Inatel
Instituto Nacional de Telecomunicações

Núcleo Básico das Engenharias

M002-D/E
Álgebra e Geometria Analítica

Cap. 1 – Álgebra Vetorial
(parte 3)

Prof. Edson J. C. Gimenez
soned@inatel.br

2019/Sem1

Inatel
Instituto Nacional de Telecomunicações

Referências

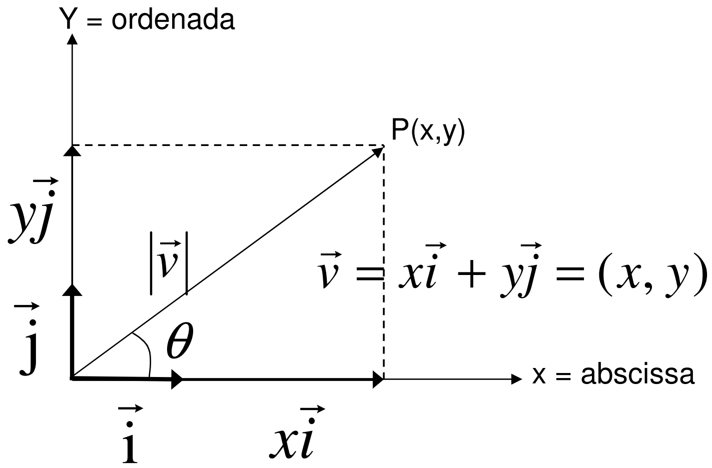
- Material adaptado da Apostila Álgebra e Geometria Analítica (NB020).
  - Profª. Karina Peres Mokarzel Carneiro, Prof. Luiz Felipe S. de Godoy, Prof. Rodrigo Guaracy Santana e Prof. Giovani Henrique F. Floriano.

Outras referências importantes:

- Geometria Analítica – Alfredo Steinbruch e Paulo Winterle.
- Geometria Analítica: um tratamento vetorial. Ivan de Camargo e Paulo Boulos.
- Vetores e Geometria Analítica – Paulo Winterle.

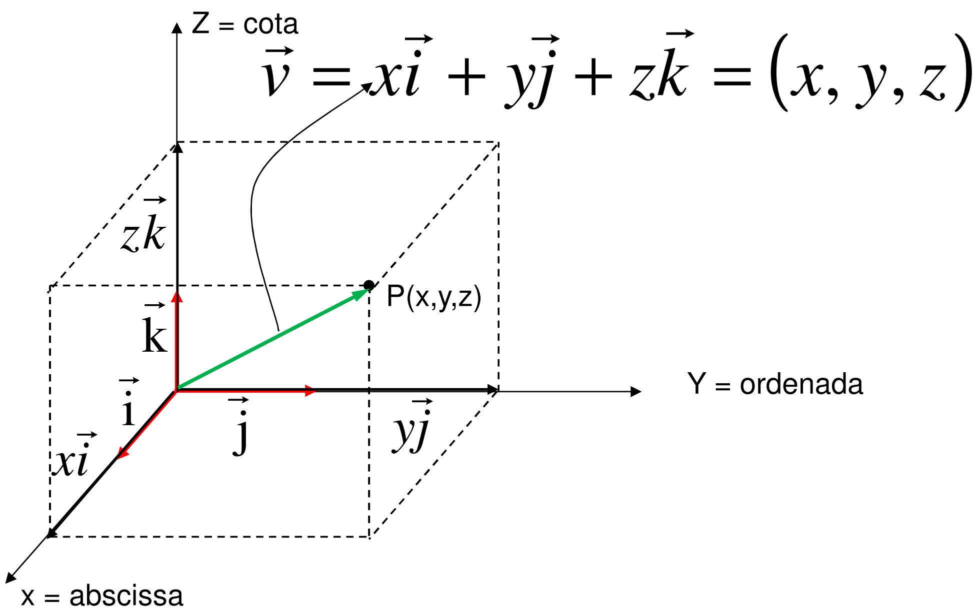
Vetores no R^2 e no R^3

Base Canônica → $\{\vec{i}, \vec{j}\}$



Vetores no R^2 e no R^3

Base Canônica → $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$



Operações Algébricas em R^3

$$\vec{v}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k} \qquad \vec{v}_2 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$$

