Núcleo Básico das Engenharias

M002-E
Álgebra e Geometria Analítica

Cap. 1 – Álgebra Vetorial
(parte 1)

Prof. Edson J. C. Gimenez
soned@inatel.br

2019/Sem1

Referências

- Apostila de M002
- Geometria Analítica – Alfredo Steinbruch e Paulo Winterle.
- Geometria Analítica: um tratamento vetorial. Ivan de Camargo e Paulo Boulos.
- Vetores e Geometria Analítica – Paulo Winterle.

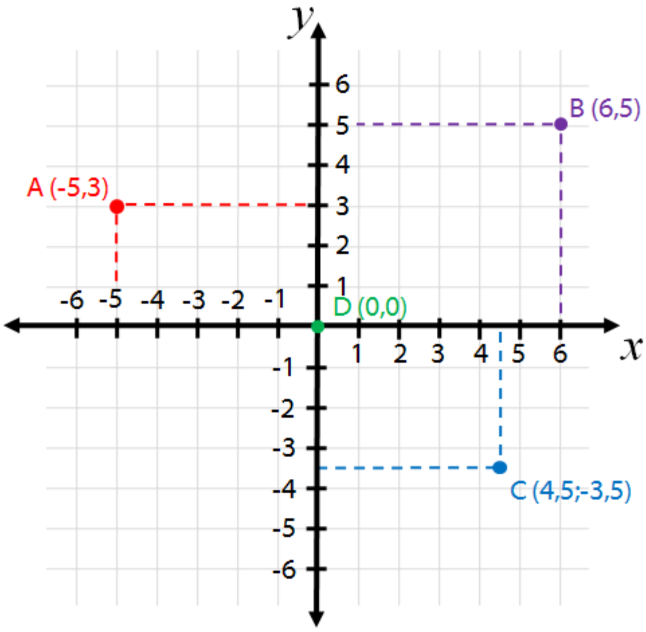
Plano Cartesiano R^2

Conjunto de todos os pares ordenados (x, y) de números reais.

$$\Re^2 = \Re x \Re = \{(x, y) | \; x \in \Re, y \in \Re \}$$

A cada par ordenado (*x, y*) é associado um ponto P do plano cartesiano, definido a partir das coordenadas cartesianas *x* e *y*.

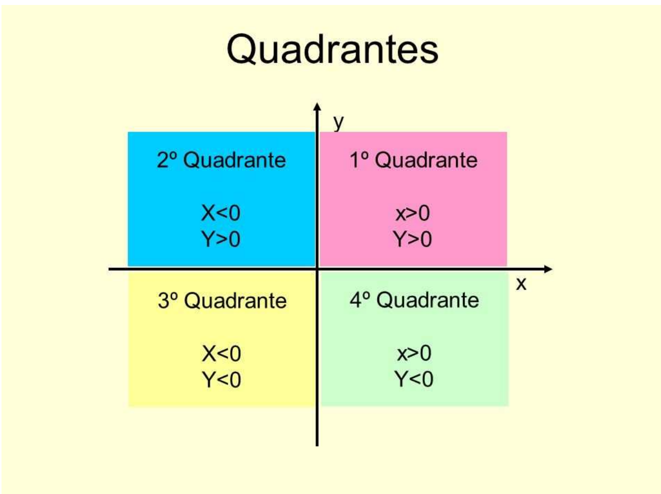
A coordenada *x* é denominada *abscissa de P* enquanto a coordenada *y* é a *ordenada de P.*



Inatel
Instituto Nacional de Telecomunicações
Plano Cartesiano

Plano Cartesiano R^2

Obs.: O plano cartesiano R^2 se divide em quatro regiões, denominadas quadrantes, conforme figura a seguir:



Exemplos

(Apostila: pág.4)

Represente geometricamente os seguintes pares ordenados:

a) (-2, 3)
b) (3, 2)
c) (2, -2)
d) (-3, -3)

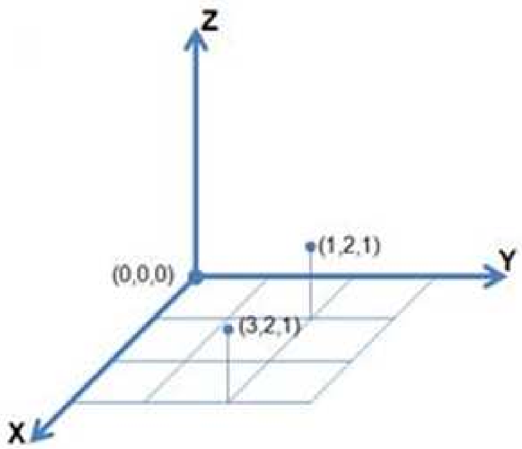
Espaço Cartesiano

Espaço Cartesiano R³

Conjunto de todas as triplas ordenadas de números reais *(x, y, z).*

$$\Re^3 = \Re \, x \, \Re \, x \, \Re = \{(x, y, z) \mid x \in \Re, y \in \Re, z \in \Re\}$$

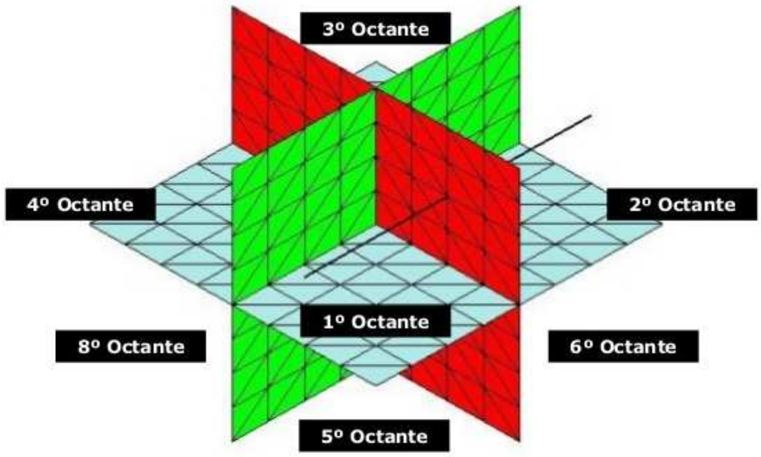
A cada tripla ordenada *(x, y, z)* é associado um ponto P no espaço, definido a partir das coordenadas cartesianas *x, y* e *z* que recebem, respectivamente, as denominações *abscissa*, *ordenada* e *cota* de *P.*



Espaço Cartesiano

Espaço Cartesiano R^3

Obs.: O espaço cartesiano R^3 se divide em oito regiões, denominadas quadrantes, conforme figura a seguir:



??? Quais os valores de x, y e z para cada octante???

