Inatel
Instituto Nacional de Telecomunicações

Núcleo Básico das Engenharias

M002-D/E
Álgebra e Geometria Analítica

Cap. 1 – Álgebra Vetorial
(parte 4)

Prof. Edson J. C. Gimenez
soned@inatel.br

2019/Sem1

Inatel
Instituto Nacional de Telecomunicações

Referências

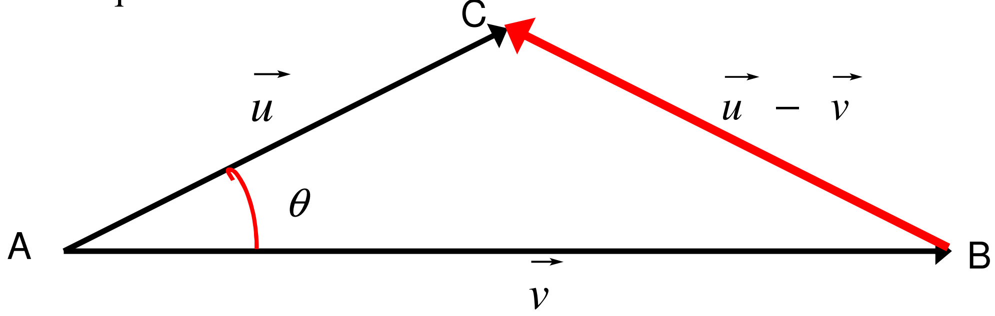
- Material adaptado da Apostila Álgebra e Geometria Analítica (NB020).
  - Profª. Karina Peres Mokarzel Carneiro, Prof. Luiz Felipe S. de Godoy, Prof. Rodrigo Guaracy Santana e Prof. Giovani Henrique F. Floriano.

Outras referências importantes:

- Geometria Analítica – Alfredo Steinbruch e Paulo Winterle.
- Geometria Analítica: um tratamento vetorial. Ivan de Camargo e Paulo Boulos.
- Vetores e Geometria Analítica – Paulo Winterle.

Ângulo de dois Vetores

Sabemos que $0 \le \theta \le 180^o$



Pela lei dos cossenos

$$\left|\vec{u} - \vec{v}\right|^2 = \left|\vec{u}\right|^2 + \left|\vec{v}\right|^2 - 2\left|\vec{u}\right|\left|\vec{v}\right|\cos\theta$$

Ângulo de dois Vetores

Porém, das propriedades (*) temos que: $* \left(\vec{u} \cdot \vec{u} = \left|\vec{u}\right|^2\right)$

$$\left|\vec{u} - \vec{v}\right|^2 = \left|\vec{u}\right|^2 + \left|\vec{v}\right|^2 - 2\,\vec{u} \cdot \vec{v}$$

Comparando as duas expressões,

$$\left|\vec{u}\right|^2 + \left|\vec{v}\right|^2 - 2\,\vec{u} \cdot \vec{v} = \left|\vec{u}\right|^2 + \left|\vec{v}\right|^2 - 2\left|\vec{u}\right|\left|\vec{v}\right|\cos\theta$$

Finalmente:

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = \left|\vec{u}\right| \cdot \left|\vec{v}\right|\cos\theta}$$

Assim:

$$\boxed{\cos\theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\left|\vec{u}\right| \cdot \left|\vec{v}\right|}}$$

Ângulo de dois Vetores

Casos particulares:

Se $\vec{u} \cdot \vec{v} > 0$, o ângulo é agudo ou nulo: $0º \leq \theta < 90º$.

Se $\vec{u} \cdot \vec{v} < 0$, o ângulo é obtuso ou raso: $90º < \theta \leq 180º$.

Se $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, o ângulo é reto: $\theta = 90º$.

Importante:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \begin{cases} \text{Se } \vec{u} = \vec{0} \text{ ou} \\ \text{se } \vec{v} = \vec{0} \text{ ou} \\ \text{se } \theta = 90^o \rightarrow \text{vetores perpendiculares} \end{cases}$$

Exemplo

Exemplo: Calcular o ângulo entre os vetores $\vec{u} = (1, 1, 4)$ e $\vec{v} = (-1, 2, 2)$

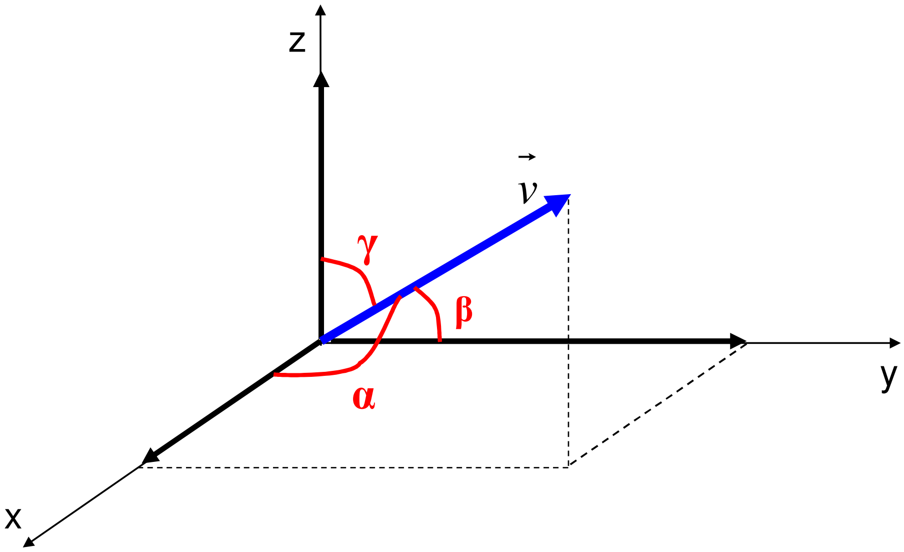
$$\cos\theta = \frac{(1, 1, 4) \cdot (-1, 2, 2)}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 4^2} \times \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{-1 + 2 + 8}{\sqrt{18} \times \sqrt{9}} = \frac{9}{3\sqrt{2} \times 3} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\theta = \text{arc cos}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 45^o$$

