Núcleo Básico das Engenharias

M002-E
Álgebra e Geometria Analítica

Cap. 2 – Retas

Prof. Edson J. C. Gimenez
soned@inatel.br

2019/Sem1

Referências

- Material adaptado da Apostila Álgebra e Geometria Analítica (NB020).
  - Profª. Karina Peres Mokarzel Carneiro, Prof. Luiz Felipe S. de Godoy, Prof. Rodrigo Guaracy Santana e Prof. Giovani Henrique F. Floriano.

Outras referências importantes:

- Geometria Analítica – Alfredo Steinbruch e Paulo Winterle.
- Geometria Analítica: um tratamento vetorial. Ivan de Camargo e Paulo Boulos.
- Vetores e Geometria Analítica – Paulo Winterle.

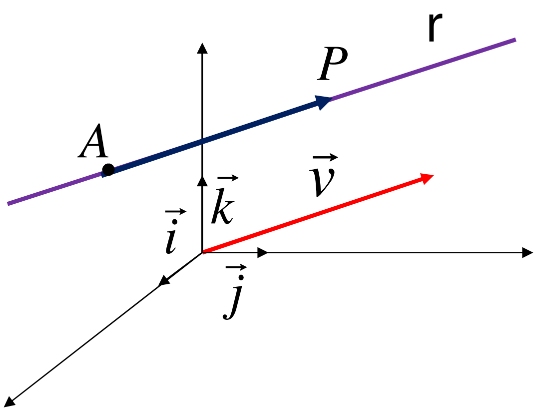
Equação Vetorial da Reta

Seja a reta r aquela que passa pelo ponto A e tem direção de um vetor não nulo $\vec{v}$; temos que $P \in r$ <u>se e somente se</u> $\overrightarrow{AP}$ e $\vec{v}$ forem paralelos.

$$\boxed{\overrightarrow{AP} = \alpha\vec{v}, \forall \alpha \in R}$$

$$P - A = \alpha\vec{v}, \forall \alpha \in R$$

$$\boxed{P = A + \alpha\vec{v}, \forall \alpha \in R}$$



$\vec{v}$ é denominado **vetor diretor** da reta.
α é denominado **parâmetro** da reta.

Equação Vetorial da Reta

Dados $P = (x, y, z)$, $A(x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (a, b, c)$, temos que a equação vetorial da reta r pode ainda ser escrita como:

$$r: \; P = A + \alpha\vec{v}, \forall \alpha \in R$$

$$\boxed{r: (x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + \alpha(a, b, c), \forall \alpha \in R}$$

Equações Paramétricas da Reta

Da equação vetorial da reta *r* temos que:

$$r:(x,\ y,\ z)=(x_1,\ y_1,\ z_1)+\alpha(a,b,c),\ \forall\alpha\in R$$

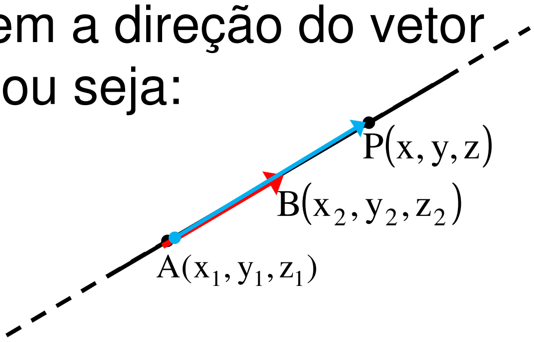
Assim, as equações paramétricas da reta *r* são:

$$\boxed{r:\begin{cases} x = x_1+\alpha a \\ y = y_1+\alpha b, \qquad \alpha\in R \\ z = z_1+\alpha c \end{cases}}$$

Reta definida por dois pontos

A reta definida pelos pontos A e B é a reta que passa pelo ponto A (ou ponto B) e tem a direção do vetor $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$, ou seja:

$$\overrightarrow{AP}=\alpha\,\overrightarrow{AB}$$



Daí:

$$\boxed{r\begin{cases} x = x_1+\alpha(x_2-x_1) \\ y = y_1+\alpha(y_2-y_1) \\ z = z_1+\alpha(z_2-z_1) \end{cases}}$$