Exemplos

(Apostila: pág.5)

Represente geometricamente os pontos:

a) $P_1 = (2, 3, 5)$

b) $P_2 = (4, -3, 4)$

c) $P_3 = (-3, 4, 3)$

d) $P_4 = (-2, -2, -2)$

Grandezas Escalares e Vetoriais

- GRANDEZAS ESCALARES

  Definidas e caracterizadas por um valor numérico e por uma unidade.

  Ex: comprimento, área, volume, densidade, massa, tempo, energia, potência, etc.

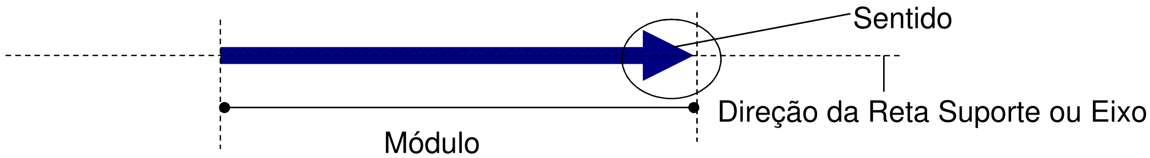
- GRANDEZAS VETORIAIS

  Exigem para sua caracterização, além de um valor numérico, uma direção e um sentido.

  Ex: deslocamento; velocidade; aceleração; força; impulso; quantidade de movimento; etc.

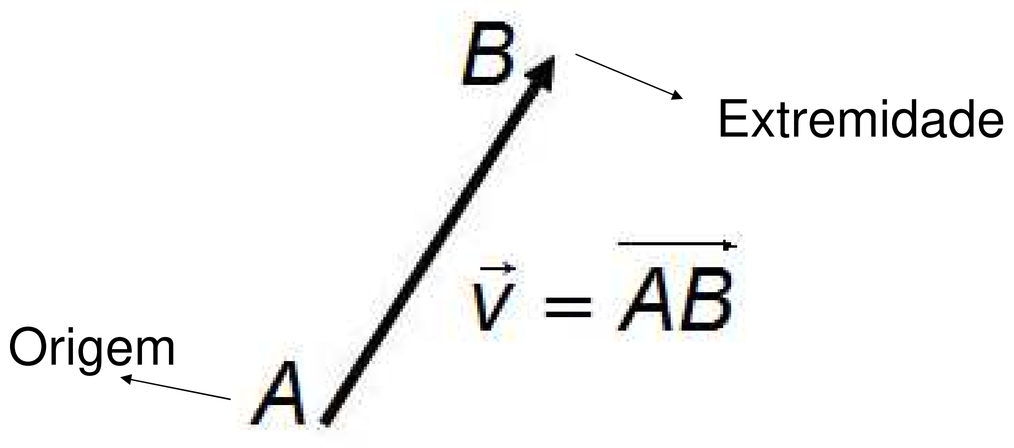
Vetor

- Para simplificar as operações envolvendo grandezas vetoriais, utiliza-se a entidade geométrica denominada **VETOR**.
- Um vetor se caracteriza por possuir **módulo**, **direção** e **sentido**, e é representado geometricamente por um segmento de reta orientado (uma flecha).
- Módulo (intensidade ou magnitude): o comprimento do segmento de reta.
- Direção: eixo em que ocorre o fenômeno
- Sentido: para onde a “flecha” aponta (para onde vai).



Vetor

Um vetor é representado por um segmento orientado indicado por uma letra minúscula com uma flecha ou pelas letras maiúsculas que representam a origem e extremidade encimadas pela flecha.



Vetor

Quando escrevemos: $\vec{V} = \overrightarrow{AB}$

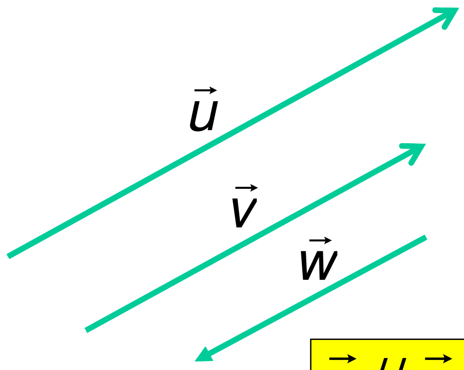
estamos afirmando que o vetor $\vec{V}$ é determinado pelo segmento orientado *AB*.
Porém, qualquer outro segmento de mesmo comprimento, mesma direção e mesmo sentido de *AB* representa, também, o vetor $\vec{V}$.

Indica-se o módulo (ou comprimento ou tamanho ou norma) de um vetor $\vec{V}$ por:

$$|\vec{V}| \quad \text{ou} \quad \|\vec{V}\| \quad \text{ou} \quad V$$

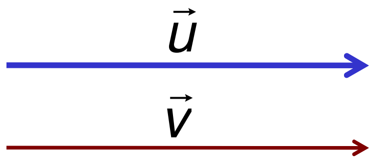
Vetor – casos particulares

VETORES QUE POSSUEM A MESMA DIREÇÃO SÃO *PARALELOS*.



$$\vec{u} \,//\, \vec{v} \,//\, \vec{w}$$

VETORES QUE POSSUEM MESMO MÓDULO, MESMA DIREÇÃO E MESMO SENTIDO SÃO *IGUAIS*.



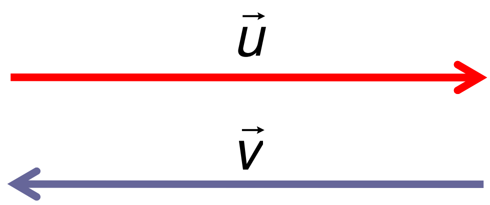
$$\vec{u} = \vec{v}$$

Vetor – casos particulares

Qualquer ponto do espaço é representante do *VETOR ZERO* (ou *VETOR NULO*). Como esse vetor não possui direção e sentido definidos, considera-se que ele seja paralelo a qualquer vetor.

