Instituto Nacional de Telecomunicações

Curso de M001 - Matemática

1º Período

2o Semestre de 2017

REVISÃO DE MATEMÁTICA E FUNÇÕES

1.1. Frações. Operações com frações.

1.1.1. Definições

Uma fração corresponde a uma parcela de um todo. Por exemplo, se você comeu 3 fatias de uma pizza de 8 fatias, significa que você comeu $\frac{3}{8}$ da pizza, em que:

$$\frac{3}{8} \begin{array}{l} \rightarrow \text{numerador} \\ \rightarrow \text{denominador} \end{array}$$

Duas frações são equivalentes quando representam o mesmo valor. Para encontrar uma fração equivalente à fração dada, basta multiplicar ou dividir simultaneamente o numerador e o denominador pelo mesmo valor.

Exemplo 01: $\frac{4 \div 4}{8 \div 4} = \frac{1}{2}$. Logo, $\frac{4}{8}$ e $\frac{1}{2}$ são frações equivalentes.

Exemplo 02: Simplifique as frações a seguir:

a) $\frac{15}{18}$ b) $\frac{60}{24}$ c) $\frac{12}{36}$

1.1.2. Operações com frações

a) Adição e subtração

Ao somar e subtrair duas ou mais frações, basta somar ou subtrair os numeradores quando os denominadores são iguais.

Exemplo 03: Calcule:

a) $\frac{3}{7} + \frac{2}{7}$

b) $\frac{3}{16} - \frac{9}{16}$

Quando os denominadores são diferentes, é necessário encontrar frações equivalentes de mesmo denominador para cada termo da soma/subtração, utilizando o mínimo múltiplo comum entre os denominadores.

Exemplo 04: Calcule:

a) $\frac{2}{3}+\frac{5}{7}$

b) $\frac{1}{4}-\frac{5}{6}$

c) $\frac{2}{15}+\frac{4}{9}-\frac{3}{5}$

d) $\frac{5}{6}+\frac{2}{8}-\frac{7}{2}$

e) $\frac{1}{225}-\left[\frac{2}{15}-\left(-\frac{14}{45}+\frac{36}{75}\right)\right]$

f) $\frac{19}{24}-\left[\frac{1}{8}-\left(\frac{2}{15}-\frac{1}{2}\right)+\frac{3}{10}\right]+\frac{1}{4}$

b) Multiplicação

Multiplicamos os numeradores entre si e os denominadores entre si.

Exemplo 05: Calcule:

a) $\frac{2}{3}\times\frac{5}{7}$

b) $\frac{4}{5}\times\frac{3}{2}\times\frac{5}{6}$

c) Divisão

Multiplicamos a primeira fração pelo inverso da segunda fração, sabendo que o inverso da fração $\frac{A}{B}$ é a fração $\frac{B}{A}$ (uma fração cujo numerador é igual a zero não possui inversa).

Exemplo 06: Calcule:

a) $\frac{2}{3}\div\frac{5}{7}$

b) $\frac{1}{4}\div\frac{5}{6}$

c) $\dfrac{6}{1/5}$

d) $\dfrac{2/3}{4}$

e) $\dfrac{5/12}{6/5}$

f) $\dfrac{3/4}{7/8}$

g) $\dfrac{\frac{3}{4}-2}{\frac{2}{7}-3}$

h) $\dfrac{\frac{2}{3}-7\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)}{\frac{3}{4}-\frac{2}{5}\div\frac{2}{15}}$

i) $\left\{2-\left[\frac{1}{3}-\left(-\frac{4}{5}\right)\right]\div\left[\frac{1}{3}-\left(-\frac{4}{5}\right)\right]\right\}\div\left[\left(\frac{3}{4}-\frac{2}{3}\right)\div\left(\frac{3}{4}+\frac{2}{3}\right)-2\right]$

1.2. Potenciação e radiciação

1.2.1. Definições

Uma potência é a repetição de uma multiplicação, da forma

$a = b^n = b \times b \times b \times \cdots \times b$ (n termos iguais a b na multiplicação), em que

a é o resultado da potência *n-ésima* de b.
b é a base.
n é o expoente.

Exemplo 07:

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3} = \frac{8}{27}$

b) $(-2)^4 = (-2)\times(-2)\times(-2)\times(-2) = 16$

Observações:

1) $(-2)^4 \neq -2^4$

2) Se o expoente é 1, o resultado é igual a base.

3) Se a base é igual a zero e o expoente é diferente de zero, o resultado é igual a zero.

4) Se o expoente é zero e a base é diferente de zero, o resultado é igual a 1.

5) Se o expoente é negativo, deve-se inverter a base e modificar o sinal do expoente.

6) Se o expoente for um número fracionário, ele indicará uma radiciação, da forma $a^{\frac{p}{n}} = \sqrt[n]{a^p}$.

1.2.2. Propriedades

a) Produto de potências de mesma base

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

b) Razão entre potências de mesma base

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Da propriedade anterior podemos concluir:

$\dfrac{a^m}{a^m} = a^{m-m} = a^0 = 1$ (todo número dividido por ele mesmo é igual a 1).

$\dfrac{1}{a^m} = \dfrac{a^0}{a^m} = a^{-m}$ ou $\dfrac{1}{a^{-m}} = \dfrac{a^0}{a^{-m}} = a^m$

c) Potência de potência

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

Observação: $(a^m)^n \neq a^{m^n}$

d) Potência de um produto

$$(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$$

e) Potência de um quociente

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m} \qquad b \neq 0$$

f) Radiciação

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

Utilizando a propriedade do item *c*, podemos concluir:

$$\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^p = \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^p = a^{\frac{m \cdot p}{n}} = \sqrt[n]{a^{mp}}$$

g) Raiz de um produto

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

h) Raiz de um quociente

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \qquad b \neq 0$$

i) Raiz de uma raiz

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$$

Exemplo 08: Calcule o valor das expressões a seguir, utilizando as propriedades de potenciação e radiciação:

a) $(-19)^0$

b) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3}$

c) -3^4

d) $(-2)^4 \cdot (-2)^5 \cdot (-2)^2$

e) $3^2 \cdot 9^3 \cdot 27^4$

f) $5^{-2} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{25}\right)^3$

g) $\sqrt[6]{2} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{2}$

h) $\sqrt[6]{2} \cdot \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt{8}$

i) $\dfrac{8^4}{2^5}$

j) $\dfrac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt[6]{81^2}}$

k) $25 \cdot \sqrt[3]{5 \cdot \sqrt{5}}$

l) $\left\{\left[\left(3^5\right)^4\right]^6\right\}^0$

m) $\left[\left(3^4 \cdot 2^4\right)^3\right]^4 \div \left[\left(2^8 \cdot 3^7\right)^2\right]^3$

n) $\left(\dfrac{a^{-n} \cdot \dfrac{1}{a^n}}{a^{-2n}}\right)^n$

o) $400 \times 0{,}000002$

p) $\dfrac{0{,}00072}{0{,}004}$

q) $\dfrac{2^{-1} + 3^{-1}}{2^{-1}}$

r) $\dfrac{(0{,}01)^3 \cdot (0{,}02)^{-3}}{(0{,}004)^2}$

s) $\left(\dfrac{4^{-1} + 9^{-1}}{1/9}\right)^{-1}$

t) $\dfrac{0{,}1 \times 0{,}001 \times 10^{-1}}{10 \times (0{,}0001)^{-1}}$

u) $\sqrt[4]{0{,}0016}$

v) $\sqrt[5]{-0{,}00032}$

w) $\sqrt{-0{,}81}$

x) $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{10}}}}$

y) $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[5]{2^{60}}}}$

z) $\sqrt[4]{144}\cdot\sqrt[6]{27}$

Exemplo 09: Racionalize as expressões a seguir:

a) $\dfrac{2}{\sqrt{2}}$

b) $\dfrac{3}{\sqrt[3]{5}}$

c) $\dfrac{4}{\sqrt[7]{3^2}}$

Exemplo 10: Calcule as expressões a seguir, supondo que nas divisões o divisor é sempre diferente de zero:

a) $-3x\cdot(-2x^2)$

b) $-6x^3yz^2\cdot(-\dfrac{1}{3}xy^2z)$

c) $x^3\cdot x^{-2}$

d) $a^n\cdot a$

e) $\dfrac{1}{3}x^{m-n}\cdot\dfrac{2}{3}x^{3m+n}$

f) $(t+1)\cdot(t^2-t+1)$

g) $\dfrac{1}{2}a^3\div(-2a^2)$

h) $x^{-5}\div x^{-2}$

i) $u^{m+1}\div u^m$

j) $6a^4b^3 \div (-2b^3c^{-2})$

k) $72 \cdot (a-b)^3 \div [-18 \cdot (a-b)^2]$

l) $12a^4b^3(a^2+b^3)^7 \div [-4a^3b^2(a^2+b^3)^4]$

m) $x^{m+4} \div x^{m+3}$

n) $-3a^{m-2} \div (-5a^{m-3})$

o) $\sqrt[5]{x^3} \div \sqrt[4]{x^3}$

p) $4^{3n+4} \cdot 8^{1-2n}$

q) $(9^m)^{2m-1} \cdot 27^{m+2} \div 81^{m^2+1}$

1.3. Produtos notáveis

Os casos mais comuns de produtos notáveis são:

a) Produto da soma de dois termos pela sua diferença: $(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$
b) Quadrado da soma de dois termos: $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

De forma geral, temos o produto notável: $(a \pm b)^n = (a \pm b)\cdot(a \pm b)\cdot\ldots\cdot(a \pm b)$, que resulta na multiplicação de n termos $(a \pm b)$. O resultado deste produto notável pode ser obtido de duas formas:

1) Utilizando-se o Triângulo de Pascal para determinar seus coeficientes, conforme mostrado abaixo.

n						
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1
$\vdots$						

em que n é o valor da potência do termo $(a \pm b)$. O resultado do produto notável será uma soma de $n+1$ termos, em que cada termo possui o produto $a^k \times b^p$ e é multiplicado por um coeficiente, obtido do triângulo acima. Para cada termo do resultado, o valor do expoente k do termo a da soma varia de n (1^o termo) a zero (último termo). O contrário ocorre com o termo b da soma, cujos expoentes p variam de zero (primeiro termo) a n (último termo). Se tivermos o produto $(a+b)^n$, os sinais de todos os termos serão positivos, ao passo que se tivermos o produto $(a-b)^n$, os sinais dos termos serão alternados (o primeiro termo terá sinal positivo, o segundo terá sinal negativo, o terceiro positivo e assim por diante).

Exemplo 11:

a) $(a+b)^3 = 1a^3b^0 + 3a^2b^1 + 3a^1b^2 + 1a^0b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Nota-se na expressão acima que para $n=3$, os coeficientes dos termos são 1,3,3 e 1, e de acordo com o triângulo de Pascal apresentado, o expoente de a varia de 3 a 0 nos termos e o expoente de b varia de 0 a 3. Como temos uma soma $(a+b)$, todos os termos possuem sinais positivos.

b) $(a-b)^3 = 1a^3b^0 - 3a^2b^1 + 3a^1b^2 - 1a^0b^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

c) $(a+b)^2 = 1a^2b^0 + 2a^1b^1 + 1a^0b^2 = a^2 + 2ab + b^2$

2) Através das expressões:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k$$

$$(a-b)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k$$

Os termos $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ são os coeficientes de cada termo do resultado obtido, que correspondem aos coeficientes dados no triângulo de Pascal dado anteriormente.

Exemplo 12:

$$(x-y)^3 = \sum_{k=0}^{3} (-1)^k \cdot \binom{3}{k} \cdot x^{3-k} \cdot y^k$$

$$(x-y)^3 = (-1)^0 \cdot \binom{3}{0} \cdot x^3 \cdot y^0 + (-1)^1 \cdot \binom{3}{1} \cdot x^2 \cdot y^1 + (-1)^2 \cdot \binom{3}{2} \cdot x^1 \cdot y^2 + (-1)^3 \cdot \binom{3}{3} \cdot x^0 \cdot y^3$$

$$(x-y)^3 = \frac{3!}{0! \cdot 3!} x^3 - \frac{3!}{1! \cdot 2!} x^2 y + \frac{3!}{2! \cdot 1!} xy^2 - \frac{3!}{3! \cdot 0!} y^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$$

Exemplo 13: Desenvolva os seguintes produtos notáveis:

a) $(a-b)^5$

b) $(ac+b^2)^3$

c) $(2+x+y)\cdot(2+x-y)$
d) $(a+b+c)^2$
e) $(x+y-z)^3$
f) $\left(\frac{2}{3}a^3b^2-\frac{3}{2}a^2b^3\right)^2$
g) $\left(\frac{1}{4}-\frac{4}{x^3}\right)^2$
h) $(R^3-L^2)\cdot(R^3+L^2)$
i) $(3x^a-5y^m)\cdot(5y^m+3x^a)$
j) $\left(a^2x+\frac{2}{3y}\right)\cdot\left(a^2x-\frac{2}{3y}\right)$

1.4. Polinômios

1.4.1. Definição

Polinômio é uma soma algébrica de monômios (termos algébricos).

Exemplo 14:

a) x^3-2x^2 (2 termos – binômio)

b) $4x^2-5bx+b^2$ (3 termos – trinômio).

c) $ay+\frac{bx}{y}-4xy+\sqrt{2}a-am^3$ (mais de 3 termos – polinômio).

1.4.2. Grau de um polinômio

É dado pelo termo de grau mais elevado. Para o polinômio a seguir, temos:

$$5x^2y^3z-15x^3y^4+\frac{2}{3}a^4b^9x-ab^2$$

a) O polinômio é do 3º grau em relação à *x*.
b) O polinômio é do 4º grau em relação à *y*.
c) O polinômio é do 1º grau em relação à *z*.
d) O polinômio é do 4º grau em relação à *a*.
e) O polinômio é do 9º grau em relação à *b*.

1.4.3. Operações com polinômios

⇨ Adição e Subtração

Basta somar ou subtrair os termos semelhantes (que apresentam variáveis de mesmo grau).

Exemplo 15: Sendo

$P_1 = a^5 - 2a^4b + 4a^3b^2$
$P_2 = -8a^2b^3 + 32b^5 + 16ab^4$
$P_3 = -16ab^4 + 8a^2b^3 + 2a^4b - 4a^3b^2$, calcule:

a) $S = P_1 + P_2 + P_3$
b) $D = P_2 - P_3$

Exemplo 16: Indique os polinômios resultantes das situações descritas a seguir.

a) Subtraia o triplo da soma de 2 números consecutivos do dobro de sua diferença (o maior número menos o menor número), sendo *x* o maior desses números.

b) Subtraia a diferença entre $2t^2 - t + 2$ e $t^2 + 2t - 1$ da soma de $t^2 + 1$ com $3t - 3$.

⇨ Multiplicação

Basta aplicar a propriedade distributiva da multiplicação.

Exemplo 17: Calcule:

a) $(2x^7y^2 - 3x^6y^3 + 4x^5y^2) \cdot 2x^5y$
b) $(2x^3 + 5xy^2 - 3x^2y - 2y^3) \cdot (2xy - y^2 + 3x^2)$
c) $(a^6 - 4a^4b^2 + 5a^2b^4) \cdot (7a^4 - 4a^2b^2 + b^4)$

⇨ Divisão

Dividir um polinômio D por um polinômio d resulta em:

$$\begin{array}{l|l} D & d \\ \cline{2-2} R & Q \end{array}$$

em que: $D \longrightarrow$ dividendo
$d \longrightarrow$ divisor
$Q \longrightarrow$ quociente
$R \longrightarrow$ resto

$$D = d \times Q + R \qquad \div d$$

$$\frac{D}{d} = Q + \frac{R}{d}$$

Para tal, devemos ter:

1) $Grau(D) \geq Grau(d)$
2) $Grau(Q) = Grau(D) - Grau(d)$
3) $Grau(R) < Grau(d)$

Exemplo 18: Façamos a divisão de $5x^4 - 2x^3 - 9x^2 + 4x - 9$ por $x^2 - 2x - 3$:

$$\begin{array}{rl|l}
& 5x^4 - 2x^3 - 9x^2 + 4x - 9 & x^2 - 2x - 3 \\ \cline{3-3}
& -5x^4 + 10x^3 + 15x^2 & 5x^2 + 8x + 22 \\ \cline{2-2}
& 8x^3 + 6x^2 + 4x - 9 & \text{(quociente)} \\
& -8x^3 + 16x^2 + 24x & \\ \cline{2-2}
& 22x^2 + 28x - 9 & \\
& -22x^2 + 44x + 66 & \\ \cline{2-2}
& 72x + 57 \text{ (resto)} &
\end{array}$$

Assim, $\dfrac{5x^4 - 2x^3 - 9x^2 + 4x - 9}{x^2 - 2x - 3} = 5x^2 + 8x + 22 + \dfrac{72x + 57}{x^2 - 2x - 3}$

Exemplo 19: Calcule as divisões a seguir. Nos polinômios que possuem mais de uma variável, divida-os considerando *x* como variável.

a) $(6x^2 + 29x + 28) \div (3x + 4)$
b) $(x^5 - y^5) \div (x - y)$
c) $(4x + 4x^5 - x^3) \div (2x^2 + 2 + 3x)$
d) $(x^4 + x^2y^2 + y^4) \div (x^2 - xy + y^2)$
e) $(4a^3 - 8a^2 + 2a - 16) \div (-2a^2 + a - 2)$
f) $(-6x^4 + 11x^3b - 8x^2b^2 + 3xb^3 + b^4) \div (3x^2 - xb + b^2)$
g) $(-4x^5 - 4x^2b^3 + 16x^3b^2 - 8xb^4) \div (4x^2 + 8xb)$
h) $(x^6 + 2x^3y^3 + y^6) \div (x^2 + 2xy + y^2)$
i) $\left(\frac{1}{3}x^4 + \frac{5}{18}x^3b + \frac{5}{8}x^2b^2 + 2xb^3 - \frac{1}{2}b^4\right) \div \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}xb - 2b^2\right)$

⇨ Regra de Ruffini: utilizada para obter de forma rápida o quociente e o resto da divisão de um polinômio por $x - a$. Teremos:

$Grau(Q) = Grau(D) - 1$
$Grau(R) = 0 \quad (Grau(R) < 1)$

$$\begin{array}{l|l} x^n + \dots & x - a \\ \cline{2-2} kx^0 & x^{n-1} + \dots \end{array}$$

A utilização do dispositivo de Ruffini se torna uma aplicação importante quando conhecemos uma das raízes de um polinômio de grau elevado (maior que 2). Se dividimos um polinômio por $x - a$ e encontramos resto nulo, significa que a é uma das raízes deste polinômio. Por exemplo, para um polinômio do 3º grau, dado pela formula geral

$$x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$$

supondo que as 3 raízes deste polinômio sejam r_1, r_2 e r_3, podemos escrevê-lo da seguinte forma:

$$x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d = (x - r_1) \cdot (x - r_2) \cdot (x - r_3)$$

Se conhecermos uma das raízes deste polinômio, por exemplo, r_1, podemos dividi-lo por $x - r_1$. Dessa forma, teremos como resultado da divisão um polinômio do 2º grau e resto nulo. Assim, torna-se mais fácil o cálculo das outras duas raízes do polinômio do 3º grau dado.

Exemplo 20: Façamos as seguintes divisões:

a) $(2x^4 - 7x + 12) \div (x - 3)$

	x^4		x^3		x^2		x^1		x^0	
	2	$\oplus$	0	$\oplus$	0	$\oplus$	-7	$\oplus$	12	$\longrightarrow$ coef. do dividendo.
3	2		6		18		47		153	$\longrightarrow$ coef. do quociente seguidos do resto.

Quociente: $2x^3 + 6x^2 + 18x + 47$
Resto: 153

b) $(3x^5 - 4x^3 + x^2 - 11) \div (x + 2)$

	x^5	x^4	x^3	x^2	x^1	x^0
	3	0	-4	1	0	-11
-2	3	-6	8	-15	30	-71

Quociente: $3x^4 - 6x^3 + 8x^2 - 15x + 30$
Resto: -71

Exemplo 21: Usando o dispositivo de Ruffini, calcule:

a) $(x^2 - 8x + 13) \div (x - 3)$
b) $(x^3 - 7x) \div (x - 2)$
c) $(x^4 - x + 1) \div (x + 2)$
d) $(2x^4 - x) \div (x + 1)$
e) $(2a^3 - a^2 - 7a + 2) \div (a - 2)$
f) $(9x^5 - 7x^4 - 8x^3 + x^2 + 5x + 16) \div (x + 1)$
g) $(x^3 + 5x^2 - 7x - 3) \div (x - 2)$
h) $(x^6 - y^6) \div (x + y)$
i) $(x^4 - y^4 z^4) \div (x + yz)$
j) $(23a^5 + 1) \div (3a + 1)$

1.5. Fatoração

Fatorar um número (ou uma expressão algébrica) é decompô-lo em vários fatores, transformando-o em produtos de termos mais simples.

Exemplo 22:

a) $36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 2^2 \times 3^2$

$$\begin{array}{r|l} 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

b) $81xy = 3^4 \cdot x \cdot y$

Existem números que não podem ser fatorados devido ao fato de serem divisíveis somente por eles mesmos e pela unidade. São chamados de números primos.

Exemplo 23:

$$\begin{array}{r|r} 13 & 13 \\ 1 & 1 \end{array}$$

1.5.1. Fatoração de polinômios

Faremos agora o estudo de alguns casos de fatoração de polinômios.

⇨ 1º Caso: Fator comum em todos os termos

Neste caso existe um fator comum em todos os termos que pode ser colocado em evidência.

Exemplo 24:

a) $x^2 + ax = x \cdot (x + a)$
b) $26m^3n^2 - 39m^2n^2 + 52mn^3 = 13mn^2 \cdot (2m^2 - 3m + 4n)$

Exemplo 25: Fatore:

a) $140x^4y^7z - 420x^5y^5z^2 + 105x^6y - 70x^4y^3$
b) $a^8 - 7a^5 + 4a^7 - 9a^6$
c) $x^{m-3} + x^{m-2} - x^{m-1} + x^m$
d) $a^{m-1} - a^{m+1} - a^{m+2} + a^{m+3}$
e) $45abc - 60abd - 90abc + 120abc$
f) $70a^7b^2 + 84a^6b^3 - 98a^5b^4 + 14a^4b^5$
g) $52a^6b^5 - 39a^4b^5 + 104a^3b^6 - 182a^3b^2$
h) $51r^2t^5 - 34r^5t^2v + 119r^4t^3v$
i) $17a^3b^2c - 51a^4b^3cm + 85a^5b^2c$
j) $5x^3y^2 - 10x^4y^5 + 15x^2y^7 - 25x^2y^3$

⇨ 2º Caso: Fator não comum.

Neste caso podemos colocar um fator que não seja comum em todos os termos em evidência.

Exemplo 26:

a) $x + 1 = x \cdot \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$
b) $x^2 + a = a \cdot \left(\dfrac{x^2}{a} + 1\right)$

Exemplo 27: Fatore as expressões abaixo, observando o fator não comum dado para cada caso:

a) $36x^2 + 12x^3 - 4x^6 + 16$ fator: $4x^4$
b) $a^3 + a^5 - a^7 + a^8$ fator: $a^m b$
c) $27ab^2 - 18a^3bc - 12a^2bc^3 + 21ab^4c$ fator: $3a^2b^2c^2$
d) $t^x + t^{x+1} + t^{x+2}$ fator: $a^{-1}t^{2x+3}$

⇨ 3º Caso: Agrupamento

Neste caso temos grupos de termos possuindo fatores comuns.

Exemplo 28:

a) $a^2 + ab + ac + bc$
$= a \cdot (a+b) + c \cdot (a+b)$
$= (a+b) \cdot (a+c)$

b) $az + ax - bx + ay - bz - by$
$= a \cdot (z + x + y) - b \cdot (x + z + y)$
$= (x + y + z) \cdot (a - b)$

Exemplo 29: Fatore:

a) $a^3 + b + ab + a^2$
b) $acx + acy - bcx - bcy + adx + ady - dby - dbx$
c) $a^2b + a^2c + a^2d + b + c + d$
d) $x \cdot (x + a - b) - a \cdot (2x - b)$
e) $mnp + npx + mpx + mnx + m^2n + m^2p + n^2x + mn^2$
f) $m^3 + m^2 + m + 1$
g) $ax^2 + xy + by^2 + abxy$
h) $3b + 2a^2 - 2ab - 3a$
i) $abxy - 2by - 2 + ax$
j) $cd + 2ab + bc + 2ad$
k) $d^3 - d^2 - d + 1$

⇨ 4º Caso: Diferença de dois quadrados perfeitos.

$$a^2 - b^2 = (a+b) \cdot (a-b)$$

Exemplo 30:

a) $36a^2 - 25a^6$
$= (6a + 5a^3) \cdot (6a - 5a^3)$

b) $a^8 - 1$
$= (a^4 + 1) \cdot (a^4 - 1)$
$= (a^4 + 1) \cdot (a^2 + 1) \cdot (a^2 - 1)$
$= (a^4 + 1) \cdot (a^2 + 1) \cdot (a + 1) \cdot (a - 1)$

c) $a^2 - 3$
$= (a + \sqrt{3}) \cdot (a - \sqrt{3})$

Exemplo 31: Fatore:

a) $3a^2 - 27$
b) $x^2 - \dfrac{y^2}{25}$
c) $(6x + y)^2 - 25 \cdot (a - b)^2$
d) $(a + b)^2 - (a - b)^2$
e) $0{,}0001 - 81x^4$
f) $3a^4 - 27 \cdot (c - d)^4$
g) $(6m + n)^2 - 9 \cdot (n - 2m)^2$
h) $0{,}1 - a^3 x^2$
i) $a^2 - (d + c)^2$
j) $a^{2x+2} - 1$

⇨ 5º Caso: Trinômio quadrado perfeito.