Equações Simétricas da Reta

Das equações paramétricas da reta *r* :

$$r : \begin{cases} x = x_1 + \alpha a \\ y = y_1 + \alpha b, \quad \alpha \in R \\ z = z_1 + \alpha c \end{cases}$$

temos que: $x = x_1 + \alpha a \quad y = y_1 + \alpha b \quad z = z_1 + \alpha c$

Assim, para $a \neq 0$, $b \neq 0$ e $c \neq 0$ vem:

$$\alpha = \frac{x - x_1}{a} \quad \alpha = \frac{y - y_1}{b} \quad \alpha = \frac{z - z_1}{c}$$

Equações Simétricas da Reta

Daí, obtemos as equações simétricas (ou normais) da reta *r* :

$$\boxed{r : \frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}}$$

$$\boxed{r : \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}}$$

Exercícios

Equações Reduzidas da Reta

Considerando cada igualdade das equações simétricas da reta *r* em separado (isolando *y* e *z* em função de *x)* vem:

$$\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}=\frac{z-z_1}{c}$$

$$\frac{y-y_1}{b}=\frac{x-x_1}{a}$$

$$y-y_1=\frac{b}{a}(x-x_1)$$

$$\boxed{y=\frac{b}{a}x-\frac{b}{a}x_1+y_1}$$

$$\frac{z-z_1}{c}=\frac{x-x_1}{a}$$

$$z-z_1=\frac{c}{a}(x-x_1)$$

$$\boxed{z=\frac{c}{a}x-\frac{c}{a}x_1+z_1}$$

que são as equações reduzidas da reta em função de x.

Reta Paralela ao Plano YZ

Considere nula a 1ª componente do vetor diretor da reta, assim:

$$a=0, \vec{v}=(0,b,c)\perp Ox=(1,0,0)\therefore r\,//\,yz$$

Equações paramétricas

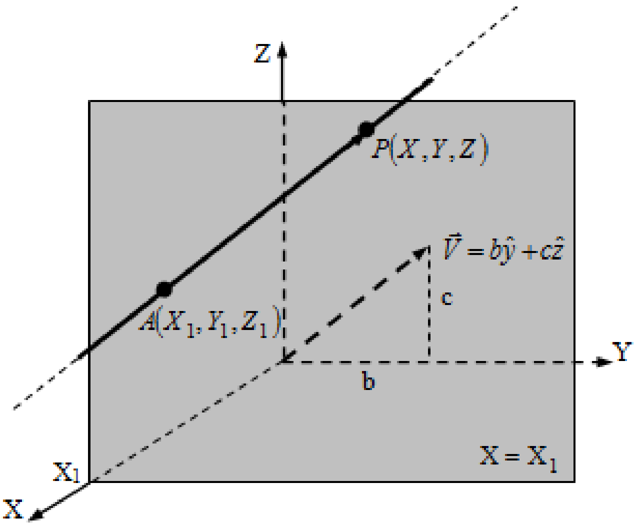
$$r\begin{cases} x=x_1 \\ y=y_1+\alpha b \\ z=z_1+\alpha c \end{cases}$$

Equações simétricas

$$r\left\{\frac{y-y_1}{b}=\frac{z-z_1}{c},\ x=x_1\right.$$

Equações reduzidas

$$r\begin{cases} x=x_1 \\ z=my+n \end{cases}$$



Reta Paralela ao Plano XZ

Considere nula a 2ª componente do vetor diretor da reta, assim:

$$b = 0,\ \vec{v} = (a,\ 0,\ c) \perp Oy = (0,\ 1,\ 0) \therefore r\ //\ xz$$

Equações paramétricas

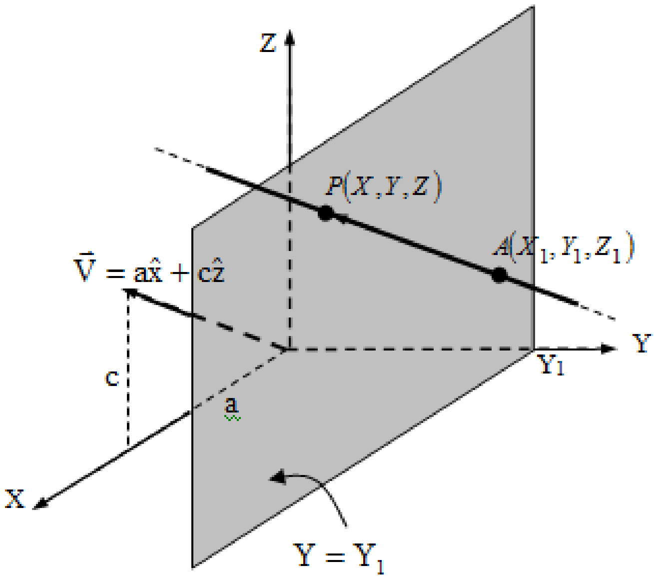
$$r \begin{cases} x = x_1 + \alpha a \\ y = y_1 \\ z = z_1 + \alpha c \end{cases}$$

Equações simétricas

$$r \left\{ \frac{x - x_1}{a} = \frac{z - z_1}{c},\ y = y_1 \right.$$

Equações reduzidas

$$r \begin{cases} y = y_1 \\ z = mx + n \end{cases}$$



Reta Paralela ao Plano XY

Considere nula a 3ª componente do vetor diretor da reta, assim:

$$c = 0,\ \vec{v} = (a,\ b,\ 0) \perp Oz = (0,\ 0,\ 1) \therefore r\ //\ xy$$

Equações paramétricas

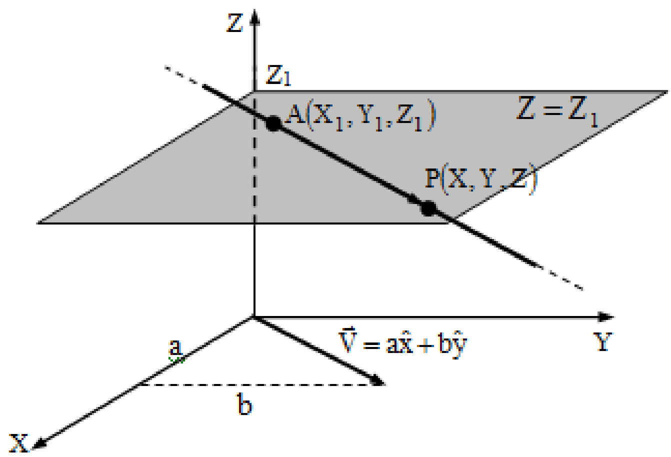
$$r \begin{cases} x = x_1 + \alpha a \\ y = y_1 + \alpha b \\ z = z_1 \end{cases}$$

Equações simétricas

$$r \left\{ \frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b},\ z = z_1 \right.$$

Equações reduzidas

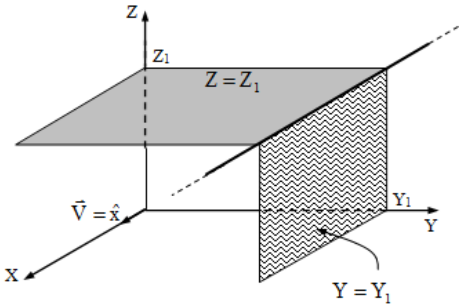
$$r \begin{cases} z = z_1 \\ y = mx + n \end{cases}$$



Reta Paralela ao Eixo OX

Considere nulas as componente do vetor diretor da reta

$$b = c = 0, \vec{v} = (a, 0, 0) // \vec{i} \therefore r // Ox$$



As equações ficam:

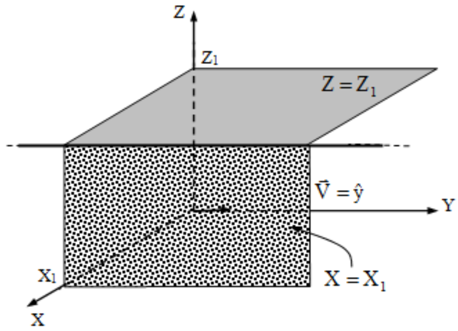
$$r \begin{cases} y = y_1 \\ z = z_1 \end{cases}$$

sendo x variável.

