Inatel – Instituto Nacional de Telecomunicações

M002-E
Álgebra Linear e Geometria Analítica

Cônicas

Prof. Edson J. C. Gimenez

2019/Sem1

Referências:

- Material adaptado da Apostila Álgebra e Geometria Analítica (NB020/M002).
  - Profª. Karina Peres Mokarzel Carneiro, Prof. Luiz Felipe S. de Godoy, Prof. Rodrigo Guaracy Santana e Prof. Giovani Henrique F. Floriano.

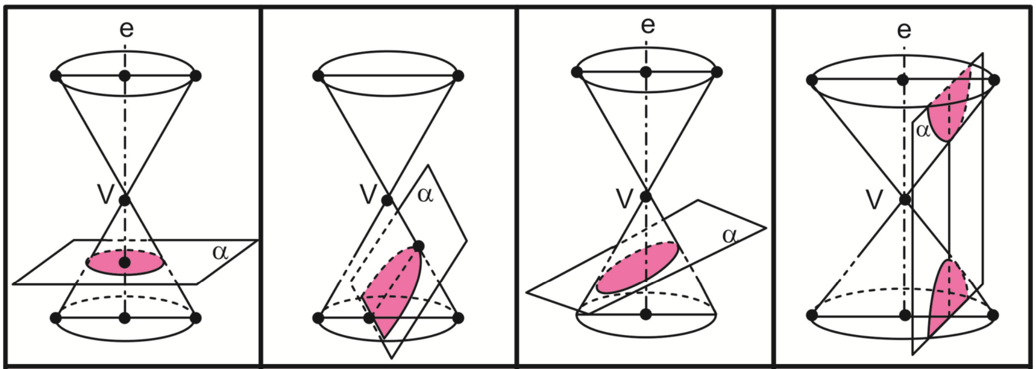
Outras referências importantes:

- Geometria Analítica – Alfredo Steinbruch e Paulo Winterle.
- Geometria Analítica: um tratamento vetorial. Ivan de Camargo e Paulo Boulos.
- Vetores e Geometria Analítica – Paulo Winterle.

1-INTRODUÇÃO

Cônicas por quê?

As ***seções cônicas*** são curvas obtidas pela interseção de um cone circular reto de duas folhas com um plano.



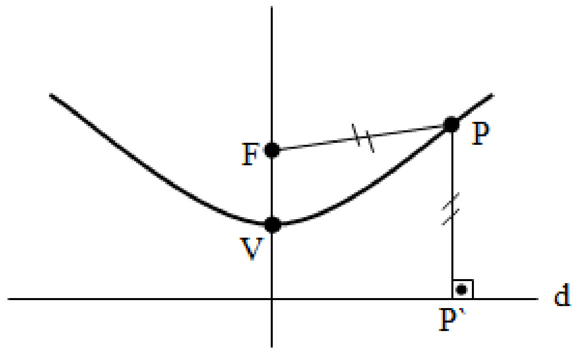
Circunferência: quando o plano for perpendicular ao eixo (e) do cone.	**Parábola:** quando o plano α for paralelo a uma geratriz do cone.	**Elipse:** quando o plano α for oblíquo ao eixo e não paralelo a uma geratriz. O plano corta apenas uma das folhas do cone.	**Hipérbole:** quando o plano α for palarelo ao eixo do cone

Parábola

I. PARÁBOLA

Definição:

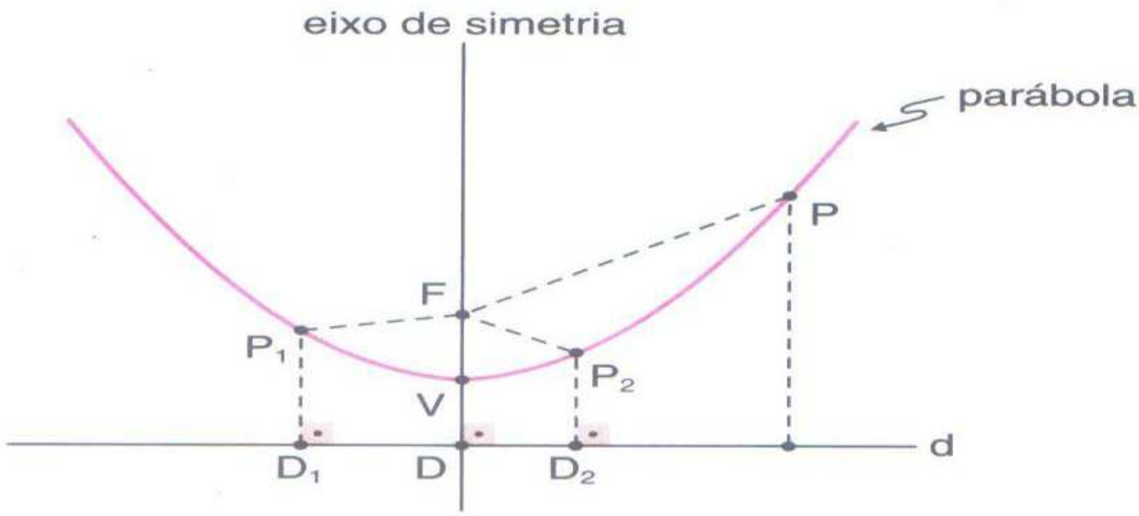
Num plano α fixemos uma reta d (diretriz) e um ponto F não pertencente a d. Chamamos de **PARÁBOLA** de foco F e diretriz (d) ao lugar geométrico dos pontos P do plano que são equidistantes de F e de (d).