$$\vec{0} = \overrightarrow{AA}$$

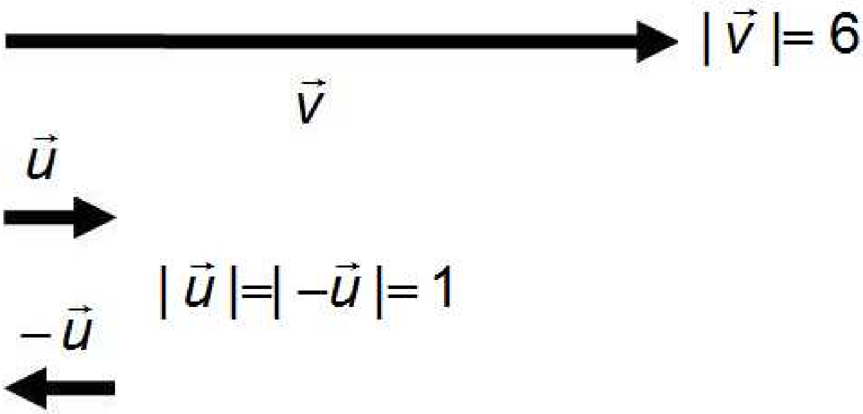
VETORES QUE POSSUEM MESMO MÓDULO, MESMA DIREÇÃO E SENTIDOS DIFERENTES SÃO *OPOSTOS*.



$$\vec{u} = -\vec{v}$$

Vetor – casos particulares

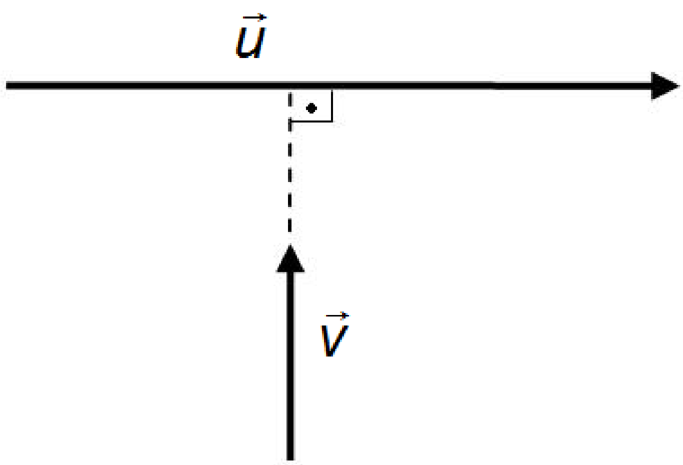
VETORES QUE POSSUEM MÓDULO IGUAL A 1 (UM) SÃO DENOMINADOS DE VETORES *UNITÁRIOS*.



$\vec{u}$ e $-\vec{u}$ são vetores unitários

Vetor – casos particulares

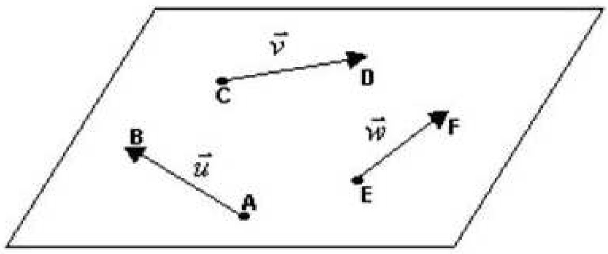
VETORES QUE FORMAM ENTREM SI UM ÂNGULO RETO SÃO DENOMINADOS DE VETORES *ORTOGONAIS*.



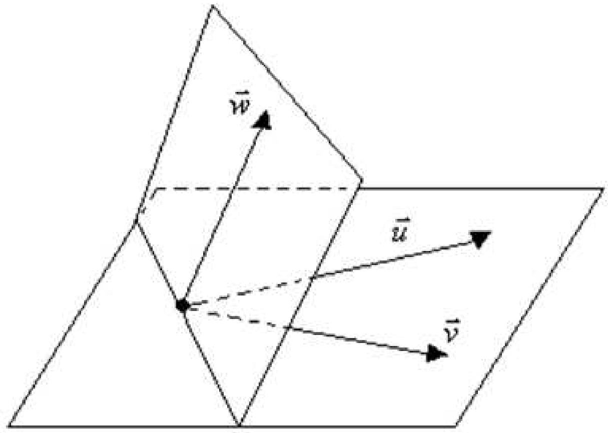
$\vec{u} \perp \vec{v}$

Vetor – casos particulares

VETORES QUE PODEM SER REPRESENTADOS NUM MESMO PLANO SÃO DENOMINADOS DE VETORES *COPLANARES*.



Vetores coplanares



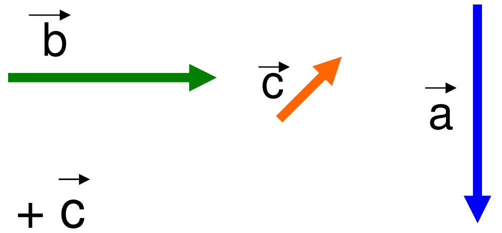
Vetores não coplanares

Soma Vetorial

- Através da soma vetorial encontramos o **vetor resultante**.
- O **vetor resultante** seria como se todos os vetores envolvidos na soma fossem substituídos por um, e este tivesse o mesmo efeito.
- Existem regras para fazer a soma vetores:
  - Regra do polígono.
  - Regra do paralelogramo.

Regra do Polígono

- É utilizada na adição de qualquer quantidade de vetores.
- Exemplo:



Determinaremos a soma $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

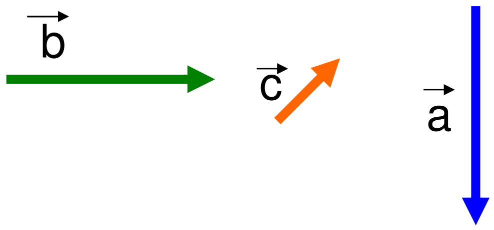
Para isto devemos posicionar cada vetor junto ao outro de forma que a extremidade de um vetor coloca-se junto à origem do outro.

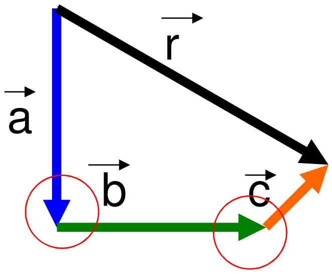
O vetor *soma*, ou também chamado vetor *resultante*, será o vetor que une a origem do primeiro com a extremidade do último, formando assim um polígono.

