Inatel
Instituto Nacional de Telecomunicações

Núcleo Básico das Engenharias

M002-D/E
Álgebra e Geometria Analítica

Cap. 1 – Álgebra Vetorial
(parte 6 – final)

Prof. Edson J. C. Gimenez
soned@inatel.br

2019/Sem1

Inatel
Instituto Nacional de Telecomunicações

Referências

- Material adaptado da Apostila Álgebra e Geometria Analítica (NB020).
  - Profª. Karina Peres Mokarzel Carneiro, Prof. Luiz Felipe S. de Godoy, Prof. Rodrigo Guaracy Santana e Prof. Giovani Henrique F. Floriano.

Outras referências importantes:

- Geometria Analítica – Alfredo Steinbruch e Paulo Winterle.
- Geometria Analítica: um tratamento vetorial. Ivan de Camargo e Paulo Boulos.
- Vetores e Geometria Analítica – Paulo Winterle.

Produto Misto

Dados os vetores $\vec{u} = x_1\,\vec{i} + y_1\,\vec{j} + z_1\,\vec{k}$, $\vec{v} = x_2\,\vec{i} + y_2\,\vec{j} + z_2\,\vec{k}$ e $\vec{w} = x_3\,\vec{i} + y_3\,\vec{j} + z_3\,\vec{k}$.

Chama-se ***produto misto*** dos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ o ***número real*** indicado por $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$, representado por $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, tal que:

$$\boxed{(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}}$$

Exemplo

Calcular o produto misto dos seguintes vetores:

1) $\vec{u} = (2, 3, 5)$, $\vec{v} = -\vec{i} + 3\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{w} = (4, -3, 2)$

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 3 & 3 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 27$$

2) $\vec{u} = (0, 1, 0), \vec{v} = (1, 2, 3), \vec{w} = (2, -1, 2)$

Resp.: 4

3) $\vec{u} = (1, 2, 3), \vec{v} = (2, -1, 0), \vec{w} = (4, -2, 1)$

Resp.: -5

Propriedades do Produto Misto

P1) $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$ se um dos vetores é nulo, se dois são colineares ou se os três são coplanares.

P2) O produto misto independe da ordem circular dos vetores:

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}) = (\vec{v}, \vec{w}, \vec{u})$$

Resulta desta propriedade: $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$

P3) O produto misto troca de sinal ao trocar a posição de dois vetores consecutivos $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = -(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w})$

P4) $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} + \vec{r}) = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) + (\vec{u}, \vec{v}, \vec{r})$

P5) $(\vec{u}, \vec{v}, \alpha\vec{w}) = (\vec{u}, \alpha\vec{v}, \vec{w}) = (\alpha\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \alpha(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$

Exemplo

Calcular o produto misto dos seguintes vetores:

1) $\vec{u} = (1,1,1), \vec{v} = (0,2,1), \vec{w} = (2,1,0)$ Resp.: -3

2) $\vec{v} = (0,2,1), \vec{w} = (2,1,0), \vec{u} = (1,1,1)$ Resp.: -3

3) $\vec{w} = (2,1,0), \vec{v} = (0,2,1), \vec{u} = (1,1,1)$ Resp.: 3

** Para que $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ sejam coplanares, deve-se ter: $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$.

4) Dados os pontos A(2, 1, 0), B(1, 5, 2), C(3, 0, 1) e D(1, 2, 3), verifique se o vetores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AD}$são coplanares.

Resp.: não são coplanares pois o determinante é diferente de zero.

5) Qual deve ser o valor de *m* para que os vetores seguintes sejam coplanares: $\vec{u} = (m, 2, -1), \vec{v} = (1, -1, 3), \vec{w} = (0, -2, 4)$?

Resp.: m = 3

Interpretação Geométrica do Produto Misto

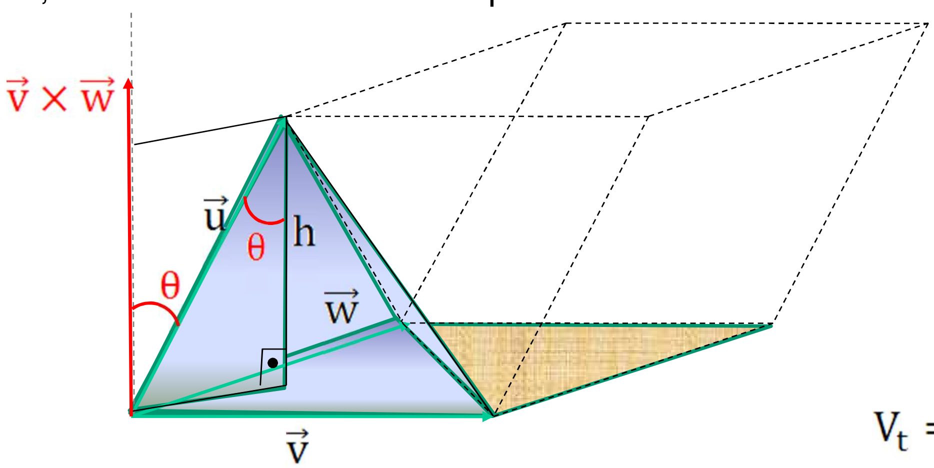
Geometricamente, o produto misto $\vec{u} \cdot \left(\vec{v} \times \vec{w}\right)$ é igual, em módulo, ao volume do paralelepípedo de arestas determinadas pelos vetores $\vec{u} = \overrightarrow{AD}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{w} = \overrightarrow{AC}$

