Núcleo Básico das Engenharias

M002-D/E
Álgebra e Geometria Analítica

Cap. 1 – Álgebra Vetorial
(parte 5)

Prof. Edson J. C. Gimenez
soned@inatel.br

2019/Sem1

Referências

- Material adaptado da Apostila Álgebra e Geometria Analítica (NB020).
  - Profª. Karina Peres Mokarzel Carneiro, Prof. Luiz Felipe S. de Godoy, Prof. Rodrigo Guaracy Santana e Prof. Giovani Henrique F. Floriano.

Outras referências importantes:

- Geometria Analítica – Alfredo Steinbruch e Paulo Winterle.
- Geometria Analítica: um tratamento vetorial. Ivan de Camargo e Paulo Boulos.
- Vetores e Geometria Analítica – Paulo Winterle.

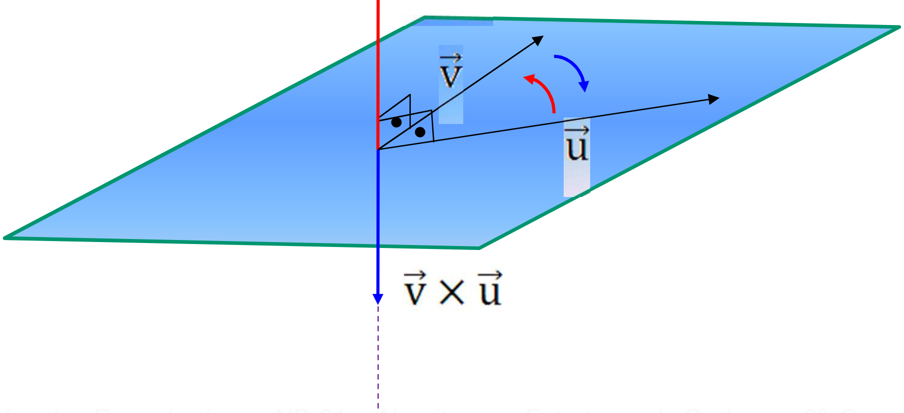
Produto Vetorial

Definição: Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$. O produto vetorial entre esses vetores, denotado por $\vec{u} \times \vec{v}$, é o **vetor** com as seguintes características:

Módulo: $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}|\operatorname{sen}\theta$

Direção: Ortogonal ao plano que contem $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Sentido: Regra da mão direita.



Propriedades do Produto Vetorial

1) Não vale a comutativa: $\vec{u} \times \vec{v} \neq \vec{v} \times \vec{u}$

2) Anti – comutativa: $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$

3) $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$, se um deles for o vetor nulo ou eles são paralelos.

4) $\vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}$

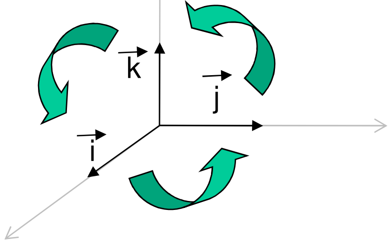
5) $m\vec{u} \times n\vec{v} = (m \cdot n) \cdot (\vec{u} \times \vec{v})$

6) Distributiva:

6.1) a direita: $(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{u} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{w}$

6.2) a esquerda: $\vec{w} \times (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{w} \times \vec{u} + \vec{w} \times \vec{v}$

Expressão Cartesiana do Produto Vetorial



$$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}=-\vec{j}\times\vec{i}$$
$$\vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}=-\vec{k}\times\vec{j}$$
$$\vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}=-\vec{i}\times\vec{k}$$

$$\begin{cases}\vec{i}\times\vec{i}=\vec{0}\\ \vec{j}\times\vec{j}=\vec{0}\\ \vec{k}\times\vec{k}=\vec{0}\end{cases}$$

Sejam $\vec{u}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}$ e $\vec{v}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}$. Vamos determinar $\vec{u}\times\vec{v}$.