Reta Paralela ao Eixo OY

Considere nulas as componente do vetor diretor da reta

$$a = c = 0, \vec{v} = (0, b, 0) // \vec{j} \therefore r // Oy$$



As equações ficam:

$$r \begin{cases} x = x_1 \\ z = z_1 \end{cases}$$

sendo y variável.

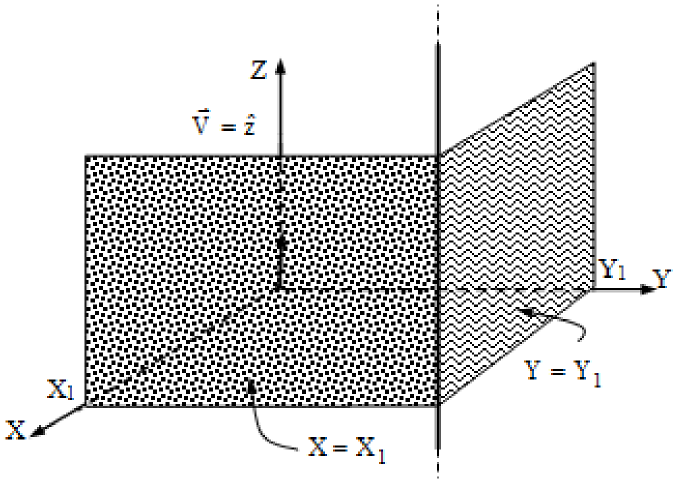
Reta Paralela ao Eixo OZ

Considere nula duas componente do vetor diretor da reta, assim:

$$a = b = 0, \vec{v} = (0, 0, c) // \vec{k} \therefore r // Oz$$

Equações paramétricas

$$r \begin{cases} x = x_1 \\ y = y_1 \\ z = z_1 + c\alpha \end{cases}$$



Equações simétricas

$$r \left\{ x = x_1, y = y_1, \frac{z - z_1}{c} \right.$$

Costuma-se representar simplesmente por

$$r \begin{cases} x = x_1 \\ y = y_1 \end{cases}$$

sendo z variável.

Ângulo entre duas Retas

O ângulo entre as retas *r* e *s* que passam respectivamente nos pontos $A(x_1, y_1, z_1)$ e $B(x_2, y_2, z_2)$, e possuem os seguintes vetores diretores: $\vec{v}_1 = (a_1, b_1, c_1)$ e $\vec{v}_2 = (a_2, b_2, c_2)$ é dado pelo **menor ângulo*** entre os respectivos vetores diretores.

Assim, sendo θ este ângulo, temos:

$$\boxed{\cos(\theta) = \frac{|\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2|}{|\vec{v}_1| \cdot |\vec{v}_2|}, 0 \le \theta \le 90^o}$$

ou:

$$\cos(\theta) = \frac{|a_1.a_2 + b_1.b_2 + c_1.c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \; . \; \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

* Menor ângulo → cos θ positivo → módulo do produto escalar

Condição de Paralelismo de duas Retas

- Duas retas r_1 e r_2 são paralelas quando $\vec{v}_1 = m\vec{v}_2$

Condição de Ortogonalidade de duas Retas

- Duas retas r_1 e r_2 são ortogonais quando $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$

Condição de Coplanaridade de duas Retas

- A reta r_1 que passa por um ponto A_1 e tem direção de um vetor $\vec{v}_1$ e a reta r_2 que passa por A_2 e tem direção de um vetor $\vec{v}_2$, são coplanares se $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ e $\overrightarrow{A_1A_2}$ forem coplanares, isto é:

$$(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \overrightarrow{A_1A_2}) = 0$$

Exercícios