$$d(F, P) = d(P`, P) \qquad \text{ou} \qquad |\overrightarrow{FP}| = |\overrightarrow{P`P}|$$

Assim, parábola é o conjunto dos pontos *P = (x, y)* tais que:

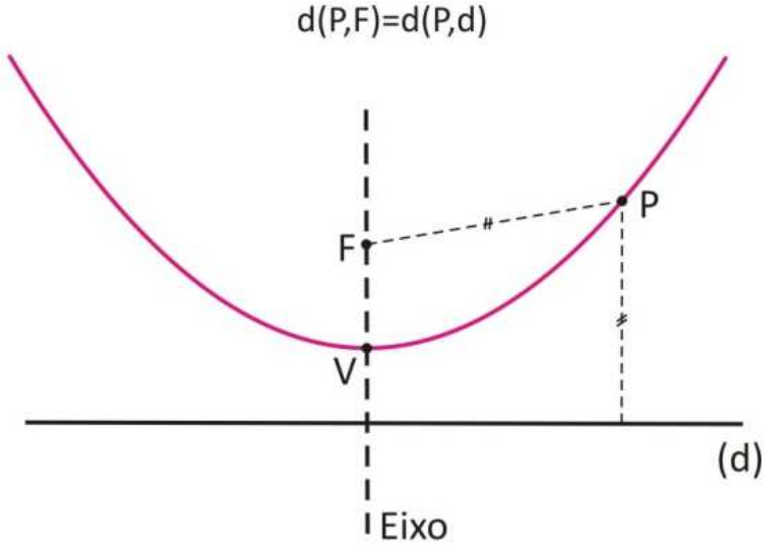
dist(P, F) = dist(P, d)



$$P_1F = P_1D_1$$
$$P_2F = P_2D_2$$

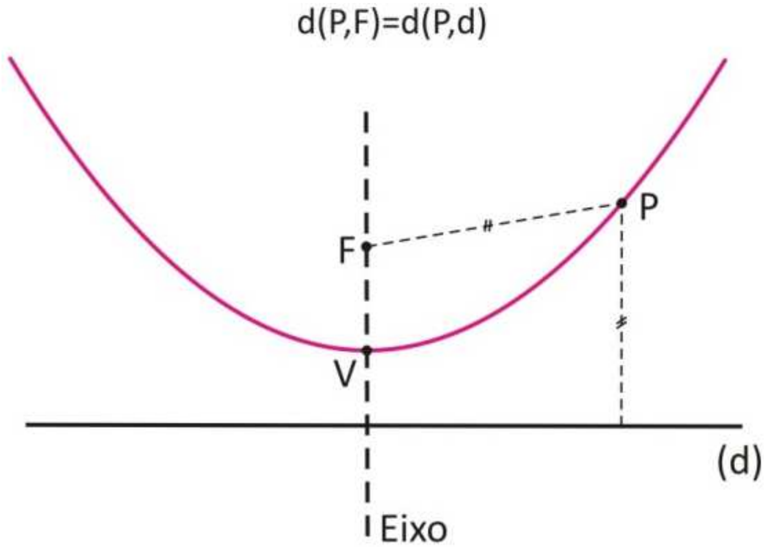
OBSERVAÇÕES:

a) Entre todos os pontos da parábola existe um que é o mais próximo da reta **(d)** e que é equidistante do foco **F**. Este ponto denominamos **VÉRTICE DA PARÁBOLA**.



