\det M = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} (5-2\cdot 3) & (3-2\cdot 2) \\ (1-2\cdot 3) & (3-2\cdot 2) \end{vmatrix} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} = (-1)\cdot(-4) = 4$$

3.8 – INVERSÃO DE MATRIZES

Dada uma matriz quadrada A, de ordem n, se existir uma matriz quadrada B, de mesma ordem, que satisfaça à condição:

$$A \cdot B = B \cdot A = I \qquad \Rightarrow \qquad B \text{ é inversa de } A \text{ e representaremos por } A^{-1}$$

Uma matriz quadrada $A = |a_{ij}|$ cujo determinante é nulo, é uma **matriz singular.**

Uma matriz quadrada cujo determinante é diferente de zero é uma matriz **não singular ou regular**. Portanto a matriz não singular sempre tem inversa.

3.9 – PROPRIEDADES DA MATRIZ INVERSA

P₁. $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

P₂. Se a matriz A admite inversa $(\det A \neq 0)$, esta é única.

P₃. Se a matriz é regular (não singular), sua inversa também o é. A matriz inversa de A^{-1} é A.

P₄. Se a matriz A é não singular, sua transposta A^T também o é. A inversa de A^T é $(A^{-1})^T$.

P₅. $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$ (decorre do teorema de Binet)

Demonstração:

$A \cdot A^{-1} = I \qquad \det(A \cdot A^{-1}) = \det I$

$\det A \cdot \det A^{-1} = 1 \qquad$ assim, $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$

3.10 – DETERMINAÇÃO DA MATRIZ INVERSA ATRAVÉS DE DETERMINANTES

Para determinarmos a matriz inversa da matriz A através de determinantes devemos seguir os seguintes passos:

1º) Calcula-se o $\det A$
2º) Acha-se a matriz dos cofatores, denotada por $\overline{A}$, de cada elemento da matriz A.
3º) Acha-se a transposta da matriz dos cofatores, denotada por $\text{adj}(A) \rightarrow$ adjunta de A, portanto, $\text{adj}(A) = (\overline{A})^T$

4º) Faz-se: $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} \cdot \text{adj}(A)$

Exemplo 1: Para quais valores reais de *m* existe a inversa da matriz $A = \begin{pmatrix} m & 5 \\ 5 & m \end{pmatrix}$.

Solução:

A matriz *A* é inversível se, e somente se, $\det A \neq 0$. Assim, temos:

$$\det A = \begin{vmatrix} m & 5 \\ 5 & m \end{vmatrix} = m^2 - 25 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad m \neq 5 \quad e \quad m \neq -5$$

Exemplo 2: Determinar a matriz inversa da matriz A e verifique o resultado.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & -1{,}5 & 3 \end{bmatrix}$$

Solução:

$\det A = 1 \times (-1)^{1+1} \times (-3-0) - 2 \times (-1)^{1+3} \times (-4{,}5+2) = -3+5 = 2$ → Teorema de Laplace

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1)^{1+1}(-3+0) & (-1)^{1+2}(9+0) & (-1)^{1+3}(-4{,}5+2) \\ (-1)^{2+1}(0-3) & (-1)^{2+2}(3+4) & (-1)^{2+3}(-1{,}5-0) \\ (-1)^{3+1}(0-2) & (-1)^{3+2}(0+6) & (-1)^{3+3}(-1-0) \end{bmatrix}$$

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} -3 & -9 & -2{,}5 \\ 3 & 7 & 1{,}5 \\ -2 & -6 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{adj}\, A = \begin{bmatrix} -3 & 3 & -2 \\ -9 & 7 & -6 \\ -2.5 & 1{,}5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\,\text{adj}\, A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -3 & 3 & -2 \\ -9 & 7 & -6 \\ -2.5 & 1{,}5 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} -1{,}5 & 1{,}5 & -1 \\ -4{,}5 & 3{,}5 & -3 \\ -1{,}25 & 0{,}75 & -0{,}5 \end{bmatrix}$$

Verificação:

$A \cdot A^{-1} = I$

$$A.A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & -1{,}5 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1{,}5 & 1{,}5 & -1 \\ -4{,}5 & 3{,}5 & -3 \\ -1{,}25 & 0{,}75 & -0{,}5 \end{bmatrix}$$

$$A.A^{-1} = \begin{bmatrix} -1{,}5+2{,}5 & 1{,}5-1{,}5 & -1+1 \\ -4{,}5+4{,}5 & 4{,}5-3{,}5 & -3+3 \\ -3+6{,}75-3{,}75 & 3-5{,}25+2{,}25 & -2+4{,}5-1{,}5 \end{bmatrix}$$

$$A.A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I \qquad \text{OK}$$

3.11 – <u>INVERSÃO DE UMA MATRIZ ATRAVÉS DE OPERAÇÕES ELEMENTARES</u>

Para determinarmos a matriz inversa da matriz A através de operações elementares devemos fazer:

1º) Coloque a matriz Identidade (I) ao lado da matriz A, separada por um traço vertical.

2º) Usando as operações elementares nas duas matrizes juntas, transforme a matriz A em matriz Identidade.

i) Permutação de duas equações
ii) Multiplicação de uma equação por um número real diferente de zero
iii) Substituição de uma equação por sua soma com outra equação previamente multiplicada por um número real diferente de zero.

Exemplo 1: Determinar a matriz inversa da matriz A usando as operações elementares.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & -1{,}5 & 3 \end{bmatrix}$$

Solução:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1{,}5 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3=2L_1-L_3]{L_2=3L_1-L_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1{,}5 & -7 & 2 & 0 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3=1{,}5L_2-L_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2{,}5 & -1{,}5 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[L_2=L_2-3L_3]{L_1=L_1-L_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1{,}5 & 1{,}5 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -4{,}5 & 3{,}5 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & 2{,}5 & -1{,}5 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3=(-1/2)L_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1{,}5 & 1{,}5 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -4{,}5 & 3{,}5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1{,}25 & 0{,}75 & -0{,}5 \end{array}\right]$$

Assim,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1{,}5 & 1{,}5 & -1 \\ -4{,}5 & 3{,}5 & -3 \\ -1{,}25 & 0{,}75 & -0{,}5 \end{bmatrix}$$

SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

4.1 - EQUAÇÃO LINEAR

Entendemos por equação linear nas variáveis (incógnitas) x_1, x_2, x_3, ... , x_n , como sendo a equação da forma $a_{11}.x_1 + a_{12}.x_2 + a_{13}.x_3 + ... + a_{1n}.x_n = b$ onde, a_{11}, a_{12}, a_{13}, ... a_{1n} e b são números reais ou complexos, a_{11}, a_{12}, a_{13}, ... a_{1n} são denominados coeficientes e b, termo independente.

Exemplos de equações lineares:

$2x_1 + 4x_2 = 9$

$2x + 3y = 5$

$-x + 2y +3z = 12$

4.2 - SOLUÇÃO DE UMA EQUAÇÃO LINEAR

Chamamos de solução de uma equação linear aos valores que, ao serem substituídos nas incógnitas, cheguem à uma igualdade verdadeira. Por exemplo: a equação $x + y + z = 6$ apresenta como solução os valores $x = 2$, $y = 3$ e $z = 1$, uma vez que $2 + 3 + 1 = 6$. Os valores $x = 3$, $y = 4$ e $z = -1$ também são soluções da equação, uma vez que $3 + 4 - 1 = 5$. Podemos, então, afirmar que existem infinitas soluções (um número infinito de ternos ordenados) que satisfazem à equação dada.

4.3 - SISTEMA DE EQUAÇÕES LINEARES

De maneira geral, podemos dizer que um sistema de equações lineares ou sistema linear é um conjunto composto por duas ou mais equações lineares. Um sistema linear pode ser representado da seguinte forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Onde,

$a_{ij} \rightarrow$ Coeficientes das incógnitas

$x_j \rightarrow$ Incógnitas

$b_i \rightarrow$ Termos independentes

Resolver um sistema de equações lineares significa encontrar os valores das incógnitas que resolvem, simultaneamente, todas as suas equações, ou seja, uma solução de um sistema é uma n-upla de números (x_1, x_2, x_3, ..., x_n) que satisfaça todas as ***m*** equações, ao mesmo tempo.

<u>Exemplo</u>: Dado o sistema de equações:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x + y - z = 1 \\ 3x - y + z = 4 \end{cases}$$

Podemos afirmar que a sua solução será a tripla ordenada (1, 2, 3), pois:

$$1 + 2 + 3 = 6$$
$$2 \cdot 1 + 2 - 3 = 1$$
$$3 \cdot 1 - 2 + 3 = 4$$

4.4 - <u>DISCUSSÃO SOBRE SISTEMAS LINEARES</u>

4.4.1 - <u>Sistema Compatível</u> (Possível)

Um sistema de equações lineares é compatível quando admite solução.

- Caso tenha uma única solução é denominado *Compatível Determinado ou Possível Determinado. **(SPD)***.

- Caso tenha mais de uma solução é denominado *Compatível Indeterminado ou Possível Indeterminado. **(SPI)***.

4.4.2 – <u>Sistema Incompatível</u> (Impossível) *(SI)*

Um sistema de equações lineares é incompatível quando não admite solução.

4.5 – <u>SISTEMAS EQUIVALENTES</u>

Quando dois sistemas de equações lineares admitem a mesma solução, são denominados sistemas equivalentes.

Um sistema de equações elementares se transforma num sistema equivalente, quando se efetuam as operações elementares:

iv) Permutação de duas equações
v) Multiplicação de uma equação por um número real diferente de zero
vi) Substituição de uma equação por sua soma com outra equação previamente multiplicada por um número real diferente de zero.

4.6 – FORMA MATRICIAL DE UM SISTEMA

Considere o sistema:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Este sistema pode ser representado na seguinte forma matricial:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{A} \bullet \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}}_{B} \qquad \text{ou} \qquad A \cdot X = B$$

Onde : A é a matriz dos coeficientes

X é a matriz das variáveis

B é a matriz dos têrmos independentes

De outra forma podemos representar o sistema é através da **matriz ampliada ou matriz aumentada.**

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

<u>Exemplo</u>: Dado o sistema de equações lineares;

$$\begin{cases} x - 5y + 3z = 2 \\ 2x + 7y - \frac{5}{8}z = 0 \\ 5y + 2z = 6 \end{cases}$$

Na forma matricial temos:

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & \frac{-5}{8} \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Na forma ampliada ou aumentada, o mesmo sistema fica representado da seguinte forma:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 3 & 2 \\ 2 & 7 & \frac{-5}{8} & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 6 \end{array}\right)$$

4.7 - RESOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES

4.7.1 – Regra de Cramer

1º - Calcula-se o determinante da matriz principal "D" que é formado pelos coeficientes das incógnitas das equações lineares. Esta regra só pode ser usada quando o determinante D for diferente de zero.

2º - Calcula-se D_x, D_y, D_z, ..., onde: D_x é o determinante principal substituindo a coluna dos coeficientes de x pelos termos independentes do sistema. Procede-se da mesma forma para encontrar D_y, D_z, ...

3º. Calcula-se: $x = \frac{D_x}{D}$ $\quad y = \frac{D_y}{D}$ $\quad z = \frac{D_z}{D}$ ...