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$
$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

Para que um trinômio ordenado segundo as potências decrescentes de uma variável seja quadrado perfeito é necessário que o primeiro e o último termo tenham sinal positivo, e que o segundo termo seja mais ou menos o dobro do produto das raízes quadradas dos outros dois termos (1º e 3º).

Exemplo 32:

a) $d^2 + 2d + 1$

Considerando $d > 0,$ temos $\sqrt{d^2} = d, \sqrt{1} = 1$ e $2d = 2 \cdot d \cdot 1$.

O trinômio dado é quadrado perfeito. Assim,

$$d^2 + 2d + 1 = (d + 1)^2$$

b) $9a^2 - 6abc + b^2c^2$

Considerando $a, b, c > 0,$ temos $\sqrt{9a^2} = 3a, \sqrt{b^2c^2} = bc$ e $-6abc = -2 \cdot 3a \cdot bc$.

O trinômio é quadrado perfeito. Assim,

$$9a^2 - 6abc + b^2c^2 = (3a - bc)^2$$

Exemplo 33: Converta em trinômios quadrados perfeitos as seguintes expressões, adicionando um termo:

a) $49a^2 - 14ab$
b) $81a^2 + 4b^2$
c) $49x^4y^4 + 4$
d) $x^2 + px$
e) $4a^2 - a$
f) $-2x^2y^2 + 1$
g) $144x^2y^2z^2 + 1$

Exemplo 34: Fatore os seguintes trinômios:

a) $d^2 - df + \dfrac{f^2}{4}$
b) $3a^2 - 3a + \dfrac{3}{4}$
c) $a^4 - 8a^2 + 16$
d) $3x^8 + 6x^4 + 3$
e) $169p^2 + 441n^2 + 546np$
f) $x^2 + \dfrac{25}{4} - 5x$
g) $49a^4b^4 + 42a^2b^2 + 9$
h) $4a^2 - a + \dfrac{1}{16}$
i) $2x^2 + 8xy + 8y^2$
j) $5x^{2a+6} + 10x^{a+3}b^{2a+1} + 5b^{4a+2}$

⇨ 6º Caso: Trinômio do 2º grau.

Da identidade

$$(x+a)\cdot(x+b) = x^2 + ax + bx + ab$$
$$= x^2 + (a+b)\cdot x + ab$$

temos:

$$x^2 + (a+b)\cdot x + ab = (x+a)\cdot(x+b)$$

Exemplo 35:

a) Para fatorar o trinômio $x^2 + 7x + 12$, devemos determinar dois números tais que o produto deles seja $+12$ e a soma dos mesmos seja $+7$.

$\left\{\begin{array}{l} a+b=7 \\ ab=12 \end{array}\right\}$ São eles: +3 e +4, logo $x^2 + 7x + 12 = (x+3)\cdot(x+4)$

b) $x^2 - x - 2$

$\left.\begin{cases} a+b=-1 \\ ab=-2 \end{cases}\right\}$ São eles: -2 e $+1$, logo $x^2 - x - 2 = (x-2)\cdot(x+1)$

Exemplo 36: Fatore:

a) $t^2 + 11t + 24$
b) $x^2 - 3x + 2$
c) $x^2 + 3yx + 2y^2$
d) $x^2 - 30x + 200$
e) $x^2 - 9x + 20$
f) $x^2 + 2x - 35$
g) $x^2 + x - 42$
h) $5x^3 - 25x^2 + 20x$
i) $4a^2 - 4a + 1$
j) $x^2 - \dfrac{2a^2x}{3} + \dfrac{a^4}{9}$
k) $2x^2 + 7x + 3$
l) $3a^2 - 5a - 2$
m) $c^2 - (a-b)\cdot c - ab$

⇨ 7º Caso: Soma ou diferença de dois cubos.

$$x^3 - a^3 = (x-a)\cdot(x^2 + ax + a^2)$$
$$x^3 + a^3 = (x+a)\cdot(x^2 - ax + a^2)$$

O primeiro passo para fatorar um polinômio do tipo $x^3 \pm a^3$ e obter as expressões acima é calcular uma das raízes deste polinômio. Tomando o polinômio $x^3 - a^3$, teremos:

$$x^3 - a^3 = 0$$
$$x^3 = a^3$$
$$x_1 = a$$

Dessa forma, a é uma das raízes do polinômio. As outras duas raízes são complexas e conjugadas. Sabendo que a é uma raiz, o polinômio é divisível por $(x-a)$. Utilizando o dispositivo de Ruffini, podemos realizar a divisão $(x^3 - a^3) \div (x-a)$.

$$\begin{array}{c|cccc} & x^3 & x^2 & x^1 & x^0 \\ & 1 & 0 & 0 & -a^3 \\ \hline a & 1 & a & a^2 & 0 \end{array}$$

Como era de se esperar, o resto da divisão é nulo e seu quociente será:

$$\frac{x^3 - a^3}{x - a} = (x^2 + ax + a^2)$$

Concluindo, $x^3 - a^3 = (x - a) \cdot (x^2 + ax + a^2)$. Realizando o mesmo processo, é fácil obter $x^3 + a^3 = (x + a) \cdot (x^2 - ax + a^2)$.

Exemplo 37: Fatore:

a) $8x^3 + 64$
b) $a^6 - b^6$
c) $27a^3 + 1$
d) $(a + b)^3 + c^3$
e) $a^3 - 64$
f) $16 + x^3$
g) $x^3y^3z^2 - m^3v^3z^2$
h) $4x^3 - 16$
i) $128 + 2y^3$
j) $9x^6 + 243y^6$

⇨ 8º Caso: Combinação dos casos anteriores.

Exemplo 38:

$$8x^7y^3 - 32x^6y^4 + 32x^5y^5$$

Colocando $8x^5y^3$ em evidência, temos:

$$= 8x^5y^3 \cdot \underbrace{(x^2 - 4xy + 4y^2)}_{\text{trinômio quadrado perfeito}}$$

$$= 8x^5y^3 \cdot (x - 2y)^2$$

Exemplo 39: Fatore:

a) $a^2 - 2ab + b^2 - m^2$
b) $x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 4x - 4$ Dica: adicione e subtraia x^2 à expressão dada.
c) $x^6 + x^4y^2 - x^2y^4 - y^6$
d) $16y^2 + 10x - 25x^2 - 1$
e) $a^2 + 2ab + b^2 - ac - bc$
f) $d^3 - d^2 - 4d + 4$
g) $16m^7n^5 - 2m^4n^8$
h) $1 + a^{12}$
i) $mx - x^2$
j) $n^2 - p^2$

k) $x^2 - 8x - 33$
l) $81x^2 - 64c^4$
m) $a^2 - 29a + 28$
n) $144a^2 - 24ab + b^2$
o) $b^4x + 30q^3x + 16q^4x - 25q^6x + 8b^2q^2x - 9x$
p) $81a + ax^4 - 25ay^2 - 36az^2 + 18ax^2 + 60ayz$
q) $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$
r) $a^2 - x^2 - y^2 + 4ab + 2xy + 4b^2$
s) $a^3 + 6a^2 - 4a - 24$
t) $x^2 - 5ax - 2bx + 10ab$
u) $m^9 - n^{12}$
v) $x^3 - x^2 - 16a^2x + 16a^2$

1.5.2. Frações racionais

Simplificação de frações – simplifica-se uma fração dividindo ambos os termos (numerador e denominador) pelos seus fatores comuns.

Exemplo 40:

a) $\dfrac{24a^2b}{6a^3b^2 - 8a^2b^4} = \dfrac{2a^2b \cdot (12)}{2a^2b \cdot (3ab - 4b^3)} = \dfrac{12}{3ab - 4b^3}$

b) $\dfrac{ax - a}{x^2 - 2x + 1} = \dfrac{a \cdot (x - 1)}{(x - 1)^2} = \dfrac{a}{x - 1}$

Exemplo 41: Reduza à expressão mais simples as seguintes frações:

a) $\dfrac{27x^3y^2z^4}{18x^4yz^3}$

b) $\dfrac{15x^4t^2 - 25x^2t^4}{10x^6t^2}$

c) $\dfrac{2a^3b^2 - 6a^2b^3}{3a^2b^3 - 9ab^4}$

d) $\dfrac{a^2 + 2ax + x^2}{a^2 - x^2}$

e) $\dfrac{a^2 - ab}{b^2 - ab}$

f) $\dfrac{ac+ad+bc+bd}{a^2+ab}$

g) $\dfrac{ab-2a-3b+6}{ab-2a}$

h) $\dfrac{x^2-6ax+9a^2}{x^2-9a^2}$

i) $\dfrac{(x+a)^2-(x-a)^2}{4x^2}$

j) $\dfrac{x^2-(a+b)\cdot x+ab}{x^2-(a+c)\cdot x+ac}$

k) $\dfrac{a^6+a^5y}{a^6-a^4y^2}$

l) $\dfrac{an-2a+3n-6}{an-2a-3n+6}$

m) $\dfrac{a^2+b^2+c^2-2ab+2ac-2bc}{a^2-b^2-c^2+2bc}$

Exemplo 42: Simplifique e calcule o valor numérico das frações:

a) $\dfrac{x^2-9}{x-3}$ *para x=3*

b) $\dfrac{a^2+3a-10}{a^2+a-6}$ *para a=2*

c) $\dfrac{a^2+3ab+2b^2}{a^2+4ab+3b^2}$ *para a=–b*

d) $\dfrac{x^2-1}{x^2-x}$ *para x=1*

e) $\dfrac{x^4-16}{x+2}$ *para x=–2*

f) $\dfrac{ac+ad-bc-bd}{a-b}$ *para b=a*

g) $\dfrac{x^3+x^2+x+1}{x+1}$ *para x=–1*

h) $\dfrac{a^2-5a+6}{a^2-4}$ *para a=2*

i) $\dfrac{2x^2+2x-4}{4x^2-12x+8}$ *para x=1*

j) $\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-x-2}$ *para x=–1*

k) $\dfrac{x^3-y^3}{x-y}$ *para x=y*

l) $\dfrac{x^3+1}{x+1}$ *para x= –1*

m) $\dfrac{x^3-27}{x-3}$ *para x=3*

Exemplo 43: Resolva:

a) $\dfrac{a}{b}\div\dfrac{a^2-a}{b^2-b}$

b) $\dfrac{4x^2-9y^2}{3a-4b}\div\dfrac{2x+3y}{18a^2-32b^2}$

c) $\left(x^4-\dfrac{1}{x^2}\right)\div\left(x^2+\dfrac{1}{x}\right)$

d) $\dfrac{a^3b^2-3a^2b^3}{a^2+b^2}\times\dfrac{a^4+a^2b^2}{a-3b}$

e) $(x^3+ax^2-a^2x-a^3)\div\dfrac{x^2+2ax+a^2}{x-a}$

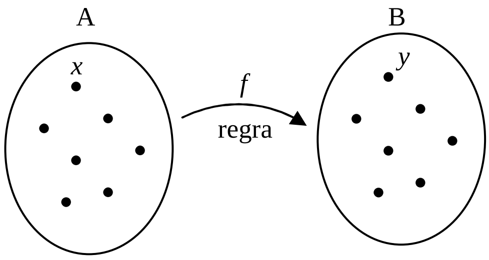
f) $\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{3}{1-x}+\dfrac{2}{x^2-1}$

g) $\dfrac{x^2-2x+1}{x^4-2x^2+1}$

1.6. Funções

1.6.1. Definição

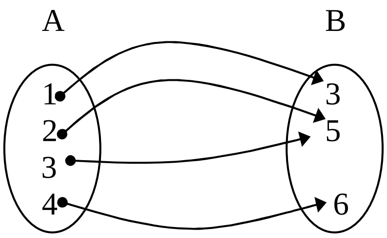
Dados dois conjuntos de números reais A (de valores *x*) e B (de valores *y*), dizemos que uma função *f* de A em B, (notação dada por *f*: $A \longrightarrow B$), é uma regra que associa a cada elemento de A um **único** elemento de B.



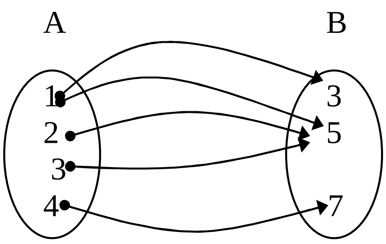
Notação: $y = f(x)$, na qual a variável x é chamada de variável independente e a variável y é chamada de variável dependente.

Exemplo 44: As relações a seguir representam funções de A em B?

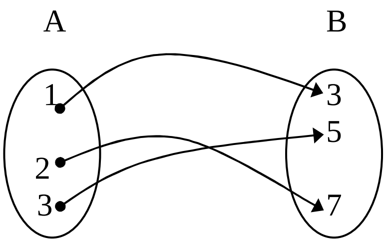
a)



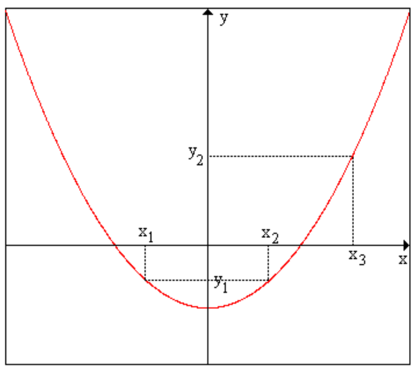
b)



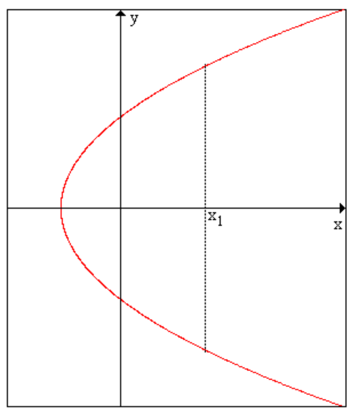
c)



d)



e)



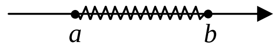
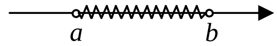
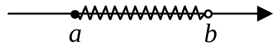
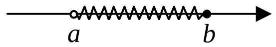
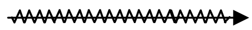
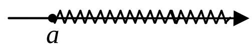
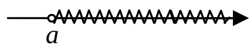
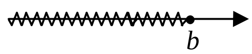
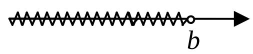
1.6.2. Valor numérico da função

É todo valor da variável dependente calculado para um dado valor da variável independente.

Exemplo 45: Dada a função $y = f(x) = x^2 - 2x + 1$, determine:

a) $f(0)$ b) $f(-1)$ c) $f(2)$

1.6.3. Intervalos ou subconjuntos de $\Re$

Intervalo fechado		$a \le x \le b$ ou $[a,b]$
Intervalo aberto		$a < x < b$ ou (a,b) ou $]a,b[$
Intervalo fechado à esquerda		$a \le x < b$ ou $[a,b[$
Intervalo fechado à direita		$a < x \le b$ ou $]a,b]$
Intervalos infinitos		$-\infty < x < \infty$ ou $(-\infty,\infty)$ ou $\Re$
		$a \le x < \infty$ ou $[a,\infty)$
		$a < x < \infty$ ou $]a,\infty)$
		$-\infty < x \le b$ ou $(-\infty,b]$
		$-\infty < x < b$ ou $(-\infty,b[$

1.6.4. Domínio, imagem e raizes de uma função

- Domínio: é o conjunto dos valores reais de x para os quais a função existe. Para se determinar o domínio de uma função deve-se estabelecer uma condição de existência e encontrar os valores de x que satisfazem esta condição.

- Imagem: é o conjunto de valores assumidos pela função.

- Raiz(es): é(são) o(s) valor(es) de x para o(s) qual(is) a função assume o valor zero.

Exemplo 46: Determinar o domínio das funções a seguir:

a) $y = f(x) = 3x + 1$

b) $y = f(x) = 5x^3 + 3x^2 - 8x$

c) $y = f(x) = \dfrac{3}{x}$

d) $y = f(x) = \dfrac{3x+2}{-4x+4}$

e) $y = f(x) = \dfrac{1}{x+3} + \dfrac{x}{2x+4}$

f) $y = f(x) = \sqrt{x}$

g) $y = f(x) = \sqrt[3]{x}$

h) $y = f(x) = \dfrac{x+3}{\sqrt{x-2}}$

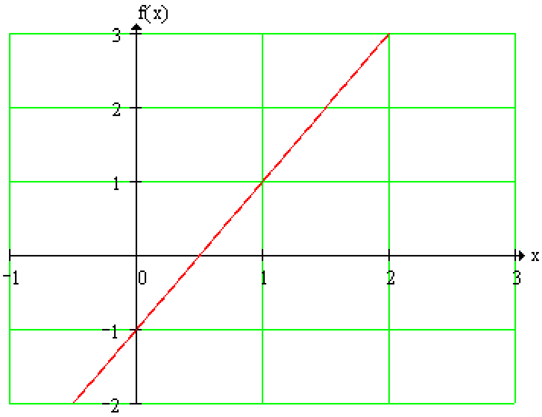
i) $y = f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{1}{x}}$

j) $y = f(x) = \sqrt{1-x}$

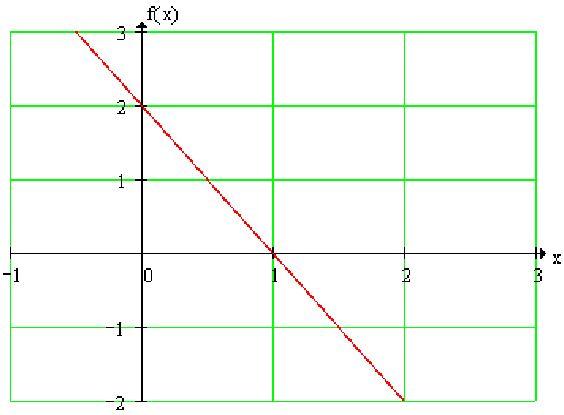
k) $y = f(x) = \sqrt{\dfrac{1}{x-1}} + \sqrt{\dfrac{1}{1-x}}$

1.6.5. Funções crescentes e decrescentes

Uma função é crescente num intervalo se para qualquer x_1 e x_2 pertencentes a esse intervalo com $x_1 < x_2$ tivermos $f(x_1) < f(x_2)$. O gráfico a seguir, obtido da equação $y = 2x - 1$, representa uma função crescente.

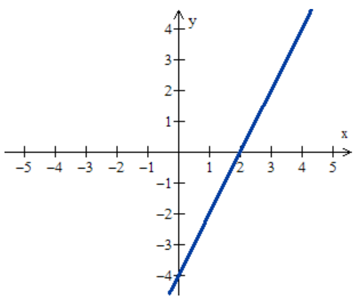
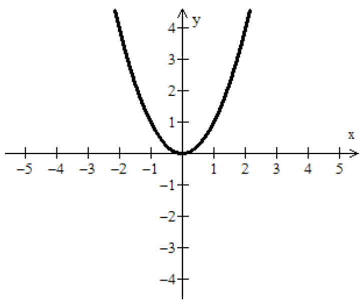
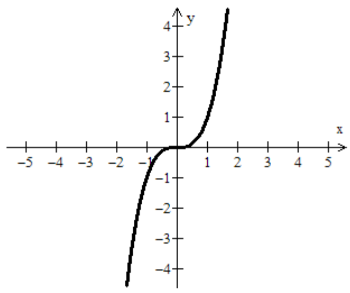
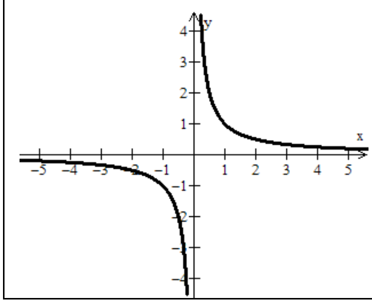
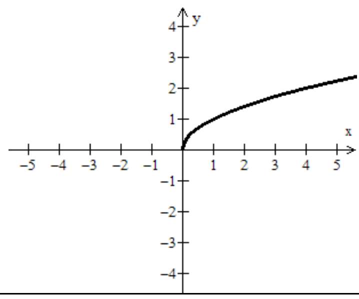
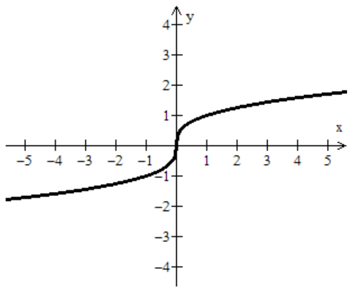


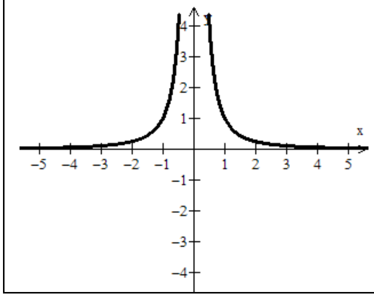
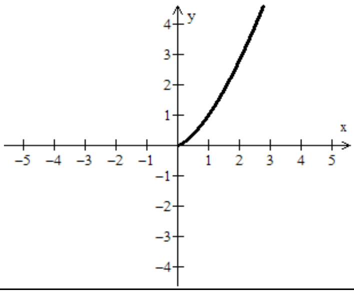
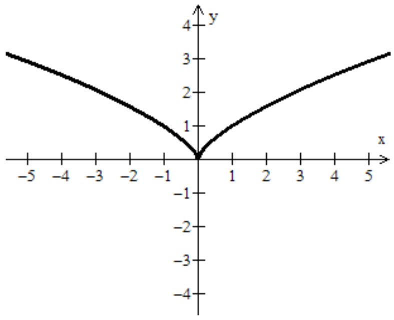
Uma função é decrescente num intervalo se para qualquer x_1 e x_2 pertencentes a esse intervalo com $x_1 < x_2$ tivermos $f(x_1) > f(x_2)$. O gráfico a seguir, obtido da equação $y = -2x + 2$, representa uma função decrescente.



Exemplo 47: Para as funções a seguir, determine:

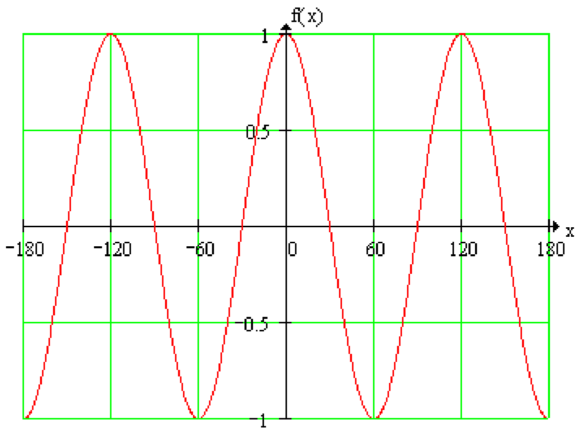
a) Os conjuntos domínio e imagem
b) O(s) intervalo(s) no(s) qual(is) a função é crescente
c) O(s) intervalo(s) no(s) qual(is) a função é decrescente

1) Função: $y = 2x - 4$ 	2) Função: $y = x^2$ 	3) Função: $y = x^3$ 
4) Função: $y = \dfrac{1}{x}$ 	5) Função: $y = \sqrt{x}$ 	6) Função: $y = \sqrt[3]{x}$ 

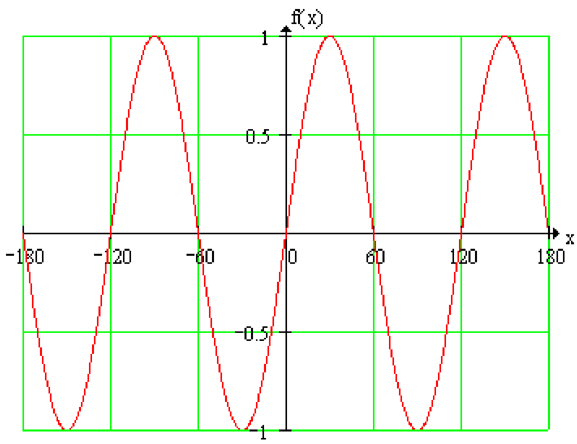
7) Função: $y=\dfrac{1}{x^2}$	8) Função: $y=x^{3/2}$	9) Função: $y=x^{2/3}$
		

1.6.6. Funções pares e ímpares

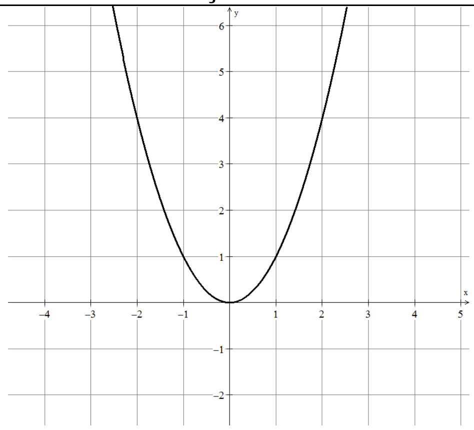
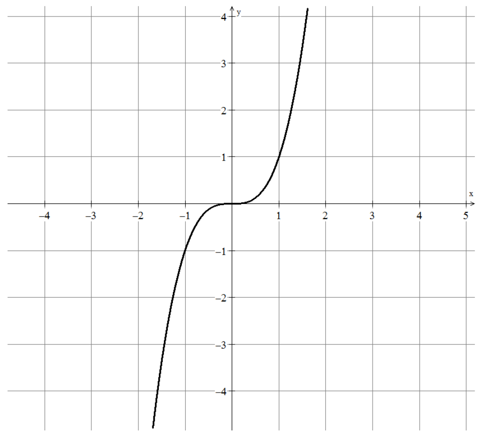
Uma função f é par se e somente se $f(x)=f(-x), \forall x \in D(f)$. O gráfico a seguir, obtido da equação $y=\cos(3x)$, para x dado em graus, representa uma função par.