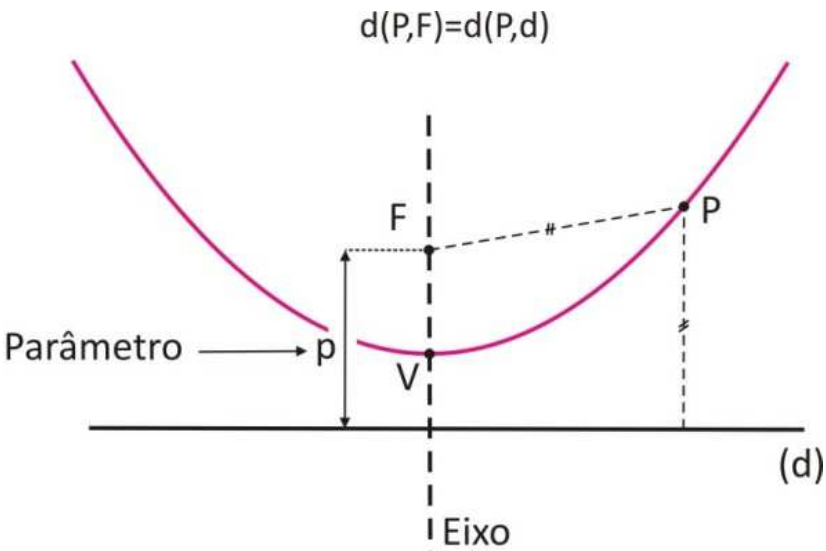
OBSERVAÇÕES:

b) A reta definida pelo foco **F** e pelo vértice **V**, perpendicular à diretriz (d), é chamada de **EIXO DA PARÁBOLA** (eixo de simetria).



OBSERVAÇÕES:

c) A distância entre o foco **F** e a diretriz (**d**) é chamada de **PARÂMETRO DA PARÁBOLA,** e é representada por **p**.



EQUAÇÃO PADRÃO DE UMA PARÁBOLA.

A partir da definição e adotando um sistema de coordenadas cartesianas de modo que o vértice da parábola coincida com a origem e que a distância entre a origem e o foco seja igual à distância entre a origem e a diretriz, podemos determinar uma equação para a parábola conforme ilustra o diagrama abaixo:

Pela definição:

$$\left|\overrightarrow{FP}\right| = \left|\overrightarrow{P'P}\right|$$

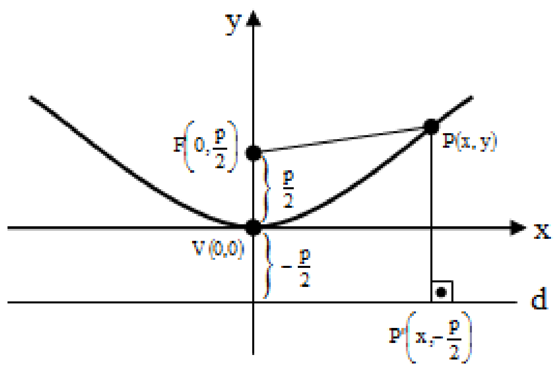
Como:

$$\overrightarrow{FP} = (x-0)\vec{i} + (y-p/2)\vec{j}$$

$$\overrightarrow{P'P} = (x-x)\vec{i} + (y+p/2)\vec{j}$$

Tem-se:

$$\sqrt{x^2 + (y-p/2)^2} = \sqrt{(y+p/2)^2}$$



Pela definição de parábola segue que

$$d(P,F)=d(P,d)\Rightarrow d(P,F)=d(P,Q)\Rightarrow \sqrt{(x-0)^2+\left(y-\frac{p}{2}\right)^2}=\sqrt{(x-x)^2+\left(y-\left(-\frac{p}{2}\right)\right)^2}$$

Elevando ao quadrado e desenvolvendo, vem:

$$\sqrt{(x-0)^2+\left(y-\frac{p}{2}\right)^2}=\sqrt{(x-x)^2+\left(y-\left(-\frac{p}{2}\right)\right)^2}\Rightarrow x^2+\cancel{y^2}-py+\cancel{\frac{p^2}{4}}=\cancel{y^2}+py+\cancel{\frac{p^2}{4}}\Rightarrow 2py=x^2$$

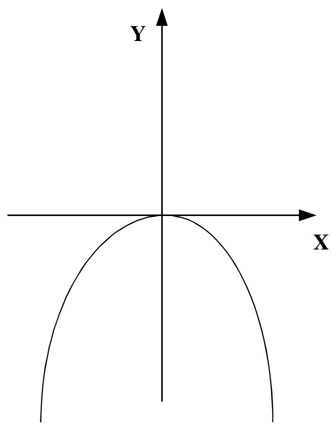
Assim, a equação da parábola fica:

$$\boxed{x^2=2py}$$

OBSERVAÇÕES:

$$x^2=-2py$$

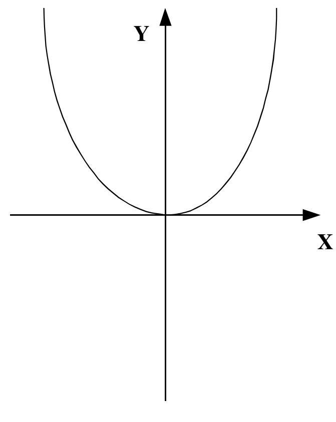
(se F abaixo de V)