Exemplo: Resolver o sistema abaixo usando a Regra de Cramer:

$$\begin{cases} 2x + y - z = 4 \\ x - y + 3z = -1 \\ 3x - 5y + 7z = -7 \end{cases}$$

Para resolver um sistema, devemos inicialmente encontrar a sua Matriz Principal, que é dada pelos coeficientes das incógnitas. Desta forma, a matriz principal do sistema acima será:

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & -5 & 7 \end{bmatrix}$$

Os determinantes D, D_x, D_y e D_z são:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & -5 & 7 \end{vmatrix} \qquad D_x = \begin{vmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \\ -7 & -5 & 7 \end{vmatrix} \qquad D_y = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & -7 & 7 \end{vmatrix} \qquad D_z = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & -1 \\ 3 & -5 & -7 \end{vmatrix}$$

$$D = 20 \qquad D_x = 20 \qquad D_y = 40 \qquad D_z = 0$$

Para acharmos aos valores de x, y, z, efetuamos as seguintes divisões:

$$x = \frac{20}{20} = 1 \qquad y = \frac{40}{20} = 2 \qquad z = \frac{0}{20} = 0$$

Chegamos, então, aos valores de x = 1; y = 2; z = 0.

IMPORTANTE:

Se $D \neq 0$, então o sistema será SPD.

Se $D = 0$ o sistema poderá ser:

- SPI quando $D_x = D_y = D_z = 0$
- SI quando $D_x \neq 0$ ou $D_y \neq 0$ ou $D_z \neq 0$

4.7.2 – <u>Eliminação Gaussiana</u> (sistemas escalonados)

A Regra de Cramer tem um interesse mais teórico do que prático; quando o número de equações é muito grande, fica trabalhoso resolver o sistema por meio de sua aplicação.

Dizemos que um sistema está escalonado (ou na forma escalonada) se o número de coeficientes nulos, antes do primeiro coeficiente não nulo, aumenta de equação para equação. Neste caso, a matriz dos coeficientes do sistema será a uma matriz triangular.

Assim, o método da eliminação Gaussiana consiste em transformar a matriz dos coeficientes de um sistema em uma matriz triangular superior.

Há dois tipos de sistemas escalonados a considerar:

<u>1º Tipo</u> – número de equações igual ao número de incógnitas.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad a_{nm}x_n = b_n \end{cases} \qquad \text{em que } a_{ii} \neq 0, \forall\, i \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$$

A matriz incompleta do sistema é a matriz triangular:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad \text{Se } \; D = \det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot \ldots \cdot a_{nn} \neq 0;$$

Logo, pela Regra de Cramer o sistema é possível (compatível) determinado (SPD). Os valores $\alpha_1, \alpha_2, \ldots., \alpha_n$ da solução podem ser obtidos resolvendo o sistema por substituição. Esse método é conhecido como ***Eliminação Gaussiana***.

Exemplo 1: Resolva o sistema de equações;

$$\begin{cases} x + 2y - 4z = -4 \\ 5x + 11y - 21z = -22 \\ 3x - 2y + 3z = 11 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & -4 \\ 5 & 11 & -21 & -22 \\ 3 & -2 & 3 & 11 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2=-5L_1+L_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & 3 & 11 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3=-3L_1+L_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -8 & 15 & 23 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3=8L_2+L_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 7 & 7 \end{pmatrix}$$

Como $7z = 7$ temos $z = 1$ substituindo nas demais equações encontramos $(2, -1, 1)$

Exemplo 2: Resolva os sistemas de equações pelo método de Gauss.

a) $\begin{cases} 2x - y + 3z = 8 \\ -x + 2y + z = 4 \\ 3x + y - 4z = 0 \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 8 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & -4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & 8 \\ 3 & 1 & -4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3=L_3+3L_1]{L_2=L_2+2L_1} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 5 & 16 \\ 0 & 7 & -1 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3=3L_3-7L_2}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 5 & 16 \\ 0 & 0 & -38/3 & -76/3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{L_3=-(3/38)L_3 \\ L_2=(1/3)L_2 \\ L_1=(-1)L_1}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 5/3 & 16/3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Logo, a solução será:

$z = 2$

$y = \dfrac{16 - 5z}{3} \quad \therefore \quad y = 2$

$x = -4 + 2y + z \quad \therefore \quad x = 2$

b) $\begin{cases} x - 2y + z = 7 \\ 2x - y + 4z = 17 \\ 3x - 2y + 2z = 14 \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 4 & 17 \\ 3 & -2 & 2 & 14 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3=L_3-3L_1]{L_2=L_2-2L_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 7 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -1 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3=3L_3-4L_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 7 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -11 & -33 \end{pmatrix}$$

Assim, temos: $\begin{cases} -11z = -33 \quad \therefore \quad z = 3 \\ 3y + 2z = 3 \quad \therefore \quad 3y + 2(3) = 3 \quad \therefore \quad y = -1 \\ x - 2y + z = 7 \quad \therefore \quad x - 2(-1) + 3 = 7 \quad \therefore \quad x = 2 \end{cases}$ logo, $(2, -1, 3)$

<u>2º Tipo</u> - número de equações é menor que o número de incógnitas.

Para resolvermos este tipo de sistema, podemos tomar as incógnitas que não aparecem no começo de nenhuma das equações (chamadas variáveis livres) e transpô-las para o segundo membro.

<u>Exemplo 1</u>: $\begin{cases} x - y + z = 4 \\ \quad y - z = 2 \end{cases}$ a única variável livre é z. Transpondo para o 2º membro

teremos: $\begin{cases} x - y = 4 - z \\ \quad y = 2 + z \end{cases}$

Resolvendo o sistema temos como soluções as triplas ordenadas do tipo: $(6; 2 + z; z)$ em que $z \in \Re$. Veja algumas soluções:

$z = 0 \quad \to \quad (6, 2, 0)$
$z = 1 \quad \to \quad (6, 3, 1)$

<u>Exemplo 2</u>: Resolva o sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} 2x - 5y + 3z - 4s + 2t = 4 \\ 3x - 7y + 2z - 5s + 4t = 9 \\ 5x - 10y - 5z - 4s + 7t = 22 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 & -4 & 2 & 4 \\ 3 & -7 & 2 & -5 & 4 & 9 \\ 5 & -10 & -5 & -4 & 7 & 22 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3=2L_3-5L_1]{L_2=2L_2-3L_1} \begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 & -4 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -5 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 5 & -25 & 12 & 4 & 24 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3=L_3-5L_2}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 & -4 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -5 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -6 & -6 \end{pmatrix}$$

O sistema agora está na forma escalonada.

Resolvendo o sistema em relação às variáveis principais x, y e s, em termos das variáveis livres z e t, obtêm-se a solução geral em termos das variáveis livres.

$x = 26 + 11z - 15t \qquad y = 12 + 5z - 8t \qquad s = -3 + 3t$

Assim: $(26 + 11z - 15t\,,12 + 5z - 8t\,,\,z\,,-3 + 3t\,,\,t)$

4.7.3 – <u>Método de Gauss–Jordan</u> (Sistema com N equações lineares com N variáveis)

O método de Gauss–Jordan consiste em transformar a matriz quadrada dos coeficientes das variáveis na **matriz identidade** (ou matriz unidade). Para isto aplicamos as operações descritas no item 4.5 em toda matriz ampliada do sistema. Transformada a matriz dos coeficientes das variáveis na matriz identidade, a matriz dos termos independentes ficará transformada ao final, na solução do sistema.

<u>Exemplo 1</u>: Resolver o sistema de equações lineares pelo método Gauss-Jordan.

a) $\begin{cases} 2x - y + 3z = 8 \\ -x + 2y + z = 4 \\ 3x + y - 4z = 0 \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 8 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & -4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & 8 \\ 3 & 1 & -4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 = L_3 + 3L_1]{L_2 = L_2 + 2L_1} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 5 & 16 \\ 0 & 7 & -1 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 = 3L_3 - 7L_2]{L_1 = 3L_1 - 2L_2}$$

pivô   pivô

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & -7 & -20 \\ 0 & 3 & 5 & 16 \\ 0 & 0 & -38 & -76 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 = -(1/38)L_3} \begin{pmatrix} -3 & 0 & -7 & -20 \\ 0 & 3 & 5 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_1 = L_1 + 7L_3]{L_2 = L_2 - 5L_3}$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_2 = (1/3)L_2]{L_1 = (-1/3)L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Assim, temos a seguinte solução: $x = 2$; $y = 2$; $z = 2$

b) $\begin{cases} 2x + y + 3z = 8 \\ 4x + 2y + 2z = 4 \\ 2x + 5y + 3z = -12 \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 8 \\ 4 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 3 & -12 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 = (1/2)L_2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 8 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & -12 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 = L_3 - L_1]{L_2 = L_2 - L_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \\ 0 & 4 & 0 & -20 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_3 = (1/4)L_3]{L_2 = (-1/2)L_2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 = L_1 - L_2}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 13 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1=L_1-3L_3} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1=(1/2)L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Assim, $x = 2$; $y = -5$ $z = 3$

Exercício: Resolver o sistema pelo método de Gauss-Jordan

c) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 14 \\ 2x - y + 5z = 15 \\ x + y + z = 6 \end{cases}$ Resposta: (1, 2, 3)

4.7.4 – Regra de Rouché–Capelli

4.7.4.1 – ***discussão e solução de um sistema de equações lineares***

Discutir um sistema de equações lineares é analisá-lo a fim de determinar todas as soluções possíveis do mesmo. Após reduzir a matriz ampliada de um sistema linear à forma escada, as soluções tornam-se mais visíveis, e, então poderemos classificá-la em compatível (determinado ou indeterminado) ou incompatível.

Obs: Matriz na Forma Escada ou Forma Canônica $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Uma matriz *m x n* é linha reduzida à forma escada se:

a) O primeiro elemento não nulo de uma linha não nula é 1.
b) Cada coluna que contém o primeiro elemento não nulo de alguma linha tem todos os seus outros elementos iguais a zero.
c) Toda linha nula ocorre abaixo de todas as linhas não nulas.

Isto significa que o número de zeros precedendo o primeiro elemento não nulo de uma linha aumenta a cada linha, até que sobrem somente linhas nulas, se houver.

4.7.4.2 – *Posto de uma Matriz*

Sejam as matrizes A_{mxn} e B_{mxn}, sendo B_{mxn} a matriz reduzida à forma escada equivalente a matriz ampliada A_{mxn}, então define-se:

Posto de A: é o número de linhas não nulas de B

Obs: O ***posto*** está relacionado com o número de equações, e o número de soluções de um sistema de equações lineares.

Exemplo: Encontre o posto matriz B.

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & -5 & 1 \\ 4 & 16 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -5 & 1 \\ 4 & 16 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_4=L_4-4L_1]{\substack{L_2=L_2-2L_1 \\ L_3=L_3-L_1}} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -9 & -1 \\ 0 & -9 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3=L_3-L_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -9 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2=(-1/9)L_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1/9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1=L_1-4L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 14/9 \\ 0 & 1 & 1/9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ Matriz reduzida à forma escada

Assim, temos: **Posto = 2**

Exercício: Determine o Posto da matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$ **R: P = 3**

4.7.4.3 – *Regra de Rouché–Capelli*

Sistema Incompatível ou Impossível: $p_A > p_C$ Não admite solução

Sistema Compatível ou Possível: $p_A = p_C = p$

$$\begin{cases} p_A = p_C = p \quad \text{e} \quad n = p \quad \text{Determinado} \\ p_A = p_C = p \quad \text{e} \quad n > p \quad \text{Indeterminado} \end{cases}$$

Onde: p_A é o posto da matriz ampliada na forma escada
p_C é o posto da matriz dos coeficientes das incógnitas na forma escada
n é o número de incógnitas do sistema de equações lineares

Se o Sistema é Possível e Indeterminado (SPI), ou seja, as duas matrizes têm o mesmo posto p e p < n, podemos escolher n – p incógnitas (variáveis independentes), e as outras p incógnitas serão dadas em função destas (variáveis dependentes). O grau de liberdade do sistema é dado por $g = n - p$.