$$\vec{u}\times\vec{v}=\left(x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}\right)\times\left(x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}\right)$$

$$\vec{u}\times\vec{v}=x_1x_2\overset{\vec{0}}{(\vec{i}\times\vec{i})}+x_1y_2\overset{\vec{k}}{(\vec{i}\times\vec{j})}+x_1z_2\overset{-\vec{j}}{(\vec{i}\times\vec{k})}+$$
$$+y_1x_2\overset{-\vec{k}}{(\vec{j}\times\vec{i})}+y_1y_2\overset{\vec{0}}{(\vec{j}\times\vec{j})}+y_1z_2\overset{\vec{i}}{(\vec{j}\times\vec{k})}+$$
$$+z_1x_2\overset{\vec{j}}{(\vec{k}\times\vec{i})}+z_1y_2\overset{-\vec{i}}{(\vec{k}\times\vec{j})}+z_1z_2\overset{\vec{0}}{(\vec{k}\times\vec{k})}$$

Portanto → $\boxed{\vec{u}\times\vec{v}=(y_1z_2-y_2z_1)\vec{i}+(x_2z_1-x_1z_2)\vec{j}+(x_1y_2-x_2y_1)\vec{k}}$

Expressão Cartesiana do Produto Vetorial

Assim, podemos escrever:

$$\boxed{\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}\vec{k}}$$

O produto vetorial também pode ser expresso como:

$$\boxed{\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}}$$

Obs.: O símbolo à direita da igualdade, na verdade, não é um determinante – os elementos da 1ª linha são vetores. Usaremos esta notação pela facilidade do cálculo do produto vetorial.

Exemplo

Calcule o produto vetorial dos vetores $\vec{u} = 5\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}$ e $\vec{v} = \vec{i} + \vec{k}$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\vec{k}$$

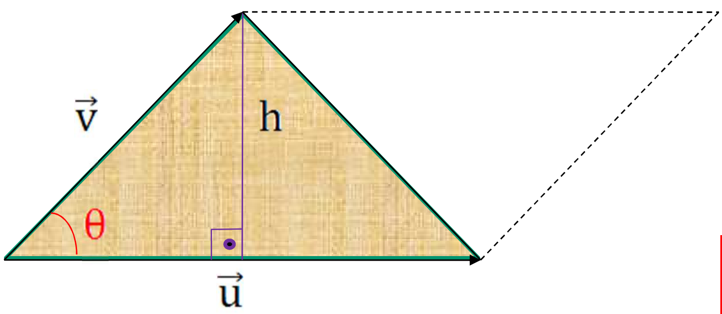
$$\vec{u} \times \vec{v} = (4-0)\,\vec{i} - (5-3)\,\vec{j} + (0-4)\,\vec{k}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = 4\vec{i} - 2\vec{j} - 4\vec{k}$$

Calcule agora $\vec{v} \times \vec{u}$.

Interpretação Geométrica do Produto Vetorial

Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dois vetores não paralelos.



Área do triângulo:

$$A_t = \frac{1}{2} A_p$$

$$\boxed{A_t = \frac{|\vec{u} \times \vec{v}|}{2}}$$

Área do paralelogramo:

$$A_p = b \cdot h \;\Rightarrow\; A_p = |\vec{u}||\vec{v}|\operatorname{sen}\theta \;\Rightarrow\; \boxed{A_p = |\vec{u} \times \vec{v}|}$$

$$\begin{cases} b = |\vec{u}| \\ \operatorname{sen}\theta = \dfrac{h}{|\vec{v}|} \Rightarrow h = |\vec{v}|\operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

Exemplo

Dados os vetores $\vec{u} = \hat{x} + 2\hat{y} - \hat{z}$ e $\vec{v} = -\hat{y} + 3\hat{z}$ calcular a área do paralelogramo determinado pelos vetores $3\vec{u}$ e $\vec{v} - \vec{u}$.

Sabemos que a área A é dada por $A = \left| \vec{u} \times \vec{v} \right|$, assim:

$A = \left| (3\vec{u}) \times (\vec{v} - \vec{u}) \right|$ como $3\vec{u} = (3, 6, -3)$ e $\vec{v} - \vec{u} = (-1, -3, 4)$

$$(3\vec{u}) \times (\vec{v} - \vec{u}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 6 & -3 \\ -1 & -3 & 4 \end{vmatrix} = (15, -9, -3)$$

$$A = \left|(15, -9, -3)\right| = \sqrt{225 + 81 + 9} = \sqrt{315} = 3\sqrt{35} \text{ u.a.}$$

Exercícios