y < 0

$$x^2=2py$$

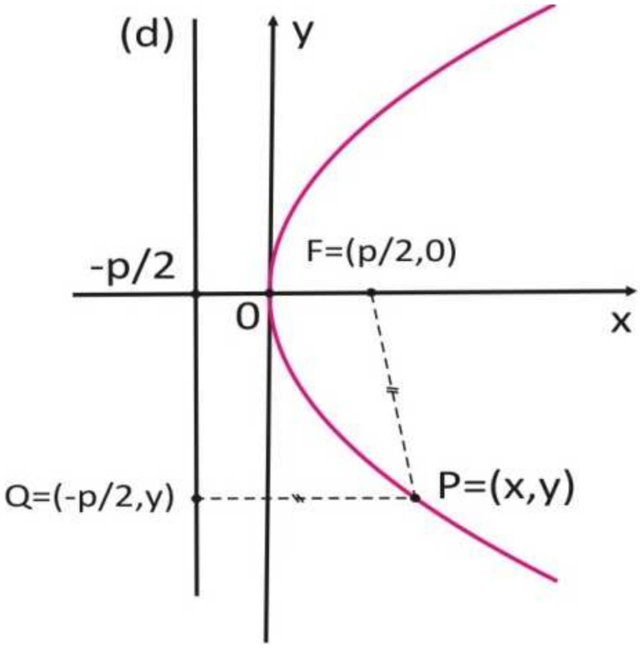
(se F acima de V)



y > 0

OBSERVAÇÕES:

d) Caso o eixo de simetria da parábola seja o eixo x, conforme ilustra a figura, a sua equação padrão (canônica) será:



$$\boxed{y^2 = 2px}$$

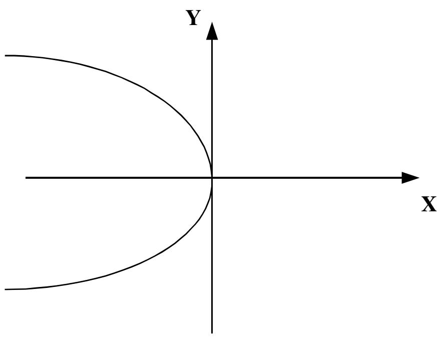
OBSERVAÇÕES:

$$y^2 = -2px$$

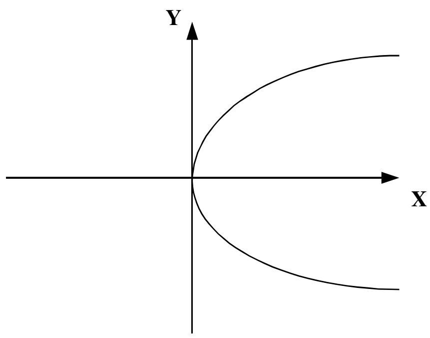
(se F à esquerda de V)

$$y^2 = 2px$$

(se F à direita de V)

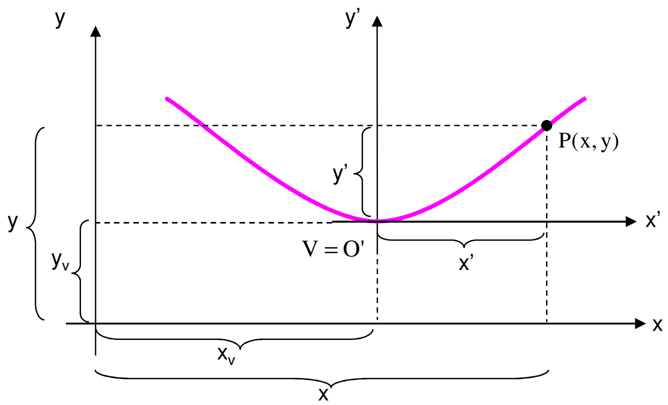


x < 0



x > 0

Equação da parábola de vértice fora da origem



Do gráfico temos:

$x = x' + x_v$ => $x' = x - x_v$

$y = y' + y_v$ => $y' = y - y_v$

Equação da parábola no sistema S' => $x'^2 = 2py'$

No sistema S:

$$\boxed{(x - x_v)^2 = 2p(y - y_v)}$$ => Equação padrão da parábola

Equação da parábola de vértice fora da origem

Caso o vértice da parábola não esteja localizado na origem do sistema de coordenadas cartesianas e sim em outro ponto qualquer, a equação da parábola assume uma das formas a seguir, dependendo se o seu eixo de simetria é paralelo ao eixo y ou ao eixo x respectivamente:

$$\boxed{(x - x_v)^2 = 2p(y - y_v)}$$ ou $$\boxed{(y - y_v)^2 = 2p(x - x_v)}$$

(se F acima ou à direita de V)

$$\boxed{(x - x_v)^2 = -2p(y - y_v)}$$ $$\boxed{(y - y_v)^2 = -2p(x - x_v)}$$

(se F abaixo ou à esquerda de V)