Uma função f é ímpar se e somente se $f(x)=-f(-x), \forall x \in D(f)$. O gráfico a seguir, obtido da equação $y=\text{sen}(3x)$, para x dado em graus, representa uma função ímpar.



Graficamente, temos:

Função Par	Função Ímpar
	
O gráfico da função par é simétrico em relação ao eixo *y*.	O gráfico da função ímpar é simétrico em relação à origem dos eixos.

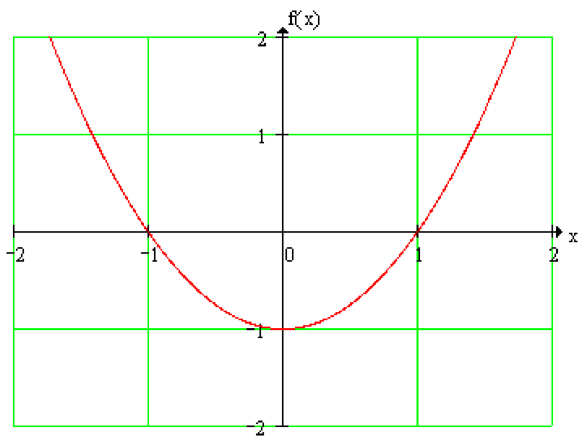
Exemplo 48: As funções cujas equações são dadas a seguir são pares, ímpares ou nem pares e nem ímpares?

a) $f(x) = x^2 + 2$

b) $f(x) = 2x^3 - 5x$

c) $f(x) = x + 6$

Exemplo 49: Dada a função $y = x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$, cujo gráfico é apresentado a seguir, determine:



a) Seu domínio.
b) Sua imagem.
c) Os intervalos de *x* nos quais a função é decrescente.
d) Os intervalos de *x* nos quais a função é crescente.
e) Suas raízes.
f) A função é par, ímpar ou nem par e nem ímpar?

1.7. Funções do primeiro grau

São funções cujos gráficos resultam em retas. Os itens a seguir detalharão o estudo de retas.

1.7.1. Incrementos (ou variações)

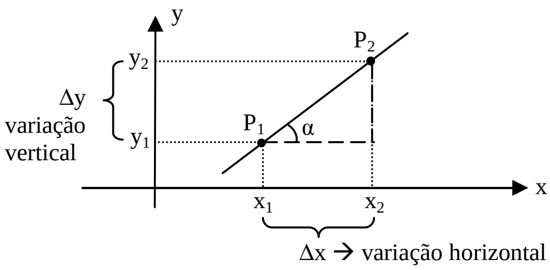
Indicam as variações de uma grandeza. Se uma partícula se desloca do ponto $P_1(x_1, y_1)$ para o ponto $P_2(x_2, y_2)$, os incrementos nas coordenadas são dados por

$$\Delta x = x_2 - x_1$$
$$\Delta y = y_2 - y_1$$

Os incrementos podem ser positivos, negativos ou nulos.

1.7.2. Coeficiente angular de uma reta

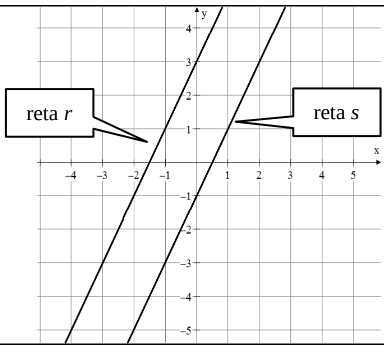
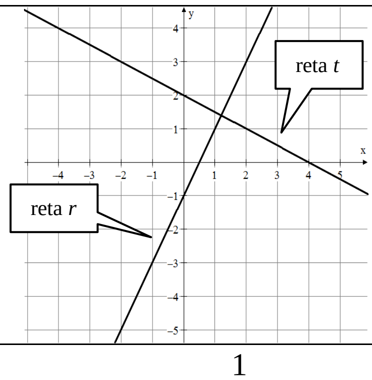
Calculado como a divisão da variação na vertical pela variação na horizontal. É definido através da relação $m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = tg\alpha$.



O coeficiente angular pode ser positivo, negativo, nulo ou ainda não existir.

Se $m > 0$, a reta é crescente.
Se $m < 0$, a reta é decrescente.

1.7.3. Retas paralelas e perpendiculares

PARALELAS	PERPENDICULARES
	
$m_r = m_s$	$m_r = -\dfrac{1}{m_t}$

Exemplo 50: Demonstre as relações acima.

1.7.4. Equação de Retas

Podemos escrever uma equação de reta, não vertical, se conhecermos seu coeficiente angular *m* e suas coordenadas em um ponto ponto $P_0(x_0, y_0)$. Se $P(x, y)$ for outro ponto qualquer dessa reta, então:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} \rightarrow m = \frac{y - y_o}{x - x_o} \rightarrow y - y_o = m(x - x_o) \quad \text{ou} \quad y = m(x - x_o) + y_o$$

Exemplo 51: Escreva uma equação para a reta que passa pelo ponto (2,3) e possui coeficiente angular $m = -\frac{2}{3}$.

Exemplo 52: Escreva a equação da reta que passa pelos pontos $P_1(-3{,}2)$ e $P_2(4{,}-5)$.

Exemplo 53: Determine a equação das retas vertical e horizontal que passam pelo ponto (2,3).

1.7.5. Coeficiente linear – b

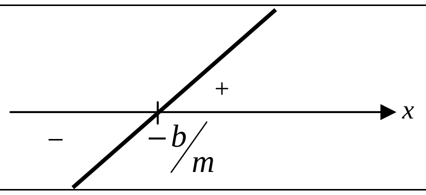
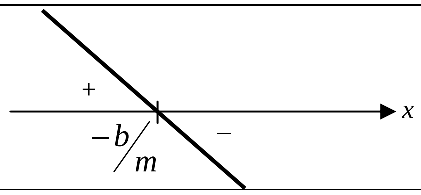
A ordenada do ponto em que uma reta não vertical corta o eixo *y* é chamada de coeficiente linear da reta. Sabendo que o ponto $P_0(0, b)$ pertence à reta e tomando um ponto qualquer $P(x, y)$ também pertencente à reta, temos:

$$y - y_o = m(x - x_o) \rightarrow y - b = m(x - 0) \rightarrow y = mx + b$$

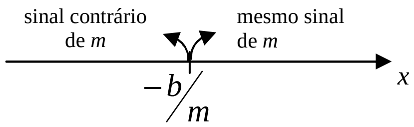
Essa equação é chamada de equação reduzida da reta.

A raiz de uma função do primeiro grau é dada por: $y = mx + b = 0 \rightarrow x = -\frac{b}{m}$.

Estudo de sinais:

$m > 0$	$m < 0$
	

Conclusão:



Exemplo 54: Determine a equação da reta que possui coeficiente linear igual a -3 e passa pelo ponto $(-2,-3)$.

Exemplo 55: Escreva a equação reduzida para a reta que passa pelo ponto $P_1(-1,2)$ que seja:

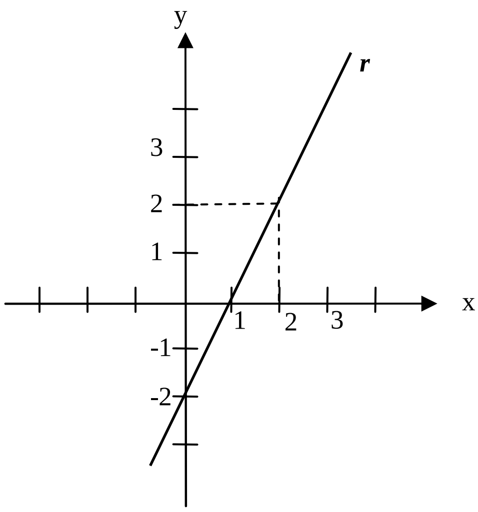
a) paralela à reta $y = 3x - 4$.
b) perpendicular à reta $y = 3x - 4$

Exemplo 56: Para qual valor de k as retas $4x + 3ky = 5$ e $2x + y = 1$ são:

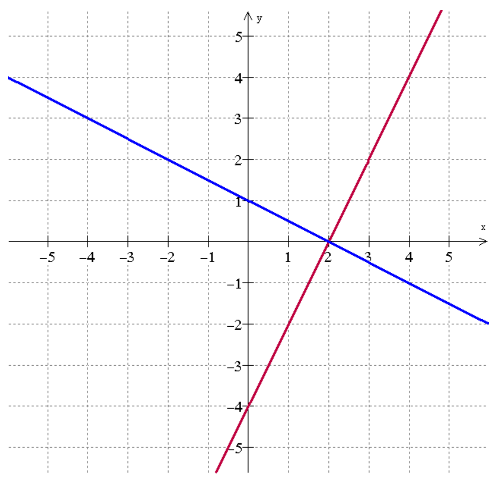
a) paralelas?
b) perpendiculares?

Exemplo 57: Determine o valor de k para o qual a reta que passa pelos pontos $A(-2,3)$ e $B(k,2)$ seja paralela à reta de equação $x + 2y = 5$.

Exemplo 58: Considere a reta ***r*** representada no gráfico a seguir. Determine a equação da reta ***s*** que seja perpendicular à reta ***r*** no ponto de intersecção (2,2).

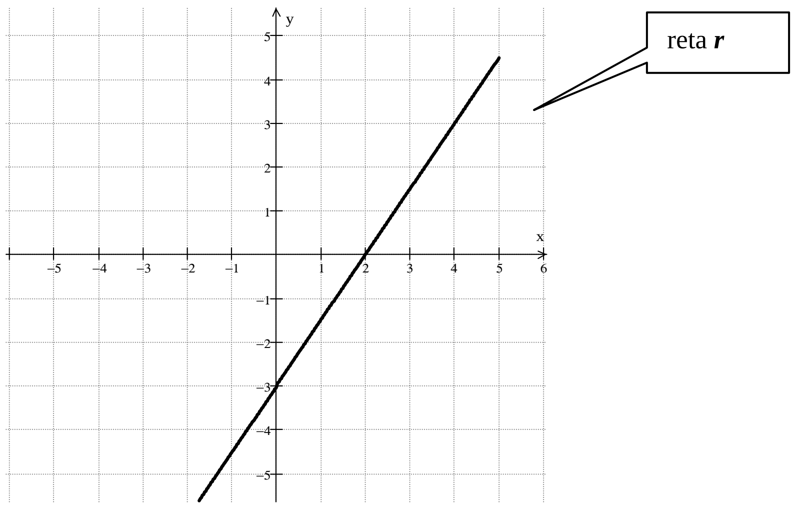


Exemplo 59: Prove que as retas representadas no gráfico a seguir são perpendiculares.



Exemplo 60: Considere a reta ***r*** representada no gráfico a seguir. Determine:

a) a equação da reta ***s*** que seja perpendicular à reta ***r*** no ponto (4,3).
b) a equação da reta ***t*** que seja paralela à reta ***r*** no ponto (-1,0).
c) trace as retas ***s*** e ***t*** no gráfico abaixo.



Exemplo 61: Para que valores de $c \in R$ a função $f(x) = (c-1)x + 1$ é crescente?

Exemplo 62: Para que valores de $p \in R$ a função $f(x) = (2p-1)x - 2$ é decrescente?

Exemplo 63: Estude o sinal das retas a seguir:

a) $f(x) = -3x + 2$

b) $f(x) = \dfrac{x}{3} - 1$

c) $f(x) = -x + \dfrac{2}{5}$

Exemplo 64: Resolva em $\Re$ as inequações a seguir:

a) $(5x-10)(5-x) > 0$

b) $2x - \dfrac{1}{2} \leq \dfrac{x-1}{2}$

c) $\dfrac{4-2x}{x-5} \geq 0$

d) $\dfrac{(-2x-1)(3x-5)}{x-3} \geq 0$

Exemplo 65: (ASG, 1º sem de 2010) O preço de uma passagem de ida ou volta da faculdade ao centro da cidade é de R$ 2,00, mas é possível comprar um passe por R$ 25,00 que lhe dá direito a pagar somente R$ 0,25 por cada passagem de ida ou volta. Em resumo, existem duas formas de usar o serviço de transporte para ir e voltar da faculdade: O aluno pode pagar R$2,00 por cada passagem ou o aluno pode comprar o passe por R$25,00 e tendo o passe em mãos, deverá pagar mais R$0,25 por passagem. Baseado nestas informações, pede-se:

a) Ache as equações para o custo C de x passagens por mês nas duas condições de pagamento.
b) Quantas passagens devem ser usadas para que o passe comece a compensar a sua compra?

Exemplo 66: (ASG, 2º sem de 2011) O preço de venda de um produto é de R$27,00. A venda de 100 unidades dá um lucro de R$260,00. Sabendo que o custo fixo de produção é de R$540,00 e que o custo variável é proporcional ao número de unidades produzidas, determine:

a) O custo variável de produção de cada unidade do produto.
b) Uma expressão do lucro obtido em função da quantidade de peças vendidas.
c) O número de peças vendidas que gera um lucro de R$23.460,00.
d) O número mínimo de peças que deverão ser produzidas e vendidas para que haja algum lucro.

1.8. Funções do segundo grau

1.8.1. Definição

É toda função que assume a forma

$f(x) = ax^2 + bx + c$, em que $a \neq 0$ e a, b e $c \in \Re$

Exemplo 67: $y = x^2 - 3$ $\quad a = 1 \quad b = 0 \quad c = -3$

1.8.2. Raízes ou zeros da função do 2º grau

São obtidas utilizando a fórmula de Bhaskara:

$f(x) = ax^2 + bx + c = 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \text{ em que } \Delta = b^2 - 4ac$$

Para $\Delta > 0 \rightarrow x_1$ e $x_2 \in \Re \; / \; x_1 \neq x_2$ (raízes reais distintas).
$\Delta = 0 \rightarrow x_1$ e $x_2 \in \Re \; / \; x_1 = x_2$ (raízes reais iguais).
$\Delta < 0 \rightarrow x_1$ e $x_2 \notin \Re$ (não existem raízes reais).

Exemplo 68: Determine as raízes das funções a seguir:

a) $x^2 - 4x + 3 = 0$

b) $x^2 - \frac{5x}{3} - \frac{2}{3} = 0$

1.8.3. Gráfico da função do 2º grau

É dado por uma parábola.

Exemplo 69: Esboce o gráfico das funções a seguir:

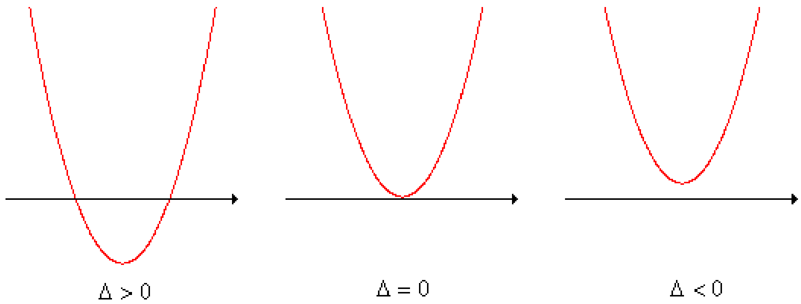
a) $y = x^2 - 4x + 3$

b) $y = -x^2 + 4$

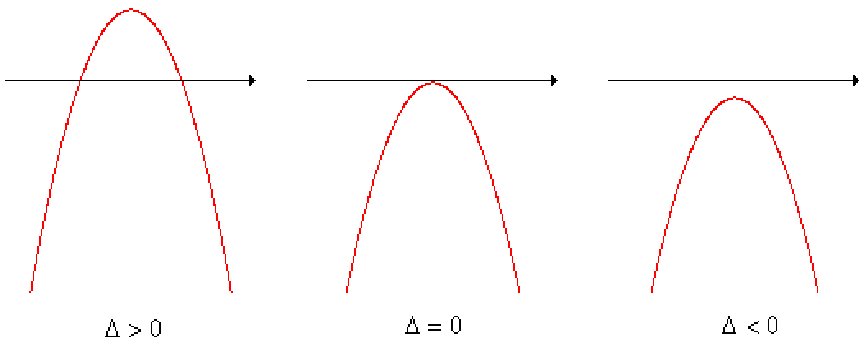
Através do exemplo 69, concluímos que:

Se $a > 0 \rightarrow$ a parábola possui concavidade voltada para cima.
Se $a < 0 \rightarrow$ a parábola possui concavidade voltada para baixo.

Para $a > 0$ teremos



Para $a < 0$ teremos



1.8.4. Coordenadas do vértice da função do 2º grau

$$x_v = \frac{-b}{2a} \qquad y_v = \frac{-\Delta}{4a}$$

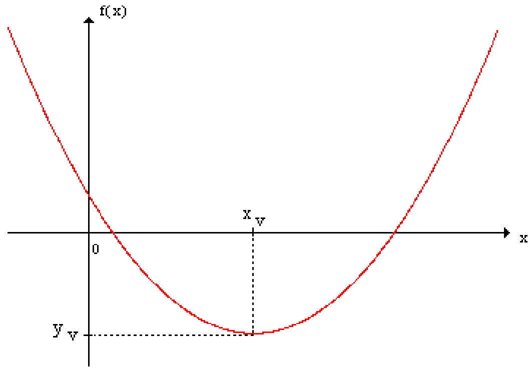
Se $a > 0 \rightarrow x_v$ é o ponto de mínimo e y_v é o valor mínimo.
Se $a < 0 \rightarrow x_v$ é o ponto de máximo e y_v é o valor máximo.

Exemplo 70: Calcule as raízes e as coordenadas dos vértices das funções:

a) $y = 2x^2 - 5x + 3$
b) $y = -2x^2 + 7x + 4$

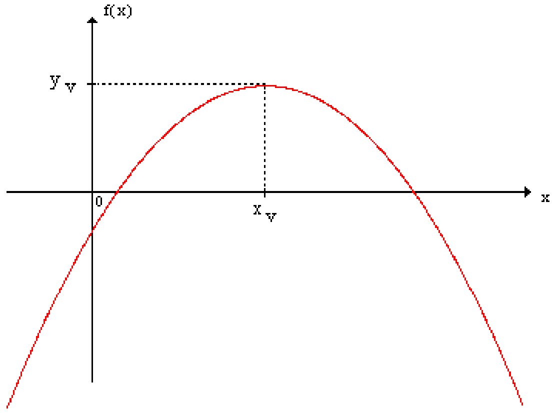
1.8.5. Conjunto imagem da função do 2º grau

1º Caso: $a > 0$



$$\text{Im}(f) = \left\{ y \in \Re \,/\, y \geq \frac{-\Delta}{4a} \right\}$$

2º Caso: $a < 0$



$$\text{Im}(f) = \left\{ y \in \Re \,/\, y \leq \frac{-\Delta}{4a} \right\}$$

Exemplo 71: Para cada função dada a seguir, calcule suas raízes em $\Re$, indique seu conjunto imagem, faça o estudo de sinais e o estudo de sua variação (para que valores de x a função é crescente ou decrescente).

a) $y = x^2 - 6x + 5$
b) $y = -2x^2 + 7x + 4$

c) $y = 3x^2 - 5x - 2$
d) $y = x^2 - 4x + 13$

Exemplo 72: Resolva em $\Re$ as inequações a seguir:

a) $\dfrac{x^2 + x - 2}{2x^2 - 11x + 14} \geq 0$
b) $\dfrac{3x^2 - 5x + 2}{-x^2 + 5x - 6} < 0$
c) $\dfrac{-x^2 + 3x - 2}{x^2 - 4} > 0$
d) $(x^2 - 25)(x^2 - 4) \geq 0$

Exemplo 73: Qual deve ser o valor de *k* para que, qualquer que seja *x*, o trinômio $x^2 + 2x + k$ seja superior a 10?

Exemplo 74: Determine o valor de m para que o mínimo de $y = x^2 - 5mx - m + 3$ seja atingido no ponto $x = 15$.

Exemplo 75: Sabe-se que a função quadrática $y = ax^2 + bx + 2$ não tem raízes reais e que a abscissa de seu vértice é –3. Que valores *a* e *b* podem assumir?

Exemplo 76: Em um planeta menor que a Terra, supondo a existência de vida como em nosso planeta, um garoto lança verticalmente para cima, do alto de um prédio de 12 metros em relação ao solo, uma pequena bola. O movimento desta bola é considerado uniformemente variado e o garoto admite que a equação horária deste movimento seja do tipo $S(t) = at^2 + bt + c$. Durante o procedimento ele anota as seguintes características do movimento:

• A bolinha muda de sentido no instante $t = \dfrac{3}{2}$.
• A bolinha passa pelo ponto de coordenadas (1,18).

Com a intenção de repetir os cálculos do movimento e determinar o tempo gasto pela bola para atingir o solo, o garoto percebe a necessidade de encontrar a equação que rege este movimento. Sabendo-se que você é um estudante de engenharia, o garoto viaja em sua nave até a Terra e lhe pede auxílio na determinação desta equação. Como você é um bom amigo, determine:

a) A equação que rege o movimento.
b) O tempo gasto pela bola para atingir o solo.

Exemplo 77: A temperatura y de uma região, em um determinado período, variou de acordo com a função $T(t) = t^2 - t - 20$, em que t representa o tempo, em horas, com $0 \leq t \leq 7$. Para este período, determine o intervalo de tempo (t) em que a temperatura foi positiva, o intervalo em que foi negativa, o instante em que ocorreu a menor temperatura e o menor valor da temperatura.

Exemplo 78: O custo diário da produção de uma indústria de aparelhos de telefone é dado pela função $C(x) = x^2 - 86x + 2500$, em que *C(x)* é o custo em dólares e *x* é o numero de unidades fabricadas. Quantos aparelhos devem ser produzidos diariamente para que o custo seja mínimo?

1.9. Funções definidas em partes

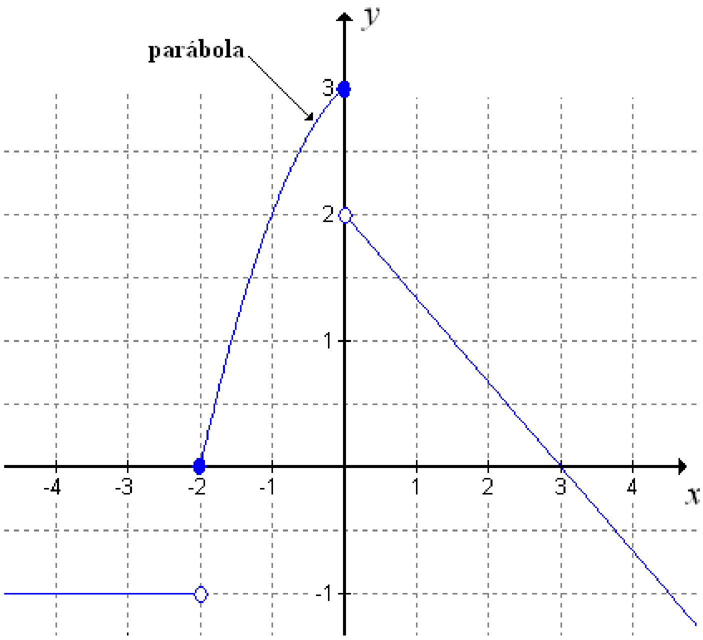
1.9.1. Introdução

Uma função pode ser definida por uma ou mais sentenças matemáticas válidas para diferentes intervalos de seu domínio.

Exemplo 79: Esboce o gráfico da função definida em partes a seguir, indicando os conjuntos domínio e imagem.

$$f(x) = \begin{cases} -x, & se \quad x < 0 \\ x^2, & se \quad 0 \le x \le 2 \\ 1, & se \quad x > 2 \end{cases}$$

Exemplo 80: Escreva as expressões que definem a função do gráfico a seguir:



1.9.2. Função modular

A função modular é definida por duas sentenças:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & se \quad x \ge 0 \\ -x, & se \quad x < 0 \end{cases}$$

Ou de forma mais geral,

$$y = |f(x)| = \begin{cases} f(x) & se \quad f(x) \geq 0 \\ -f(x) & se \quad f(x) < 0 \end{cases}$$

Exemplo 81: Esboce o gráfico da função modular $y = |x|$, indicando os conjuntos domínio e imagem.