Exemplos:

a) $\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 6x_3 = 0 \end{cases}$

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 & -9 & 0 \\ 2 & 4 & -6 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 = \frac{1}{3}L_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -6 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 = L_2 - 2L_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Posto da matriz aumentada: $p_A = 1$
Posto da matriz de coeficientes: $p_C = 1$

Sistema possível

Como $p_A = p_C = 1 < n = 3$, o Sistema possível e indeterminado, ou seja, tem infinitas soluções.

O grau de liberdade informa o número de variáveis livres: $g = n - p = 3 - 1 = 2$

Solução trivial: $x_1 = x_2 = x_3 = 0$

Soluções próprias: $x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \quad \to \quad x_1 = -2x_2 + 3x_3$

b) $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 0 \\ 16x_1 - 8x_2 = 0 \\ 12x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases}$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 16 & -8 & 0 \\ 12 & -2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 = \frac{1}{2}L_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 16 & -8 & 0 \\ 12 & -2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 = L_3 - 12L_1]{L_2 = L_2 - 16L_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -40 & 0 \\ 0 & -26 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 = -\frac{1}{40}L_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -26 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 = L_3 + 26L_2]{L_1 = L_1 - 2L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Posto a matriz aumentada: $p_A = 2$
Posto da matriz de coeficientes: $p_C = 2$

Sistema possível e determinado
Tem uma única solução
$p_A = p_C = n = 2$

Solução trivial: $x_1 = x_2 = 0$

4.7.5 – **Método da Matriz Inversa**

Um sistema de equações lineares pode ser escrito na forma matricial:

$$AX = B$$

Onde:

A => matriz dos coeficientes,
X => matriz-coluna das incógnitas
B => matriz-coluna dos termos independentes.

Multiplicando os dois lados por A^{-1} temos: $A^{-1}AX = A^{-1}B$

Mas: $A^{-1}A = I$ logo: $IX = A^{-1}B$
Mas: $IX = X$ logo: $X = A^{-1}B$

O método de Gauss-Jordan exige que se transforme a matriz A dos coeficientes das incógnitas na matriz unidade.

O método da matriz inversa exige que se transforme a matriz A em sua inversa A^{-1}, o que é mais trabalhoso.

Por isso é conveniente empregar o método da matriz inversa no caso em que se tem para resolver conjuntos de sistemas, todos com n equações (e igual número de variáveis), tais que as matrizes dos coeficientes das incógnitas de cada sistema sejam todas iguais, variando somente os temos independentes.

Exemplos: Seja o sistema
$$\begin{cases} 2x_1 + 1x_2 + 7x_3 = b_1 \\ 1x_1 + 3x_2 + 2x_3 = b_2 \\ 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 = b_3 \end{cases}$$

Resolver:

1) Para: $b_1 = 25, \quad b_2 = -11 \quad e \quad b_3 = -5$

2) Para: $b_1 = 16, \quad b_2 = -5 \quad e \quad b_3 = 11$

3) Para: $b_1 = 3, \quad b_2 = 5 \quad e \quad b_3 = -5$

Cálculo da matriz inversa:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & 2 \\ 5 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & 2 \\ 5 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 2(12-6) - 1(4-10) + 7(3-15) = 12 + 6 - 84 = -66$$

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} (12-6) & -(4-10) & (3-15) \\ -(4-21) & (8-35) & -(6-5) \\ (2-21) & -(4-7) & (6-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 6 & -12 \\ 17 & -27 & -1 \\ -19 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{adj}A = \begin{bmatrix} 6 & 17 & -19 \\ 6 & -27 & 3 \\ -12 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\operatorname{adj}A=-\frac{1}{66}\begin{bmatrix}6 & 17 & -19\\ 6 & -27 & 3\\ -12 & -1 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{6}{66} & -\frac{17}{66} & \frac{19}{66}\\ -\frac{6}{66} & \frac{27}{66} & -\frac{3}{66}\\ \frac{12}{66} & \frac{1}{66} & -\frac{5}{66}\end{bmatrix}$$

1) $X=A^{-1}B$

$$X=\begin{bmatrix}-\frac{6}{66} & -\frac{17}{66} & \frac{19}{66}\\ -\frac{6}{66} & \frac{27}{66} & -\frac{3}{66}\\ \frac{12}{66} & \frac{1}{66} & -\frac{5}{66}\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}25\\ -11\\ 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\ -7\\ 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} \quad ➔ \quad \begin{cases}x_1=2\\ x_2=-7\\ x_3=4\end{cases}$$

2)

$$X=\begin{bmatrix}-\frac{6}{66} & -\frac{17}{66} & \frac{19}{66}\\ -\frac{6}{66} & \frac{27}{66} & -\frac{3}{66}\\ \frac{12}{66} & \frac{1}{66} & -\frac{5}{66}\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}16\\ -5\\ 11\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\ -4\\ 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} \quad ➔ \quad \begin{cases}x_1=3\\ x_2=-4\\ x_3=2\end{cases}$$

3)

$$X=\begin{bmatrix}-\frac{6}{66} & -\frac{17}{66} & \frac{19}{66}\\ -\frac{6}{66} & \frac{27}{66} & -\frac{3}{66}\\ \frac{12}{66} & \frac{1}{66} & -\frac{5}{66}\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}3\\ 5\\ -5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3\\ 2\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} \quad ➔ \quad \begin{cases}x_1=-3\\ x_2=2\\ x_3=1\end{cases}$$

4.8 – SISTEMAS LINEARES HOMOGÊNEOS

Um sistema linear é chamado de homogêneo quando os termos independentes de todas as equações são nulos. Todo sistema linear homogêneo admite pelo menos a solução conhecida como trivial, que é a solução identicamente nula ($x = 0$; $y = 0$; $z = 0$ ou $x_i = 0$). Outras soluções além da trivial são chamadas soluções próprias. Assim, todo sistema linear homogêneo é possível. Este tipo de sistema poderá ser determinado (SPD) se admitir somente a solução trivial ou indeterminado (SPI) se admitir outras soluções além da trivial.

O método para encontrar estas soluções, se existirem, é o mesmo utilizado para resolver um sistema de m equações lineares com n variáveis.

Exemplos:

1) $\begin{cases}2x-y+3z=0\\ 4x+2y-z=0\\ x-y+2z=0\end{cases}$ este sistema é determinado, possui apenas a solução $x = 0$; $y = 0$; $z = 0$

2) $\begin{cases} 2x + 3y - 4z = 0 \\ x - y - 2z = 0 \\ 2x - 2y - 4z = 0 \end{cases}$ já este sistema é indeterminado, pois admite infinitas soluções, entre elas

$$x = 0;\ \ y = 0;\ \ z = 0 \qquad e \qquad x = 2;\ \ y = 0;\ \ z = 1$$

3) Resolver os sistemas abaixo:

a) $\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 6x_3 = 0 \end{cases}$

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 & -9 & 0 \\ 2 & 4 & -6 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1=\frac{1}{3}L_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -6 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2=L_2-2L_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Posto da matriz aumentada: $p_A = 1$
Posto da matriz de coeficientes: $p_C = 1$

$\begin{cases} \text{Sistema possível e indeterminado} \\ \text{Tem infintas soluções: } p_A = p_C < n = 3 \end{cases}$

$g = n - p = 3 - 1 = 2$ → Grau de liberdade: número de variáveis livres

Solução trivial: $x_1 = x_2 = x_3 = 0$
Soluções próprias: $x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0$ → $x_1 = -2x_2 + 3x_3$

b) $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 0 \\ 16x_1 - 8x_2 = 0 \\ 12x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases}$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 16 & -8 & 0 \\ 12 & -2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1=\frac{1}{2}L_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 16 & -8 & 0 \\ 12 & -2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3=L_3-12L_1]{L_2=L_2-16L_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -40 & 0 \\ 0 & -26 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2=-\frac{1}{40}L_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -26 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3=L_3+26L_2]{L_1=L_1-2L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Posto da matriz aumentada: $p_A = 2$
Posto da matriz de coeficientes: $p_C = 2$

$\begin{cases} \text{Sistema possível e determinado} \\ \text{Tem uma única solução: } p_A = p_C = n = 2 \end{cases}$

Solução trivial: $x_1 = x_2 = x_3 = 0$

NÚMEROS COMPLEXOS

5.1 – PARA QUE SERVEM OS NÚMEROS COMPLEXOS?[1]

As equações de segundo grau com discriminante (delta) negativo não motivaram o aparecimento dos números complexos. Que significado teria, então, os números negativos e as raízes quadradas destes números?

Os números complexos emergiram em pleno momento histórico chamado de Renascença (1400-1600) quando, em função do desenvolvimento comercial e do crescimento das cidades européias, o desenvolvimento da Matemática foi notório.

Os complexos não foram aceitos naturalmente como números. Não havia sentido (significado geométrico) em uma raiz quadrada de um número negativo.

As equações cúbicas estudadas por Cardano[2] em 1545 e por Bombelli[3] em 1572 motivaram a utilização dos números complexos. Foi necessário trabalhar com os números complexos, "como se fossem números", para achar a solução real e positiva: $x = 4$ do seguinte problema:

> "Seja x^3 o volume de um cubo de aresta x e $15x$ o volume de um paralelepípedo retângulo cuja área da base é 15 e cuja altura é igual à aresta do cubo. Determine x de modo que $x^3 = 15x + 4$ ".

Foi encontrada uma dificuldade ao aplicar o método fórmula de Cardano nesta equação de terceiro grau, pois apareceu na solução uma raiz quadrada de número negativo:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} \, .$$

Como uma solução com radicais de números negativos poderia produzir uma solução real e positiva $x = 4$? A solução gráfica da equação pode ser vista no gráfico da Fig.6.1.

A fórmula de Cardano estaria errada? O número $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = 4$?

O símbolo $\sqrt{-1}$, para a raiz quadrada de -1, introduzido por Girard[4] em 1629, passou a ser representado pela letra i a partir de Euler[5] em 1777. Foi Descartes[6], em 1637 quem introduziu os termos real e imaginário. A expressão números complexos foi usada pela primeira vez por Gauss[7] em 1831.

---

[1] Baseado no artigo *"Para que servem os Números Complexos?"* do Prof. Valter Bezerra Dantas da UFRN.

[2] *Girolamo Cardano* nasceu em Pavia em 1501 e faleceu em Roma em 1576. Foi um cientista e sábio à moda de seu tempo. Na matemática foi o primeiro a introduzir as idéias gerais da teoria das equações algébricas.

[3] *Rafael Bombelli* (ou Raffaele Bombelli ou Raphael Bombelli) nasceu em Bolonha em 1526 e faleceu em Roma em 1572. Foi um matemático e engenheiro hidráulico italiano. Ele foi pioneiro em determinar as regras algébricas dos números negativos e dos números complexos, em sua obra *L'Algebra*.