Equação explícita da parábola:

Da equação padrão $(x - x_v)^2 = 2p(y - y_v)$ temos:

$$x^2 - 2xx_v + x_v^2 = 2py - 2py_v$$

$$2py = x^2 - 2xx_v + x_v^2 + 2py_v$$

$y = ax^2 + bx + c$ → Equação explícita da parábola

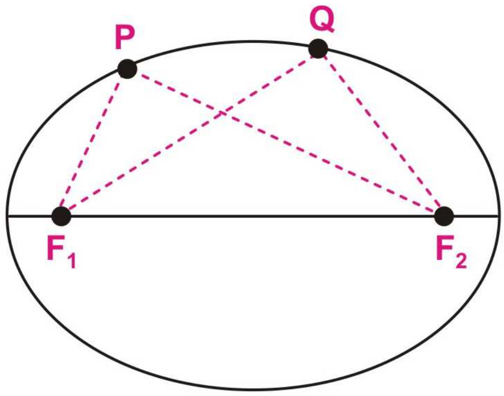
Exemplos

Elipse

II. A ELIPSE

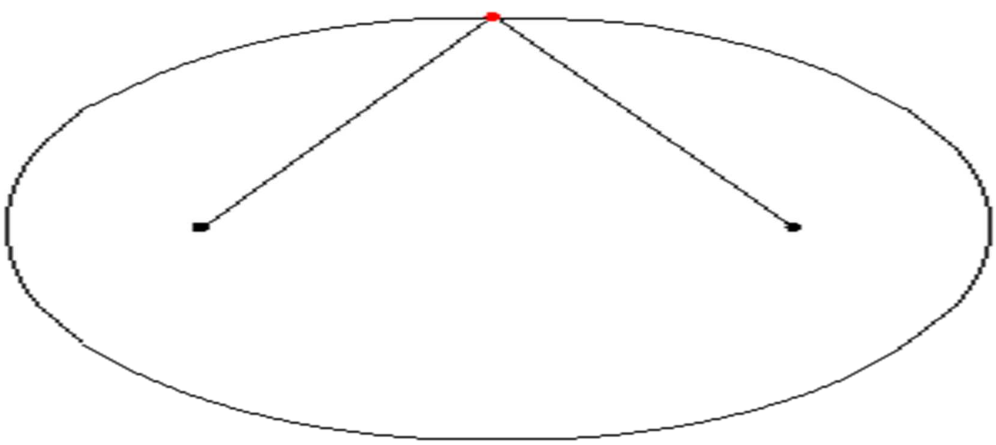
Definição:

Dados um plano α e dois pontos fixos F_1 e F_2 pertencentes a α , chamamos de **ELIPSE** de focos F_1 e F_2 ao lugar geométrico dos pontos P do plano α cuja soma das distâncias aos pontos F_1 e F_2 permanece constante.



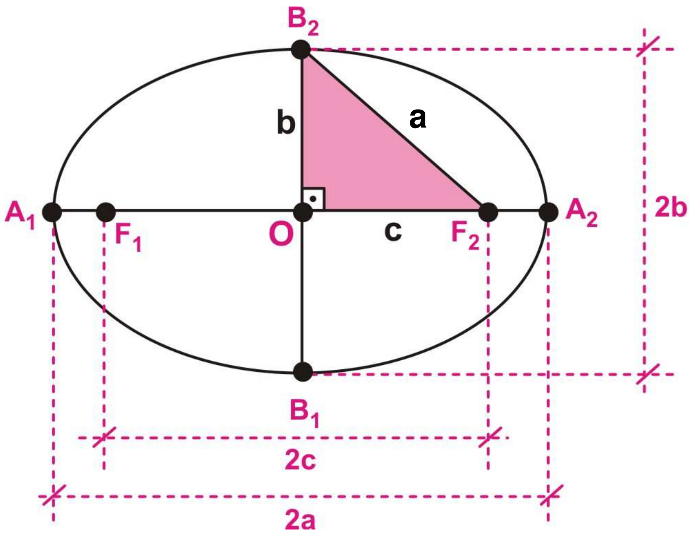
$d(P,F_1)+d(P,F_2)=d(Q,F_1)+d(Q,F_2)=\text{constante}$

Elipse



Elipse é o conjunto dos pontos *P = (x; y)* tais que *dist(P; F1) + dist(P; F2) = 2a*

Elementos geométricos de uma elipse.