Regra do Polígono

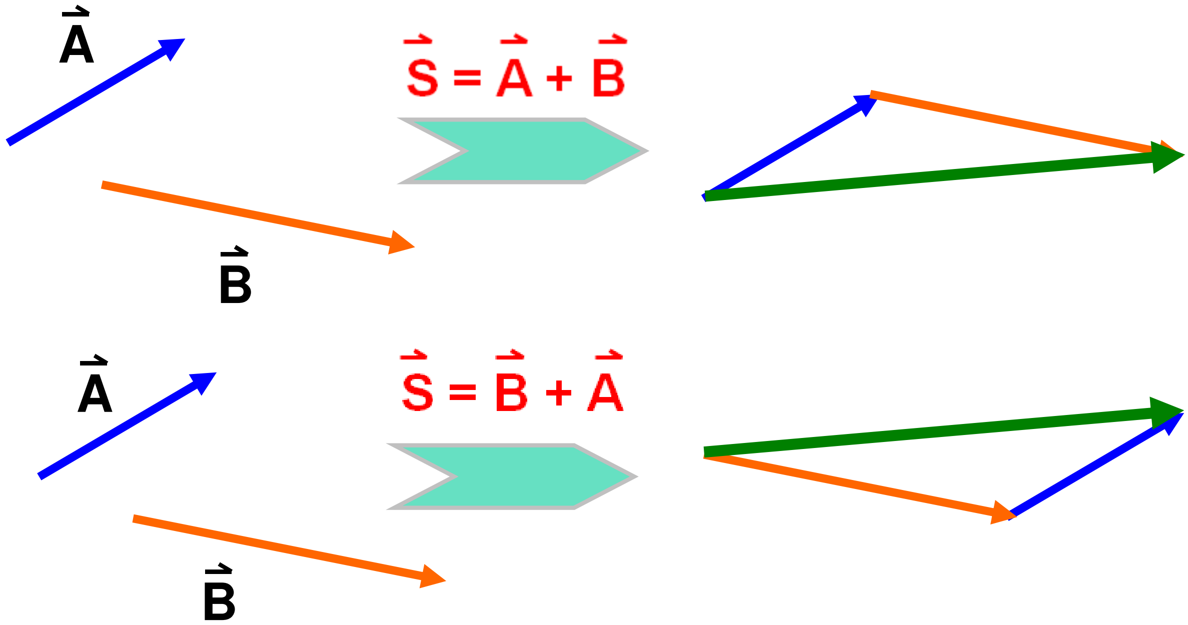
Exemplo:

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{r}$$





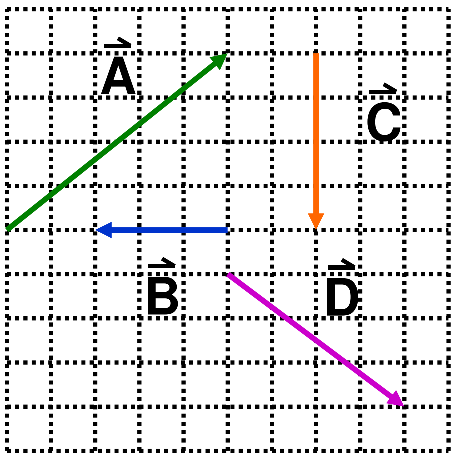
Regra do Polígono



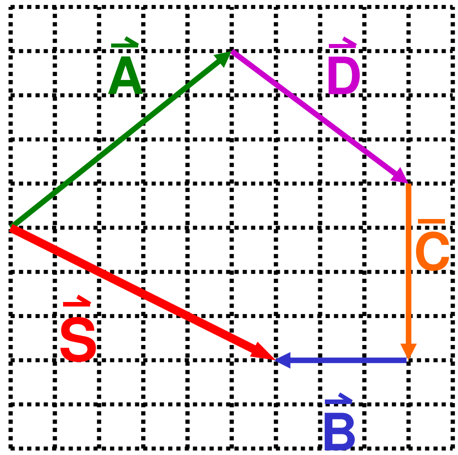
A soma vetorial é comutativa

Regra do Polígono

ADIÇÃO DE VÁRIOS VETORES



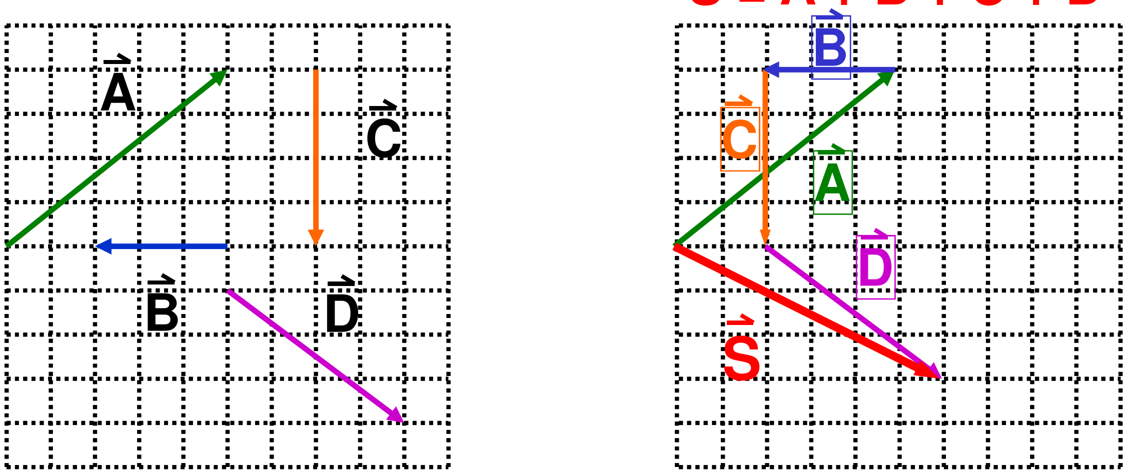
$\vec{S} = \vec{A} + \vec{D} + \vec{C} + \vec{B}$



Regra do Polígono

ADIÇÃO DE VÁRIOS VETORES

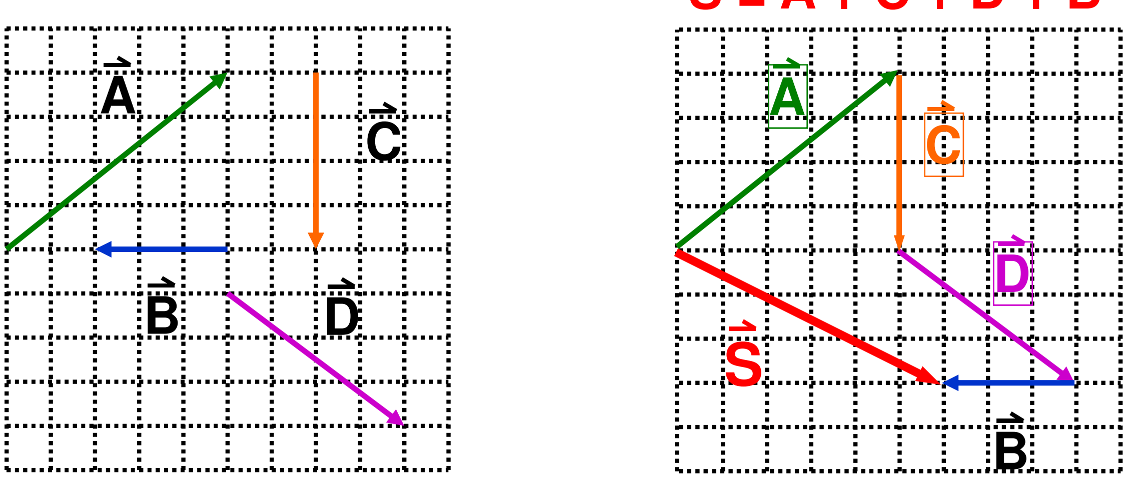
$$\vec{S} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D}$$



