Superfícies Quádricas

Prof. Edson J. C. Gimenez

2018/Sem2

Adaptado de:

1) Superfícies Quádricas – prof. Rodrigo Guaracy Santana/2013
2) Apostila NB020 – Inatel/2015

Superfícies Quádricas Centradas (ou Cêntricas)

Uma forma básica de esboçar uma superfície quádrica é determinar as suas interseções com os eixos coordenados e desenhar as interseções da superfície com os planos coordenados, também chamadas traços da quádrica.

A equação geral das superfícies quádricas centradas (com centro na origem) é:

$$\boxed{\pm\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}\pm\frac{z^2}{c^2}=1}$$

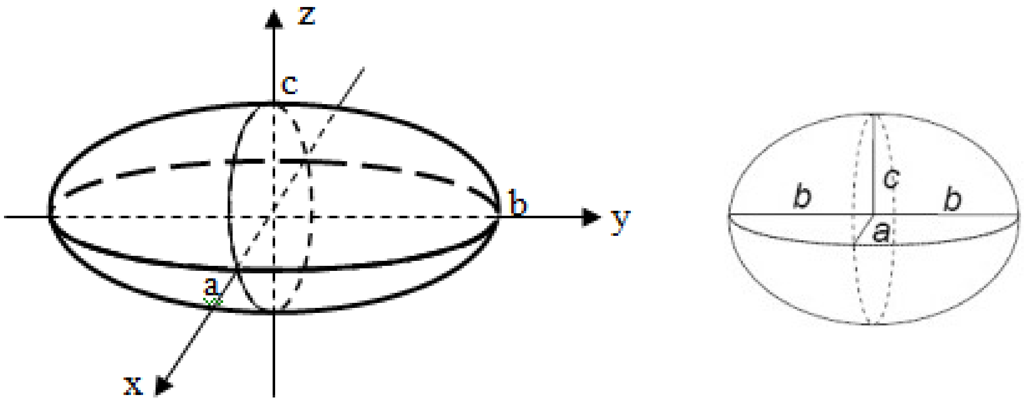
As possíveis combinações de sinais na equação permitem concluir a existência de apenas três tipos de superfícies, conforme sejam **três, dois** ou **um** o número de coeficientes positivos dos termos do 1º membro da equação.

Elipsoide

O elipsoide é a superfície representada pela equação:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

em que todos os coeficientes são positivos. E ainda, ***a***, ***b*** e ***c*** são **reais positivos** e representam as **medidas dos semieixos** do elipsoide.

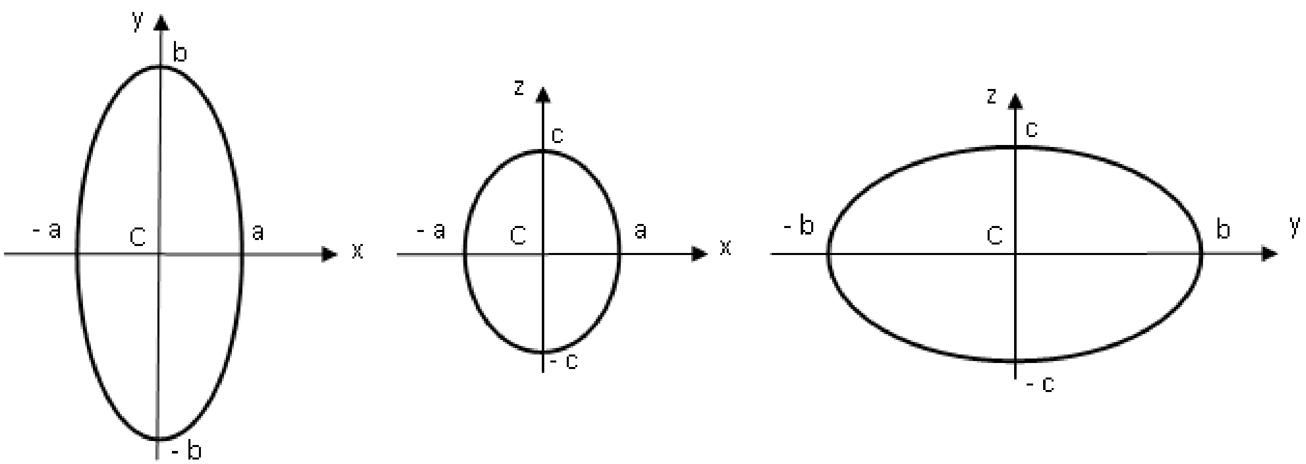


Observamos ainda que os pontos (±a,0,0), (0,±b,0) e (0,0,±c) são soluções da equação na forma canônica do elipsoide.