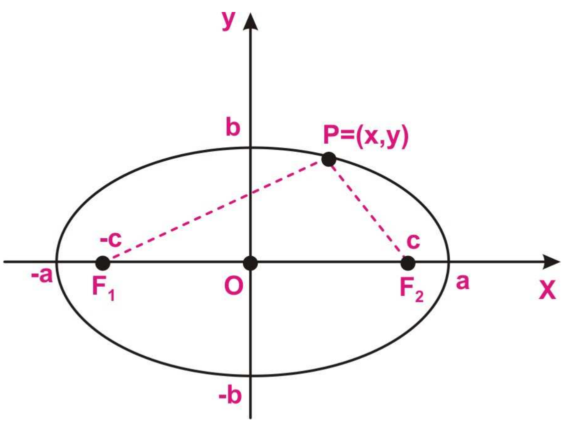


F_1, F_2: focos. A distância entre os Focos F_1 *e* F_2, igual a *2c*, denomina-se distância focal.
O: centro da elipse; é o ponto médio do segmento F_1, F_2.
A_1, A_2, B_1, B_2: vértices da elipse.
Eixo maior: é o segmento A_1A_2 e cujo comprimento é *2a.*
Eixo menor: é o segmento B_1B_2 e cujo comprimento é *2b.*

Do triângulo retângulo B_2OF_2 obtemos a relação notável:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

EQUAÇÃO PADRÃO (CANÔNICA) DE UMA ELIPSE.



Sejam:
P = (x, y) um ponto genérico da elipse
F_1 = (-c, 0)
F_2 = (c, 0)
d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a

Equação da elipse → $\boxed{\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1}$

Pois:

$$d(P,F_1) + d(P,F_2) = 2a \Rightarrow \sqrt{(x-(-c))^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = 2a \Rightarrow$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Elevando cada membro ao quadrado,

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\Rightarrow(x+c)^2+y^2=\left[2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right]^2$$

desenvolvendo...

$$x^2+2xc+c^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2\Rightarrow$$

$$\cancel{x^2}+2xc+\cancel{c^2}+\cancel{y^2}=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\cancel{x^2}-2xc+\cancel{c^2}+\cancel{y^2}\Rightarrow$$

$$\cancel{4}xc=\cancel{4}a^2-\cancel{4}a\sqrt{(x-c)^2+y^2}\Rightarrow a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-xc$$

elevando cada membro ao quadrado,

$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-xc\Rightarrow a^2\left(x^2-2xc+c^2+y^2\right)=a^4-2a^2xc+x^2c^2$$

$$a^2\left(x^2-2xc+c^2+y^2\right)=a^4-2a^2xc+x^2c^2\Rightarrow$$

$$a^2x^2-\cancel{2a^2xc}+a^2c^2+a^2y^2=a^4-\cancel{2a^2xc}+x^2c^2\Rightarrow$$

$$a^2x^2+a^2c^2+a^2y^2=a^4+x^2c^2\Rightarrow$$

$$\left(a^2-c^2\right)x^2+a^2y^2=a^4-a^2c^2\Rightarrow$$

$$\left(a^2-c^2\right)x^2+a^2y^2=a^2\left(a^2-c^2\right)$$

Lembrando que $a^2=b^2+c^2\Rightarrow a^2-c^2=b^2$

Temos

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2\underbrace{\Rightarrow}_{\div a^2b^2}\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$$

OBSERVAÇÕES:

a) Caso o eixo maior da elipse estiver sobre o eixo y, sua equação padrão será:

$$\boxed{\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1}$$

b) Caso a elipse não esteja centrada na origem, a sua equação assume uma das formas a seguir dependendo se o seu eixo maior é paralelo ao eixo x ou ao eixo y, respectivamente

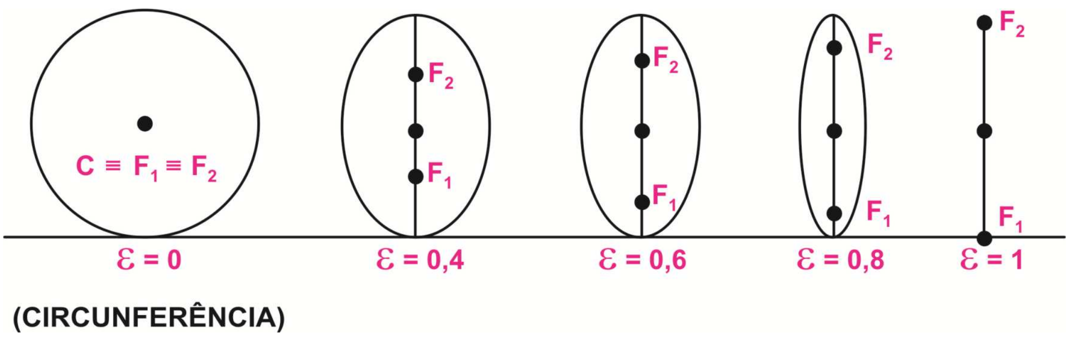
$$\boxed{\frac{(x-x_c)^2}{a^2}+\frac{(y-y_c)^2}{b^2}=1} \quad \text{ou} \quad \boxed{\frac{(y-y_c)^2}{a^2}+\frac{(x-x_c)^2}{b^2}=1}$$

(eixo maior // eixo x) (eixo maior // eixo y)

sendo (x_c, y_c) são as coordenadas do centro da elipse.