[4] *Albert Girard* nasceu na França em 1595 e morreu na Holanda em de 1632. Era francês, mas emigrou como refugiado religioso para a Holanda. Estudou matemática na Universidade de Leiden. Trabalhou em álgebra, trigonometria e aritmética. Em 1629, escreveu *Invention nouvelle en l'algèbre*, demonstrando que as equações podiam ter raízes negativas e imaginárias.

[5] *Leonhard Paul Euler* nasceu na Basileia em 1707 e morreu em São Petersburgo em 1783. Foi um grande matemático e físico suíço que passou a maior parte de sua vida na Rússia e na Alemanha. Fez importantes descobertas em campos variados nos cálculos e grafos. Também fez muitas contribuições para a matemática moderna no campo da terminologia e notação.

[6] *René Descartes* nasceu na França em 1596. Foi um filósofo francês, matemático e escritor que passou a maior parte de sua vida adulta na Holanda onde morreu em 1650. A influência de Descartes na matemática é imensa. Ele é creditado como o pai da geometria analítica, a ponte entre álgebra e geometria, crucial para a descoberta do cálculo infinitesimal e análise matemática. Seu nome latinizado tem a forma: *Renatus Cartesius* de onde surge o termo "cartesiano". Em 1637, publicou anonimamente "A Geometria" onde introduz o sistema de coordenadas que ficaria conhecido como "cartesianas", em sua homenagem.

[7] *Johann Carl Friedrich Gauss* nasceu em Braunschweig em 1777 e morreu em Göttingen em 1855. Foi matemático, astrônomo e físico alemão. Conhecido como *o príncipe dos matemáticos*, muitos o consideram o maior gênio da história da

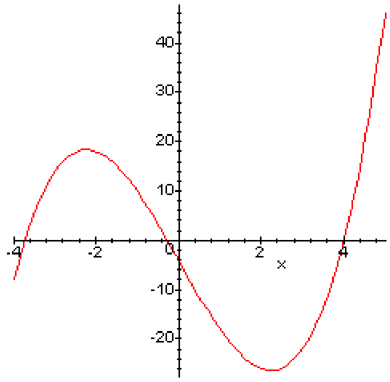


Fig.5.1-Gráfico da função: $f(x) = x^3 - 15x - 4$.

De forma independente, Girard (1628), Wallis[8] (1685), Argand[9] (1790) e Wessel[10] (1797) motivados pela Geometria e pela Topografia, representaram geometricamente, de maneira intuitiva e prática, os complexos como pontos (vetores) num plano cartesiano.

Gauss (1831) e Hamilton[11] (1833) redescobriram a representação geométrica e definiram os complexos. Gauss os definiu como números da forma $a + bi$, onde a e b são números reais e $i^2 = -1$. Hamilton os definiu como o conjunto dos pares ordenados (a, b), onde a e b são números reais, identificando $(0, 1)$ com $0 + i$ e $(1, 0)$ com $1 + 0i$.

A representação geométrica dos complexos permitiu que eles fossem visualizados e, por conseguinte, aceitos como números. A possibilidade de extrair a raiz enésima de um complexo dada por Cotes[12] (1714), Moivre[13] (1730), D'Alembert[14] (1746), Euler (1748) e Picard[15] (1871), sinalizando que o sistema dos números complexos é algebricamente fechado, também contribuiu para isso.

matemática. O encontro de Gauss com o teorema binômio inspirou-o para alguns de seus maiores trabalhos, tornando-se Gauss o primeiro "rigorista". O rigor imposto por Gauss à análise matemática tornou-a totalmente diferente e superou toda a análise matemática feita por seus antecessores.

[8] *John Wallis* nasceu na Inglaterra em 1616 onde morreu em 1703. Foi um matemático britânico cujos trabalhos sobre o cálculo foram precursores aos de Newton. No seu livro *Treatise on Algebra* aceita raízes negativas e raízes complexas.

[9] *Jean-Robert Argand* nasceu em Genebra em 1768 e morreu em Paris em 1822. Foi um livreiro e matemático amador. Argand publicou em 1806 uma interpretação geométrica dos números complexos, o Diagrama de Argand. Esta descrição geométrica dos números complexos também é associada ao nome de Gauss, embora anteriormente a Gauss Caspar Wessel também tenha descrito o diagrama.

[10] *Caspar Wessel* nasceu em 1745 e morreu em 1818. Foi um matemático dinamarquês-norueguês que descobriu, em 1797, uma representação gráfica para os números complexos, publicada em 1798 nas atas da academia dinamarquesa. O trabalho de Wessel ficou praticamente esquecido. A interpretação geométrica foi amplamente aceita alguns anos mais tarde, quando Gauss publicou resultados análogos. Hoje, o nome do plano onde representa-se os números complexos é conhecido como Plano de Argand-Gauss.

[11] *William Rowan Hamilton* nasceu em Dublin em 1805 e morreu na mesma cidade em 1865. Foi matemático, físico e astrônomo irlandês. Contribuiu com trabalhos fundamentais ao desenvolvimento da óptica, dinâmica e álgebra.

[12] Roger Cotes nasceu em Burbage em 1682 e morreu em Cambridge em 1716. Foi um matemático inglês que inventou as fórmulas da integração numérica conhecidas como fórmulas de Newton–Cotes e primeiramente introduzir o que hoje é conhecido como fórmula de Euler.

[13] *Abraham de Moivre* nasceu na França em 1667 e morreu em Londres em 1754. Foi um matemático francês famoso pela *Fórmula de De Moivre*, que relaciona os números complexos com a trigonometria, e por seus trabalhos na distribuição normal e na teoria das probabilidades.

[14] Jean Le Rond d'Alembert nasceu em Paris em 1717 onde morreu em 1783. Foi um filósofo, matemático e físico francês. Seus principais feitos foram no campo da astronomia e em matemática, com estudos de equações com derivadas parciais e seu uso na física. Também provou que todas as equações polinomiais a uma variável de grau N tem exatamente N soluções.

[15] *Charles Émile Picard* nasceu em 1856 e morreu em 1941. Foi um matemático francês matemático. Formulou teoremas na área das varáveis complexas.

Foi devido à necessidade, imposta pelo método de Cardano, de se trabalhar com os números complexos antes de compreendê-los como números, que se determinou o uso das raízes de números negativos antes dos negativos serem aceitos como números.

O significado geométrico dos números negativos surgiu com a representação geométrica dos complexos. Em 1867, Hankel[16], trabalhando com a álgebra dos números complexos e as leis fundamentais da aritmética, estabeleceu a "regra dos sinais da multiplicação": *o produto de dois números inteiros negativos é sempre positivo*.

Assim, terminava a polêmica entre os que ainda não aceitavam e os que aceitavam os números negativos como números.

Surgem algumas perguntas:

1. O conjunto dos números complexos só serve para resolver equações algébricas? A resposta é não. A álgebra dos números complexos permite representar e operar vetores no plano. Possibilita, ainda, que grandezas que variam senoidalmente (ou co-senoidalmente) em função do tempo sejam representadas por vetores bidimensionais conhecidos como fasores. É mais fácil operar (somar, multiplicar, etc.) com números complexos de diferentes módulos e argumentos do que operar com funções trigonométricas (senos e cossenos) de diferentes amplitudes e fases.
2. O conjunto dos complexos é uma extensão dos reais? Existe nos complexos um subconjunto (eixo x) que "*é uma cópia perfeita dos reais*", isto é, os reais e os complexos da forma $(a, 0)$ são identificados por meio de uma função injetora e sobrejetora, que preserva as operações de adição e multiplicação de complexos. Então, colocando "*a cópia no lugar do original*", podemos dizer, "*por abuso de linguagem*", que os complexos contêm os reais. Assim, o conjunto dos números Complexos, representado por C, é definido por: $C = \{z = a + ib \mid a, b \in R \wedge i^2 = -1\}$, onde R é o conjunto dos números reais. Os números Complexos constituem o maior conjunto numérico existente. A Fig.6.2, onde N é o conjunto dos números Naturais; Z é o conjunto dos números Inteiros; Q é o conjunto dos números Racionais; I é o conjunto dos números Irracionais; R é o conjunto dos números Reais e C é o conjunto dos números Complexos ilustra a formação desse conjunto.

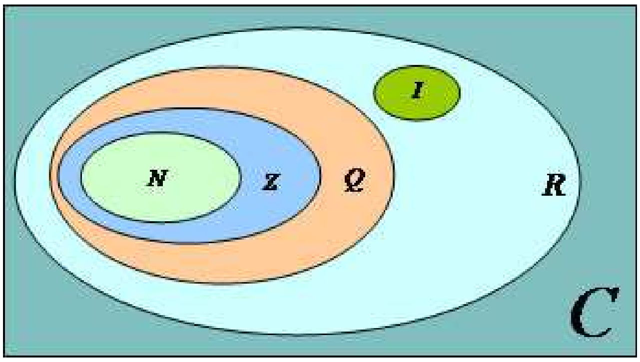


Fig.5.2-Formação do conjunto dos números complexos.

3. O plano complexo e o plano cartesiano da Geometria Analítica são iguais? Sob o ponto de vista da Álgebra existem algumas diferenças. Quando trabalhamos com a Geometria Analítica fazemos uso da soma de vetores e da multiplicação destes por um número real. Quando trabalhamos com os complexos fazemos uso da (mesma) soma de complexos (vetores) e da multiplicação de complexos (vetores), que é

[16] *Hermann Hankel* nasceu em 1839 e morreu em 1873. Foi um matemático alemão.

essencialmente uma rotação seguida de homotetia[17], portanto, não se trata do produto escalar e muito menos do produto vetorial da Álgebra Vetorial. A quantidade complexa (ou fasor) é uma grandeza que pode ser representada e operada vetorialmente, pela álgebra dos números complexos, no plano. Pode significar uma variação de amplitude (ou módulo) e fase (ou argumento) num movimento periódico (como acontece nos circuitos elétricos de corrente alternada). Grandeza vetorial (ou vetor) é aquela que possui direção, sentido e módulo. É representada e operada vetorialmente no plano e no espaço por uma álgebra vetorial diferente da álgebra dos complexos.

Foi através do uso e da compreensão dos números complexos que, certos “defeitos” existentes no conjunto dos números reais foram “consertados”, como por exemplo, a conexão entre logaritmos, funções trigonométricas e fatoriais.

Os números complexos abriram caminho para que os matemáticos pudessem criar (experimentar) novas álgebras.

Na eletrônica e na eletricidade, a análise de circuitos de corrente alternada é feita com a ajuda de números complexos. Grandezas como a impedância e a potência aparente são exemplo de quantidades complexas. Vale ressaltar que na Física e na Engenharia é usado, como número imaginário, o *j* no lugar do *i* para evitar confusão com o *i* que o símbolo representativo da corrente elétrica.

5.2 – <u>REPRESENTAÇÕES DOS NÚMEROS COMPLEXOS</u>

5.2.1 – <u>REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA</u>

Os números complexos são representados *geometricamente* no *plano complexo* também conhecido como *plano de Argand-Gauss*. Nele, representa-se a parte real no eixo horizontal (eixos das abscissas) e a parte imaginária no eixo vertical (eixos das ordenadas).

Esta representação conduz a outras formas de representação de um número complexo como veremos a seguir.

5.2.2 – <u>REPRESENTAÇÃO ALGÉBRICA</u>

A cada ponto (a, b) do plano associamos um número complexo. Quando $b = 0$ temos que o ponto está situado sobre a reta real (eixo horizontal) e neste caso corresponde a um número real, que é representado pela letra *a*. Por exemplo, o ponto $(-3, 0)$ corresponde ao número real -3.