(1) O traço no plano xOy é a elipse: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ \mathrm{z}=0$

(2) O traço no plano xOz é a elipse: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\ \mathrm{y}=0$

(3) O traço no plano yOz é a elipse: $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\ \mathrm{x}=0$



(1) (2) (3)

Observações:

a) Todos os sinais positivos: $\boxed{\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1}$

b) A superfície é simétrica em relação aos eixos coordenados, a todos os planos coordenados e a origem

c) Se $a = b = c$, a equação fica $\boxed{x^2 + y^2 + z^2 = a^2}$ e representa uma superfície esférica de centro (0,0,0) e raio a.

d) Se o centro do elipsoide é o ponto (x_0, y_0, z_0) e seus eixos forem paralelos aos eixos coordenados, a equação na forma canônica, obtida por uma translação de eixos coordenados, assume a forma:

$$\boxed{\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1}$$

Da mesma forma, a superfície esférica de centro (x_0, y_0, z_0) e raio *a* terá como equação:

$$\boxed{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=a^2}$$

Exemplos

Hiperboloide de uma folha

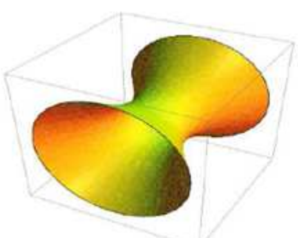
Hiperboloide de uma folha:

Se na equação $\pm\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}\pm\frac{z^2}{c^2}=1$ dois dos coeficientes dos termos do primeiro membro são positivos e um é negativo, a equação representa um hiperboloide de uma folha, cujas equações canônicas são:

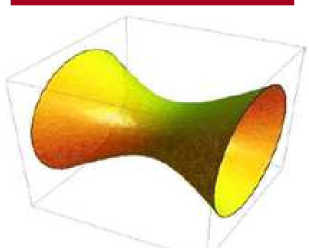
(1) Ao longo do eixo Ox: $\boxed{-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1}$

(2) Ao longo do eixo Oy: $\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1}$

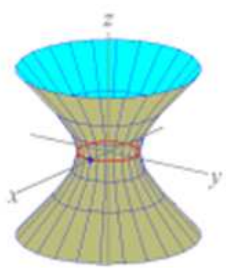
(3) Ao longo do eixo Oz: $\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1}$



(1)



(2)

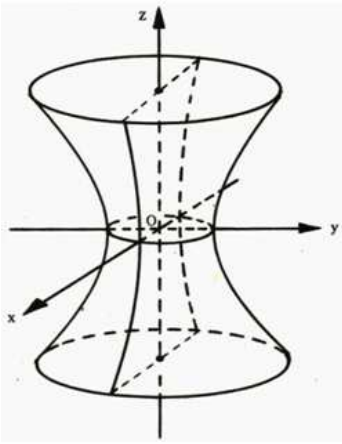


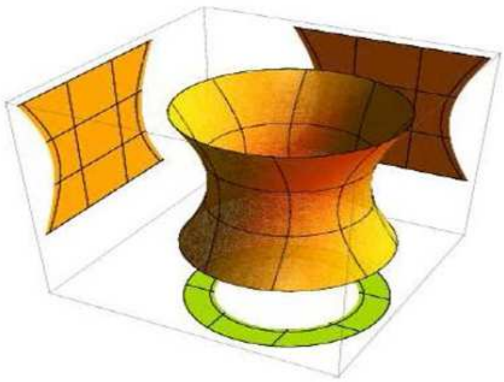
(3)

(1) O traço no plano xOy é uma elipse: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \, z = 0$

(2) O traço no plano xOz é uma hipérbole: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \, y = 0$

(3) O traço no plano yOz é uma hipérbole: $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \, x = 0$





Observações:

a) Dois termos com sinais positivos e um termo com sinal negativo. O termo negativo na equação indica o eixo do hiperboloide.

b) A superfície é simétrica em relação aos eixos coordenados, a todos os planos coordenados e a origem

c) Se na equação $\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1}$ tivermos $a = b$, o hiperboloide é de revolução, gerado pela rotação de uma hipérbole em torno do seu eixo Oz.