Igualdade: Os vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ são iguais quando:

$$x_1 = x_2 \qquad y_1 = y_2 \qquad z_1 = z_2$$

Soma: $\vec{s} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 = (x_1 + x_2)\vec{i} + (y_1 + y_2)\vec{j} + (z_1 + z_2)\vec{k}$

Subtração: $\vec{t} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 = (x_1 - x_2)\vec{i} + (y_1 - y_2)\vec{j} + (z_1 - z_2)\vec{k}$

Multiplicação de um número real por um vetor:

$$\vec{p} = \alpha\vec{v}_1 = \alpha(x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}) = \alpha x_1\vec{i} + \alpha y_1\vec{j} + \alpha z_1\vec{k}$$

Inatel
Instituto Nacional de Telecomunicações

Operações Algébricas em R^3

Se A(x_1,y_1,z_1) e B(x_2,y_2,z_2) são dois pontos quaisquer no espaço, então:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

Se A(x_1,y_1,z_1) e B(x_2,y_2,z_2) são pontos extremos de um segmento, o ponto médio (M) de AB é:

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$

Se os vetores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ são colineares (paralelos), existe um número α tal que:

$$\vec{u} = \alpha \cdot \vec{v} \Rightarrow (x_1, y_1, z_1) = \alpha \cdot (x_2, y_2, z_2) \Rightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2} = \alpha$$

Produto Escalar

O produto escalar de dois vetores $\vec{u} = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}$ e $\vec{v} = x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}$ é o valor real (escalar) dado por:

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}$$

Representa-se por $\vec{u} \cdot \vec{v} = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ e lê-se $\vec{u}$ escalar $\vec{v}$.

Exemplo:

Sejam $\vec{u} = 3\vec{i} - 5\vec{j} + 8\vec{k}$ e $\vec{v} = 4\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$.

Então $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \cdot 4 + (-5) \cdot (-2) + 8 \cdot (-1) = 14$

Produto Escalar

Propriedades:

1) Comutativa: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$, $\forall \vec{u}$ e $\vec{v}$

2) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow$ um deles é o vetor nulo ou se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são ortogonais ($\theta = 90^\circ$)

3) $\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2$

4) $(m\vec{u}) \cdot (n\vec{v}) = (m \cdot n) \cdot (\vec{u} \cdot \vec{v})$, $\forall \vec{u}$ e $\vec{v}$ e $\forall$ m e n $\in \mathbb{R}$

5) $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = (\vec{u} \cdot \vec{w}) + (\vec{v} \cdot \vec{w})$

Exercícios 02

1) Verifique se os seguintes vetores são paralelos?

a) $\vec{u} = (4, -6, 2)$ e $\vec{v} = (-6, 9, -3)$ Resp.: sim

b) $\vec{w} = (14, -21, 9)$ e $\vec{t} = (10, -15, 5)$ Resp.: não

2) Dado o vetor $\vec{w} = (3, 2, 5)$, determine a e b de modo que sejam paralelos os vetores $\vec{u} = (3, 2, -1)$ e $\vec{v} = (a, 6, b)$.

Resp.: a = 9 ; b = -15

3) Sejam os vetores $\vec{u} = (3, 2, 1)$ e $\vec{v} = (-1, -4, -1)$. Calcule $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (2\vec{u} - \vec{v})$.

Resp.: -2

4) Dados os vetores $\vec{u} = (4, \alpha, -1)$ e $\vec{v} = (\alpha, 2, 3)$, e os pontos $A(4, -1, 2)$ e $B(3, 2, -1)$, determine o valor de α tal que $\vec{u} \cdot \left(\vec{v} + \overrightarrow{BA}\right) = 5$.