Ângulos diretores e Cossenos diretores de um Vetor

Seja o vetor $\vec{v} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$

Os ângulos diretores de $\vec{v}$ são os ângulos λ, β e γ formados com os vetores $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$, respectivamente.



Ângulos diretores e Cossenos diretores de um Vetor

Sendo $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$ os **vetores da base canônica:**

$$\vec{i} = (1,0,0); \quad \vec{j} = (0,1,0) \quad e \quad \vec{k} = (0,0,1)$$

São **ortogonais** entre si: $\vec{i}\cdot\vec{j} = \vec{i}\cdot\vec{k} = \vec{j}\cdot\vec{k} = 0$

São **unitários:** $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$

Assim, **os cossenos diretores de** $\vec{v}$ são **os cossenos de seus ângulos diretores**, isto é:

cos α , cos β e cos γ

$$\vec{v}\cdot\vec{i} = |\vec{v}||\vec{i}|\cos\alpha \rightarrow \boxed{\cos\alpha = \frac{\vec{v}\cdot\vec{i}}{|\vec{v}||\vec{i}|} = \frac{(x,y,z)\cdot(1,0,0)}{|\vec{v}|\;1} = \frac{x}{|\vec{v}|}}$$

$$\vec{v}\cdot\vec{j} = |\vec{v}||\vec{j}|\cos\beta \rightarrow \boxed{\cos\beta = \frac{\vec{v}\cdot\vec{j}}{|\vec{v}||\vec{j}|} = \frac{(x,y,z)\cdot(0,1,0)}{|\vec{v}|\;1} = \frac{y}{|\vec{v}|}}$$

$$\vec{v}\cdot\vec{k} = |\vec{v}||\vec{k}|\cos\gamma \rightarrow \boxed{\cos\gamma = \frac{\vec{v}\cdot\vec{k}}{|\vec{v}||\vec{k}|} = \frac{(x,y,z)\cdot(0,0,1)}{|\vec{v}|\;1} = \frac{z}{|\vec{v}|}}$$

Ângulos diretores e Cossenos diretores de um Vetor

Propriedades:

a) As componentes do versor de um vetor são os cossenos diretores deste vetor.

$$\boxed{\hat{v} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{(x, y, z)}{|\vec{v}|} = \left(\frac{x}{|\vec{v}|}, \frac{y}{|\vec{v}|}, \frac{z}{|\vec{v}|} \right) = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)}$$

b) Como o versor de $\vec{v}$ é um vetor unitário, tem-se que:

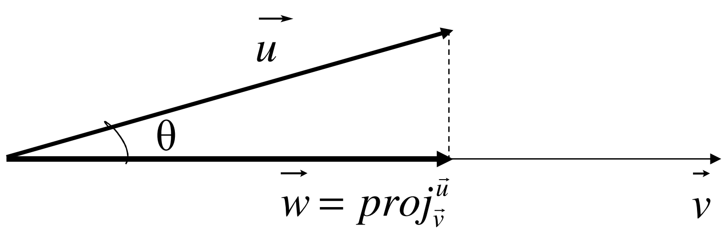
$$|(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)| = \sqrt{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma} = 1$$

$$\boxed{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1}$$

A soma dos quadrados dos cossenos diretores de um vetor é igual a 1.

Projeção de um Vetor

Sejam os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ com $\vec{u} \neq 0$ e $\vec{v} \neq 0$, e θ o ângulo formado por eles. Pretendemos calcular o vetor $\vec{w}$ que representa a projeção de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$.



Do triângulo retângulo vem:

$$|\vec{w}| = |\vec{u}| \; |\cos\theta| = |\vec{u}| \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \; |\vec{v}|} = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{v}|}$$

Inatel
Instituto Nacional de Telecomunicações

Projeção de um Vetor

Portanto, a projeção do vetor $\vec{u}$ sobre o vetor $\vec{v}$ fica:

$$\boxed{proj_{\vec{v}}^{\vec{u}} = \left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|}\right)\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\vec{v}\cdot\vec{v}}\right)\cdot\vec{v}}$$

<u>Exemplo</u>: Determine o vetor projeção de $\vec{u} = (2, 3, 4)$ sobre $\vec{v} = (1, -1, 0)$

$$\mathrm{proj}_{\vec{v}}^{\vec{u}} = \left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\vec{v}\cdot\vec{v}}\right)\vec{v} = \left(\frac{(2,\ 3,\ 4)\cdot(1,\ -1,\ 0)}{(1,\ -1,\ 0)\cdot(1,\ -1,\ 0)}\right)(1,\ -1,\ 0)$$

$$\mathrm{proj}_{\vec{v}}^{\vec{u}} = \left(\frac{2-3}{2}\right)(1,\ -1,\ 0) = -\frac{1}{2}(1,\ -1,\ 0) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$$

Inatel
Instituto Nacional de Telecomunicações

Exercícios