Exemplo 82: Esboce o gráfico das funções a seguir, indicando os conjuntos domínio e imagem. Indique também as expressões das funções definidas em partes e seus intervalos de existência.

a) $y = |x-1| - 2$

b) $y = |x^2 - 4|$

c) $y = |x-2| + |x+1|$

Exemplo 83: Encontre a solução das equações modulares a seguir:

a) $|x| = 6$
b) $|2x+5| = 3$
c) $|3x-4| = -2$
d) $|x+1| = 2x-8$
e) $|x|^2 + |x| - 6 = 0$

Exemplo 84: Encontre a solução das inequações modulares a seguir:

a) $|x| \geq 5$
b) $|x| < 3$
c) $|2x+1| > 3$
d) $|3x-5| \leq 8$
e) $|3x-4| \geq -2$
f) $|6-x| < -1$
g) $\left|\dfrac{2x-4}{-x+3}\right| \geq 1$
h) $\left|\dfrac{-x-2}{x+1}\right| \leq 2$

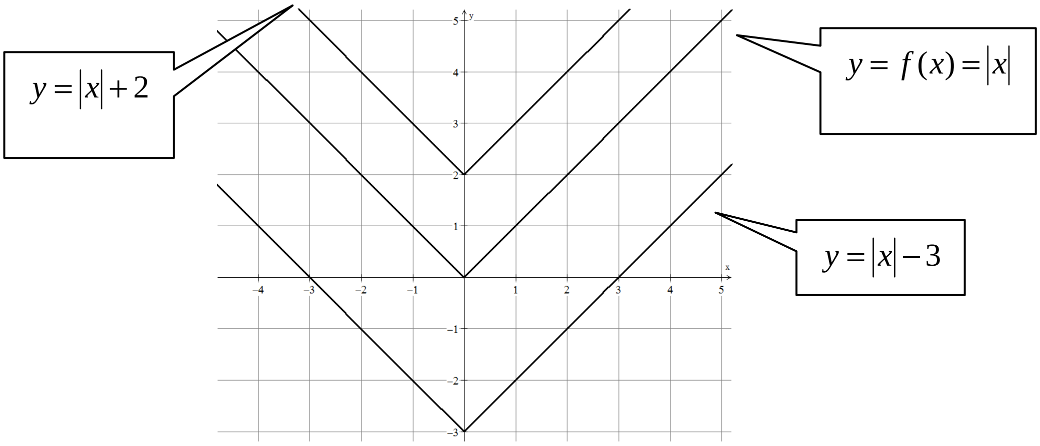
1.10. Translação de gráficos

Sejam as funções $y = f(x)$ e $y = f(x) + k$. O gráfico de $y = f(x) + k$ é o gráfico de $y = f(x)$:

- transladado k unidades para cima se $k > 0$.

- transladado $|k|$ unidades para baixo se $k < 0$.

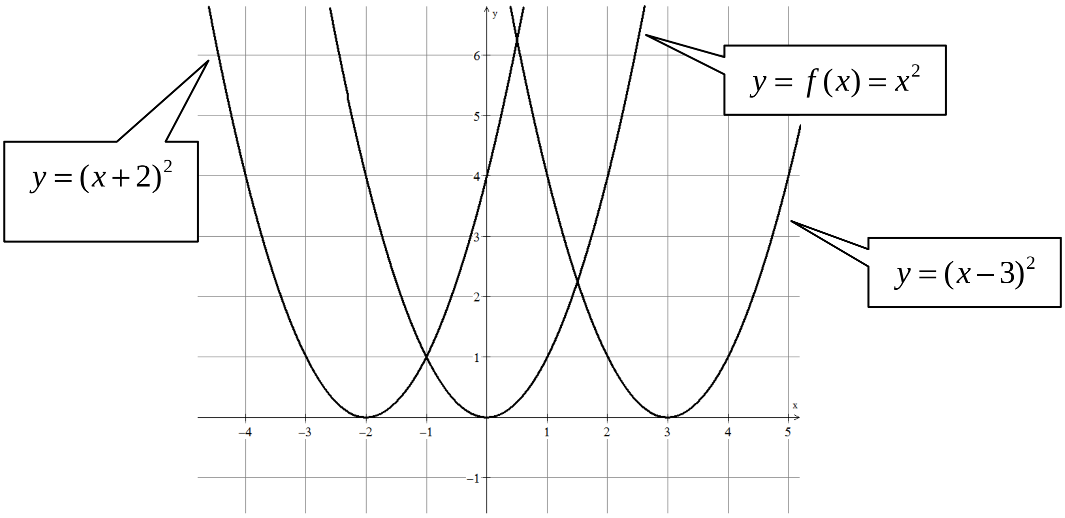
Observe o gráfico das funções a seguir:



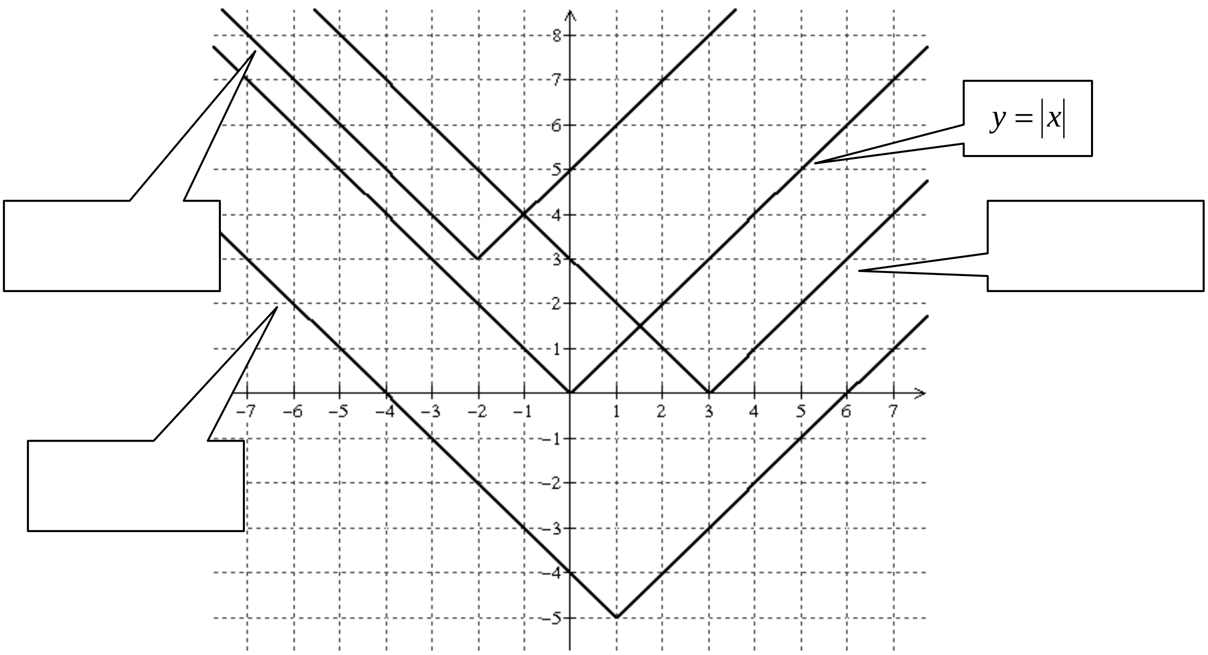
Sejam agora as funções $y = f(x)$ e $y = f(x+h)$. O gráfico de $y = f(x+h)$ é o gráfico de $y = f(x)$:

- transladado h unidades para a esquerda se $h > 0$.
- transladado $|h|$ unidades para direita se $h < 0$.

Observe o gráfico das funções a seguir:



Exemplo 85: Tomando como referência o gráfico da função $y = |x|$ e os conceitos de translação vertical e horizontal, determine a equação de cada função representada no gráfico abaixo:



Exemplo 86: A figura a seguir mostra o gráfico da função $y = x^2$. Usando o conceito de translação, faça o gráfico das seguintes funções: (OBS: Utilize o gráfico abaixo).

a) $f_1(x) = (x-1)^2 - 4$

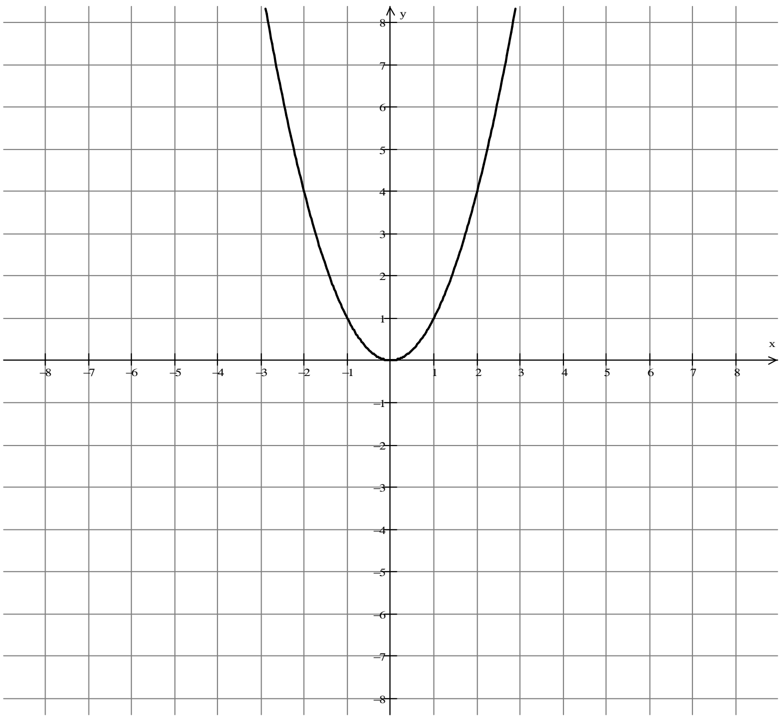
b) $f_2(x) = (x+2)^2 + 2$

c) $f_3(x) = (x-3)^2 + 5$

d) $f_4(x) = (x+6)^2 - 5$

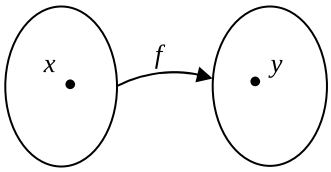
e) $f_5(x) = (x-5)^2 + 1$

f) $f_6(x) = (x+1)^2 + 3$

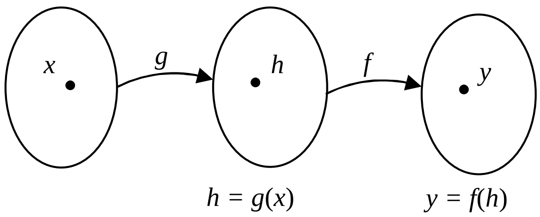


1.11. Funções compostas

Sejam os diagramas:



Função Simples: $y = f(x)$



Função composta de f e g: $y = f(g(x))$

Notações: fog , "f de g", função composta de f e g.

Exemplo 87: Escreva a expressão da função $f(g(x))$ sendo $g(x) = x^2 - 1$ e $f(x) = \sqrt{x-7}$.

Exemplo 88: Escreva a expressão de $f(g(x))$ e determine $f(g(2))$, sendo $f(x) = x - 7$ e $g(x) = x^2$.

Exemplo 89: Sejam $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \dfrac{x}{4}$ e $h(x) = 4x - 8$. Encontre $h(g(f(x)))$.

Exemplo 90: Se $u(x) = 4x - 5$, $v(x) = x^2$ e $f(x) = \dfrac{1}{x}$, encontre as expressões para as seguintes funções:

a) $u(v(f(x)))$ b) $u(f(v(x)))$ c) $v(u(f(x)))$
d) $v(f(u(x)))$ e) $f(u(v(x)))$ f) $f(v(u(x)))$

Exemplo 91: Dadas as funções reais $h(x) = \sqrt{x^2 - 1}$, $f(x) = \dfrac{x-2}{3-x}$ e $g(x) = 2x - 2$, determine:

a) o domínio de $h(f(x))$.
b) a(s) raiz(es) de $g(f(x))$.

Exemplo 92: Dadas as funções $f(x) = \sqrt{x+3}$ e $g(x) = x^2 - 1$, calcule o valor de $fog(0)$.

Exemplo 93: Sejam f e g funções de $\Re$ em $\Re$, sendo $\Re$ o conjunto dos números reais, dadas por $f(x) = 2x - 3$ e $f(g(x)) = -4x + 1$. Nestas condições, determine $g(-1)$.

1.12. Funções exponenciais

1.12.1. Definição

Dado um número real *a*, tal que $a > 0$ e $a \neq 1$, denomina-se função exponencial de base a à função $f(x) = a^x$ definida para todo x real. O domínio da função exponencial é $D = \Re$ e o conjunto imagem é $\mathrm{Im} = \Re_+^*$.

Exemplo 94: Por que devemos ter $a > 0$ e $a \neq 1$?

1.12.2. Propriedades

Considerando $a > 0$, $b > 0$, $a \neq 1$, $b \neq 1$ e $x, y \in \Re$, as seguintes propriedades são válidas:

P1) $a^x = 1$, se $x = 0$

P2) $\forall x \in \Re$, temos $f(x) = a^x > 0$, ou seja, para qualquer valor real de *x*, $\mathrm{Im} = \{y \in \Re \,/\, y > 0\} = \Re_+^*$.

P3) $f(x) = a^x$ é crescente $\forall a > 1$.

P4) $f(x) = a^x$ é decrescente $\forall 0 < a < 1$.

P5) $a^x . a^y = a^{x+y}$

P6) $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

P7) $\left(a^x\right)^y = a^{x.y}$

P8) $a^x . b^x = (a.b)^x$

P9) $\dfrac{a^x}{b^x} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^x$

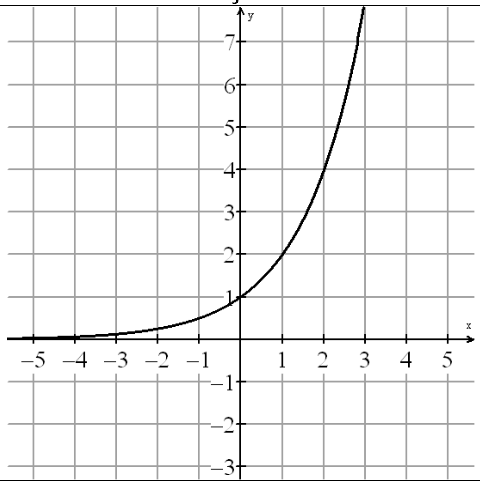
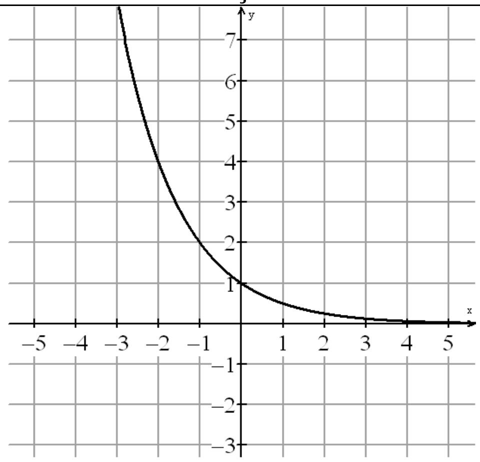
Observações:

O1) $(a+b)^x \neq a^x + b^x \quad \forall x \neq 1$

O2) $a^{x^y} \neq (a^x)^y$

O3) $2 \cdot 3^x \neq 6^x$

1.12.3. Gráficos

$a > 1$ – Função Crescente	$0 < a < 1$ – Função Decrescente
	
$D(f) = \Re$ $\text{Im}(f) = \Re_{+}^{*}$	$D(f) = \Re$ $\text{Im}(f) = \Re_{+}^{*}$

Nos dois gráficos representados, a função não assume o valor zero. Portanto não existe raiz real, a menos que a função seja deslocada para baixo.

Uma função exponencial especial amplamente utilizada na engenharia é a função exponencial natural $f(x) = e^x$, na qual a base é o número e =2,718281828... , chamado de número de Euler.

1.12.4. Aplicações

As funções exponenciais aparecem em aplicações que envolvem:

- crescimento populacional;
- decaimento radioativo;
- carga e descarga de elementos de circuitos;
- taxas de juros;
- resfriamento de corpos;
- etc.

Exemplos 95: O número de bactérias numa cultura após t horas é dado pela expressão: $B = 100e^{0,693.t}$.

a) Qual o número inicial de bactérias presentes?
b) Quantas bactérias estarão presentes após 6 horas?

Exemplo 96: Estima-se que, daqui a *t* anos, a população de certa cidade do interior de MG será dada, em milhares de habitantes, por $P(t) = 60 \times 3^{0,02t}$. Pede-se:

a) Qual é a população atual desta cidade?
b) Daqui a quanto tempo a população desta cidade será de 540 mil habitantes?

c) Se utilizarmos a mesma equação para estimar a população desta cidade nos anos anteriores, quando sua população era de 20 mil habitantes?

Exemplo 97: Você faz um investimento de R$ 2.000,00 em que a taxa de rendimento é de 8 % ao ano. Pede-se:

a) Uma equação que calcula o montante acumulado depois de t anos.
b) Qual o capital acumulado após 16 anos?

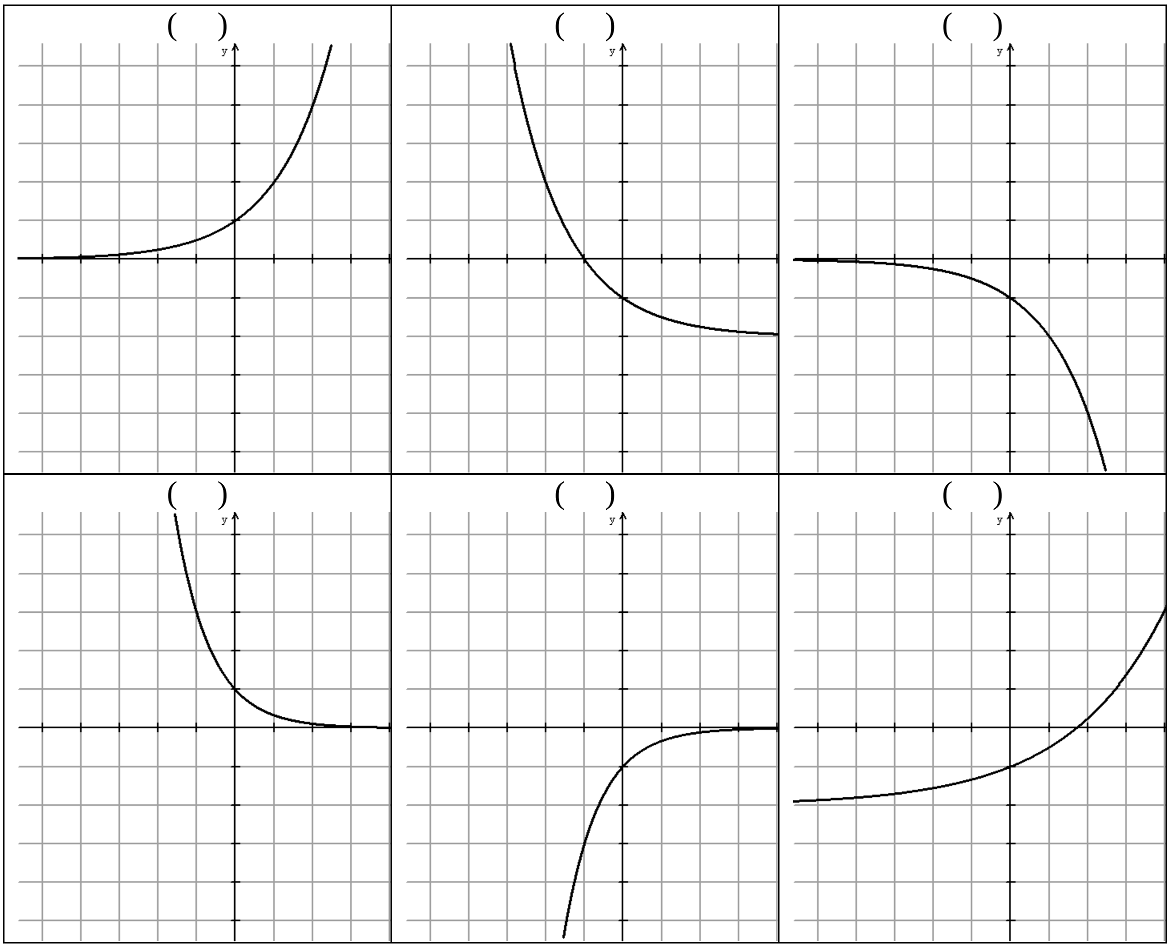
Exemplo 98: O modelo de decaimento radioativo é dado por $y = y_o e^{-r.t}$, em que:

y → quantidade de elemento radioativo presente em um instante t.
y_o → quantidade inicial de elemento radioativo ($t = 0$).
r → constante que mede a velocidade de decaimento, $r > 0$.

Para o carbono 14, $r = 1{,}2 \times 10^{-4}$ para t dado em anos. Qual será a porcentagem da quantidade inicial de carbono 14 presente após 800 anos?

Exemplo 99: Associe as funções aos gráficos abaixo:

(1) $y = 2^x$ (2) $y = 3^{-x}$ (3) $y = -3^{-x}$
(4) $y = -0{,}5^{-x}$ (5) $y = 2^{-x} - 2$ (6) $y = 1{,}5^x - 2$



Uma equação é exponencial quando a variável é expoente de uma ou mais potências dos termos desta equação.

Exemplo 100: Encontre a solução das equações exponenciais a seguir:

a) $2^x + 2^{x+1} = 3^x + 3^{x-1}$
b) $4 \cdot 16^x = 0{,}5$
c) $1000^x = 0{,}01$
d) $\left(81^8\right)^x = \sqrt[12]{27}$
e) $2{,}25^{4x+1} = \sqrt[3]{\dfrac{4}{9}}$
f) $2^{x^2-5x+6} = 1$
g) $2^x + 2^{x+1} - 2^{x+2} + 2^{x-1} = -8$
h) $\begin{cases} 2^{2x+3y} = 128 \\ 2^{6x-10y} = 4 \end{cases}$
i) $(a^x)^{3-2x} = (\sqrt{a})^{22x+12}$
j) $\sqrt[3]{(0{,}2)^{x-1}} = 0{,}008$
k) $7^{x-1} - 7^{x-2} + 2052 = 7^{x+2} - 7^{x+1}$
l) $5 \cdot 5^{2x} + 124 \cdot 5^x - 25 = 0$
m) $4^x + 3 \cdot (\sqrt{2})^{2x+4} = 5 \cdot 2^5$
n) $3 \cdot 3^{2x} - 26 \cdot 3^x - 9 = 0$

Exemplo 101: Encontre a solução das inequações exponenciais a seguir:

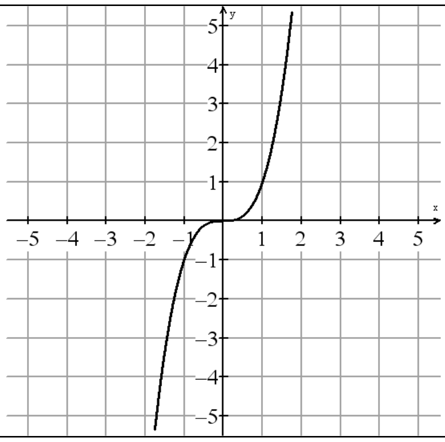
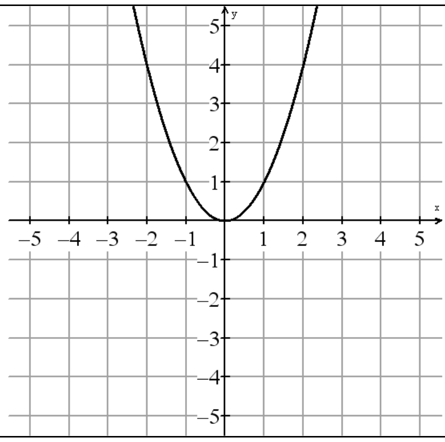
a) $4^x > \dfrac{1}{4}$
b) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2x} < \left(\dfrac{1}{3}\right)^{3x-1}$
c) $(0{,}1)^{4x^2-2x-2} < (0{,}1)^{2x-3}$
d) $5^{x^2-4} > 1$

1.13. Funções inversas e funções logarítmicas

1.13.1. Função injetora

Uma função $f(x)$ é injetora no domínio D_f se $f(a) \neq f(b)$ sempre que $a \neq b$.

Exemplo 102: Considere o gráfico das funções: $f_1(x) = x^3$ e $f_2(x) = x^2$. Podemos afirmar que as duas são funções injetoras?

$f_1(x) = x^3$	$f_2(x) = x^2$
	

Para a função $f_1(x) = x^3$ notamos que para todo $a \neq b$, a condição $f(a) \neq f(b)$ é satisfeita. Já para o gráfico de $f_2(x) = x^2$, isso não acontece. De fato se tivermos $a = 2$ e $b = -2$, $f(a) = f(b) = 4$. Portanto, conclui-se que a função $f_1(x)$ é injetora, já a função $f_2(x)$ não é injetora.