OBSERVAÇÕES:

c) A razão ε=c/a é chamada de **EXCENTRICIDADE** da elipse e mede o quanto a elipse é achatada ou arredondada, conforme sugere a figura a seguir:



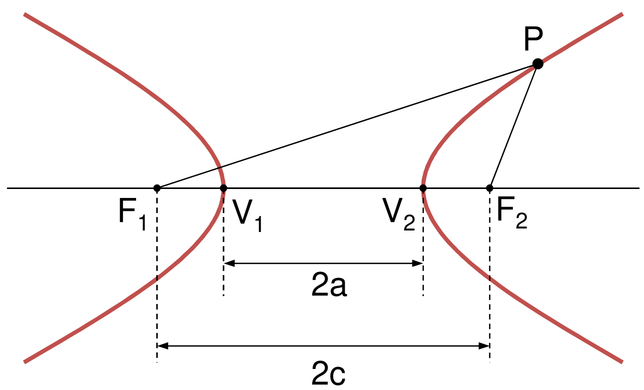
Exemplos

Hipérbole

III A HIPÉRBOLE

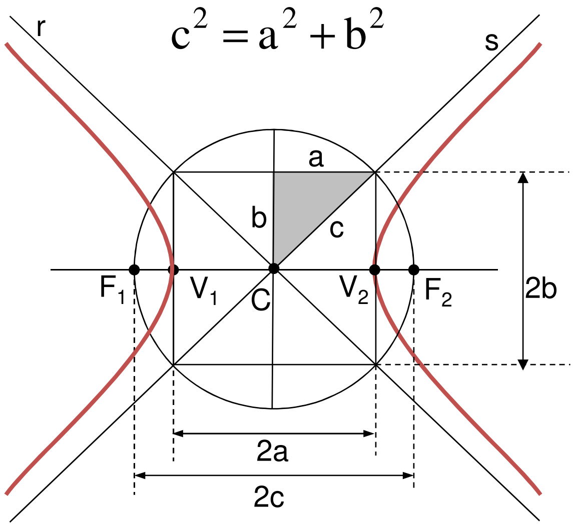
É o lugar geométrico dos pontos de um plano cuja diferença das distâncias, em valor absoluto, a dois pontos fixos desse plano é constante.

$$|d(P,F_1)-d(P,F_2)|=2a \qquad \left|\,|\overrightarrow{F_1P}|-|\overrightarrow{F_2P}|\,\right|=2a$$



2a < 2c

Elementos geométricos de uma hipérbole



Focos: pontos F_1 e F_2

Distância Focal: distância entre os focos (2c)

Centro: ponto médio C do segmento F_1F_2

Vértices: pontos V_1 e V_2

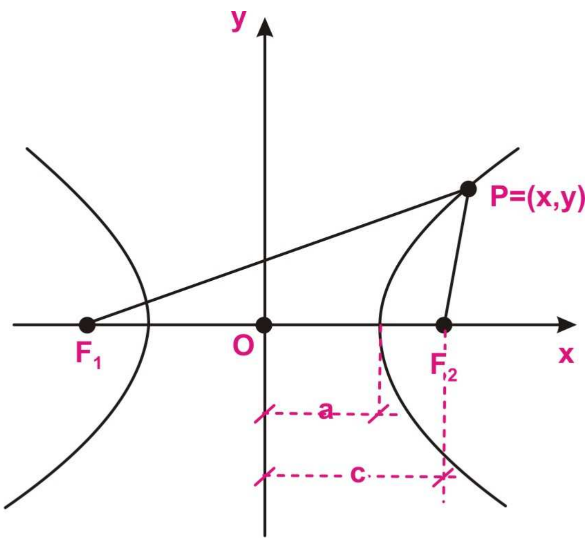
Eixo real: distância entre os vértices (2a)

Eixo imaginário: segmento B_1B_2 de comprimento 2b

Assíntotas: são as retas **r** e s das quais a hipérbole se aproxima cada vez mais à medida que os pontos de afastam dos focos.

Excentricidade: é o número $e = \frac{c}{a}$. Como c > a, e > 1

EQUAÇÃO PADRÃO (CANÔNICA) DE UMA HIPÉRBOLE.