Quando $b \neq 0$ o ponto não está situado sobre a reta real e então utilizamos a representação, já sugerida por Gauss, $a + jb$, que é chamada de *representação algébrica ou representação cartesiana do número complexo*. É claro que todo ponto situado sobre a reta real também é um ponto do plano e, portanto representa um número complexo, ou seja, todo número real é um número complexo. Cada número complexo tem sua parte real e sua parte imaginária.

Resumindo, um número complexo representa-se algebricamente por:

$$z = a + jb, \tag{5.1}$$

onde:

- $a \in R$ é a parte (ou componente) real de z e escreve-se $\text{Re}(z) = a$;

[17] *Homotetia* é a ampliação ou a redução de distâncias e áreas a partir de um ponto fixo.

• $b \in R$ é a parte (ou componente) imaginária de z e escreve-se $\mathrm{Im}(z) = b$.
Note que a parte imaginária de z não é *jb*. Por definição, a parte imaginária é um número real.

Diz-se, ainda, que:

• o complexo z é um número real se e somente se $\mathrm{Im}(z) = 0$;

• o complexo z é um imaginário puro se e somente se $\mathrm{Re}(z) = 0$ e $\mathrm{Im}(z) \neq 0$;

• o complexo z é nulo se e somente se $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z) = 0$.

Vejamos alguns exemplos da representação num plano complexo.

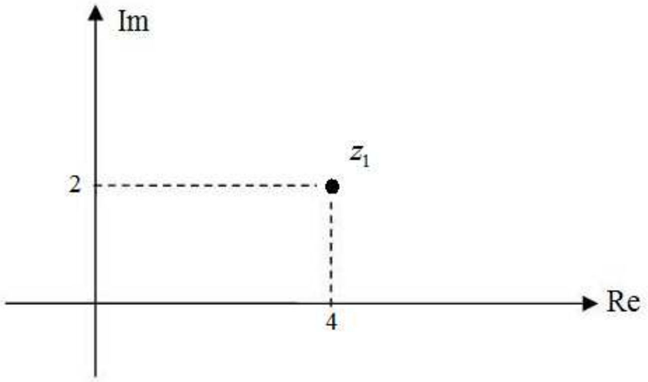


Fig.5.3-Representação do número: $z_1 = 4 + j2$.

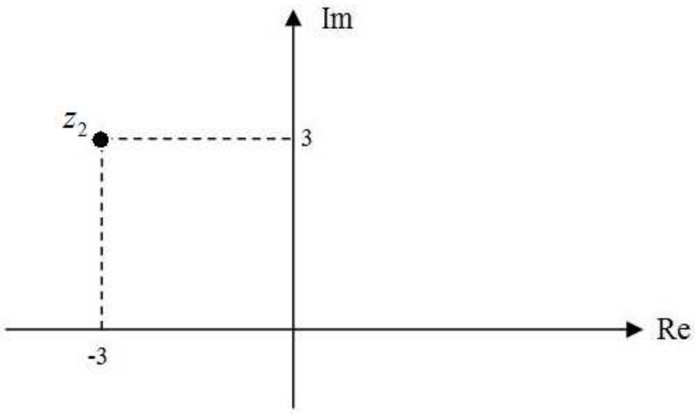


Fig.7.4-Representação do número: $z_2 = -3 + j3$.

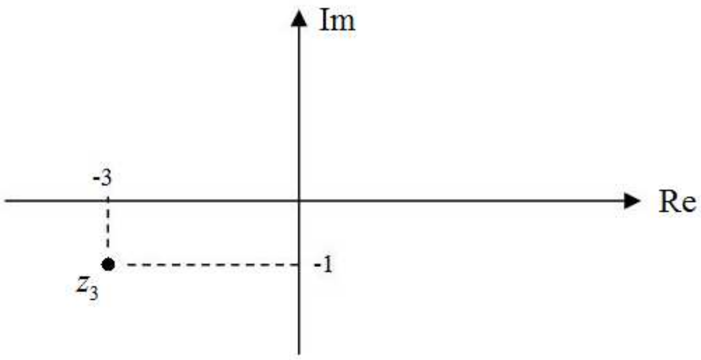


Fig.7.5-Representação do número: $z_3 = -3 + j(-1) = -3 - j$.

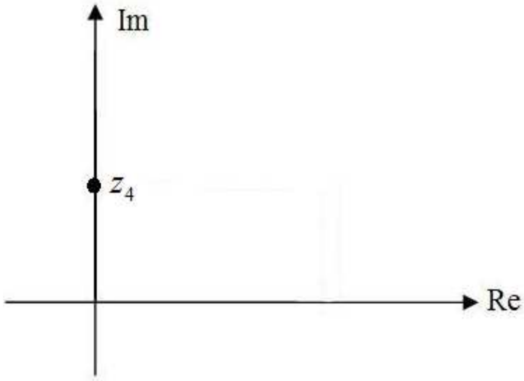


Fig.5.6-Representação do número: $z_4 = 0 + j2 = j2$.

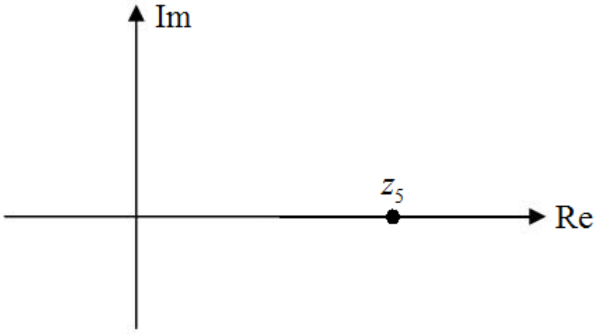


Fig.5.7-Representação do número: $z_5 = 4 + j0 = 4$.

Para se fazer somas e subtrações de números complexos utilizamos a forma algébrica.

Exercício Resolvido 5.1. Sendo $z = (m^2 - 5m + 6) + j(m^2 - 1)$, determine m de modo que z seja um imaginário puro.

Solução: Para que o complexo z seja um imaginário puro, sua parte real deve ser nula, ou seja, devemos ter: $m^2 - 5m + 6 = 0 >$ Resolvida a equação encontramos $m = 2$ ou $m = 3$. Logo, poderemos ter os seguintes números imaginários puros: $z = j3$ ou $z = j8$.

5.2.3 – REPRESENTAÇÃO TRIGONOMÉTRICA

Para obtermos a representação trigonométrica, utilizaremos os recursos já conhecidos de trigonometria. A Fig.6.8 ilustra como esse tipo de representação é feito.

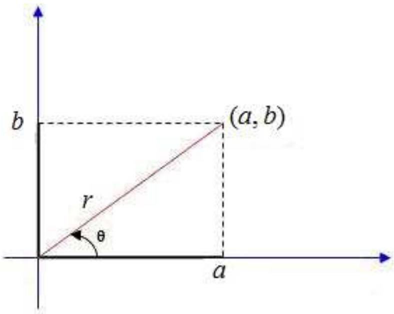


Fig.5.8-Representação trigonométrica do número complexo.

Note, pela Fig.5.8, que $a = r\cos\theta$ e que $b = r\text{sen}\theta$. Assim, se temos o ponto (a,b) no plano, a correspondente representação trigonométrica é:

$$z = r(\cos\theta + j\,\text{sen}\,\theta)\,, \tag{5.2}$$

onde r é a distância do ponto (a,b) até a origem do sistema de coordenadas, é chamada de *módulo* do número complexo e denotada por:

$$|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2}\ ^{18}; \tag{5.3}$$

θ é o ângulo entre r o semi-eixo real positivo chamado de argumento ou fase do número complexo e denotado por:

$$\theta = \arg(z) = \arctan(b/a)\,. \tag{5.4}$$

Utilizamos, nesta representação, o sentido anti-horário, ou seja, θ é positivo se medido no sentido anti-horário e negativo se medido no sentido horário.

5.2.4 – REPRESENTAÇÃO POLAR

Pelo fato da representação trigonométrica dos números complexos ser um caso particular da utilização das coordenadas polares, como veremos mais adiante, ela está ligada, diretamente, à representação polar dos números complexos.

A forma utilizada para a representação polar, é:

$$z = r\angle\theta\,, \tag{5.5}$$

onde r é o módulo do número complexo e θ é o argumento do número complexo.

Vejamos outros exemplos da representação num plano complexo.

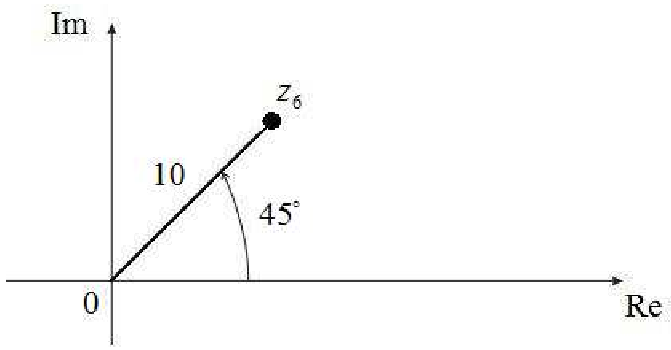


Fig.5.9-Representação do número: $z_6 = 10\angle 45^o = 10\angle\pi/4$.

[18] Também é usual encontrarmos o módulo de um número complexo representado pela letra grega ρ.

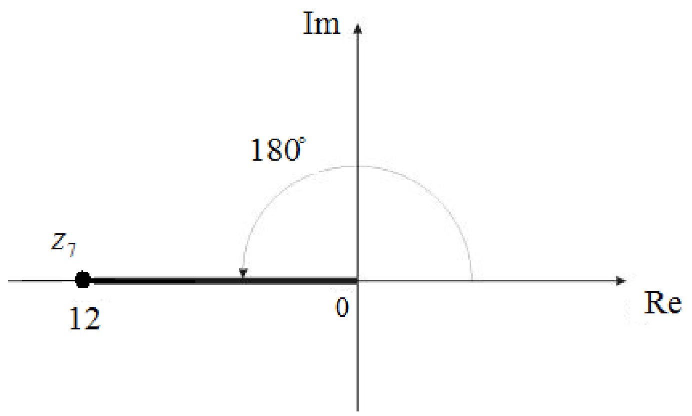


Fig.5.10-Representação do número: $z_7 = 12\angle 180^o = 12\angle\pi$.

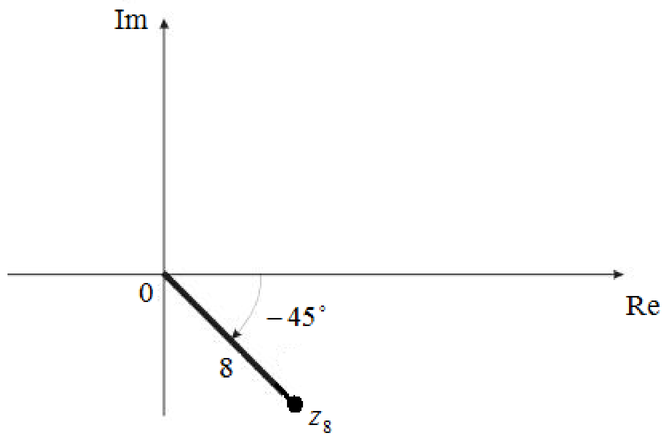


Fig.5.11-Representação do número: $z_8 = 8\angle\text{-}45^o = 8\angle\text{-}\pi/4$.