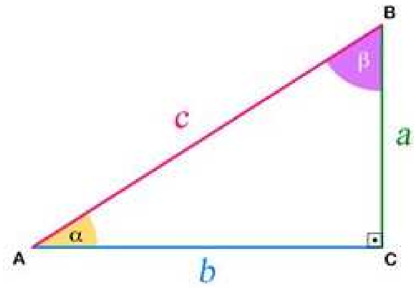
Regra do Polígono

ADIÇÃO DE VÁRIOS VETORES

$$\vec{S} = \vec{A} + \vec{C} + \vec{D} + \vec{B}$$



Recordando!



- Relações métricas: $c^2 = a^2 + b^2$

- Relações trigonométricas:

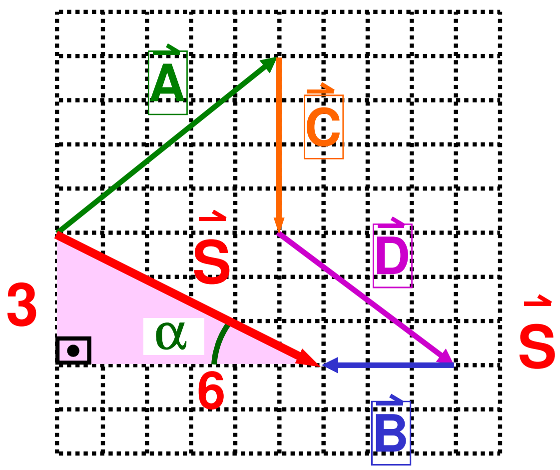
$$tg\,\alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{a}{b}$$

$$sen\,\alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{c}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{c}$$

Regra do Polígono

ADIÇÃO DE VÁRIOS VETORES



Mód: $S^2 = 6^2 + 3^2 = 45$

$S = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

Dir: α com a horizontal

Sent: 4º Quadrante

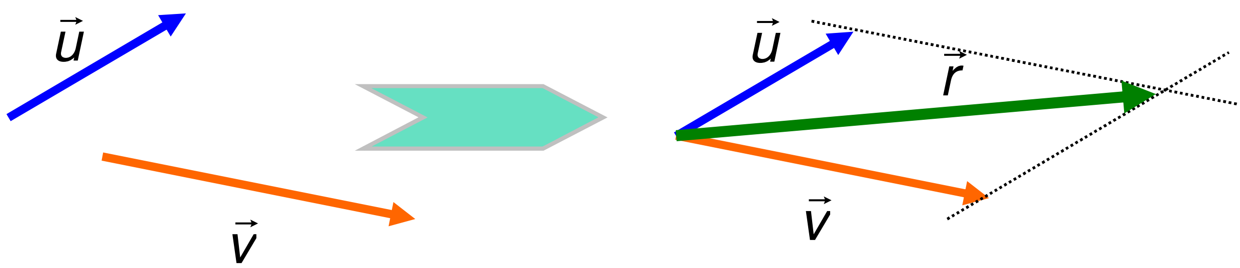
Regra do Paralelogramo

- É utilizada para realizar a adição de apenas dois vetores.
- Para isto devemos posicionar a origem dos dois vetores no mesmo ponto e traçar uma reta paralela a cada um dos vetores passando pela extremidade do outro.
- O vetor *soma*, ou vetor *resultante*, será o vetor que une a origem dos dois vetores com o cruzamento das duas retas paralelas a cada vetor, formando assim um paralelogramo.

Regra do Paralelogramo

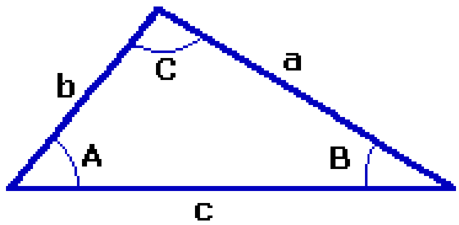
Exemplo:

Determinar a soma $\vec{u} + \vec{v}$.



$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{r}$$

Recordando!

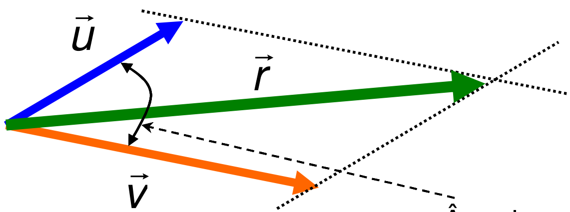


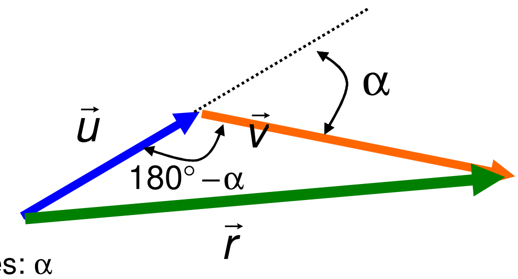
- Lei do cossenos

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(A)$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(B)$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(C)$$

- $\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \mathrm{sen} A\, \mathrm{sen} B$
- sen 180 = 0
- cos 180 = -1