Graficamente podemos saber se uma função é ou não injetora fazendo o teste da reta horizontal. Traçando diversas retas horizontais no gráfico de uma função $f(x)$ qualquer, esta reta só pode interceptar curva da função em um único ponto. Se esta condição for satisfeita, dizemos que $f(x)$ é injetora.

1.13.2. Função Inversa

Somente uma função injetora pode ser invertida. A função definida pela inversa de uma função injetora $f(x)$ é a inversa de $f(x)$, cujo símbolo é: $f^{-1}(x)$. ATENÇÃO: $f^{-1}(x)$ não significa $\dfrac{1}{f(x)}$.

Dadas duas funções $f(x)$ e $g(x)$ podemos dizer que *f* e *g* são inversas uma da outra se e somente se: $f(g(x)) = x$ ou $g(f(x)) = x$. Nesse caso: $g(x) = f^{-1}(x)$ e $f(x) = g^{-1}(x)$.

Se $f(x)$ e $g(x)$ são duas funções inversas, então o domínio de uma é igual à imagem da outra, ou seja, $D_f = \text{Im}_g$ e $D_g = \text{Im}_f$.

Exemplo 103: Verifique se as funções $f(x) = 3x + 2$ e $g(x) = \dfrac{x-2}{3}$ são inversas.

Exemplo 104: Determine a inversa de $y = \dfrac{1}{2}x + 1$ e esboce os gráficos das duas funções. Note que o gráfico da função $f(x)$ e o gráfico de sua inversa, $f^{-1}(x)$, são simétricos em relação à função identidade ($y = x$).

Exemplo 105: Determine a inversa, o domínio e a imagem da função $f(x)=\dfrac{x+3}{x-2}$.

1.13.3. Função logarítmica de base *a*

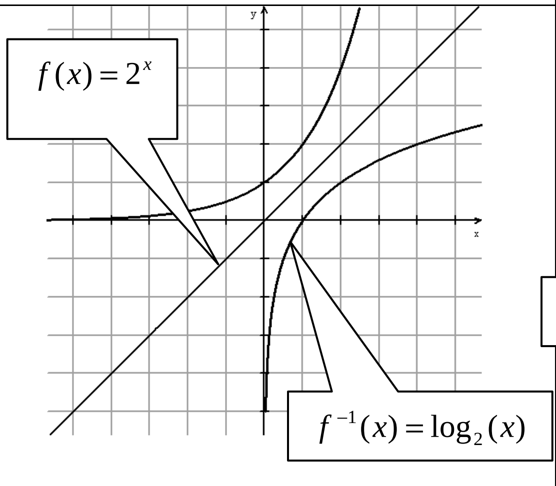
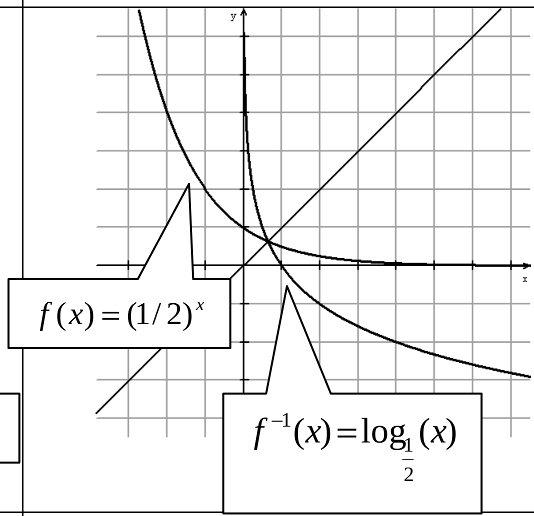
A função logarítmica de base *a*, representada por $f(x)=\log_a(x)$ é a função inversa da função exponencial $f(x)=a^x$, em que $a>0$ e $a\neq 1$. Portanto,

$$\log_a(x)=y \leftrightarrow a^y=x$$

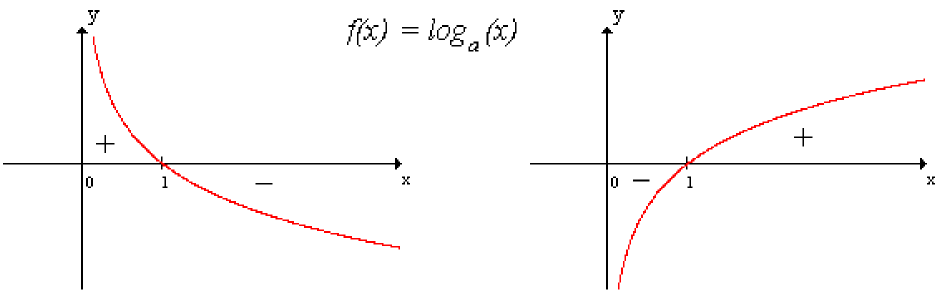
Vimos anteriormente que o domínio da função $f(x)$ é igual à imagem de sua inversa $f^{-1}(x)$, e que a imagem de $f(x)$ é o domínio da inversa $f^{-1}(x)$. Sendo assim, podemos afirmar que a função logarítmica apresenta:

- Domínio: $D=\Re_+^*$
- Imagem: $\text{Im}=\Re$

Observe os gráficos abaixo:

$a>1$	$0<a<1$
	
$D(f)=\text{Im}(f^{-1})=\Re$ $\text{Im}(f)=D(f^{-1})=\Re_+^*$	$D(f)=\text{Im}(f^{-1})=\Re$ $\text{Im}(f)=D(f^{-1})=\Re_+^*$

De forma geral, temos:



0<a<1 função decrescente — a>1 função crescente

As funções logarítmicas que possuem o número de Euler e o valor 10 como bases apresentam nomes e notações típicas:

- $y = \log_e(x) = \ln(x)$: função logaritmo natural de *x* ou função logaritmo neperiano de *x*.
- $y = \log_{10}(x) = \log(x)$: função logaritmo decimal de *x*.

As seguintes propriedades são válidas:

P1) $\log_a(1) = 0$

P2) $\log_a(a) = 1$

P3) $\log_a(a^n) = n$

P4) $a^{\log_a(b)} = b$

P5) Se *b* = *c*, então $\log_a(b) = \log_a(c)$

P6) $\log_a(x^p) = p \cdot \log_a(x)$

P7) Logaritmo do produto: $\log_a(x_1 \cdot x_2) = \log_a(x_1) + \log_a(x_2)$

P8) Logaritmo do quociente: $\log_a\left(\dfrac{x_1}{x_2}\right) = \log_a(x_1) - \log_a(x_2)$

P9) Mudança de base: $\log_b(x) = \dfrac{\log_a(x)}{\log_a(b)} = \dfrac{\ln(x)}{\ln(b)} = \dfrac{\log(x)}{\log(b)}$

Exemplo 106: Determine $\log_{1/5}(625)$

Exemplo 107: Qual a base *a* do sistema de logaritmos, em que o logaritmo de 7 é 1/4?

Exemplo 108: Qual é o número cujo logaritmo no sistema de base $\sqrt[3]{9}$ é 0,75?

Exemplo 109: Determine o valor de *x* para:

a) $\log_x(0{,}00032) = 5$
b) $\log_x\left(8/27\right) = -3$
c) $\log_x\left(5\sqrt[3]{25\sqrt{5}}\right) = -\dfrac{11}{12}$
d) $\log_x(N) = \dfrac{N}{P}$
e) $\ln(x) = 3t + 5$
f) $\dfrac{x - \log 2}{x + \log 2} = \dfrac{\log 8}{\log 4}$

Exemplo 110: Num sistema de logaritmos, o logaritmo da base aumentada de 2 é 2. Qual é a base do sistema?

Exemplo 111: Um aplicador investe R$ 10.000,00 em um negócio que rende 5,25 % de juros compostos ao ano. Em quanto tempo esse aplicador terá um saldo de R$ 25.000,00?

Exemplo 112: Expresse as relações seguintes em função de um só logaritmo:

a) $\dfrac{1}{2}\log_2 5 + \log_2 3$
b) $\log_a 2 - 5\log_a 3 + 2$
c) $\dfrac{1}{3}\log_5 3 + 2\log_5 2 - 1$

Exemplo 113: Determine o domínio das seguintes funções:

a) $y = \log_2(x^2 - 1)$
b) $y = \log_{\frac{1}{2}}\left[\dfrac{x \cdot (x^2 + 1)}{x^2 - 3x + 2}\right]$
c) $y = \log_3\left[\log_{\frac{1}{3}}(x - 3)\right]$
d) $y = \log_{\frac{1}{2}}\left[\log_2(x^2 - 3)\right]$

Exemplo 114: Encontre a solução das equações a seguir:

a) $\log\left(x + \dfrac{1}{3}\right) + \log\left(x - \dfrac{1}{3}\right) = \log\left(\dfrac{24}{9}\right)$
b) $\dfrac{1}{2}\log(3x - 5) + \dfrac{1}{2}\log(x) = 1$
c) $\log_2(x + 7) - \log_2(x - 11) = 2$
d) $x^{\log_5(x)} = (625x)^2$

e) $27x^{\log_3(x)} = x^4$

f) $2\log\left(\dfrac{x-1}{5}\right) + 3\log\left(\dfrac{x-1}{2}\right) = 1 + \log(x-1) + \log(5)$

g) $x^{12+5\log_a(x)} = a^9$

Exemplo 115: Dados $\log(2) = 0{,}30103$, $\log(3) = 0{,}47712$ e $\log(5) = 0{,}69897$, determine:

a) $\log(0{,}02)$
b) $\log(300)$
c) $\log(2000)$
d) $\log(0{,}003)$
e) $\log(500)$

Exemplo 116: Calcule os valores de *m* para que $\log(m^2 - 6m + 7)$ seja:

a) real
b) positivo
c) negativo
d) nulo

Exemplo 117: Esboce o gráfico das funções a seguir indicando o domínio e a imagem de cada uma:

a) $y = \log_2(x)$

b) $y = \left[\log_{1/2}(x)\right] - 1$

c) $y = \log_2(x-1)$

Exemplo 118: Considere que o nível de álcool no sangue de uma pessoa decresce de acordo com a fórmula:

$$N(t) = 2.(0{,}5)^t$$

em que ***N*** é dado em gramas por litro e ***t*** é o tempo medido em horas a partir do momento em que o nível de álcool foi constatado. Antes de existir a lei seca, o limite de álcool no sangue para dirigir com segurança era de 0,8 gramas por litro e que ***t*** em minutos era o tempo necessário para que o motorista esperasse até alcançar este nível. Determine este valor de ***t***. Considere ***log (2) = 0,3.***

Exemplo 119: Quando um paciente ingere um medicamento, a droga entra na corrente sanguínea e, ao passar pelo fígado e pelos rins, é metabolizada e eliminada a uma taxa que é proporcional à quantidade presente no corpo. Suponha uma dose única de um medicamento cujo princípio ativo é de 250 mg. A quantidade q desse princípio ativo que continua presente no organismo t horas após a ingestão é dada pela expressão $q(t) = 250 \cdot (0{,}6)^t$. Usando $\ln(3) = 1{,}1$, $\ln(5) = 1{,}6$ e $\ln(2) = 0{,}7$, pede-se qual o tempo necessário para que a quantidade dessa droga presente no corpo do paciente seja menor que 50 mg.

Exemplo 120: Considerando o exemplo 98, qual é o tempo de meia vida do carbono-14, ou seja, em quanto tempo ocorre o decaimento de metade de sua quantidade inicial?

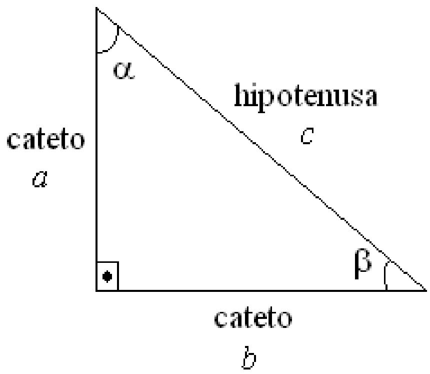
Exemplo 121: Uma população de mosquitos desenvolve-se segundo o modelo dado pela função $P(t) = P_0 \times e^{0,01t}$, em que o tempo t é dado em dias. Pede-se:

a) Qual é a população inicial de mosquitos, sabendo que após 40 dias a população é de aproximadamente 400.000 indivíduos?
b) Em quantos dias a população de mosquitos triplica?

1.14. Funções trigonométricas

1.14.1. Conceitos iniciais

A trigonometria é a área da matemática que estuda relações entre as medidas de lados e ângulos de um triângulo retângulo. Um triângulo retângulo é um triângulo que possui um ângulo reto (que mede 90º). A figura a seguir mostra um triângulo retângulo e a nomenclatura utilizada para seus lados.



Para todo triângulo retângulo, a relação de Pitágoras é válida: $c^2 = a^2 + b^2$

As funções trigonométricas básicas são definidas por:

$$sen(\alpha) = \frac{b}{c} \qquad \cos(\alpha) = \frac{a}{c} \qquad tg(\alpha) = \frac{b}{a}$$

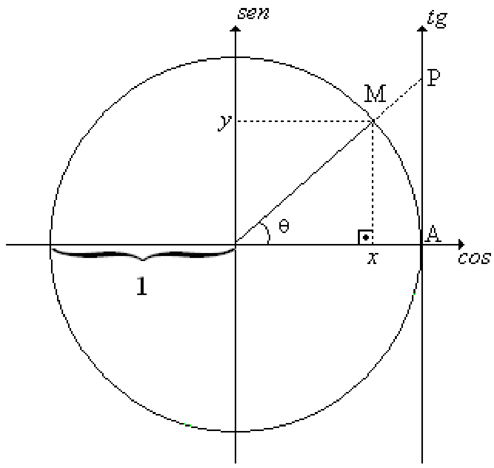
$$sen(\beta) = \frac{a}{c} \qquad \cos(\beta) = \frac{b}{c} \qquad tg(\beta) = \frac{a}{b}$$

De acordo com as definições acima, é fácil notar que quando dois ângulos α e β são complementares, o seno de um deles é igual ao cosseno do outro.

Existem duas unidades mais utilizadas para medidas de arcos: o grau e o radiano, cuja conversão se dá através de uma regra de três simples, sabendo que 180º correspondem a

π radianos. Um radiano é o ângulo definido em um círculo por um arco de circunferência com o mesmo comprimento que o raio do referido círculo. Um grau é a medida de um ângulo correspondente a 1/360 de uma circunferência.

Consideremos agora uma circunferência trigonométrica (circunferência de raio unitário cujo centro se localiza na origem dos eixos de coordenadas cartesianas) e um arco *AM*, conforme mostrado na figura a seguir.

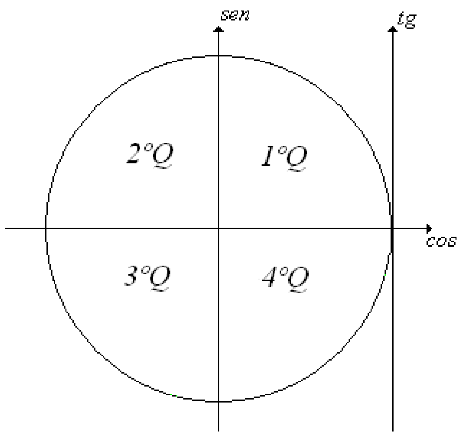


Observando a circunferência trigonométrica, podemos obter as seguintes relações para um determinado ângulo θ:

$$sen(\theta) = y$$
$$\cos(\theta) = x$$
$$tg(\theta) = \frac{y}{x} = AP$$

1.14.2. Valores e sinais do seno, cosseno e tangente de um arco

Faremos agora um estudo do sinal das funções trigonométricas observando cada quadrante da circunferência trigonométrica mostrada a seguir.



⇨ 1º Quadrante

$sen(\theta) > 0 \qquad \cos(\theta) > 0 \qquad tg(\theta) > 0$

⇨ 2º Quadrante

$sen(\theta) > 0 \qquad \cos(\theta) < 0 \qquad tg(\theta) < 0$

⇨ 3º Quadrante

$sen(\theta) < 0 \qquad \cos(\theta) < 0 \qquad tg(\theta) > 0$

⇨ 4º Quadrante

$sen(\theta) < 0 \qquad \cos(\theta) > 0 \qquad tg(\theta) < 0$

A tabela a seguir traz os valores de seno, cosseno e tangente para alguns arcos principais.

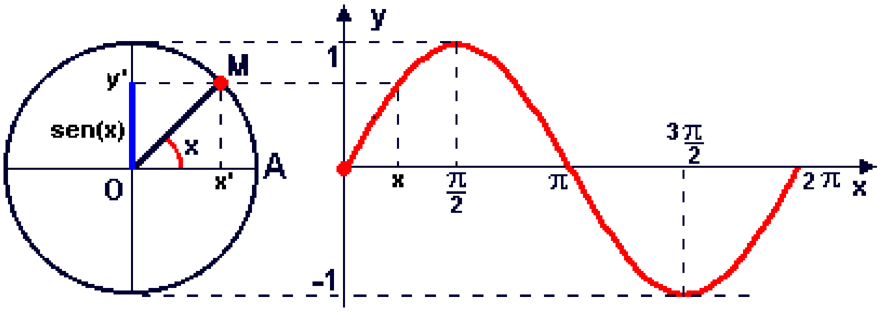
θ	θ	$sen(\theta)$	$\cos(\theta)$	$tg(\theta)$
$0 \equiv 2\pi$	$0 \equiv 360^o$	0	1	0
$\pi/6$	30^o	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$
$\pi/4$	45^o	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
$\pi/3$	60^o	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$
$\pi/2$	90^o	1	0	$\theta \to \pi/2^-, tg(\theta) \to \infty$
				$\theta \to \pi/2^+, tg(\theta) \to -\infty$
π	180^o	0	-1	0
$3\pi/2$	270^o	-1	0	$\theta \to 3\pi/2^-, tg(\theta) \to +\infty$
				$\theta \to 3\pi/2^+, tg(\theta) \to -\infty$

Os valores das funções são dados na tabela para os principais arcos pertencentes ao 1º quadrante da circunferência trigonométrica (além dos arcos *π/2 rad*, *π rad* e *3π/2 rad*, que dividem os quadrantes). Dessa forma, utilizando a análise do sinal das funções trigonométricas vista anteriormente, torna-se fácil obter os valores de seno, cosseno e tangente para os principais arcos dos outros três quadrantes.

1.14.3. Detalhamento das funções trigonométricas

a) Função seno

Na figura a seguir, o segmento Oy' que mede sen(x), é a projeção do segmento OM sobre o eixo OY.



Propriedades da função seno:

- Domínio: A função seno está definida para todos os valores reais. Sendo assim seu domínio é dado por $D_f = \Re$.

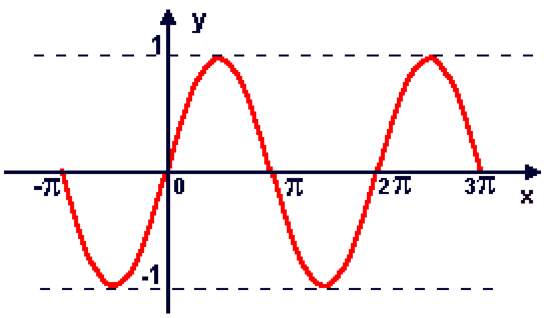
- Imagem: O conjunto imagem da função seno é o intervalo

$$\mathrm{Im}_f = \{ y \in \Re | -1 \le y \le 1 \} = [-1,1]$$

- Periodicidade: A função é periódica de período 2π. Para todo x em $\Re$ e para todo k em Z, temos

$$\mathrm{sen}(x) = \mathrm{sen}(x + 2k\pi) \qquad \forall x \in \Re \qquad \forall k \in Z$$

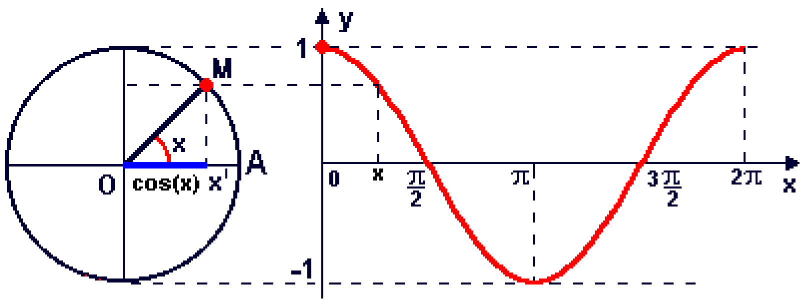
Completamos o gráfico da função seno, repetindo seus valores em cada intervalo de medida 2π.



- Simetria: A função seno é ímpar, pois para todo x real, $\mathrm{sen}(x) = -\mathrm{sen}(-x)$.

b) Função cosseno

Na figura a seguir, o segmento Ox' que mede cos(x), é a projeção do segmento OM sobre o eixo horizontal OX.



Propriedades da função cosseno:

- Domínio: A função cosseno está definida para todos os valores reais. Sendo assim seu domínio é dado por $D_f = \Re$.

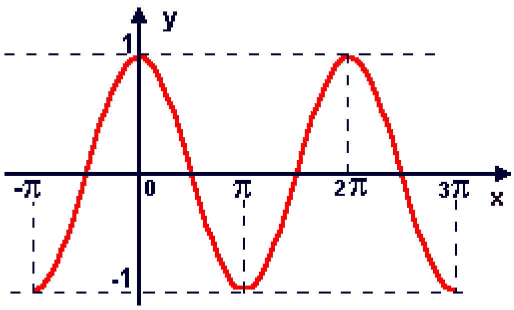
- Imagem: O conjunto imagem da função cosseno é o intervalo

$$\mathrm{Im}_f = \{y \in \Re | -1 \le y \le 1\} = [-1,1]$$

- Periodicidade: A função é periódica de período 2π. Para todo x em $\Re$ e para todo k em Z, temos

$$\cos(x) = \cos(x + 2k\pi) \qquad \forall x \in \Re \qquad \forall k \in Z$$

Completamos o gráfico da função cosseno, repetindo seus valores em cada intervalo de medida 2π.



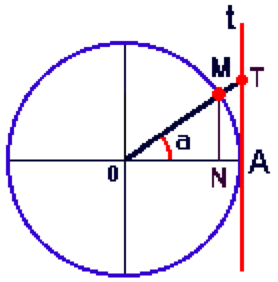
- Simetria: A função cosseno é par, pois para todo x real, $\cos(x) = \cos(-x)$.

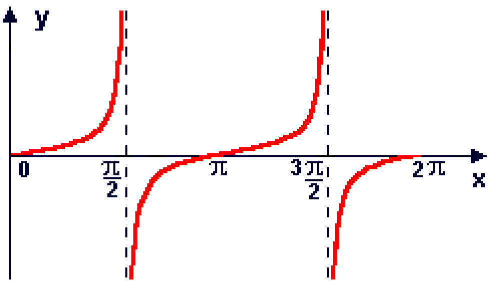
c) Função tangente

A função tangente é obtida através da relação entre as funções seno e cosseno:

$$\mathrm{tg}(x) = \frac{\mathrm{sen}(x)}{\cos(x)}$$

Na figura a seguir, o segmento AT mede a tg(x).





Propriedades da função tangente:

- Domínio: Para todo valor inteiro de k, o domínio da função tangente é dado por

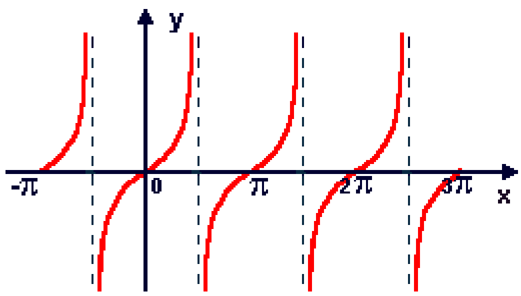
$$D_f = \left\{ x \in \Re \,\middle|\, x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathrm{Z} \right\}$$

- Imagem: O conjunto imagem da função tangente é o conjunto de todos os reais, ou seja, $\mathrm{Im}_f = \Re$.

- Periodicidade: A função é periódica de período π. Para todo $x \in D_f$ e para todo k inteiro, temos

$$\mathrm{tg}(x) = \mathrm{tg}(x + k\pi) \qquad \forall x \in D_f \qquad \forall k \in \mathrm{Z}$$

Completamos o gráfico da função tangente, repetindo seus valores em cada intervalo de medida π.



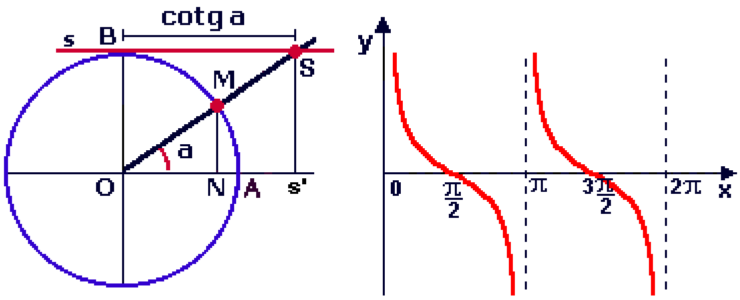
- Simetria: A função tangente é ímpar, pois para todo $x \in D_f$, $\mathrm{tg}(x) = -\mathrm{tg}(-x)$.

d) Função cotangente

A função cotangente é obtida através da relação entre as funções cosseno e seno:

$$\text{cotg}(x) = \frac{\cos(x)}{\text{sen}(x)} = \frac{1}{\text{tg}(x)}$$

Na figura a seguir, o segmento BS mede a cotg(x).