5.2.5 – REPRESENTAÇÃO EXPONENCIAL

Os números complexos podem, ainda, ser apresentados em outra forma bastante útil, decorrente da fórmula de Euler[19].

Para provarmos a fórmula de Euler necessitaríamos do conhecimento de expansão em séries de potência. Como esse assunto será estudado em Cálculo II, vamos, apenas, apresentá-lo sem maiores deduções ou considerações.

A expansão em série de Taylor de uma função analítica $f(x)$ centrada em a é representada como:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-a)^n ,$$

onde $C_n = f^{(n)}(a)/n!$.

Usando esse conceito de expansão e tomando $f(x) = e^x$ em torno de $a = 0$, teremos:

[19] Leonhard Paul Euler nasceu em 1707 e morreu em 1783. Foi um grande matemático e físico suíço de língua alemã que passou a maior parte de sua vida na Rússia e na Alemanha. Fez importantes descobertas em campos variados nos cálculos e grafos. Ele também fez muitas contribuições para a matemática moderna no campo da terminologia e notação, em especial para as análises matemáticas, como a noção de uma função matemática.

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots.$$

Substituindo x por jx na equação anterior, obtemos a seguinte expressão:

$$e^{jx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(jx)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + j\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!}.$$

Pode-se provar que a primeira parte da soma da equação anterior é a expansão da função co-seno de x e a segunda é a expansão da função seno de x em série de Taylor na origem. Assim teremos a equação que ficou conhecida como fórmula de Euler:

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\text{sen}\theta. \tag{5.6}$$

Se multiplicarmos os dois membros da equação (6.6) por r, temos:

$$re^{j\theta} = r(\cos\theta + j\text{sen}\theta). \tag{5.7}$$

Comparando a equação (6.7) com a equação (6.2) temos que:

$$z = r(\cos\theta + j\text{sen}\theta) = re^{j\theta}, \tag{5.8}$$

que é a representação exponencial dos números complexos.

Note que a representação de um número complexo na forma polar é essencialmente a mesma da forma exponencial, exceto por uma pequena diferença de simbologia, ou seja:

$$z = re^{j\theta} = r\angle\theta, \tag{5.9}$$

Exercício Resolvido 5.2. Obter a representação algébrica, a representação trigonométrica, a representação polar e a representação exponencial do número complexo que é representado geometricamente pelo ponto $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Solução: A representação algébrica é obtida de forma imediata: $z = \frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2}$. Calculando o módulo do número complexo: $z = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 1$. Calculando, agora, o argumento do número complexo: $\theta = \arctan\frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \arctan\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$. Logo, teremos a representação geométrica dada por: $z = 1\left(\cos\frac{\pi}{6} + j\text{sen}\frac{\pi}{6}\right)$, a representação polar dada por: $z = 1\angle\pi/6$ e a representação exponencial dada por: $z = 1e^{j\frac{\pi}{6}}$.

5.3 – IGUALDADE DE NÚMEROS COMPLEXOS

Dados dois números complexos na forma algébrica: $z_1 = a + jb$ e $z_2 = c + jd$, dizemos que $z_1 = z_2$ se e somente se: $a = c$ e $b = d$. Se os números forem dados na forma trigonométrica: $z_1 = r(\cos\theta + j\text{sen}\theta)$ e $z_2 = \rho(\cos\alpha + j\text{sen}\alpha)$, dizemos que $z_1 = z_2$ se e somente se: $r\cos\theta = \rho\cos\alpha$ e $r\text{sen}\theta = \rho\text{sen}\alpha$.

5.4 – CONJUGADO DE NÚMEROS COMPLEXOS

Dado um número complexo $z = a + jb$, denomina-se *conjugado* de *z* e representa-se por $\bar{z}$, a outro número complexo que possui a mesma parte real de *z* e a parte imaginária com o sinal contrário à de *z*. Isto é, se $z = a + jb$, seu conjugado é $\bar{z} = a - jb$. Na forma trigonométrica, o conjugado de $z = r(\cos\theta + j\text{sen}\theta)$ é $\bar{z} = r(\cos\theta - j\text{sen}\theta)$ o que corresponde à reflexão de do ponto que representa *z* na reta das abscissas conforme mostra a Fig.5.12.

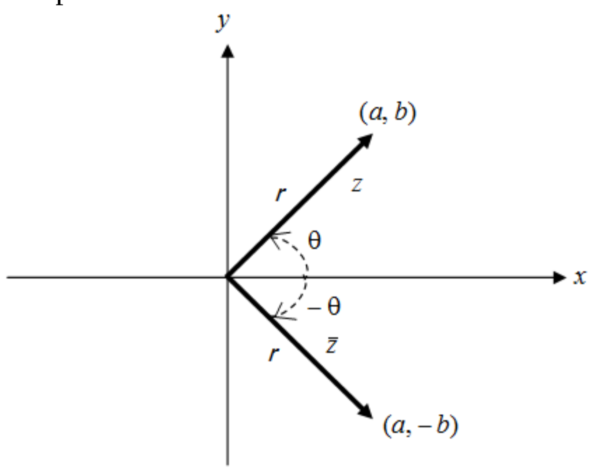


Fig.5.12-Representação geométrica do conjugado.

Temos ainda que: $|\bar{z}| = |z|$, $\arg(\bar{z}) = -\arg(z)$, $\text{Re}(\bar{z}) = \text{Re}(z)$ e $\text{Im}(\bar{z}) = -\text{Im}(z)$.

5.5 – POTÊNCIAS DE *J*

Sabemos que $j^2 = -1$. Existem algumas situações em que necessitaremos obter outras potências de *j*, como, por exemplo, j^{15}. Vamos observar o comportamento presente nas potências de *j* e determinar um padrão que será utilizado para obter qualquer potência desse número. Para isso vamos considerar a tabela 6.1, dada a seguir, que apresenta alguns valores da identidade complexa, *j*, elevada a alguns valores inteiros e positivos.

Tabela 5.1-Potências de *j*

$j^1 = j$	$j^5 = j$	$j^9 = j$
$j^2 = -1$	$j^6 = -1$	$j^{10} = -1$
$j^3 = -j$	$j^7 = -j$	$j^{11} = -j$
$j^4 = +1$	$j^8 = +1$	$j^{12} = +1$

Observe que na potência de *j* com expoente 4 os valores começam a se repetir e o mesmo acontece nas potências com expoentes 8 e 12, caracterizando um padrão de repetição no cálculo dessas potências. Como os valores se repetem a cada quatro potências calculadas, ou seja, de 4 em 4, podemos concluir que o resultado corresponde a j elevado ao resto da divisão $n/4$. Assim,

$$j^n = j^{4k+r} = j^{4k} \cdot j^r = j^r \,, \qquad (5.10)$$

onde r é o resto da divisão $n/4$. Por exemplo, se desejamos calcular o valor de j^{125}, faremos a divisão de 125 por 4. Temos 31 como resultado da divisão e 1 como resto. Logo, calcular o valor de j^{125} é o mesmo que calcular o valor de j elevado ao resto da divisão de 125 por 4, ou seja, é o mesmo que calcular j^1 . Assim, $j^{125} = j^1 = j$.

Exercícios Resolvidos 5.3.

a) Calcule j^{2001}.

Solução: Ora, dividindo 2001 por 4, obtemos resto igual a 1. Logo $j^{2001} = j^1 = j$.

b) Determine a parte real do número complexo $z = (1+j)^{12}$.

Solução: Observe que $z = (1+j)^{12} = [(1+j)^2]^6$. Nestas condições, vamos desenvolver o produto notável: $(1+j)^2 = 1+2j+j^2 = 2j$ .Substituindo na expressão dada, teremos o seguinte: $z = (1+j)^{12} = [(1+j)^2]^6 = (2j)^6 = 64j^6 = -64$. Portanto, o número complexo dado tem somente parte real que é igual a -64.

5.6 – <u>OPERAÇÕES ELEMENTARES</u>

O conjunto dos números complexos é um corpo[20]. Portanto, é fechado sobre as operações de adição e multiplicação, além de possuir a propriedade de que todo elemento não-nulo do conjunto possui um inverso multiplicativo. Todas as operações do corpo possuem as propriedades associativa, comutativa e distributiva, levando em consideração a identidade $j^2 = 1$.

5.6.1 – <u>ADIÇÃO</u>

Para definir a operação de adição no conjunto dos números complexos podemos lembrar que cada ponto do plano representa um número complexo e então, levando-se em consideração a situação geométrica, pensar na maneira mais coerente de definir esta adição. Veja a Fig.6.13. Considerando os números complexos como vetores e, geometricamente falando, a sua soma não passa da soma de vetores através da "regra do paralelogramo".

[20] Todo conjunto munido de operações de adição e multiplicação adquire uma estrutura algébrica denominada *corpo algebricamente fechado*, sendo que esse fechamento consiste na propriedade que tem o conjunto de possuir todas as soluções de qualquer equação polinomial com coeficientes naquele mesmo conjunto (no caso, o conjunto dos complexos).

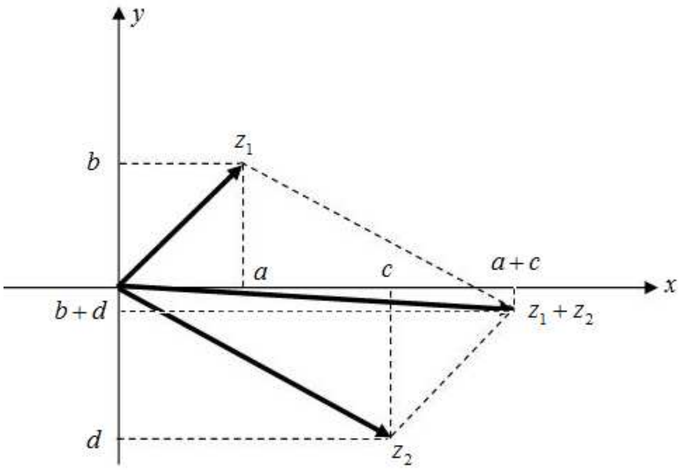


Fig.5.13-Representação geométrica da adição com números complexos.

Na Fig.5.13 temos $z_1=(a,b)$ e $z_2=(c,d)$, portanto, $z_1+z_2=(a+c,b+d)$. Facilmente vemos que esta idéia é coerente com a adição já definida no conjunto de números reais (lembre que cada número real é um número complexo e que geometricamente está situado no eixo horizontal). Se z_1 e z_2 são reais temos, $z_1=(a,0)$ e $z_2=(c,0)$, portanto, $z_1+z_2=(a+c,0)$ que representa o número real $a+c$. Como as representações algébricas de $z_1=(a,b)$ e $z_2=(c,d)$ são respectivamente $z_1=a+jb$ e $z_2=c+jd$ obtemos:

$$z_1+z_2=(a+c)+j(b+d), \tag{5.11}$$

que é a representação algébrica da adição de z_1 por z_2.

A adição apresenta as seguintes propriedades:

P1) Comutativa: $z_1+z_2=z_2+z_1$

P2) Associativa: $(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$

P3) Elemento Neutro Aditivo:
O elemento neutro de um número complexo para a adição é o número $e=0$, tal que: $z+e=e+z=z$.