Módulo do vetor resultante
Ângulo entre os vetores





Ângulo entre os vetores: α

$$r^2 = u^2 + v^2 - 2 \cdot u \cdot v \cdot \cos(180° - \alpha)$$

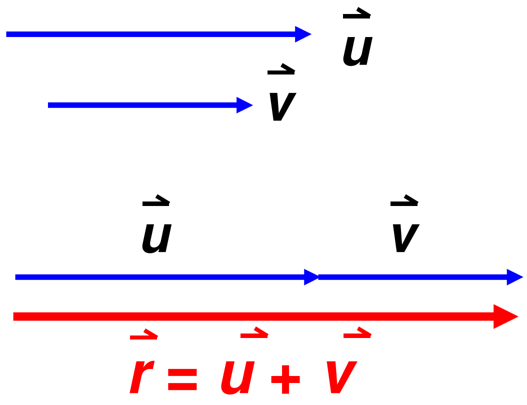
$$\cos(180° - \alpha) = \cos 180° \cos\alpha + \mathrm{sen} 180° \mathrm{sen}\alpha$$

$$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$$

$$\boxed{r^2 = u^2 + v^2 + 2 \cdot u \cdot v \cdot \cos\alpha}$$

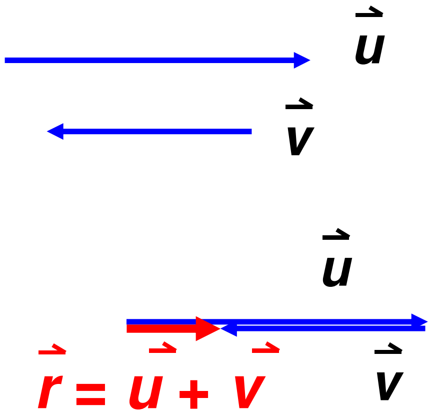
a) mesmo sentido:

$\alpha = 0°$



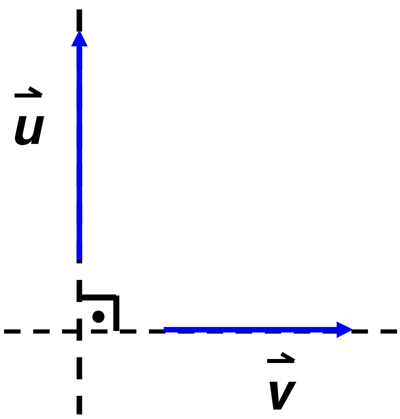
b) sentidos opostos:

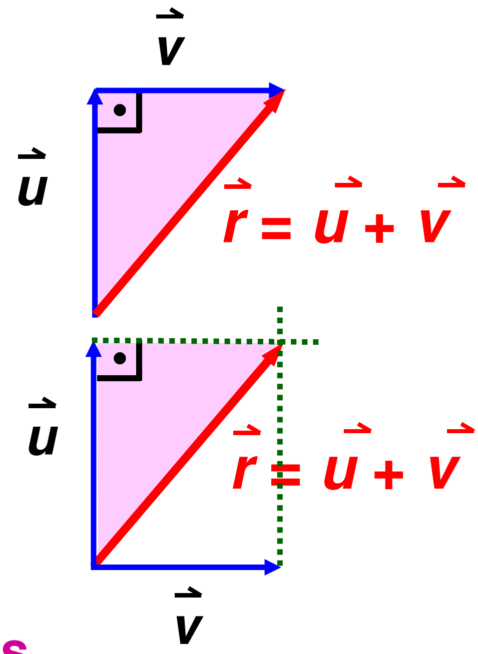
$\alpha = 180°$



c) sentidos perpendiculares:

$\alpha = 90°$





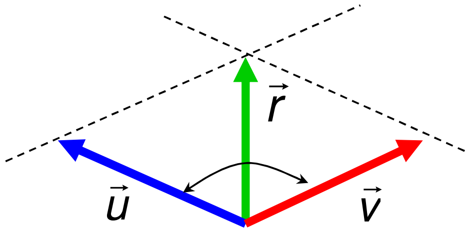
Teorema de Pitágoras

$$r^2 = u^2 + v^2$$

Casos Particulares

d) vetores de mesmo módulo e ângulo de 120°:

α = 120°



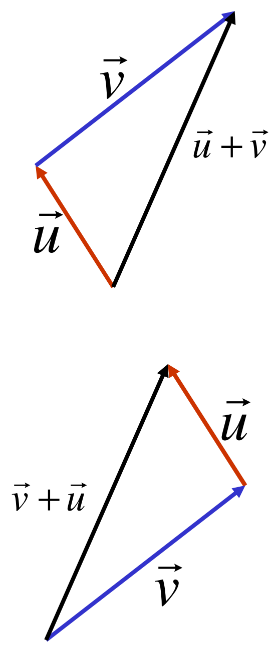
Vetores com módulos iguais

$$|\vec{r}\,|=|\,\vec{u}\,|=|\,\vec{v}\,|$$

Propriedades da Adição

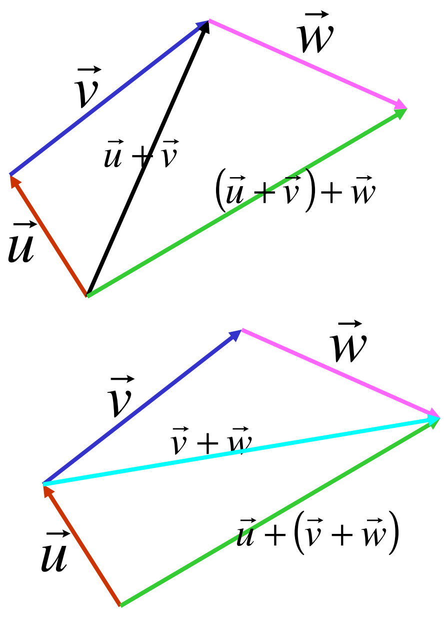
- **Propriedade Comutativa**

$$\boxed{\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}}$$



- **Propriedade Associativa**

$$\boxed{(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})}$$



- **Elemento Neutro**

$$\boxed{\vec{o}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{o}=\vec{v}}$$