Resp.: α = 7/3

Módulo de um Vetor

$$\textit{Sendo } \vec{v} = (x, y, z), \textit{ então}:$$

$$\left|\vec{v}\right| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} \quad \text{ou em coordenadas,}$$

$$\left|\vec{v}\right| = \sqrt{(x, y, z) \cdot (x, y, z)} \qquad \text{ou}$$

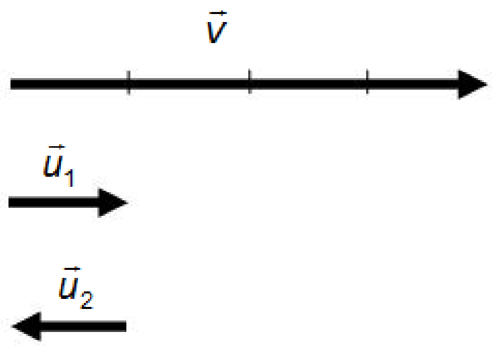
$$\boxed{\left|\vec{v}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\text{Exemplo: Se } \vec{v} = (2, 1, -2) \text{ então}$$

$$\left|\vec{v}\right| = \sqrt{(2)^2 + (1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{4 + 1 + 4} = \sqrt{9} = 3$$

Versor

Versor de um vetor não nulo $\vec{v}$ é o vetor unitário de mesma direção e mesmo sentido de $\vec{v}$.



Os vetores $\vec{u}_1$ e $\vec{u}_2$ da figura são vetores unitários, pois ambos têm módulo 1. No entanto, apenas $\vec{u}_1$ tem a mesma direção e o mesmo sentido de $\vec{v}$. Logo, $\vec{u}_1$ é o versor de $\vec{v}$.

Versor

O *Versor* é normalmente denotado por: $\hat{v}$

e definido por: $$\boxed{\hat{v} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}}$$

Versor de um Vetor

Sendo $\hat{v}$ o versor do vetor $\vec{v}$, tem-se:

$$\boxed{\hat{v} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}} = \left(\frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{|\vec{v}|}\right) = \left(\frac{x}{|\vec{v}|}\right)\vec{i} + \left(\frac{y}{|\vec{v}|}\right)\vec{j} + \left(\frac{z}{|\vec{v}|}\right)\vec{k}$$

Exemplo: Obtenha as coordenadas do versor do vetor $\vec{v}$ (exemplo anterior) e calcule o seu módulo.

$\vec{v} = (2, 1, -2)$

$$\hat{v} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{(2, 1, -2)}{3} = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

$$|\hat{v}| = \left|\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)\right| = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{9}{9}} = 1$$

Distância entre dois Pontos

A distância d entre dois pontos $A(x_1, y_1, z_1)$ *e* $B(x_2, y_2, z_2)$ *é definida por:*

$$d = \left|\overrightarrow{AB}\right|$$

$$d = |B - A|$$

$$\boxed{d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}$$

Exercícios 02

5) Sendo $|\vec{u}| = 4$, $|\vec{v}| = 2$ e $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3$, calcule $(3\vec{u} - 2\vec{v}) \cdot (-\vec{u} + 4\vec{v})$.
Resp.: -38

6) Encontre o versor de cada um dos seguintes vetores:

a) $\vec{u} = (2, 3, -1)$ Resp.: $\vec{u} = \left(\frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{-1}{\sqrt{14}}\right)$

b) $\vec{v} = (1, -1, 1)$ Resp.: $\vec{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

c) $\vec{w} = (-3, 4, 0)$ Resp.: $\vec{u} = \left(\frac{-3}{5}, \frac{4}{5}, 0\right)$

7) Sabendo que a distância entre os pontos A(-1, 2, 3) e B(1,-1, m) vale 7, calcular o valor de m.

Resp.: m = -3 ou m = 9

8) Determine α para que o vetor $\vec{v} = \left(\alpha \, , -\frac{1}{2} \, , \frac{1}{4}\right)$ seja unitário.

Resp.: $\alpha = \pm\frac{\sqrt{11}}{4}$

Exercícios