Sejam:
P = (x, y) um ponto genérico da hipérbole
F_1 = (-c, 0)
F_2 = (c, 0)
$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a$

Equação da hipérbole → $\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$

Pois

$$|d(P,F_1) - d(P,F_2)| = 2a \Rightarrow \left|\sqrt{(x-(-c))^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2}\right| = 2a \Rightarrow$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Elevando cada membro ao quadrado,

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\pm 2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\Rightarrow (x+c)^2+y^2=\left[\pm 2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right]^2$$

desenvolvendo...

$$x^2+2xc+c^2+y^2=4a^2\mp 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2\Rightarrow$$

$$\cancel{x^2}+2xc+\cancel{c^2}+\cancel{y^2}=4a^2\mp 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\cancel{x^2}-2xc+\cancel{c^2}+\cancel{y^2}\Rightarrow$$

$$4xc=4a^2\mp 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}\Rightarrow \mp a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=xc-a^2$$

Elevando cada membro ao quadrado,

$$\mp a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=xc-a^2\Rightarrow a^2\left(x^2-2xc+c^2+y^2\right)=x^2c^2-2a^2xc+a^4$$

$$a^2\left(x^2-2xc+c^2+y^2\right)=a^4-2a^2xc+x^2c^2\Rightarrow$$

$$a^2x^2-\cancel{2a^2xc}+a^2c^2+a^2y^2=a^4-\cancel{2a^2xc}+x^2c^2\Rightarrow$$

$$a^2x^2+a^2c^2+a^2y^2=a^4+x^2c^2\Rightarrow$$

$$\left(a^2-c^2\right)x^2+a^2y^2=a^4-a^2c^2\Rightarrow$$

$$\left(a^2-c^2\right)x^2+a^2y^2=a^2\left(a^2-c^2\right)$$

Como c > a, segue que $c^2-a^2>0$

Fazendo $c^2-a^2=b^2$

** Note que aqui não estamos aplicando o teorema de Pitágoras! Apenas chamamos o número positivo c^2-a^2 de b^2, com o intuito de que a equação da hipérbole fique semelhante a já conhecida equação da elipse!

Assim,

$$\left(a^2-c^2\right)x^2+a^2y^2=a^2\left(a^2-c^2\right)\Rightarrow$$

$$-b^2x^2+a^2y^2=a^2\left(-b^2\right)\Rightarrow$$

$$-b^2x^2+a^2y^2=-a^2b^2 \underbrace{\Rightarrow}_{\div\left(-a^2b^2\right)} \boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1}$$

OBSERVAÇÕES:

a)Caso os vértices da hipérbole estivessem localizados sobre o eixo y a sua equação padrão seria

$$\boxed{\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1}$$

b) Caso a hipérbole não esteja centrada na origem a sua equação assume uma das formas a seguir dependendo se o seu eixo real (eixo que liga os seus vértices) é paralelo ao eixo x ou ao eixo y, respectivamente.

$$\boxed{\frac{(x-x_c)^2}{a^2}-\frac{(y-y_c)^2}{b^2}=1} \quad \text{ou} \quad \boxed{\frac{(y-y_c)^2}{a^2}-\frac{(x-x_c)^2}{b^2}=1}$$

Aqui (x_c, y_c) são as coordenadas do centro da hipérbole.

c)Equações das **ASSÍNTOTAS**

Já vimos que a equação padrão de uma hipérbole é $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

Isolando o y, $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{y^2}{b^2}=\frac{x^2}{a^2}-1 \Rightarrow \frac{y^2}{b^2}=\frac{x^2}{a^2}\left(1-\frac{a^2}{x^2}\right) \Rightarrow$

$$\frac{y^2}{b^2}=\frac{x^2}{a^2}\left(1-\frac{a^2}{x^2}\right) \Rightarrow y^2=\frac{b^2x^2}{a^2}\left(1-\frac{a^2}{x^2}\right) \Rightarrow y=\pm\frac{bx}{a}\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}$$

Quando x cresce, $x \to \pm\infty \rightarrow \quad y=\pm\frac{bx}{a}\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}} \Rightarrow \boxed{y \approx \pm\frac{bx}{a}}$

Quando a equação da hipérbole é do tipo: $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$

As equações das assíntotas ficam: $\boxed{y \approx \pm\frac{ax}{b}}$

Assim, as equações das assíntotas ficam:

- Eixo real // eixo x e centro na origem: $\boxed{y = \pm\frac{bx}{a}}$

- Eixo real // eixo y e centro na origem: $\boxed{y = \pm\frac{ax}{b}}$

- Eixo real // eixo x e centro fora da origem: $\boxed{y - y_c = \pm\frac{b}{a}(x - x_c)}$

- Eixo real // eixo y e centro fora da origem: $\boxed{y - y_c = \pm\frac{a}{b}(x - x_c)}$

Exemplos