- **Simétrico**

$$\boxed{(-\vec{v})+\vec{v}=\vec{v}+(-\vec{v})=\vec{o}}$$

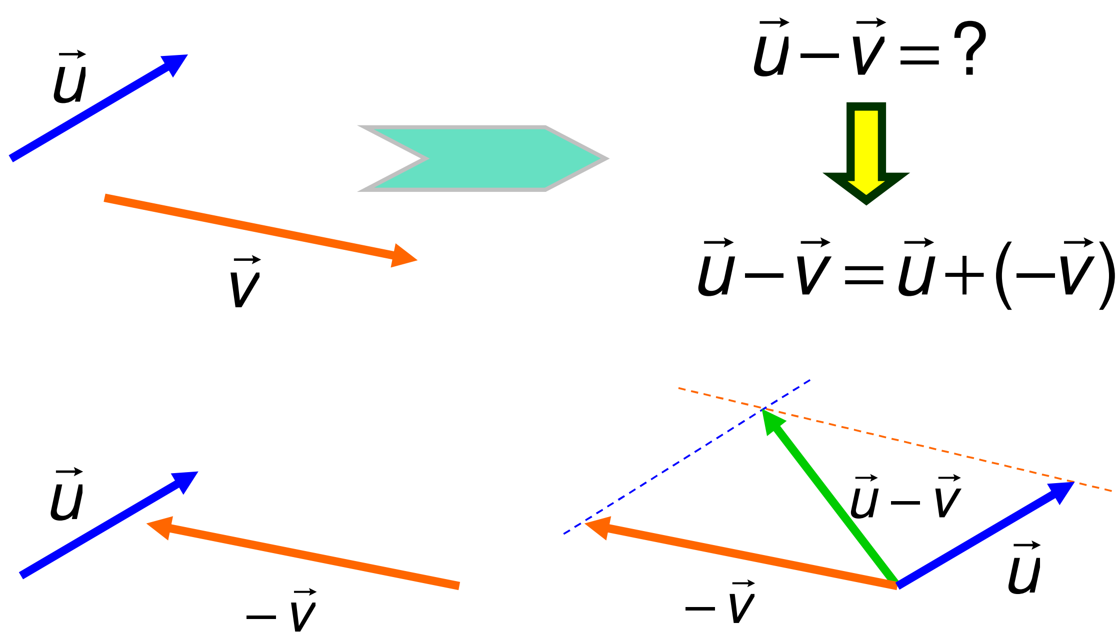
Subtração de Vetores

Realizar a subtração de dois vetores é como realizar a adição (soma) entre um vetor e seu oposto (mesma intensidade, mesma direção, mas de sentido oposto).

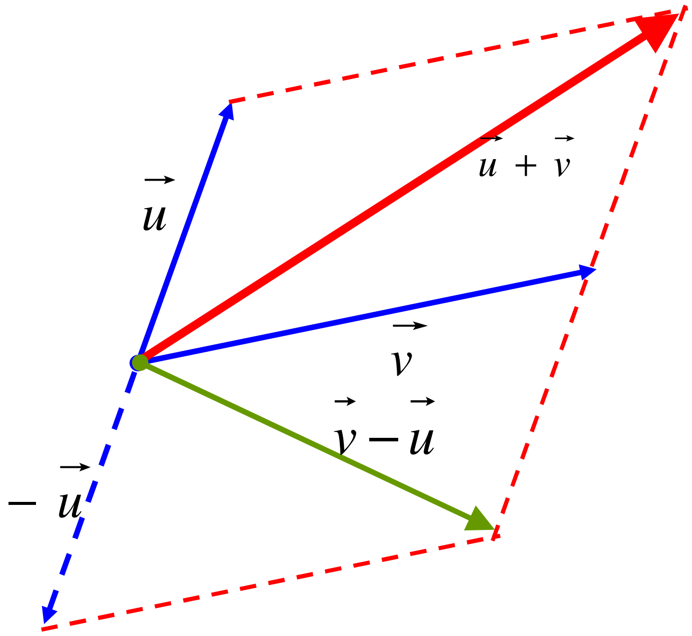
Assim, podemos definir a subtração (ou diferença) entre vetores como:

$$\boxed{\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + \left(-\vec{v}\right)}$$

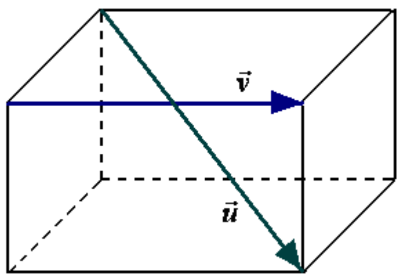
Subtração de Vetores



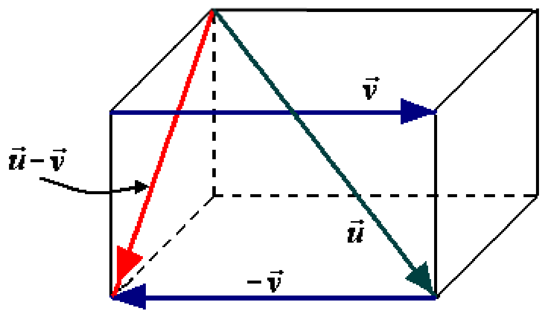
Visualizando a Soma e a Subtração de Vetores



Exemplo: Dados os vetores abaixo,destacados no paralelepípedo que segue, identifique na figura um representante para o vetor $\vec{\mathbf{u}} - \vec{\mathbf{v}}$.



Solução:



Multiplicação de um vetor por um escalar

Sendo um número real, qualquer *k*, e um vetor qualquer $\vec{u}$, temos:

$$\vec{v} = k\vec{u}$$

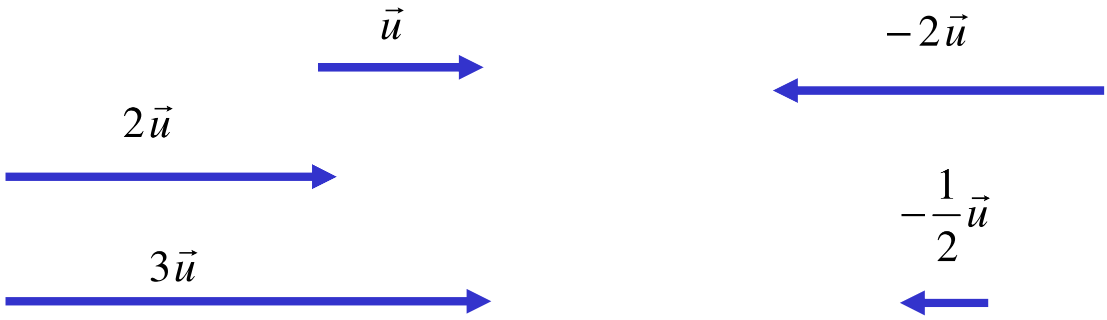
Sobre o vetor $\vec{v}$ podemos afirmar:

- tem a mesma direção de $\vec{u}$
- tem módulo dado por $\|\vec{v}\| = |k|\,\|\vec{u}\|$
- tem sentido $\begin{cases} \text{igual ao de } \vec{u} \text{ se } k > 0 \\ \text{igual ao de } -\vec{u} \text{ se } k < 0 \end{cases}$