Propriedades da função cotangente:

- Domínio: Para todo valor inteiro de k, o domínio da função cotangente é dado por

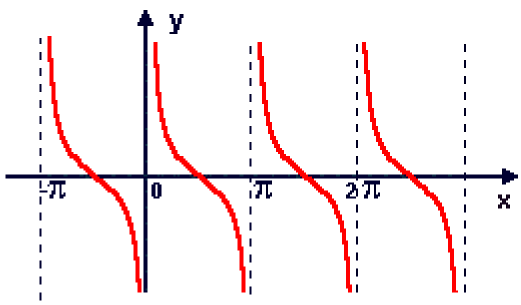
$$D_f = \{x \in \Re \mid x \neq k\pi, k \in Z\}$$

- Imagem: O conjunto imagem da função cotangente é o conjunto de todos os reais, ou seja, $\text{Im}_f = \Re$.

- Periodicidade: A função é periódica de período π. Para todo $x \in D_f$ e para todo k inteiro, temos

$$\text{cotg}(x) = \text{cotg}(x + k\pi) \qquad \forall x \in D_f \qquad \forall k \in Z$$

Completamos o gráfico da função cotangente, repetindo seus valores em cada intervalo de medida π.



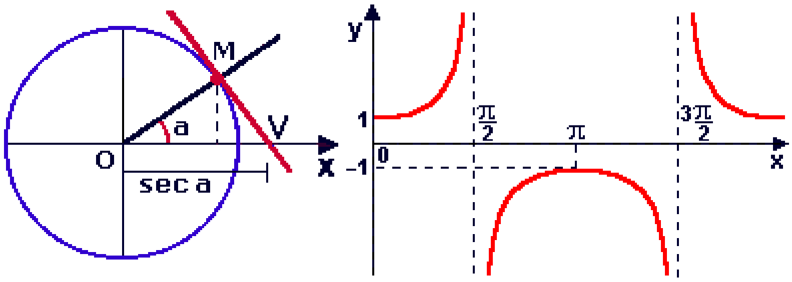
- Simetria: A função cotangente é ímpar, pois para todo $x \in D_f$, $\text{cotg}(x) = -\text{cotg}(-x)$.

e) **Função secante**

A função secante é obtida definida por

$$\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$$

Na figura a seguir, o segmento OV mede a sec(x).



Propriedades da função secante:

- Domínio: Para todo valor inteiro de k, o domínio da função secante é dado por

$$D_f = \left\{ x \in \Re \,\middle|\, x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in Z \right\}$$

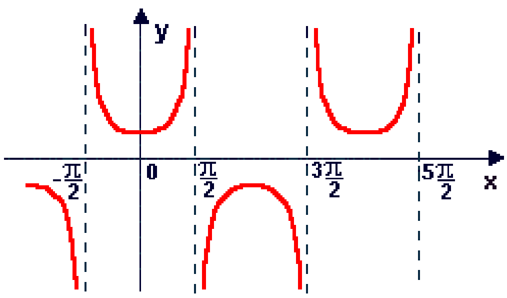
- Imagem: O conjunto imagem da função secante é o conjunto dado por

$$\mathrm{Im}_f = \{ y \in \Re \,/\, |y| \geq 1 \}$$

- Periodicidade: A função é periódica de período 2π. Para todo $x \in D_f$ e para todo k inteiro, temos

$$\sec(x) = \sec(x + 2k\pi) \;\; \forall x \in D_f \qquad \forall k \in Z$$

Completamos o gráfico da função secante, repetindo seus valores em cada intervalo de medida 2π.



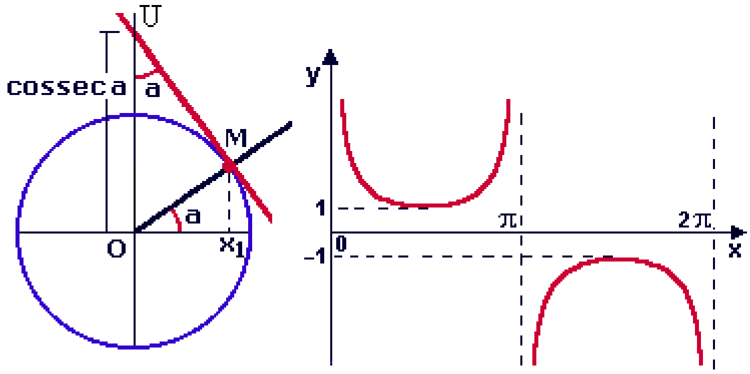
- Simetria: A função secante é par, pois para todo $x \in D_f$, $\sec(x) = \sec(-x)$.

f) **Função cossecante**

A função cossecante é obtida definida por

$$\text{cossesc}(x) = \frac{1}{\text{sen}(x)}$$

Na figura a seguir, o segmento OU mede a cossec(x).



Propriedades da função cossecante:

- Domínio: Para todo valor inteiro de k, o domínio da função cossecante é dado por

$$D_f = \{x \in \Re | x \neq k\pi, k \in \mathrm{Z}\}$$

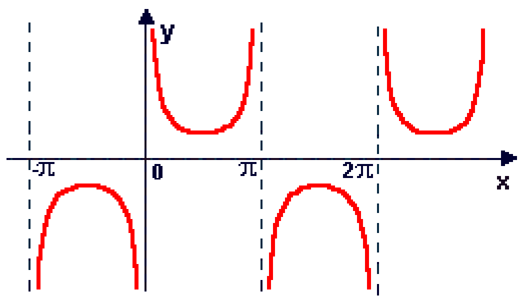
- Imagem: O conjunto imagem da função cossecante é o conjunto dado por

$$\text{Im}_f = \{y \in \Re / |y| \geq 1\}$$

- Periodicidade: A função é periódica de período 2π. Para todo $x \in D_f$ e para todo k inteiro, temos

$$\text{cossec}(x) = \text{cossec}(x + 2k\pi) \quad \forall x \in D_f \qquad \forall k \in \mathrm{Z}$$

Completamos o gráfico da função cossecante, repetindo seus valores em cada intervalo de medida 2π.



- Simetria: A função cossecante é ímpar, pois para todo $x \in D_f$, $\text{cossec}(x) = -\text{cossec}(-x)$.

1.14.4. Relações trigonométricas importantes

Relação trigonométrica fundamental

$$\text{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1 \qquad \begin{cases} \div \cos^2(x) \rightarrow 1 + \text{tg}^2(x) = \sec^2(x) \\ \div \text{sen}^2(x) \rightarrow 1 + \text{cotg}^2(x) = \text{cosec}^2(x) \end{cases}$$

Adição e Subtração de Arcos

1) $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - sen(a)sen(b)$

2) $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + sen(a)sen(b)$

3) $sen(a+b) = sen(a)\cos(b) + sen(b)\cos(a)$

4) $sen(a-b) = sen(a)\cos(b) - sen(b)\cos(a)$

5) $\text{tg}(a \pm b) = \dfrac{\text{tg}(a) \pm \text{tg}(b)}{1 \mp \text{tg}(a).\text{tg}(b)}$

Duplicação de Arcos

Fazendo a=b e substituindo na relação (1), encontramos:

$$\cos(2a) = \cos^2(a) - sen^2(a)$$

Fazendo a=b e substituindo na relação (3), encontramos:

$$sen(2a) = 2sen(a)\cos(a)$$

Somando as relações (1) e (2), encontramos:

$$\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos(a)\cos(b)$$

Adotando $\begin{matrix} a+b=p \\ a-b=q \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{p+q}{2} \quad b = \dfrac{p-q}{2} \end{cases}$

Assim, teremos

$$\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

Somando as relações (3) e (4), encontramos:

$$sen(a+b)+sen(a-b)=2sen(a)\cos(b)$$

Adotando $\begin{matrix} a+b=p \\ a-b=q \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{p+q}{2} \quad b=\dfrac{p-q}{2} \end{cases}$

Assim, teremos

$$sen(p)+sen(q)=2sen\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

Várias outras relações trigonométricas podem ser obtidas através das apresentadas anteriormente. Como exercício, tente obter as relações para a diferença de dois senos e para a diferença de dois cossenos.

Bissecção de Arcos

$$\text{sen}\left(\frac{a}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1-\cos(a)}{2}}$$
$$\cos\left(\frac{a}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1+\cos(a)}{2}}$$
$$\text{tg}\left(\frac{a}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1-\cos(a)}{1+\cos(a)}}$$

Exemplo 122: Converta os seguintes ângulos de radianos para graus:

a) $\pi/6$
b) $5\pi/3$
c) $7\pi/4$
d) $7\pi/6$

Exemplo 123: Determine o domínio das funções a seguir no universo $[0,2\pi[$:

a) $y=\sqrt{sen(x)}$
b) $y=\sqrt{\cos(x)-1}$
c) $y=tg(2x+\pi)$

Exemplo 124: Determine o período das funções a seguir:

a) $y=sen(3x-\pi)$

b) $y = 3\cos\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)$

c) $y = 2sen(4x)$

d) $y = 3\cos\left(\dfrac{x}{3}\right) - 1$

Exemplo 125: Determine p de modo que a equação $sen(x) = p^2 - 3p + 1$ tenha solução.

Exemplo 126: Determine o valor de m sabendo-se que o período da função $y = \cos\left(\dfrac{x}{m}\right)$ é $\dfrac{7\pi}{3}$.

Exemplo 127: Esboce o gráfico (para x variando de 0 a 2π) das funções a seguir. Em seguida determine o período e o conjunto imagem de cada uma delas.

a) $y = |\cos(x)|$

b) $y = 1 + \text{sen}(2x)$

c) $y = 3\cos(2x) - 1$

d) $y = \text{sen}\left(\dfrac{x}{4}\right)$

e) $y = 1 + \text{sen}\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$

f) $y = 2\cos\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) - 2$

Exemplo 128: Sendo θ um ângulo tal que $0 < \theta < \pi$ e $\text{sen}(\theta) = 1/2$, determine $\cos(\theta)$ e $tg(\theta)$.

Exemplo 129: Calcule, utilizando a operação com arcos:

a) $\cos(75°)$

b) $\text{sen}\left(2\pi - \dfrac{\pi}{6}\right)$

Exemplo 130: Dados $\cos(4x) = -1/4$ ($4x$ é arco do 2° quadrante), determine $\text{sen}(8x)$, $\cos(8x)$, $tg(8x)$ e o quadrante a que pertence o arco $8x$.

Exemplo 131: Determine $x \in [0, \pi]$ tal que $\cos(5x) + \cos(3x) = 0$.

Exemplo 132: Dado $\text{sen}(x) = \dfrac{3}{5}$ e $x \in \left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$, calcule cos($x$) e tg($x$).

Exemplo 133: Dado $\cos(x) = \frac{1}{3}$ e $x \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$, calcule sen($x$) e tg($x$).

Exemplo 134: Dado $\text{tg}(x) = \frac{1}{2}$ e $x \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$, calcule sen($x$) e cos($x$).

Exemplo 135: Determine os valores de m que satisfazem a equação $\text{sen}(x) = \frac{2m-1}{7}$, sabendo que $\pi \leq x \leq 2\pi$.

Exemplo 136: Determine os valores de m que satisfazem a equação $\cos(x) = \frac{2m+1}{5}$, sabendo que $0 \leq x \leq \pi$.

Exemplo 137: Sendo $a \in$ 3ºQ, $b \in$ 4ºQ e tendo-se $\text{tg}(a) = \frac{4}{3}$ e $\sec(b) = \frac{13}{5}$, calcule o valor de $\cos(a+b)$.

Exemplo 138: Se $\text{sen}(x) = \frac{2}{5}$ e 90º<x<180º, determine o valor da expressão $y = \frac{\text{tg}(x) + \text{cotg}(x)}{\sec(x)}$.

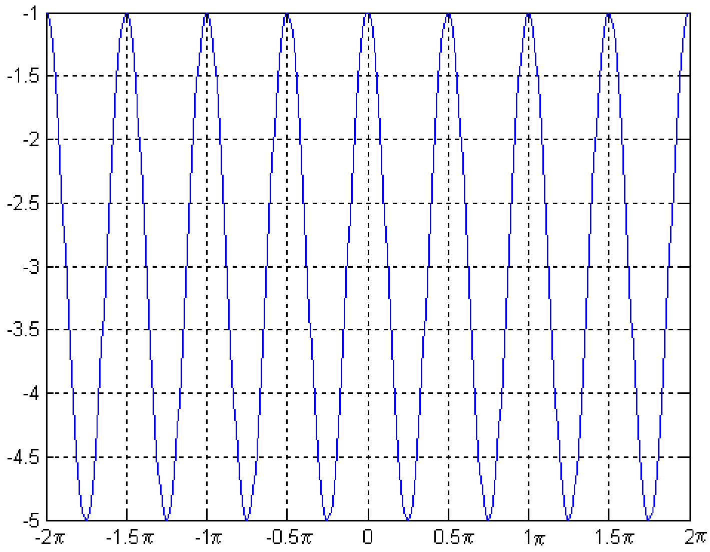
Exemplo 139: Simplifique a expressão $\frac{\cos^2(x)}{1 - sen^2(x)} - \frac{\text{cossec}^2(x) - \text{cotg}^2(x)}{\text{cossec(x)}}$.

Exemplo 140: Se $\text{sen}(x) = -\frac{3}{5}$ e 180º < x < 270º, determine o valor de:

a) $y = \text{sen}(2x)$
b) $y = \text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$

Exemplo 141: O gráfico a seguir representa uma função do formato $y = A \cdot \cos(Bx) + C$. Pede-se:

a) Os valores de A, B e C.
b) O domínio desta função.
c) A imagem desta função.
d) O período desta função.



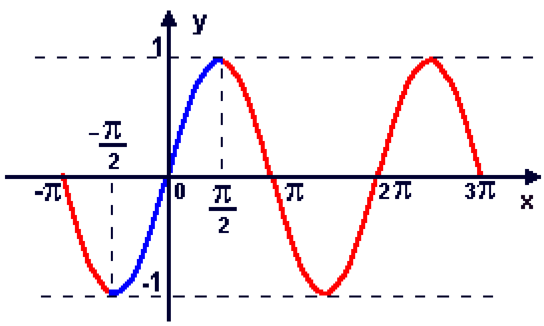
1.15. Funções trigonométricas inversas

Vimos anteriormente que para uma função qualquer admitir uma inversa, a mesma deve ser injetora em seu domínio. A princípio, as funções trigonométricas não admitem funções inversas, pelo fato de não serem injetoras, ou seja, as mesmas possuem o mesmo valor de imagem para valores diferentes do domínio. Entretanto, se o domínio de cada uma delas for restringido a um intervalo, é possível obter suas funções inversas.

A seguir detalharemos cada função trigonométrica inversa.

1.15.1. Função arco-seno

É a função inversa obtida após a limitação do domínio da função seno, conforme mostrado a seguir.

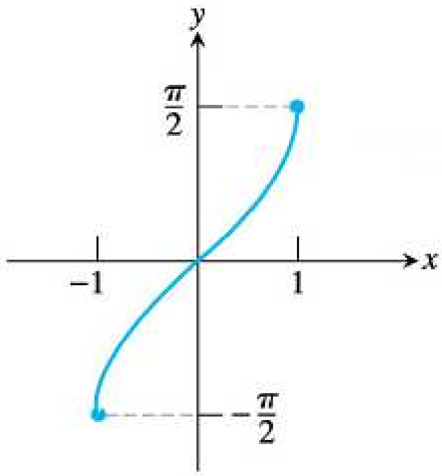


$$y = \text{sen}(x)$$

$$D = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\text{Im} = [-1,1]$$

A função inversa arco-seno é dada por:



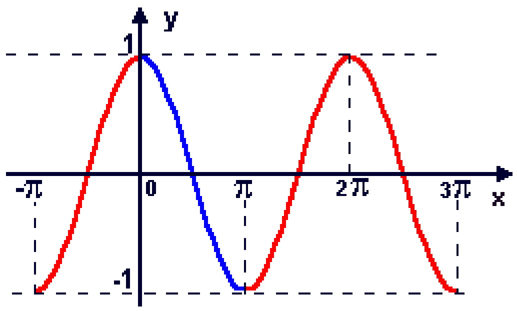
$y = \text{arcsen}(x)$

$D = [-1,1]$

$\text{Im} = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

1.15.2. Função arco-cosseno

É a função inversa obtida após a limitação do domínio da função cosseno, conforme mostrado a seguir.

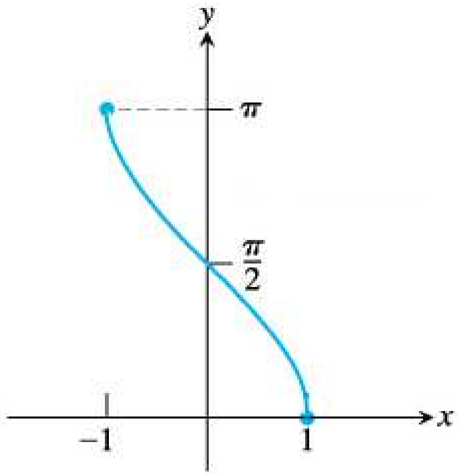


$y = \cos(x)$

$D = [0, \pi]$

$\text{Im} = [-1,1]$

A função inversa arco-cosseno é dada por:



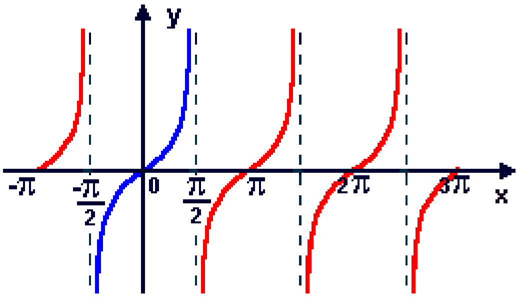
$y = \arccos(x)$

$D = [-1,1]$

$\text{Im} = [0, \pi]$

1.15.3. Função arco-tangente

É a função inversa obtida após a limitação do domínio da função tangente, conforme mostrado a seguir.

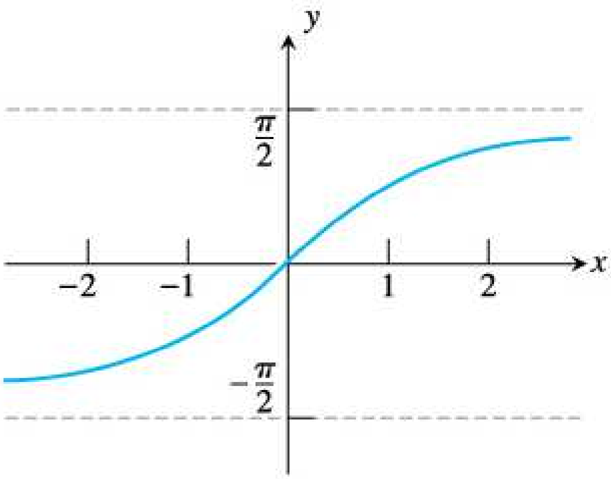


$$y = \mathrm{tg}(x)$$

$$D = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

$$\mathrm{Im} = \Re$$

A função inversa arco-tangente é dada por:



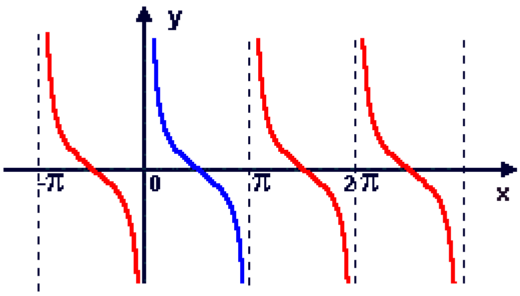
$$y = \mathrm{arctg}(x)$$

$$D = \Re$$

$$\mathrm{Im} = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

1.15.4. Função arco-cotangente

É a função inversa obtida após a limitação do domínio da função cotangente, conforme mostrado a seguir.

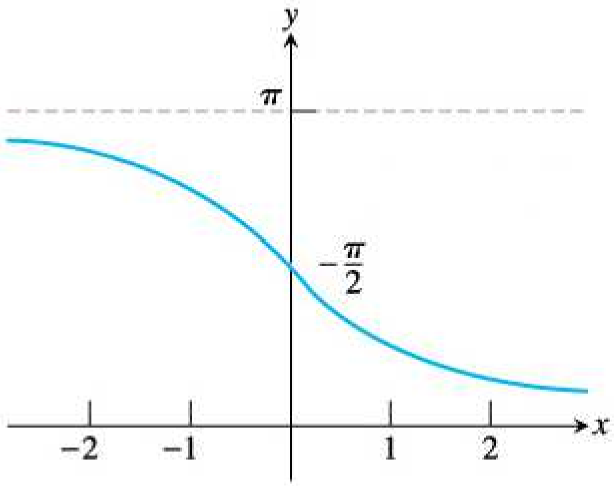


$$y = \mathrm{cotg}(x)$$

$$D = \left]0, \pi\right[$$

$$\mathrm{Im} = \Re$$

A função inversa arco-cotangente é dada por:



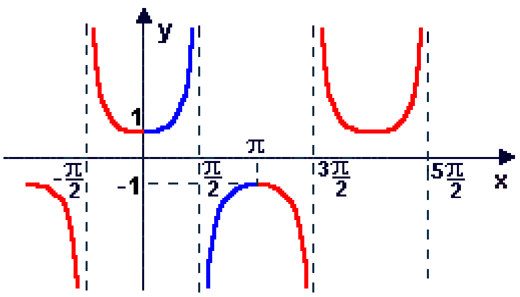
$$y = \text{arccotg}(x)$$

$$D = \Re$$

$$\text{Im} =]0, \pi[$$

1.15.5. Função arco-secante

É a função inversa obtida após a limitação do domínio da função secante, conforme mostrado a seguir.



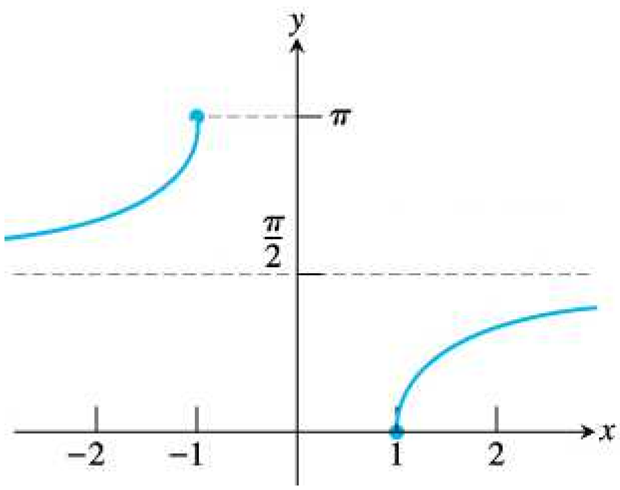
$$y = \sec(x)$$

$$D = \left\{x \in \Re \,/\, 0 \le x \le \pi, x \ne \frac{\pi}{2}\right\}$$

$$\text{Im} = \{y \in \Re \,/\, |y| \ge 1\}$$

,

A função inversa arco-secante é dada por:



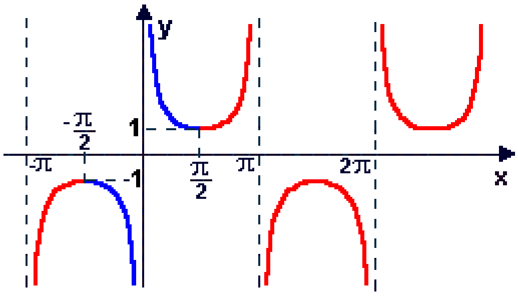
$$y = \text{arcsec}(x)$$

$$D = \{x \in \Re \,/\, |x| \ge 1\}$$

$$\text{Im} = \left\{y \in \Re \,/\, 0 \le y \le \pi, y \ne \frac{\pi}{2}\right\}$$

1.15.6. Função arco-cossecante

É a função inversa obtida após a limitação do domínio da função cossecante, conforme mostrado a seguir.

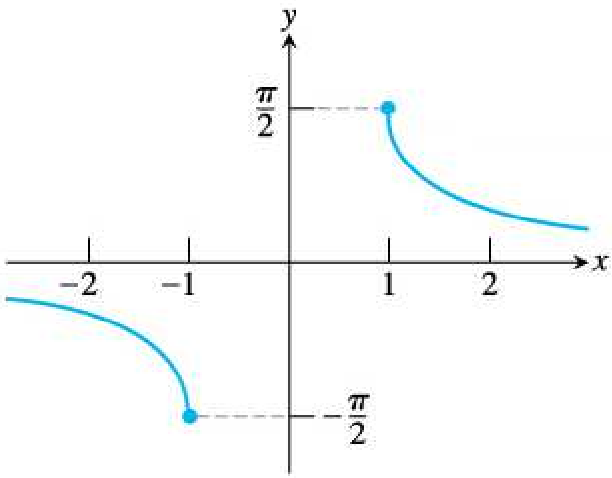


$y = \text{cossec}(x)$

$D = \left\{ x \in \Re / -\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}, x \neq 0 \right\}$

, $\text{Im} = \{ y \in \Re / |y| \geq 1 \}$

A função inversa arco-cossecante é dada por:



$y = \text{arccossec}(x)$

$D = \{ x \in \Re / |x| \geq 1 \}$

$\text{Im} = \left\{ y \in \Re / -\dfrac{\pi}{2} \leq y \leq \dfrac{\pi}{2}, y \neq 0 \right\}$

Exemplo 142: Utilizando os conceitos de funções inversas, determine:

a) $\text{sen}(\text{arcsen}(x))$

b) $\text{arcsen}(\text{sen}(2x))$

c) $\text{arctg}\left(\text{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} \right) \right)$

d) $\cos(\arccos(-1/2))$

Exemplo 143: Determine x sabendo que $x = \text{arcsen}(1/2)$.