P4) Elemento Simétrico (ou Elemento Oposto):
O simétrico (ou oposto) de número complexo $z=a+jb$ é o número $-z=-a-jb$, tal que: $z-z=-z+z=0$. O simétrico, em termos geométricos, corresponde a uma rotação de 180º do ponto que o representa em torno da origem conforme mostra a Fig.6.14

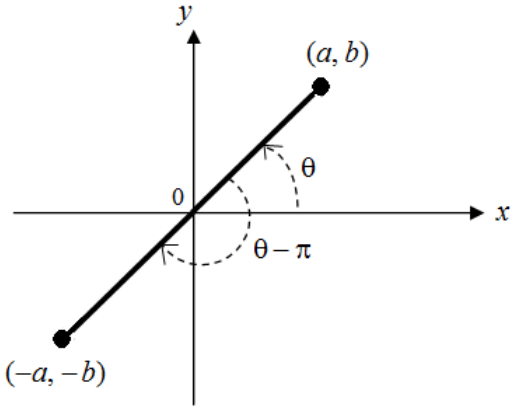


Fig.5.14-Representação geométrica do simétrico.

Utilizando a notação trigonométrica, o simétrico do complexo $z = r(\cos\theta + j\text{sen}\theta)$ é $-z = r(-\cos\theta - j\text{sen}\theta)$. Ou seja: $|-z| = |z|$, $\arg(-z) = \arg(z - \pi)$, $\text{Re}(-z) = -\text{Re}(z)$ e $\text{Im}(-z) = -\text{Im}(z)$. Todo o número complexo tem um e um só simétrico.

5.6.2 – SUBTRAÇÃO

A subtração de z_1 por z_2 nada mais é do que a soma de z_1 com o simétrico (ou oposto) de z_2, ou seja, $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$. Geometricamente, considerando os números como vetores, a subtração corresponde à adição do primeiro vetor com o simétrico (ou oposto) do segundo vetor. Sendo $z_1 = a + jb$ e $z_2 = c + jd$, a subtração é dada por:

$$z_1 - z_2 = (a - c) + j(b - d)\,. \tag{5.12}$$

Não é usual efetuar adições (ou subtrações) de números complexos na forma polar. Essas operações são mais fáceis de serem realizadas na forma algébrica. Se os números complexos estiverem na forma polar, para somá-los (ou subtraí-los), primeiro converta-os para a forma algébrica e, em seguida, efetue os cálculos.

5.6.3 – MULTIPLICAÇÃO (OU PRODUTO)

A multiplicação de números complexos, da mesma forma que a adição, deve estender a lei de multiplicação definida no conjunto de números reais. Assim, a multiplicação do complexo: $z_1 = a + jb = r_1(\cos\theta_1 + j\text{sen}\theta_1)$ pelo complexo: $z_2 = c + jd = r_2(\cos\theta_2 + j\text{sen}\theta_2)$ é um número complexo dado por:

$$z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + j(ad + bc)\,, \tag{5.13}$$

na forma algébrica ou por:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + j\text{sen}(\theta_1 + \theta_2)]\,, \tag{5.14}$$

na forma trigonométrica.

A interpretação geométrica do produto de dois complexos não é simples. Esta operação não corresponde, diretamente, a nenhuma operação conhecida entre vetores. Façamos algumas observações:

- Supondo que z_2 seja um número real, isto é, que $d = 0$, o produto de z_1 por z_2 corresponde ao produto do vetor (a, b) pelo escalar real c. Se $c > 0$, esta operação corresponde a uma ampliação, de razão *c*, do vetor z_1 e, se $c < 0$, corresponde a uma ampliação, de razão $|c|$, do mesmo vetor, seguida de uma rotação de 180º de centro na origem.

- Considerando, agora, que $z_2 = j$, o produto do complexo $a + jb$ por *j* corresponde à rotação de 90º no sentido anti-horário e em torno da origem do vetor (a, b), obtendo-se o vetor $(-b, a)$.
- O produto de um complexo $a + jb$ por um imaginário puro *jk* combina as duas operações anteriores: o produto do vetor (a, b) por *k*, seguido de uma rotação de 90º no sentido anti-horário em torno da origem do vetor obtido. Estas operações podem ser facilmente visualizadas na Fig.5.15.

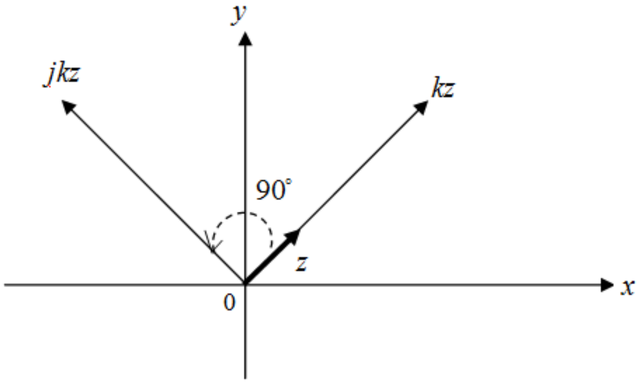


Fig.5.15-Considerações geométricas do produto.

Em resumo, podemos dizer, geometricamente, que multiplicar dois complexos significa multiplicar seus módulos e girar o complexo *z* no sentido anti-horário de um ângulo φ.

A multiplicação apresenta as seguintes propriedades:

P1) Comutativa: $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$

P2) Associativa: $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$

P3) Elemento Neutro Multiplicativo: O elemento neutro de um número complexo para a multiplicação é o número $e = 1$, tal que: $z \cdot e = e \cdot z = z$.

P4) Elemento Inverso: O inverso de um número complexo *z*, denotado por z^{-1} é outro número complexo tal que: $z \cdot z^{-1} = z^{-1} \cdot z = 1$. Como o complexo 0 multiplicado por qualquer complexo *z* sempre é 0, podemos perceber que este complexo não possui inverso e, portanto, a propriedade não é válida. Vejamos o que acontece para um complexo diferente de zero.

Dado $z = r(\cos\theta + j\text{sen}\theta)$, não nulo, desejamos encontrar $z^{-1} = \rho(\cos\alpha + j\text{sen}\alpha)$ tal que $z \cdot z^{-1} = 1$. O produto dos dois números é: $z \cdot z^{-1} = r\rho[\cos(\theta+\alpha) + j\text{sen}(\theta+\alpha)] = 1$ o que nos leva a: $z \cdot z^{-1} = r\rho[\cos(\theta+\alpha) + j\text{sen}(\theta+\alpha)] = 1 = \cos 0 + j\text{sen}0$. Portanto, $r\rho = 1$ e $\theta + \alpha = 0$. Como *r* e ρ são reais positivos, temos que $\rho = \dfrac{1}{r}$ e $\alpha = -\theta$. Portanto o argumento principal de z^{-1} é $2\pi - \theta$. Assim, temos: $z^{-1} = \dfrac{1}{r}[\cos(-\theta) + j\text{sen}(-\theta)] = \dfrac{1}{r}[\cos(\theta) - j\text{sen}(\theta)]$, pois co-seno é uma função com simetria par e seno uma função com simetria ímpar. Vemos, portanto, que z^{-1} se relaciona ao conjugado de *z*. Logo, podemos escrever:

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}. \tag{5.15}$$

Se $z = a + jb$, na representação algébrica, temos:

$$z^{-1} = \frac{a - jb}{a^2 + b^2}. \tag{5.16}$$

P5) Distributiva: Como agora temos as operações de adição e multiplicação nos complexos, podemos afirmar que a propriedade distributiva é válida, ou seja, $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$.

5.6.4 – DIVISÃO

O resultado da divisão entre z_1 e z_2 é o produto de z_1 pelo inverso de z_2, ou seja:

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot z_2^{-1}. \tag{5.17}$$

Essa operação não se aplica quando $z_2 = 0$ visto que o complexo 0 não possui inverso.

Como regra geral, para se dividir um número complexo por outro, estando os dois números expressos na forma algébrica, basta multiplicar numerador e denominador pelo complexo conjugado do denominador.

Como já foi dito, não é usual trabalhar com adições (ou subtrações) de números complexos na forma polar ou na forma exponencial. Por outro lado, a multiplicação e a divisão são mais facilmente realizadas na forma polar ou exponencial. Sejam os números complexos dados na forma exponencial: $z_1 = |z_1| \cdot e^{j\theta_1}$ e $z_2 = |z_2| \cdot e^{j\theta_2}$, a multiplicação desses dois números é: $z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot e^{j(\theta_1 + \theta_2)}$ e a divisão é $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{|z_1|}{|z_2|} \cdot e^{j(\theta_1 - \theta_2)}$.

Note o seguinte:

- Ao multiplicarmos dois ou mais números complexos nas formas exponencial ou polar, basta multiplicarmos seus módulos e somarmos seus argumentos. Esse resultado pode ser estendido para a forma trigonométrica.
- Ao dividirmos dois números complexos nas formas exponencial ou polar, basta dividirmos seus módulos e subtrairmos seus argumentos. Esse resultado pode ser estendido para a forma trigonométrica.

5.6.5 – POTENCIAÇÃO

A potência *n*-ésima de um número complexo não nulo *z*, anotada por z^n, onde *n* é um número inteiro segue a mesma idéia de potência de um número inteiro.

A potenciação de um número complexo poderá ser feita tanto na forma retangular quanto nas formas trigonométrica, exponencial ou polar. Porém, esta operação na forma retangular torna-se mais trabalhosa quando aumentamos o valor do expoente *n*. Por exemplo, seja um número complexo da forma $z = a + bi$. Ao elevarmos este número a um expoente *n*, teremos $z^n = (a + bj)^n$. Para realizarmos esta operação devemos recorrer ao triângulo de Pascal. Se trabalharmos com o número complexo nas formas trigonométrica, exponencial ou polar. Dado $z = |z| \cdot e^{j\theta}$, teremos $z^n = \left(|z| \cdot e^{j\theta}\right)^n = |z|^n \cdot e^{jn\theta}$. Ao elevarmos um número complexo a um expoente *n*, basta elevarmos seu módulo a *n* e multiplicarmos seu argumento por *n*.

Por exemplo, sendo $z = 2e^{j\frac{\pi}{4}}$, temos que $z^5 = 2^5 e^{j\frac{5\pi}{4}} = 32e^{j\frac{5\pi}{4}}$.

Uma fórmula que pode nos ajudar a determinar z^n é devida a Moivre, e denominada de *Fórmula de De Moivre*:

$$z^n = r^n\left[\cos(n\theta) + j\text{sen}(n\theta)\right], \tag{5.18}$$

onde, $0 \le n\theta < 2\pi$. Essa fórmula é uma conseqüência imediata da multiplicação de complexos.

Veja algumas curiosidades dessa fórmula:

- Note que essa fórmula confirma um fato comum para números reais, isto é: números reais positivos elevados a qualquer expoente resultam em valores positivos, mas números reais negativos somente quando elevados a expoentes *pares* resultam em valores *positivos*; quando elevados a expoentes ímpares resultam em valores negativos. Você pode checar esse fato na fórmula anterior, pois: os números reais positivos, "vistos" como números complexos, formam ângulo de 0° com o eixo *x*, por isso, quando elevados a qualquer expoente sempre "cairão" sobre o lado positivo do eixo *x*, visto que $\text{sen}0 = 0$ e $\cos 0 = 1$. Já os números reais negativos, "vistos" como números complexos, formam ângulo de 180° com o eixo *x*, e por isso, quando elevados a expoentes pares, "cairão" sobre o lado *positivo* do eixo *x*, visto que formarão ângulos *congruentes com* 0°, portanto com o seno valendo zero e o co-seno valendo 1. Mas, se elevados a expoentes ímpares "cairão" sobre o lado *negativo* do eixo *x*, visto que formarão ângulos *congruentes com* 180°, portanto com o seno valendo zero e o co-seno valendo -1.
- Suponha que $|z| = 1$, isto é, o número complexo possui módulo unitário. Nesse caso, seu afixo (o ponto que o representa no plano de Argand-Gauss) estará numa circunferência de raio unitário centrada na origem. Substituindo $|z|$ por 1 na fórmula da potenciação, temos: $\left[\cos(\theta) + j\text{sen}(\theta)\right]^n = \cos(n\theta) + j\text{sen}(n\theta)$.