* Se $\vec{u} = \vec{0}$ ou $k = 0$ então $k\vec{u} = \vec{0}$

* Se $k = 1$ então $k\vec{u} = \vec{u}$

Multiplicação de um vetor por um escalar

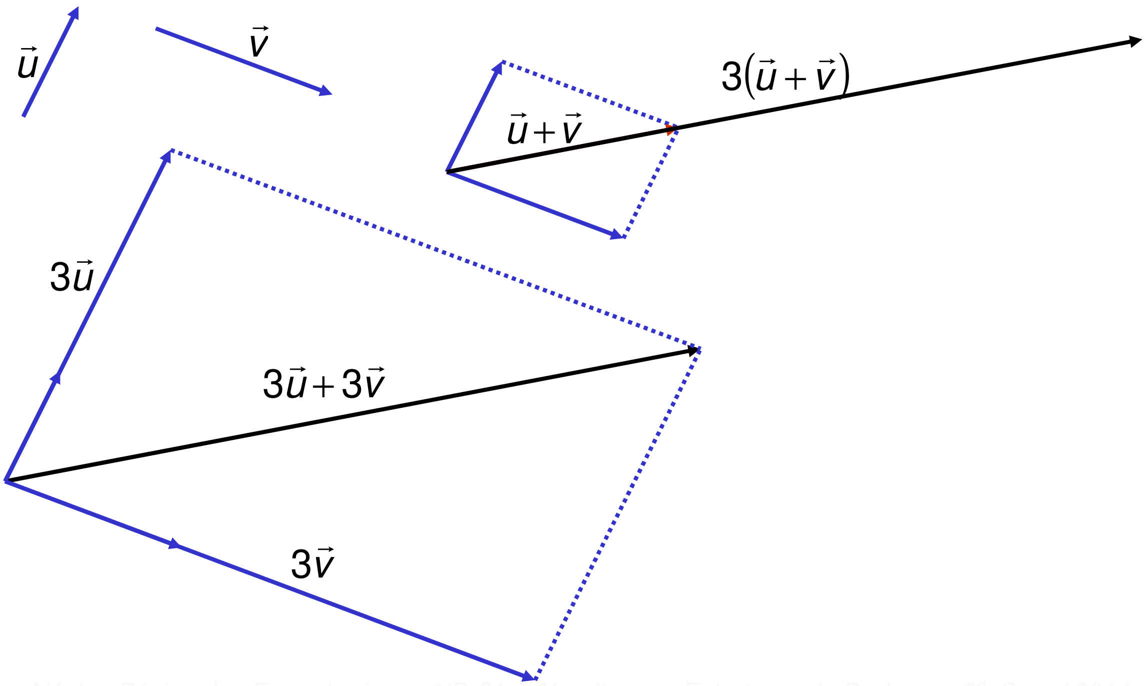


A multiplicação de um vetor por um número poderá modificar o seu módulo e/ou seu sentido, nunca sua direção.

Propriedades da Multiplicação por um escalar

- **Distributiva em relação à adição de vetores**

$$\boxed{k\left(\vec{u}+\vec{v}\right)=k\vec{u}+k\vec{v}}$$

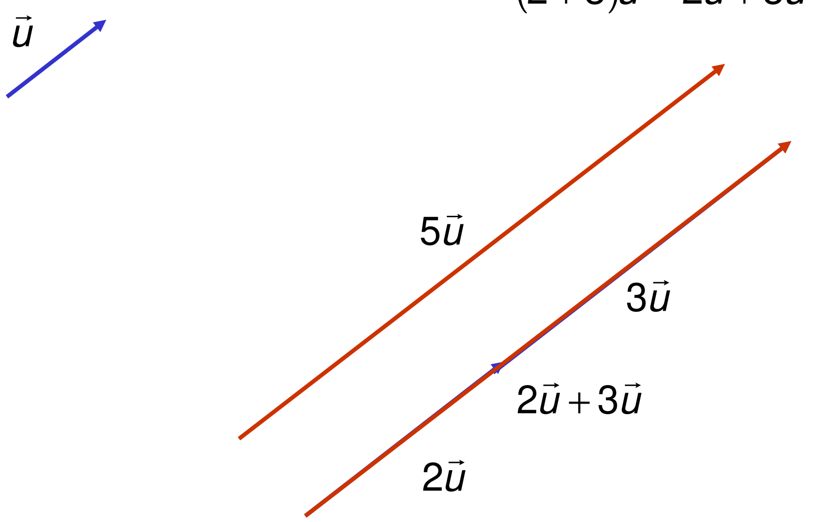


Propriedades da Multiplicação por um escalar

- **Distributiva em relação à adição de números**

$$\boxed{(k+h)\vec{u}=k\vec{u}+h\vec{u}}$$

$$(2+3)\vec{u}=2\vec{u}+3\vec{u}$$

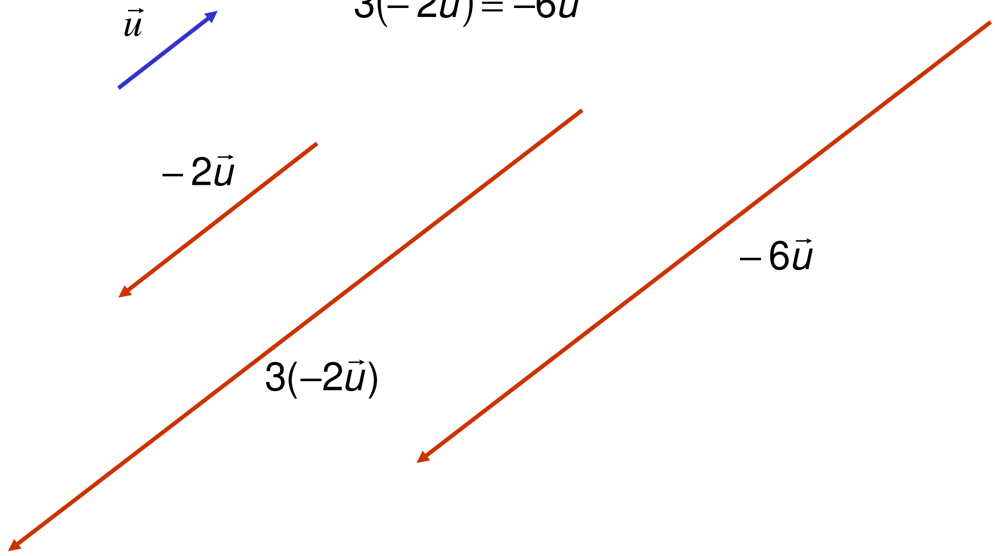


Propriedades da Multiplicação por um escalar

- **Associativa**

$$\boxed{a\left(b\vec{u}\right)=\left(ab\right)\vec{u}}$$

$$3\left(-2\vec{u}\right)=-6\vec{u}$$



Exercícios em sala 01