Exemplo 144: Calcule:

a) $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arcsen}\left(\frac{3}{4}\right)\right)$

b) $\sec\left(\arccos\left(\frac{1}{2}\right)\right)$

c) $\operatorname{tg}(\operatorname{arcsec}(1)) - \operatorname{sen}(\operatorname{arccossec}(-2))$

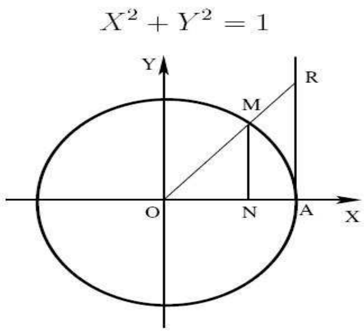
d) $\operatorname{sen}\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{3}{4}\right)\right)$

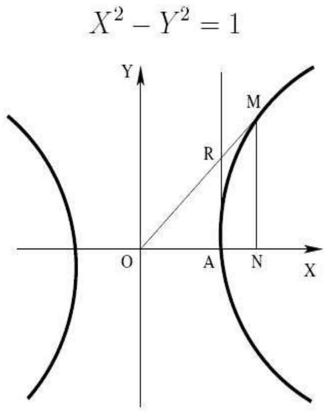
Exemplo 145: Encontre o domínio da função $y = \arccos(1 - \log(x))$.

1.16. Funções hiperbólicas

1.16.1. Definição

São funções definidas da mesma forma que as funções trigonométricas (circulares), mas tomam como base uma hipérbole.





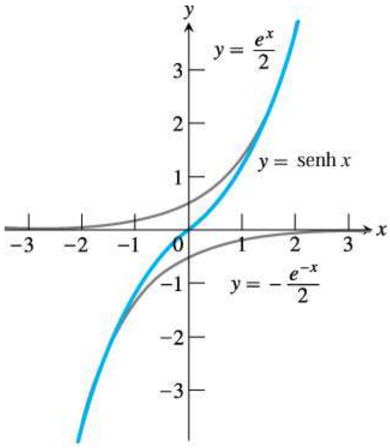
São funções úteis no cálculo diferencial e integral para modelar eventos físicos, como as ondas em corpos elásticos por exemplo. Os fios de uma rede elétrica, suspensos pelas extremidades presas em dois postes, assumem a forma de uma curva que é descrita por uma função hiperbólica, no caso o cosseno hiperbólico.

As funções hiperbólicas aparecem em aplicações que envolvem:

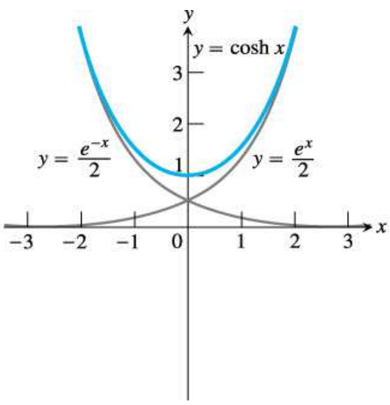
-Linhas de transmissão,
-Redes Neurais,
-Laser (light amplification by stimulated emission of radiation),
-etc.

1.16.2. Detalhamento das funções hiperbólicas

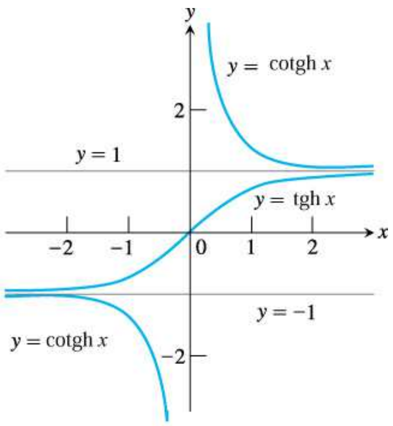
a) Seno hiperbólico

 (a) O seno hiperbólico e suas componentes exponenciais	$\operatorname{senh}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ Domínio: $D = \Re$ Imagem: $\text{Im} = \Re$

b) Cosseno hiperbólico

 (b) O cosseno hiperbólico e suas componentes exponenciais	$\cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ Domínio: $D = \Re$ Imagem: $\text{Im} = [1, \infty)$

c) Tangente e cotangente hiperbólicas



(c) Os gráficos de $y = \text{tgh}\, x$ e $y = \text{cotgh}\, x = 1/\text{tgh}\, x$

$$\text{tgh}(x) = \frac{\text{senh}(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Domínio: $D = \Re$

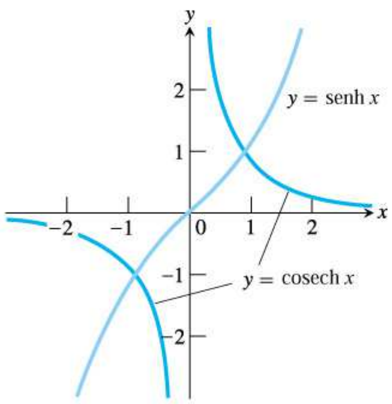
Imagem: $\text{Im} =]-1,1[$

$$\text{cotgh}(x) = \frac{\cosh(x)}{\text{senh}(x)} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

Domínio: $D = \Re^*$

Imagem: $\text{Im} = |y| > 1$

d) Cossecante hiperbólica



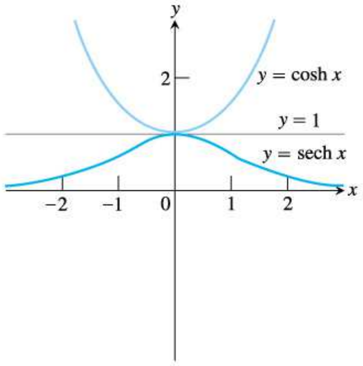
(e) Os gráficos de $y = \text{senh}\, x$ e $y = \text{cosech}\, x = 1/\text{senh}\, x$

$$\text{cosech}(x) = \frac{1}{\text{senh}(x)} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$$

Domínio: $D = \Re^*$

Imagem: $\text{Im} = \Re^*$

e) Secante hiperbólica

 (d) Os gráficos de $y = \cosh x$ e $y = \text{sech}\, x = 1/\cosh x$	$\text{sech}(x) = \dfrac{1}{\cosh(x)} = \dfrac{2}{e^x + e^{-x}}$ Domínio: $D = \Re$ Imagem: $\text{Im} = \left]0,1\right]$

1.16.3. Identidades principais

1) $\cosh^2(x) - \text{senh}^2(x) = 1$
2) $1 - \text{tgh}^2(x) = \text{sech}^2(x)$
3) $\text{cotgh}^2(x) - 1 = \text{cosech}^2(x)$
4) $\text{senh}\,(2x) = 2.\text{senh}(x).\cosh(x)$
5) $\cosh(2x) = \cosh^2(x) + \text{senh}^2(x)$

Exemplo 146: Demonstre as identidades:

a) $\cosh^2(x) = \dfrac{\cosh(2x)+1}{2}$ b) $\text{senh}^2(x) = \dfrac{\cosh(2x)-1}{2}$

Exemplo 147: Dado $\text{senh}(x) = \dfrac{3}{4}$, calcule o valor de $\cosh(x)$ e $\text{tgh}\,(x)$.

Exemplo 148: Dado $\cosh(x) = \dfrac{15}{13}$, $x > 0$, calcule o valor de $\text{senh}(x)$ e $\text{tgh}(x)$.

Exemplo 149: Dado $\text{senh}(x) = \dfrac{4}{3}$, calcule o valor das demais funções hiperbólicas de *x*.

Exemplo 150: Simplifique as expressões a seguir.

a) $2\cosh[\ln(x)]$
b) $\text{senh}[2\ln(x)]$
c) $\cosh(5x) + \text{senh}(5x)$
d) $\cosh(3x) - \text{senh}(3x)$
e) $[\text{senh}(x) + \cosh(x)]^4$
f) $\ln[\cosh(x) + \text{senh}(x)] + \ln[\cosh(x) - \text{senh}(x)]$

RESPOSTAS DOS EXEMPLOS

02)

a) $\frac{5}{6}$ b) $\frac{5}{2}$ c) $\frac{1}{3}$

03)

a) $\frac{5}{7}$ b) $-\frac{3}{8}$

04)

a) $\frac{29}{21}$ b) $-\frac{7}{12}$ c) $-\frac{1}{45}$ d) $-\frac{29}{12}$ e) $\frac{1}{25}$ f) $\frac{1}{4}$

05)

a) $\frac{10}{21}$ b) 1

06)

a) $\frac{14}{15}$ b) $\frac{3}{10}$ c) 30 d) $\frac{1}{6}$ e) $\frac{25}{72}$ f) $\frac{6}{7}$

g) $\frac{35}{76}$ h) $-\frac{292}{135}$ i) $-\frac{17}{33}$

08)

a) 1 b) -8 c) -81 d) $(-2)^{11}$ e) 3^{20} f) 5^{-12}

g) 2 h) $2^{\frac{7}{3}} = 4\sqrt[3]{2}$ i) 2^7 j) $3^{-\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt[3]{3}}{3}$ k) $5^{\frac{5}{2}} = 25\sqrt{5}$ l) 1

m) 3^6 n) 1 o) 8×10^{-4} p) 18×10^{-2} q) $\frac{5}{3}$ r) $2^{-7}\times10^6$

s) $\frac{4}{13}$ t) 10^{-10} u) 2×10^{-1} v) -2×10^{-1} w) $\nexists$ x) $\frac{21}{32}$

y) 4 z) 6

09)

a) $\sqrt{2}$ b) $\frac{3\sqrt[3]{25}}{5}$ c) $\frac{4\sqrt[7]{3^5}}{3}$

10)

a) $6x^3$ b) $2x^4y^3z^3$ c) x d) a^{n+1} e) $\frac{2}{9}x^{4m}$

f) t^3+1 g) $-\frac{1}{4}a$ h) x^{-3} i) u j) $-3a^4c^2$

k) $-4\cdot(a-b)$ l) $-3ab(a^2+b^3)^3$ m) x n) $\frac{3}{5}a$ o) $x^{-\frac{3}{20}}$

p) 2^{11} q) 3^{m+2}

13)

a) $a^5-5a^4b+10a^3b^2-10a^2b^3+5ab^4-b^5$
b) $a^3c^3+3a^2c^2b^2+3acb^4+b^6$
c) $4+4x+x^2-y^2$
d) $a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$
e) $x^3+3x^2y+3xy^2+y^3-3x^2z-6xyz-3y^2z+3xz^2+3yz^2-z^3$
f) $\frac{4}{9}a^6b^4-2a^5b^5+\frac{9}{4}a^4b^6$
g) $\frac{1}{16}-\frac{2}{x^3}+\frac{16}{x^6}$
h) R^6-L^4
i) $9x^{2a}-25y^{2m}$
j) $a^4x^2-\frac{4}{9y^2}$

15)

a) $S=a^5+32b^5$
b) $D=-16a^2b^3+32ab^4+32b^5-2a^4b+4a^3b^2$

16)

a) $-6x+5$ b) $6t-5$

17)

a) $4x^{12}y^3-6x^{11}y^4+8x^{10}y^3$
b) $-5x^4y+7x^3y^2+6x^5+7x^2y^3-9xy^4+2y^5$
c) $7a^{10}+52a^6b^4-24a^4b^6-32a^8b^2+5a^2b^8$

19)

a) $2x+7$
b) $x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4$

c) $2x^3 - 3x^2 + 2x$
d) $x^2 + xy + y^2$
e) $-2a + 3 + \dfrac{5a+10}{2a^2 - a + 2}$
f) $-2x^2 + 3xb - b^2 + \dfrac{2b^4 - xb^3}{3x^2 - xb + b^2}$
g) $-x^3 + 2x^2b - b^3$
h) $x^4 - 2x^3y + 3x^2y^2 - 2xy^3 + y^4$
i) $-\dfrac{2}{3}x^2 - xb + \dfrac{3}{4}b^2 + \dfrac{3xb^3 - 12b^4}{6x^2 - 4xb + 24b^2}$

21)

a) $x - 5 - \dfrac{2}{x-3}$
b) $x^2 + 2x - 3 - \dfrac{6}{x-2}$
c) $x^3 - 2x^2 + 4x - 9 + \dfrac{19}{x+2}$
d) $2x^3 - 2x^2 + 2x - 3 + \dfrac{3}{x+1}$
e) $2a^2 + 3a - 1$
f) $9x^4 - 16x^3 + 8x^2 - 7x + 12 + \dfrac{4}{x+1}$
g) $x^2 + 7x + 7 + \dfrac{11}{x-2}$
h) $x^5 - x^4y + x^3y^2 - x^2y^3 + xy^4 - y^5$
i) $x^3 - x^2yz + xy^2z^2 - y^3z^3$
j) $\dfrac{23}{3}a^4 - \dfrac{23}{9}a^3 + \dfrac{23}{27}a^2 - \dfrac{23}{81}a + \dfrac{23}{243} + \dfrac{220}{243\cdot(3a+1)}$

25)

a) $35x^4y\cdot(4y^6z - 12xy^4z^2 + 3x^2 - 2y^2)$
b) $a^5\cdot(a^3 - 7 + 4a^2 - 9a)$
c) $x^{m-3}\cdot(1 + x - x^2 + x^3)$
d) $a^{m-1}\cdot(1 - a^2 - a^3 + a^4)$
e) $15ab\cdot(5c - 4d)$
f) $14a^4b^2\cdot(5a^3 + 6a^2b - 7ab^2 + b^3)$
g) $13a^3b^2\cdot(4a^3b^3 - 3ab^3 + 8b^4 - 14)$
h) $17r^2t^2\cdot(3t^3 - 2r^3v + 7r^2tv)$
i) $17a^3b^2c\cdot(1 - 3abm + 5a^2)$
j) $5x^2y^2\cdot(x - 2x^2y^3 + 3y^5 - 5y)$

27)

a) $4x^4 \cdot (9x^{-2} + 3x^{-1} - x^2 + 4x^{-4})$
b) $a^m b \cdot (a^{3-m}b^{-1} + a^{5-m}b^{-1} - a^{7-m}b^{-1} + a^{8-m}b^{-1})$
c) $3a^2b^2c^2 \cdot (9a^{-1}c^{-2} - 6ab^{-1}c^{-1} - 4b^{-1}c + 7a^{-1}b^2c^{-1})$
d) $a^{-1}t^{2x+3} \cdot (at^{-x-3} + at^{-x-2} + at^{-x-1})$

29)

a) $(a^2 + b) \cdot (a + 1)$
b) $(x + y) \cdot (c + d) \cdot (a - b)$
c) $(a^2 + 1) \cdot (b + c + d)$
d) $(x - a) \cdot (x - b)$
e) $(m + x) \cdot (n + p) \cdot (m + n)$
f) $(m^2 + 1) \cdot (m + 1)$
g) $(ax + y) \cdot (x + by)$
h) $(a - b) \cdot (2a - 3)$
i) $(ax - 2) \cdot (by + 1)$
j) $(b + d) \cdot (2a + c)$
k) $(d - 1)^2 \cdot (d + 1)$

31)

a) $3 \cdot (a + 3) \cdot (a - 3)$
b) $\left(x + \frac{y}{5}\right) \cdot \left(x - \frac{y}{5}\right)$
c) $(6x + y + 5a - 5b) \cdot (6x + y - 5a + 5b)$
d) $4ab$
e) $(0{,}01 + 9x^2) \cdot (0{,}1 + 3x) \cdot (0{,}1 - 3x)$
f) $3 \cdot \left[a^2 + 3(c - d)^2\right] \cdot \left[a + \sqrt{3}(c - d)\right] \cdot \left[a - \sqrt{3}(c - d)\right]$
g) $4n \cdot (12m - 2n)$
h) $(\sqrt{0{,}1} + ax\sqrt{a}) \cdot (\sqrt{0{,}1} - ax\sqrt{a})$
i) $(a + d + c) \cdot (a - d - c)$
j) $(a^{x+1} + 1) \cdot (a^{x+1} - 1)$

33)

a) $+b^2$ b) $\pm 36ab$ c) $\pm 28x^2y^2$ d) $+\frac{p^2}{4}$

e) $+\frac{1}{16}$ f) $+x^4y^4$ g) $\pm 24xyz$

34)

a) $\left(d-\frac{f}{2}\right)^2$ b) $3\cdot\left(a-\frac{1}{2}\right)^2$ c) $(a^2-4)^2$ d) $3\cdot(x^4+1)^2$

e) $(13p+21n)^2$ f) $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2$ g) $(7a^2b^2+3)^2$ h) $\left(2a-\frac{1}{4}\right)^2$

i) $2\cdot(x+2y)^2$ j) $5\cdot(x^{a+3}+b^{2a+1})^2$

36)

a) $(t+3)\cdot(t+8)$
b) $(x-1)\cdot(x-2)$
c) $(x+y)\cdot(x+2y)$
d) $(x-20)\cdot(x-10)$
e) $(x-4)\cdot(x-5)$
f) $(x+7)\cdot(x-5)$
g) $(x+7)\cdot(x-6)$
h) $5x\cdot(x-4)\cdot(x-1)$
i) $4\cdot\left(a-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(a-\frac{1}{2}\right)=(2a-1)^2$
j) $\left(x-\frac{a^2}{3}\right)^2$
k) $2\cdot(x+3)\cdot\left(x+\frac{1}{2}\right)$
l) $3\cdot(a-2)\cdot\left(a+\frac{1}{3}\right)$
m) $(c-a)\cdot(c+b)$

37)

a) $(2x+4)\cdot(4x^2-8x+16)$
b) $(a+b)\cdot(a^2-ab+b^2)\cdot(a-b)\cdot(a^2+ab+b^2)$
c) $(3a+1)\cdot(9a^2-3a+1)$
d) $(a+b+c)\cdot\left[(a+b)^2-(a+b)\cdot c+c^2\right]$
e) $(a-4)\cdot(a^2+4a+16)$
f) $(2\sqrt[3]{2}+x)\cdot(4\sqrt[3]{4}-2x\sqrt[3]{2}+x^2)$
g) $z^2\cdot(xy-mv)\cdot(x^2y^2+xymv+m^2v^2)$
h) $4\cdot(x-\sqrt[3]{4})\cdot(x^2+x\sqrt[3]{4}+2\sqrt[3]{2})$
i) $2\cdot(4+y)\cdot(16-4y+y^2)$
j) $9\cdot(x^2+3y^2)\cdot(x^4-3x^2y^2+9y^4)$

39)

a) $(a-b+m)\cdot(a-b-m)$
b) $(x+1)\cdot(x-1)\cdot(x-2)^2$
c) $(x^2+y^2)^2\cdot(x+y)\cdot(x-y)$
d) $(4y+5x-1)\cdot(4y-5x+1)$
e) $(a+b)\cdot(a+b-c)$
f) $(d-1)\cdot(d+2)\cdot(d-2)$
g) $2m^4n^5\cdot(2m-n)\cdot(4m^2+2mn+n^2)$
h) $(1+a^4)\cdot(1-a^4+a^8)$
i) $x\cdot(m-x)$
j) $(n+p)\cdot(n-p)$
k) $(x-11)\cdot(x+3)$
l) $(9x+8c^2)\cdot(9x-8c^2)$
m) $(a-28)\cdot(a-1)$
n) $(12a-b)^2$
o) $x\cdot(b^2+4q^2+5q^3-3)\cdot(b^2+4q^2-5q^3+3)$
p) $a\cdot\left(x^2+9+5y-6z\right)\cdot\left(x^2+9-5y+6z\right)$
q) $(a+b+c)^2$
r) $(a+2b+x-y)\cdot(a+2b-x+y)$
s) $(a+6)\cdot(a+2)\cdot(a-2)$
t) $(x-5a)\cdot(x-2b)$
u) $(m^3-n^4)\cdot(m^6+m^3n^4+n^8)$
v) $(x-1)\cdot(x+4a)\cdot(x-4a)$

41)

a) $\frac{3yz}{2x}$ b) $\frac{3x^2-5t^2}{2x^4}$ c) $\frac{2a}{3b}$ d) $\frac{a+x}{a-x}$

e) $-\frac{a}{b}$ f) $\frac{c+d}{a}$ g) $\frac{a-3}{a}$ h) $\frac{x-3a}{x+3a}$

i) $\frac{a}{x}$ j) $\frac{x-b}{x-c}$ k) $\frac{a}{a-y}$ l) $\frac{a+3}{a-3}$

m) $\frac{a-b+c}{a+b-c}$

42)

a) 6 b) $\frac{7}{5}$ c) $\frac{1}{2}$ d) 2 e) -32 f) $c+d$ g) 2

h) $-\frac{1}{4}$ i) $-\frac{3}{2}$ j) $-\frac{1}{3}$ k) $3y^2$ l) 3 m) 27

43)

a) $\frac{b-1}{a-1}$ b) $(6a+8b)(2x-3y)$ c) $x^2-\frac{1}{x}$ d) a^4b^2

e) $(x-a)^2$ f) $\frac{4}{x-1}$ g) $\frac{1}{(x+1)^2}$

44)

a) Sim. b) Não. c) Sim. d) Sim. e) Não.

45) a) 1 b) 4 c) 1

46)

a) $D=\Re$ b) $D=\Re$ c) $D=\Re^*$ d) $D=\Re-\{1\}$

e) $D=\Re-\{-3,-2\}$ f) $D=\Re_+$ g) $D=\Re$ h) $D=\left]2,\infty\right[$

i) $D=\Re^*$ j) $D=\left]-\infty,1\right]$ k) $D=\{\ \}$

47)

1a) $D=\Re$ e $\text{Im}=\Re$.
1b) $f(x)$ é crescente $\forall x\in\Re$.
1c) $f(x)$ não decresce.

2a) $D=\Re$ e $\text{Im}=\Re_+$.
2b) $f(x)$ é crescente $\forall x>0$.
2c) $f(x)$ é decrescente $\forall x<0$.

3a) $D=\Re$ e $\text{Im}=\Re$.
3b) $f(x)$ é crescente $\forall x\in\Re$.
3c) $f(x)$ não decresce.

4a) $D=\Re^*$ e $\text{Im}=\Re^*$.
4b) $f(x)$ não cresce.
4c) $f(x)$ é decrescente $\forall x\in\Re^*$.

5a) $D=\Re_+$ e $\text{Im}=\Re_+$.
5b) $f(x)$ é crescente $\forall x\in\Re_+$.
5c) $f(x)$ não decresce.

6a) $D=\Re$ e $\text{Im}=\Re$.
6b) $f(x)$ é crescente $\forall x\in\Re$.
6c) $f(x)$ não decresce.

7a) $D=\Re^*$ e $\text{Im}=\Re_+^*$.
7b) $f(x)$ é crescente $\forall x<0$.
7c) $f(x)$ é decrescente $\forall x>0$.

8a) $D=\Re_+$ e $D=\Re_+$.
8b) $f(x)$ é crescente $\forall x\in\Re_+$.
8c) $f(x)$ não decresce.

9a) $D=\Re$ e $D=\Re_+$.
9b) $f(x)$ é crescente $\forall x>0$.
9c) $f(x)$ é decrescente $\forall x<0$.

48)

a) $f(x)$ é par. b) $f(x)$ é ímpar. c) $f(x)$ não é par e não é ímpar.

49)

a) $D = \Re$ b) $\text{Im} = [-1, \infty[$ c) $]-\infty, 0[$
d) $]0, \infty[$ e) -1 e 1 f) $f(x)$ é par.

51) $y - 3 = -\frac{2}{3}(x - 2)$

52) $y - 2 = -(x + 3)$

53) Vertical: $x = 2$ Horizontal: $y = 3$

54) $y = -3$

55) a) $y = 3x + 5$ b) $y = -\frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$

56) a) $k = \frac{2}{3}$ b) $k = -\frac{8}{3}$

57) $k = 0$

58) $y = -\frac{1}{2}x + 3$

60) a) $y = -\frac{2}{3}x + \frac{17}{3}$ b) $y = \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}$

61) $\forall c > 1$

62) $\forall p < \frac{1}{2}$

63)

a) $f(x) > 0 \ \ \forall x < \frac{2}{3}$ e $f(x) < 0 \ \ \forall x > \frac{2}{3}$

b) $f(x) > 0 \ \ \forall x > 3$ e $f(x) < 0 \ \ \forall x < 3$

c) $f(x) > 0 \ \ \forall x < \frac{2}{5}$ e $f(x) < 0 \ \ \forall x > \frac{2}{5}$

64)

a) $S =]2,5[$ b) $S = \Re_-$ c) $S = [2,5[$ d) $S = \left]-\infty,-\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{5}{3},3\right[$

65)

a) Sem o passe: $C(x) = 2x$ Com o passe: $C(x) = 25 + 0{,}25x$
b) A partir de 15 passagens.