Geometricamente, z^n significa rotacionar z n vezes de um ângulo θ (no sentido anti-horário quando $n > 0$, ou sentido horário quando $n < 0$), localizando-o em um círculo de raio r^n.

Exercícios Resolvidos 5.4.

a) Calcule $(1+j)^9$.

Solução: $(1+j)^9 = \left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + j\text{sen}\frac{\pi}{4}\right)\right]^9 = \left(\sqrt{2}\right)^9\left(\cos\frac{9\pi}{4} + j\text{sen}\frac{9\pi}{4}\right) = 2^4\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Logo, $(1+j)^9 = 16 + j16$.

b) Sendo $z = 1 + j\sqrt{3}$, calcular z^5.

Solução: $(1+j\sqrt{3})^5 = \left[2\left(\cos\frac{\pi}{3} + j\text{sen}\frac{\pi}{3}\right)\right]^5 = 16 - j16\sqrt{3}$.

5.6.6 – RADICIAÇÃO

Chamamos radiciação a uma potência de expoente fracionário. Cada número complexo tem n raízes, ou seja, a radiciação de números complexos dá-nos um conjunto de raízes. Observemos que as n raízes de um número complexo z são as soluções da equação:

$$z = w^n,$$

que, no corpo dos complexos, tem n raízes.

Chamamos de raiz n-ésima de um número complexo z o número complexo w_k tal que $(w_k)^n = z$. Por exemplo,

- j é raiz quadrada de -1, pois $j^2 = -1$;
- j é raiz cúbica de $-j$, pois $j^3 = -j$;
- $2j$ é raiz quarta de 16, pois $(2j)^4 = 16$.

Para calcularmos as raízes *n-ésimas* de um número complexo, o mesmo deverá estar nas formas trigonométrica, exponencial ou polar. Assim, seja $w = |w| \cdot [\cos\alpha + j\mathrm{sen}\alpha]$ e $z = |z| \cdot [\cos\theta + j\mathrm{sen}\theta]$. Supondo que $z = w^n$, teremos $w = \sqrt[n]{z}$. Logo,

$$z = |z| \cdot [\cos\theta + j\mathrm{sen}\theta] = |w|^n \cdot [\cos(n\alpha) + j\mathrm{sen}(n\alpha)].$$

Da equação acima, podemos concluir:

- $|z| = |w|^n \to |w| = \sqrt[n]{|z|}$;
- $n\alpha = \theta \to \alpha = \dfrac{\theta + 2k\pi}{n}$, $k = 0, 1, 2, \cdots, n-1$.

Assim, as n raízes de um número complexo z serão dadas, utilizando-se a fórmula de Moivre, por:

$$\sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{|z|}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + j\mathrm{sen}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right], \qquad (5.19)$$

onde $0 \le \dfrac{\theta + 2k\pi}{n} < 2\pi$ e $0 \le k < n$.

Na equação (6.19), θ deve ser expresso em radianos. Caso se queira trabalhar em graus, a expressão torna-se:

$$\sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{|z|}\left[\cos\left(\frac{\theta + 360k}{n}\right) + j\mathrm{sen}\left(\frac{\theta + 360k}{n}\right)\right]. \qquad (5.20)$$

Vale ressaltar, ainda, que:

- todas as n raízes de z possuem o mesmo módulo;
- as n raízes de um número complexo de argumento θ, possuem argumentos que formam uma progressão aritmética de primeiro termo θ/n e razão $2\pi/n$ em radianos ou $360^\circ/n$ em graus;
- para $n \ge 3$,
- as n raízes de z têm por imagem os vértices de um polígono regular de n lados, inscrito numa circunferência de raio $\sqrt[n]{|z|}$.

Exercícios Resolvidos 5.5.

a) Encontre as raízes quadradas de $z = 4 + j4\sqrt{3}$.

Solução:

1º. Passo: calcular o módulo de $z : |z| = \sqrt{4^2 + (4\sqrt{3})^2} = 8$.

2º. Passo: determinar o argumento de $z : \begin{cases} \text{sen}\theta = \dfrac{4\sqrt{3}}{8} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos\theta = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$.

3º. Passo: usar a Fórmula de Moivre:

$$z^{\frac{1}{2}} = 8^{\frac{1}{2}}\left[\cos\left(\frac{\frac{\pi}{3}+2k\pi}{2}\right) + j\text{sen}\left(\frac{\frac{\pi}{3}+2k\pi}{2}\right)\right] = 8^{\frac{1}{2}}\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}+k\pi\right) + j\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}+k\pi\right)\right],$$

Ou seja, para $k = 0 \Rightarrow z^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + j\text{sen}\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{6} + j\sqrt{2}$ e para $k = 1 \Rightarrow$ $z^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{6} + j\text{sen}\frac{7\pi}{6}\right) = -\sqrt{6} - j\sqrt{2}$.

b) Achar as 3 raízes cúbicas de -8 (w_0, w_1 e w_2).

Solução:

Temos $z = -8$. Na forma trigonométrica, encontramos: $z = 8 \cdot [\cos\pi + j\text{sen}\pi]$.

As 3 raízes cúbicas de z possuirão módulo igual a $|w_0| = |w_1| = |w_2| = \sqrt[3]{|z|} = \sqrt[3]{8} = 2$, e argumentos dados por:

a) Para $k = 0 \Rightarrow \alpha_0 = \dfrac{\pi + 2\cdot 0 \cdot \pi}{3} = \dfrac{\pi}{3}$. A primeira raiz cúbica de -8 será:

$$w_0 = 2 \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + j\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right] = 2 \cdot \left[\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right] = 1 + j\sqrt{3}.$$

b) Para $k = 1 \Rightarrow \alpha_1 = \dfrac{\pi + 2\cdot 1 \cdot \pi}{3} = \dfrac{3\pi}{3} = \pi$. A segunda raiz cúbica de -8 será:

$$w_1 = 2 \cdot [\cos(\pi) + jsen(\pi)] = 2 \cdot [-1 + j \cdot 0] = -2.$$

c) Para $k = 2 \Rightarrow \alpha_2 = \dfrac{\pi + 2\cdot 2 \cdot \pi}{3} = \dfrac{5\pi}{3}$. A terceira raiz cúbica de -8 será:

$$w_2 = 2 \cdot \left[\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + j\text{sen}\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right] = 2 \cdot \left[\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right] = 1 - j\sqrt{3}.$$

a) Resolva, no campo dos complexos, a equação $z^6 - 16z^3 + 64 = 0$.

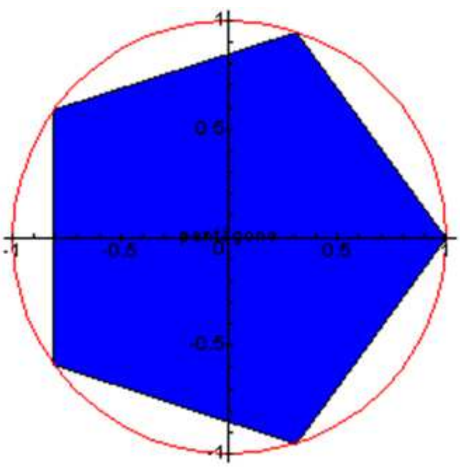
Solução:
Fazendo $x = z^3$, vem: $x^2 - 16x + 64 = 0 \Rightarrow (x-8)^2 = 0 \Rightarrow x = 8$

Como $x = z^3$, temos que: $z^3 = 8$. O problema consiste então no cálculo das raízes cúbicas de 8. Procedendo como nos exercícios anteriores, temos: $w_0 = 2$, $w_1 = -1 + j\sqrt{3}$, $w_2 = -1 - j\sqrt{3}$, que formam o conjunto solução da equação dada.

d) Determinar as raízes quintas de 1 e, em seguida, faça uma interpretação geométrica do resultado.

Solução:

Procedendo como antes, vem: $w_0 = 1$, $w_1 = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + j\text{sen}\left(\frac{2\pi}{5}\right)$, $w_2 = \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + j\text{sen}\left(\frac{4\pi}{5}\right)$, $w_3 = \cos\left(\frac{6\pi}{5}\right) + j\text{sen}\left(\frac{6\pi}{5}\right)$, $w_4 = \cos\left(\frac{8\pi}{5}\right) + j\text{sen}\left(\frac{8\pi}{5}\right)$. É evidente que todas as raízes da unidade possuem módulo 1 e portanto estão localizadas sobre o círculo de raio 1. No exemplo dado, temos cinco pontos sobre o círculo de raio 1 , quando unimos estes pontos obtemos um pentágono regular inscrito neste círculo. Podemos obter este pentágono com o auxílio de um programa computacional ou utilizando régua e compasso.



Explorando um pouco mais este exercício, facilmente percebemos que $w_2 = w_1^2$, $w_3 = w_1^3$, $w_4 = w_1^4$ e $w_5 = w_1^5$, ou seja, a partir de w_1 obtemos as outras raízes. Uma raiz da unidade que tem este comportamento é chamada de *primitiva*.

5.7 – <u>RELAÇÕES DE EULER</u>

Como mostrado anteriormente, através da equação (5.6), Euler provou que:

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\text{sen}\theta. \tag{5.20}$$

Trocando θ por $-\theta$, na equação (5.2), encontramos:

$$e^{j(-\theta)} = \cos(-\theta) + j\text{sen}(-\theta). \tag{5.21}$$

Como co-seno é uma função par e seno é uma função ímpar, a equação (5.21) transforma-se em:

$$e^{-j\theta} = \cos\theta - j\operatorname{sen}\theta\,. \tag{5.22}$$

Somando as equações (5.20) e (5.22), obtemos a fórmula de Euler para o co-seno:

$$\cos\theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}\,. \tag{5.23}$$

Subtraindo a equação (6.20) da equação (5.22), obtemos a fórmula de Euler para o seno:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}\,. \tag{5.24}$$

5.8 – <u>PROPRIEDADES COMPLEMENTARES</u>

Supondo que z e w sejam números complexos, são válidas as seguintes propriedades complementares (fica como exercício, a demonstração dessas propriedades):

P1) $\overline{(z+w)} = \bar{z} + \bar{w}$
O conjugado da soma equivale à soma dos conjugados.

P2) $\overline{z.w} = \bar{z}.\bar{w}$
O conjugado do produto equivale ao produto dos conjugados.

P3) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$
O módulo do produto equivale ao produto dos módulos (essa propriedade não se aplica à soma)

P4) $|z| = |\bar{z}|$
O módulo de um número complexo é igual ao módulo do seu conjugado.

P5) $z \cdot \bar{z} = |z|^2$
O produto de um número complexo pelo seu conjugado é igual ao seu módulo ao quadrado.

P6) Para $w \neq 0$, $\dfrac{z}{w} = z\dfrac{\bar{w}}{|w|^2}$