O traço no plano xOz é a circunferência $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1, \, z = 0$, ou $x^2 + y^2 = a^2$, com a igual a seu raio.

d) Se o centro do hiperboloide de uma folha é o ponto (x_0, y_0, z_0) e seus eixos forem paralelos aos eixos coordenados, a equação na forma canônica, obtida por uma translação de eixos coordenados, assume a forma:

$$\boxed{\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} - \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = 1}$$

Exemplos

Hiperboloide de duas folhas

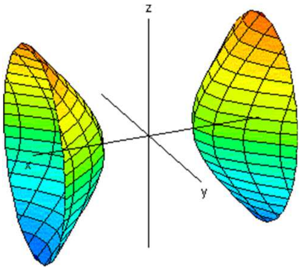
Hiperboloide de duas folhas:

Se na equação $\pm\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}\pm\frac{z^2}{c^2}=1$ um coeficiente dos termos do primeiro membro é positivo e dois são negativos, a equação representa um hiperboloide de duas folhas, cujas equações canônicas ao longo dos eixos são:

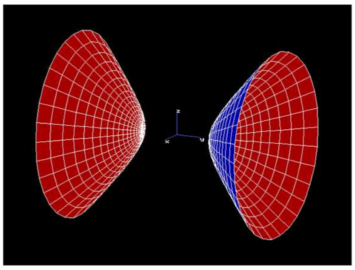
(1) Ao longo do eixo Ox: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

(2) Ao longo do eixo Oy: $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

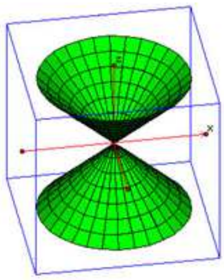
(3) Ao longo do eixo Oz: $-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$



(1)



(2)



(3)

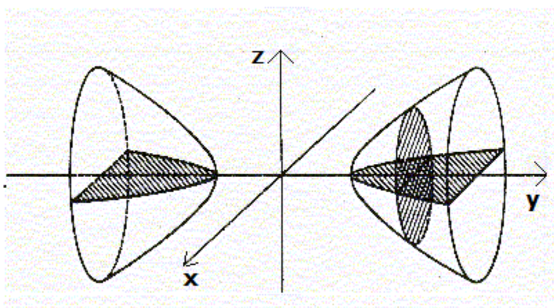
(1) O traço no plano xOy é uma hipérbole: $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$, $z=0$

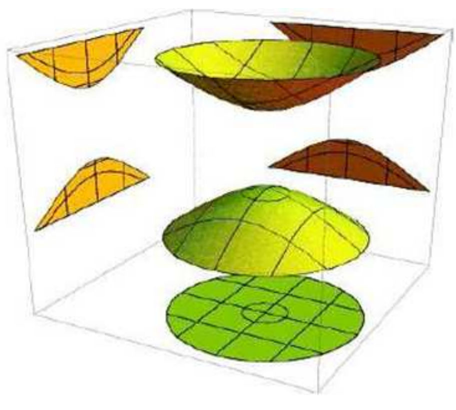
(2) O traço no plano yOz é uma hipérbole: $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$, $x=0$

(3) O plano xOz não intercepta a superfície, nem qualquer plano $y = k$, onde $|k| < b$.

Se $|k| > b$, o traço no plano $y = k$ é a elipse: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=\frac{k^2}{b^2}-1$, k = y

Os traços nos planos x = k e z = k são hipérboles.





Observações:

a) Dois termos com sinais negativos e um termo com sinal positivo. O termo positivo na equação indica o eixo do hiperbolóide.

b) A superfície é simétrica em relação aos eixos coordenados, a todos os planos coordenados e a origem

c) Se na equação $\boxed{-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1}$ tivermos $a = c$, o hiperboloide é de revolução, geado pela rotação de uma hipérbole em torno do seu eixo real.

O traço no plano y = k, $|k| > b$, é a circunferência $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{k^2}{b^2}-\frac{z^2}{a^2}=1$, y = k.

d) Se o centro do hiperboloide de duas folha é o ponto (x_0, y_0, z_0) e seus eixos forem paralelos aos eixos coordenados, a equação na forma canônica, obtida por uma translação de eixos coordenados, assume a forma:

$$\boxed{-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}-\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1}$$

<u>Exemplos</u>

Superfícies Quádricas Não Centradas (ou Não Cêntricas)

As quádricas não Centradas são do tipo:

$$Ax^2+By^2=-Iz$$

$$By^2+Cz^2=-Gx$$

$$Ax^2+Cz^2=-Hy$$

Se as constantes A, B, C, G, H, I são não nulas temos as seguintes possibilidades:

1) Os coeficientes dos termos do segundo grau têm sinais iguais.
2) Os coeficientes dos termos do segundo grau têm sinais diferentes.

Parabolóide Elítico

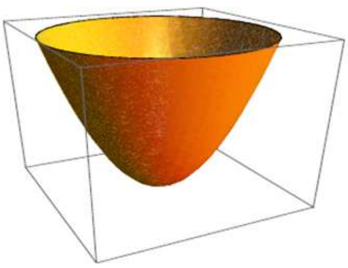
Parabolóide Elíptico:
A equação que representa o paraboloide elíptico de centro na origem, ao longo do eixo Oz é:

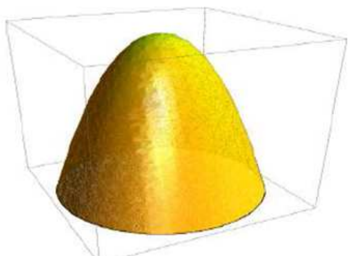
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=cz$$

sendo que $a, b, c \in R$ não são nulos.