Assim, o volume é dado por:

$$\boxed{V = \left| \vec{u} \cdot (\vec{v} \text{ x } \vec{w}) \right| = \left| (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \right|}$$

Interpretação Geométrica do Produto Misto

Sejam $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ três vetores não coplanares.



$$V_t = \frac{1}{6} V_p$$

Volume do paralelepípedo: $V_p = Ab \cdot h$

$Ab = |\vec{v} \times \vec{w}|$

$\cos\theta = \dfrac{h}{|\vec{u}|} \Rightarrow h = |\vec{u}|\cos\theta$

$V_p = |\vec{u}||\vec{v} \times \vec{w}|\cos\theta = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$ $\Rightarrow$ $\boxed{V_p = |[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]|}$

$$\boxed{V_t = \frac{|[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]|}{6}}$$

Exemplo

Exemplo: Dados os vetores $\vec{u} = (x, 5, 0)$, $\vec{v} = (3, -2, 1)$ e $\vec{w} = (1, 1, -1)$, calcular o valor de x para que o volume do paralelepípedo determinado por $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ seja 24 u.v. (unidades de volume).

Solução: Como o volume do paralelepípedo é dado por: $\left|\left(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right)\right| = 24$, então:

$$\left(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right) = \begin{vmatrix} x & 5 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 24 \quad \Rightarrow x + 20$$

Pela equação do volume $|x + 20| = 24$

$$\text{assim:} \quad x + 20 = 24 \quad \therefore \quad x = 4$$
$$-x - 20 = 24 \quad \therefore \quad x = -44$$

Exemplo

Exemplo: Dados os vetores $\vec{u} = 3\vec{i} - 2\vec{j} - 6\vec{k}$, $\vec{v} = 2\vec{i} - \vec{j}$ e $\vec{w} = \vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$, determine $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$.

Solução:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \cdot 2 - 2 \cdot (-1) - 6 \cdot 0 = 8 \quad \text{e} \quad \vec{u} \cdot \vec{w} = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 3 - 6 \cdot 4 = -27$$

$$\text{Assim:} \quad \vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = \begin{vmatrix} \vec{v} & \vec{w} \\ \vec{u} \cdot \vec{v} & \vec{u} \cdot \vec{w} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{v} & \vec{w} \\ 8 & -27 \end{vmatrix}$$

$$\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = -27\vec{v} - 8\vec{w} = -27\,(2\vec{i} - \vec{j}) - 8\,(\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k})$$
$$\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = -54\vec{i} + 27\,\vec{j} - 8\,\vec{i} - 24\,\vec{j} - 32\,\vec{k} = -62\vec{i} + 3\vec{j} - 32\vec{k}$$

Duplo Produto Vetorial

Dados os vetores: $\vec{u} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$

$$\vec{v} = x_2\vec{i}, + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$$

$$\vec{w} = x_3\vec{i} + y_3\vec{j} + z_3\vec{k}$$

Chama-se ***duplo produto vetorial*** dos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$

ao vetor dado por: $\boxed{\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}).}$

Obs.: o produto vetorial não é associativo, então:

$$\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) \neq (\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$$

Duplo Produto Vetorial

O duplo produto vetorial pode ser decomposto na diferença de dois vetores com coeficientes escalares:

$$\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w}$$

Esta fórmula pode ser escrita sob a forma de determinante:

$$\boxed{\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = \begin{vmatrix} \vec{v} & \vec{w} \\ \vec{u} \cdot \vec{v} & \vec{u} \cdot \vec{w} \end{vmatrix}}$$

Exercício Proposto

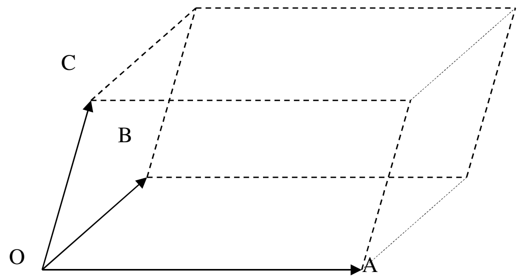
Do paralelepípedo de lados OA, OB e OC mostrado na figura, sabe-se que: $\overrightarrow{OA}=(x, 3, 4)$, $\overrightarrow{OB}=(0, 4, 2)$ e $\overrightarrow{OC}=(1, 3, 2)$.

a) Calcule o valor de $x > 0$, para que o volume desse paralelepípedo seja igual a 12 uv.

R: x = 11

b) Calcule o a área do triângulo OAC

R: A = 17,75 u.a.



Exercícios