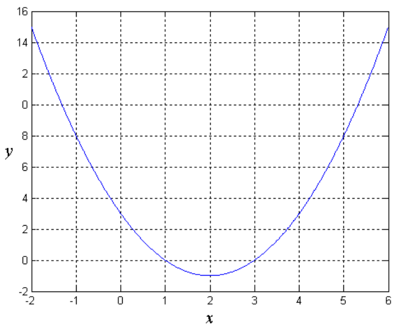
66)

a) R$19,00 b) $L(x) = 8x - 540$ c) 3000 d) 68

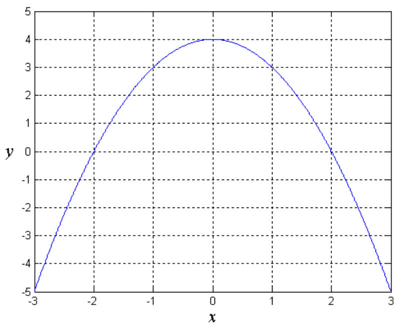
68) a) 1 e 3 b) $-\frac{1}{3}$ e 2

69)

a)



b)



70)

a) Raízes: 1 e $\frac{3}{2}$ $x_V = \frac{5}{4}$ $y_V = -\frac{1}{8}$

b) Raízes: $-\frac{1}{2}$ e 4 $x_V = \frac{7}{4}$ $y_V = \frac{81}{8}$

71)

a) Raízes: 1 e 5 $\text{Im} = [-4,\infty[$
$f(x) > 0 \ \ \forall x < 1$ ou $x > 5$ e $f(x) < 0 \ \ \forall 1 < x < 5$
$f(x)$ é decrescente $\forall x < 3$ e $f(x)$ é crescente $\forall x > 3$

b) Raízes: $-\frac{1}{2}$ e 4 $\text{Im} = \left]-\infty,\frac{81}{8}\right]$

$f(x) > 0 \ \ \forall -\frac{1}{2} < x < 4$ e $f(x) < 0 \ \ \forall x < -\frac{1}{2}$ ou $x > 4$

$f(x)$ é decrescente $\forall x > \frac{7}{4}$ e $f(x)$ é crescente $\forall x < \frac{7}{4}$

c) Raízes: $-\frac{1}{3}$ e 2 $\quad \text{Im} = \left[-\frac{49}{12}, \infty\right[$

$f(x) > 0 \ \ \forall x < -\frac{1}{3}$ ou $x > 2$ e $f(x) < 0 \ \ \forall -\frac{1}{3} < x < 2$

$f(x)$ é decrescente $\forall x < \frac{5}{6}$ e $f(x)$ é crescente $\forall x > \frac{5}{6}$

d) Não existem raízes reais $\quad \text{Im} = [9, \infty[$

$f(x) > 0 \ \ \forall x \in \Re$

$f(x)$ é decrescente $\forall x < 2$ e $f(x)$ é crescente $\forall x > 2$

72)

a) $S = \left\{ x \in \Re \,/\, x \le -2 \text{ ou } 1 \le x < 2 \text{ ou } x > \frac{7}{2} \right\}$

b) $S = \left\{ x \in \Re \,/\, x < \frac{2}{3} \text{ ou } 1 < x < 2 \text{ ou } x > 3 \right\}$

c) $S = \{ x \in \Re \,/ -2 < x < 1 \}$

d) $S = \{ x \in \Re \,/\, x \le -5 \text{ ou } -2 \le x \le 2 \text{ ou } x \ge 5 \}$

73) $k > 11$

74) $m = 6$

75) $0 < a < \frac{2}{9}$ $\qquad$ $0 < b < \frac{4}{3}$

76) a) $S(t) = -3t^2 + 9t + 12$ $\qquad$ b) 4 unidades de tempo

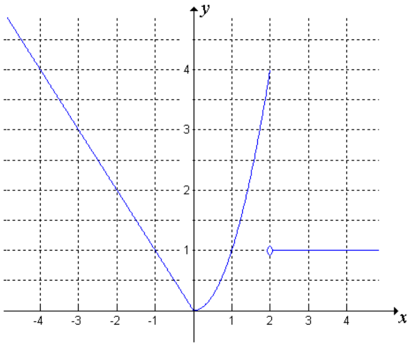
77)

$T(t) > 0 \ \ \forall 5 < t \le 7$ horas $\qquad$ $T(t) < 0 \ \ \forall 0 \le t < 5$ horas

A menor temperatura ocorreu em $t = \frac{1}{2}$ hora e seu valor foi de $-\frac{81}{4}$

78) 43

79)

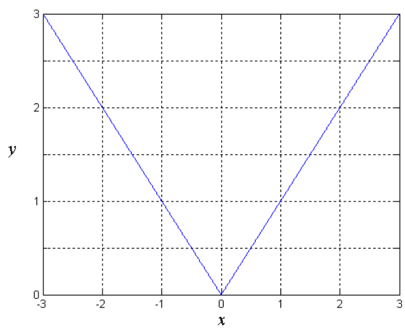


$D = \Re$

$\text{Im} = \Re_+$

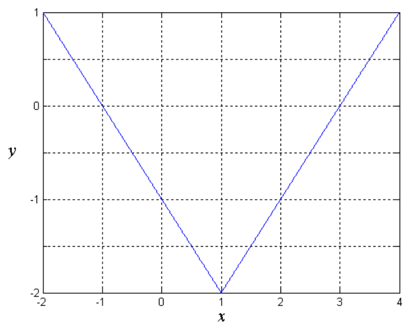
80) $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x < -2 \\ -\dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{2}x + 3 & \text{se } -2 \le x \le 0 \\ -\dfrac{2}{3}x + 2 & \text{se } x > 0 \end{cases}$

81)



$D = \Re$
$\text{Im} = \Re_+$

82)
a)

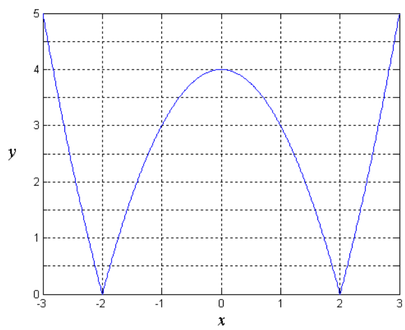


$f(x) = \begin{cases} x - 3 & \text{se } x \ge 1 \\ -x - 1 & \text{se } x < 1 \end{cases}$

$D = \Re$

$\text{Im} = [-2, \infty[$

b)

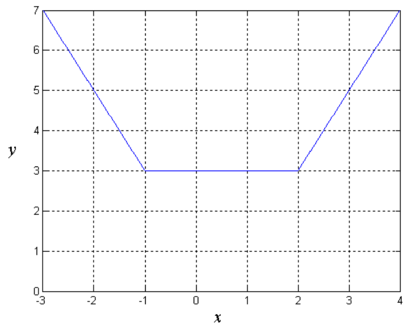


$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{se } x \le -2 \text{ ou } x \ge 2 \\ -x^2 + 4 & \text{se } -2 < x < 2 \end{cases}$

$D = \Re$

$\text{Im} = \Re_+$

c)



$$f(x)=\begin{cases}-2x+1 & \text{se } x<-1\\ 3 & \text{se } -1\le x\le 2\\ 2x-1 & \text{se } x>2\end{cases}$$

$$D=\Re$$

$$\text{Im}=[3,\infty[$$

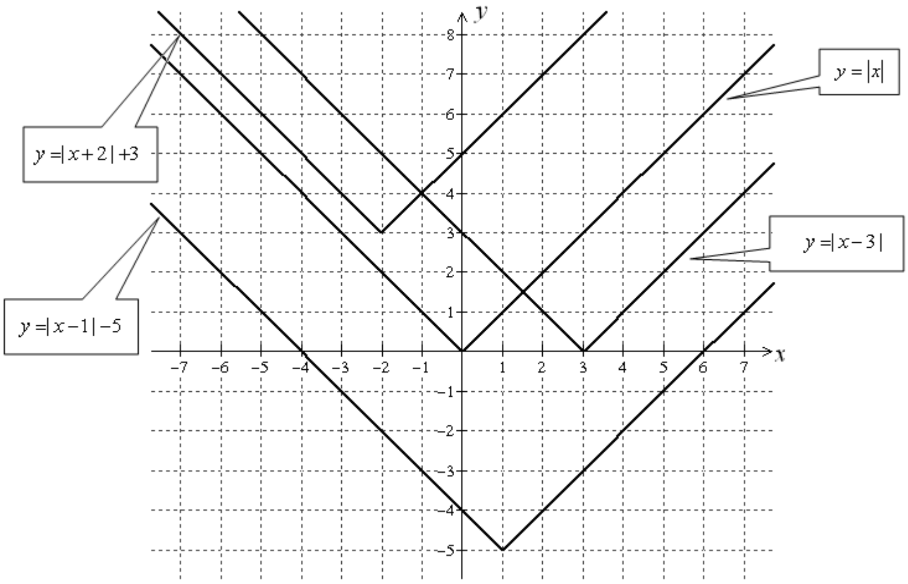
83)

a) $S=\{-6,6\}$ b) $S=\{-4,-1\}$ c) $S=\{\ \}$ d) $S=\{9\}$ e) $S=\{-2,2\}$

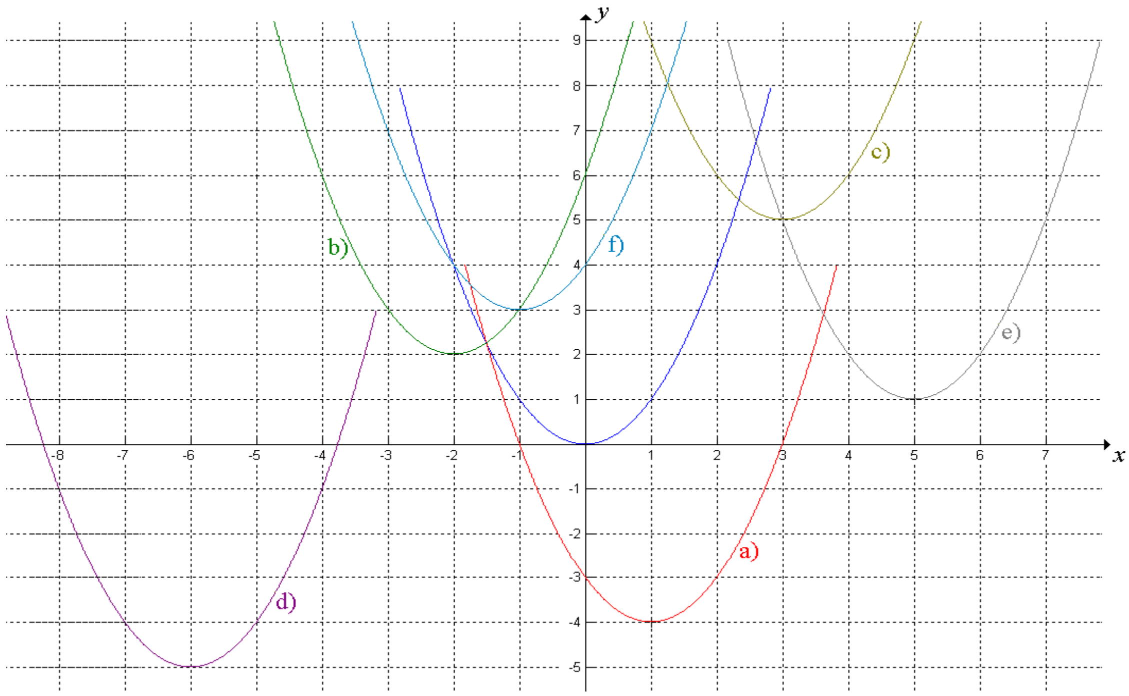
84)

a) $S=\{x\in\Re\,/\,x\le -5 \text{ ou } x\ge 5\}$
b) $S=\{x\in\Re\,/-3<x<3\}$
c) $S=\{x\in\Re\,/\,x<-2 \text{ ou } x>1\}$
d) $S=\left\{x\in\Re\,/-1\le x\le \dfrac{13}{3}\right\}$
e) $S=\Re$
f) $S=\{\ \}$
g) $S=\left\{x\in\Re\,/\,x\le 1 \text{ ou } x\ge \dfrac{7}{3} \text{ e } x\ne 3\right\}$
h) $S=\left\{x\in\Re\,/\,x\le -\dfrac{4}{3} \text{ ou } x\ge 0\right\}$

85)



86)



87) $f(g(x)) = \sqrt{x^2 - 8}$

88) $f(g(x)) = x^2 - 7$ **e** $f(g(2)) = -3$

89) $h(g(f(x))) = \sqrt{x} - 8$

90)

a) $u(v(f(x))) = \dfrac{4}{x^2} - 5$ b) $u(f(v(x))) = \dfrac{4}{x^2} - 5$ c) $v(u(f(x))) = \left(\dfrac{4}{x} - 5\right)^2$

d) $v(f(u(x))) = \dfrac{1}{(4x-5)^2}$ e) $f(u(v(x))) = \dfrac{1}{4x^2 - 5}$ f) $f(v(u(x))) = \dfrac{1}{(4x-5)^2}$

91)

a) $h(f(x)) = \sqrt{\dfrac{2x-5}{(3-x)^2}}$ $D = \left\{ x \in \Re \middle| x \geq \dfrac{5}{2} \text{ e } x \neq 3 \right\}$

b) $g(f(x)) = \dfrac{4x - 10}{3 - x}$ Raiz: $x = \dfrac{5}{2}$

92) $f(g(0)) = \sqrt{2}$

93) $g(-1) = 4$

94) Porque $0^x = 0 \;\; \forall x \neq 0$ não é exponencial (é constante), 0^0 é uma indeterminação, $1^x = 1 \;\; \forall x < \infty$ também não é exponencial (é constante); e sabendo que para uma função exponencial do tipo $f(x) = a^x$, o domínio é dado por $D = \Re$, não obteríamos resultados reais para todos os valores de *x*, caso *a* pudesse assumir valores negativos. Por exemplo, para $f(x)=(-4)^x$, temos $f\left(\frac{1}{2}\right)=(-4)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{-4}$, cujo resultado não é real.

95)

a) 100 bactérias b) 6394 bactérias

96)

a) 60 mil habitantes b) Daqui a 100 anos c) 50 anos atrás

97)

a) $M(t)=2000\cdot 1{,}08^t$ b) $M(16)=6851{,}89$ reais

98) 90,85% da quantidade inicial

99) Da esquerda para a direita: 1, 5, 4, 2, 3, 6

100)

a) $S=\{2\}$ b) $S=\left\{-\frac{3}{4}\right\}$ c) $S=\left\{-\frac{2}{3}\right\}$ d) $S=\left\{\frac{1}{128}\right\}$

e) $S=\left\{-\frac{1}{3}\right\}$ f) $S=\{2,3\}$ g) $S=\{4\}$ h) $S=\{(2,1)\}$

i) $S=\{-3,-1\}$ j) $S=\{10\}$ k) $S=\{2\}$ l) $S=\{-1\}$

m) $S=\{3\}$ n) $S=\{2\}$

101)

a) $S=\left]-1,\infty\right[$ b) $S=\left]-\infty,1\right[$ c) $S=\Re-\left\{\frac{1}{2}\right\}$ d) $S=\{x\in\Re\,/\,x<-2 \text{ ou } x>2\}$

103) $f(x)$ e $g(x)$ são inversas.

104) $f^{-1}(x)=2x-2$

105) $f^{-1}(x)=\dfrac{2x+3}{x-1}$ $D_f=\{x\in\Re\,/\,x\neq 2\}$ $\operatorname{Im}_f=\{y\in\Re\,/\,y\neq 1\}$

106) -4

107) $a=7^4$

108) $\sqrt{3}$

109)

a) $x = 0,2$ b) $x = \dfrac{3}{2}$ c) $x = \dfrac{1}{25}$

d) $x = N^{\frac{P}{N}}$ e) $x = e^{3t+5}$ f) $x = -5\log(2)$

110) $a = 2$

111) $17,91$ anos

112)

a) $\log_2\left(3\sqrt{5}\right)$ b) $\log_a\left(\dfrac{2a^2}{3^5}\right)$ c) $\log_5\left(\dfrac{4\sqrt[3]{3}}{5}\right)$

113)

a) $S = \{x \in \Re / x < -1 \text{ ou } x > 1\}$ b) $S = \{x \in \Re / 0 < x < 1 \text{ ou } x > 2\}$

c) $S = \{x \in \Re / 3 < x < 4\}$ d) $S = \{x \in \Re / x < -2 \text{ ou } x > 2\}$

114)

a) $S = \left\{\dfrac{5}{3}\right\}$ b) $S = \left\{\dfrac{20}{3}\right\}$ c) $S = \{17\}$ d) $S = \left\{\dfrac{1}{25}, 625\right\}$

e) $S = \{3, 27\}$ f) $S = \{11\}$ g) $S = \left\{\dfrac{1}{a^3}, \sqrt[5]{a^3}\right\}$

115)

a) $-1,69897$ b) 2,47712 c) 3,30103 d) $-2,52288$ e) 2,69897

116)

a) $m < 3 - \sqrt{2}$ ou $m > 3 + \sqrt{2}$

b) $m < 3 - \sqrt{3}$ ou $m > 3 + \sqrt{3}$

c) $3 - \sqrt{3} < m < 3 - \sqrt{2}$ ou $3 + \sqrt{2} < m < 3 + \sqrt{3}$

d) $m = 3 - \sqrt{3}$ ou $m = 3 + \sqrt{3}$

117)

a) $D = \Re_+^*$ $\text{Im} = \Re$ b) $D = \Re_+^*$ $\text{Im} = \Re$ c) $D =]1, \infty[$ $\text{Im} = \Re$

118) $t = 80$ minutos

119) $t = 3,2$ horas

120) $t = 5776$ anos

121) a) $P_0 = 268128$ mosquitos b) Aproximadamente 110 dias

122)

a) 30° b) 300° c) 315° d) 210°

123)

a) $D=[0,\pi]$ b) $D=\{0\}$ c) $D=\left\{x \in \Re \middle| x \neq \frac{\pi}{4}, x \neq \frac{3\pi}{4}, x \neq \frac{5\pi}{4}, x \neq \frac{7\pi}{4}\right\}$

124)

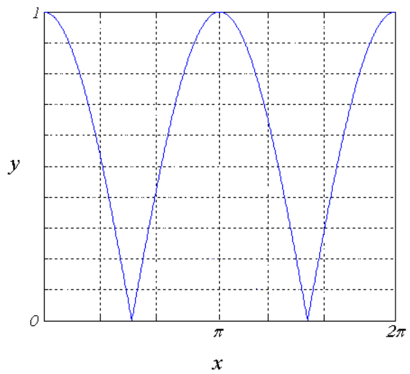
a) $T = \frac{2\pi}{3}$ b) $T = 4\pi$ c) $T = \frac{\pi}{2}$ d) $T = 6\pi$

125) $0 \leq p \leq 1$ ou $2 \leq p \leq 3$

126) $m = \frac{7}{6}$

127)

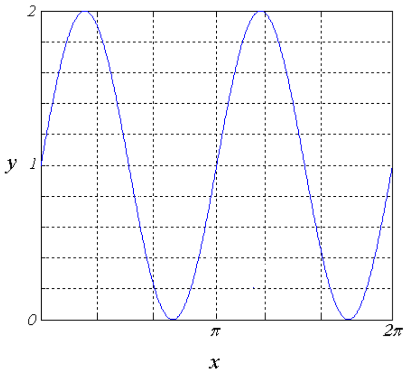
a)



$T = \pi$

$\text{Im} = [0,1]$

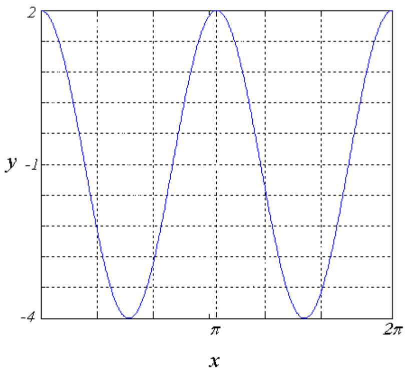
b)



$T = \pi$

$\mathrm{Im} = [0,2]$

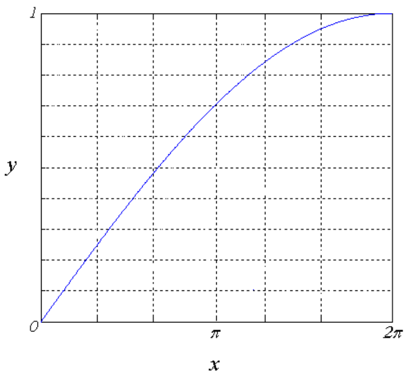
c)



$T = \pi$

$\mathrm{Im} = [-4,2]$

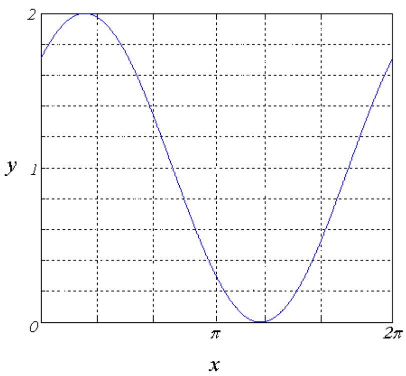
d)



$T = 8\pi$

$\mathrm{Im} = [0,1]$

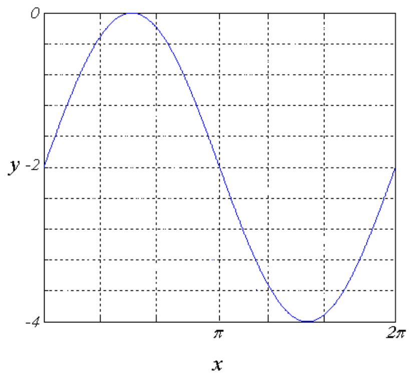
e)



$T = 2\pi$

$\mathrm{Im} = [0,2]$

f)



$T = 2\pi$

$\mathrm{Im} = [-4,0]$

128) $\cos(\theta) = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2} \qquad \mathrm{tg}(\theta) = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

129)

a) $\cos(75°) = \cos(30°)\cdot\cos(45°) - \mathrm{sen}(30°)\cdot\mathrm{sen}(45°) = 0{,}2588$

b) $\mathrm{sen}\left(2\pi - \dfrac{\pi}{6}\right) = \mathrm{sen}(2\pi)\cdot\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right) - \mathrm{sen}\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\cdot\cos(2\pi) = -0{,}5$

130) $\mathrm{sen}(8x) = -\dfrac{\sqrt{15}}{8} \qquad \cos(8x) = -\dfrac{7}{8} \qquad \mathrm{tg}(8x) = \dfrac{\sqrt{15}}{7} \qquad 8x \in 3°Q$

131) $S = \left\{\dfrac{\pi}{8}, \dfrac{3\pi}{8}, \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{5\pi}{8}, \dfrac{7\pi}{8}\right\}$

132) $\cos(x) = -\dfrac{4}{5} \qquad \mathrm{tg}(x) = -\dfrac{3}{4}$

133) $\mathrm{sen}(x) = -\dfrac{2\sqrt{2}}{3} \qquad \mathrm{tg}(x) = -2\sqrt{2}$

134) $\mathrm{sen}(x) = -\dfrac{\sqrt{5}}{5} \qquad \cos(x) = -\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

135) $-3 \le m \le \dfrac{1}{2}$

136) $-3 \le m \le 2$

137) $\cos(a+b) = -\dfrac{63}{65}$

138) $y = \dfrac{1}{\mathrm{sen}(x)} = \dfrac{5}{2}$

139) $1 - \text{sen}(x)$

140) a) $\text{sen}(2x) = \frac{24}{25}$ b) $\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{3\sqrt{10}}{10}$

141)

a) $A = 2$, $B = 4$ e $C = -3$ b) $D = \Re$ c) $\text{Im} = [-5, -1]$ d) $T = \frac{\pi}{2}$

142)

a) x b) $2x$ c) $\frac{\pi}{4}$ d) $-\frac{1}{2}$

143) $x = \frac{\pi}{6}$

144)

a) $\frac{3\sqrt{7}}{7}$ b) 2 c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{3}{5}$

145) $D = [1, 100]$

147) $\cosh(x) = \frac{5}{4}$ $\text{tgh}(x) = \frac{3}{5}$

148) $\text{senh}(x) = \frac{2\sqrt{14}}{13}$ $\text{tgh}(x) = \frac{2\sqrt{14}}{15}$

149) $\cosh(x) = \frac{5}{3}$ $\text{tgh}(x) = \frac{4}{5}$

150)

a) $x + \frac{1}{x}$ b) $\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2x^2}$ c) e^{5x}

d) e^{-3x} e) e^{4x} f) 0