Para $c > 0$, o parabolóide tem a concavidade voltada para cima.

Para $c < 0$, o paraboloide "abre" para baixo.





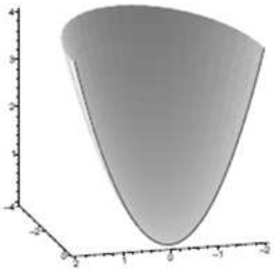
Interseção com os eixos coordenados: Centro (0,0,0).

Simetria: a equação não se altera se substituirmos x e y por $-x$ e $-y$; logo, o parabolóide tem simetria em relação aos planos yz e xz.

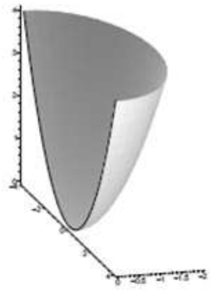
Traços do Paraboloide Elíptico ao longo do eixo Oz:

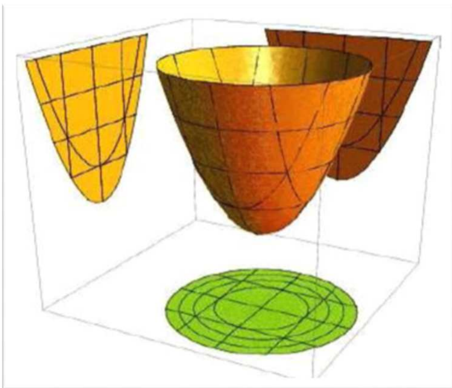
a) O traço no plano xy é o ponto central (0, 0, 0)

b) O traço no plano yz é a parábola $\frac{y^2}{b^2} = cz$, $x = 0$ →



c) O traço no plano xz é a parábola $\frac{x^2}{a^2} = cz$, $y = 0$ →

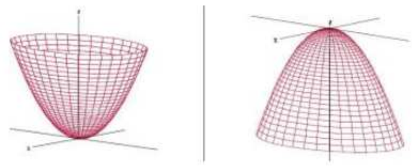




Observações - Parabolóide Elíptico

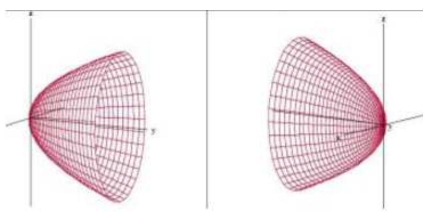
Os coeficientes dos termos do 2º grau têm sinais iguais. As equações a seguir são formas canônicas do paraboloide elíptico aos longo dos eixos:

(a) Ao longo do eixo Oz: $\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = cz}$



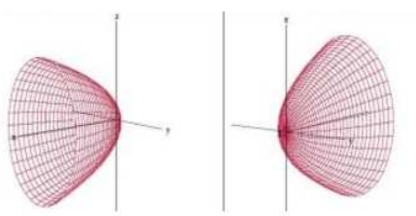
$c > 0$ $c < 0$

(b) Ao longo do eixo Oy: $\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = by}$



$b > 0$ $b < 0$

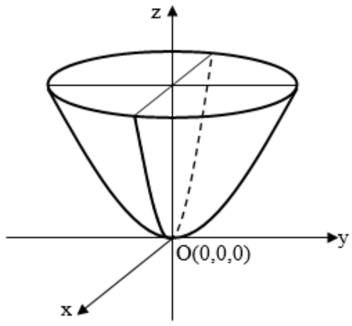
(c) Ao longo do eixo Ox: $\boxed{\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = ax}$



$a > 0$ $a < 0$

Observações - Parabolóide Elíptico

Para um parabolóide elíptico ao longo do eixo Oz, um traço no plano $z = k$, $k > 0$, é uma elipse que aumenta de tamanho á medida que o plano se afasta do plano *xOy*.



Se tivermos $a = b$, o parabolóide é de revolução e pode ser gerado pela rotação da parábola $\frac{y^2}{b^2} = cz$, $x = 0$ em torno do eixo dos Oz. O traço no plano $z = k$ será uma circunferência.

Se o vértice do paraboloide elíptico é o ponto (x_0, y_0, z_0) e seus eixos forem paralelos aos eixos coordenados, a equação na forma canônica fica:

$$\boxed{\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = c(z-z_0)}$$

Exemplos