Método de Cholesky

Leandro Franco de Souza

Universidade de São Paulo

23 de Abril de 2020

Método de Cholesky

Para os casos onde a matriz do sistema linear é simétrica os cálculos da decomposição LU são simplificados significativamente, levando em consideração a simetria da matriz dos coeficientes. Esta é a estratégia do método de Cholesky, o qual se baseia no seguinte corolário.

Corolário 4.1 (Livro da Neide):

Se A é simétrica, positiva definida, então A pode ser escrita de forma única no produto GG^t, onde G é matriz triangular inferior com elementos diagonais positivos.

Nota!!!

Uma matriz $A_{n \times n}$ é dita ser positiva definida se $x^t A x > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$ não nulo.

Método de Cholesky

A ideia inicial para obter essa decomposição é multiplicar G por G^t e igualar a matriz A, ou seja,

$$
\begin{aligned}
A &= \underbrace{\begin{pmatrix} g_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix}}_{G} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} g_{11} & g_{21} & \cdots & g_{n1} \\ 0 & g_{22} & \cdots & g_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix}}_{G^t} \\
&= \begin{pmatrix} {g_{11}}^2 & g_{11}g_{21} & \cdots & g_{11}g_{n1} \\ g_{21}g11 & {g_{21}}^2 + {g_{22}}^2 & \cdots & g_{21}g_{n1} + g_{22}g_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1}g_{11} & g_{n1}g_{n2} + g_{n1}g_{n2} & \cdots & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} {g_{kk}}^2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Elementos diagonais de G: Os elementos a_{ii} de A são iguais ao produto da linha i de G pela coluna i de G^t.

$$
\begin{aligned}
a_{11} &= g_{11}{}^2 \\
a_{22} &= g_{21}{}^2 + g_{22}{}^2 \\
&\vdots \\
a_{ii} &= g_{i1}{}^2 + g_{i2}{}^2 + \cdots + g_{ii}{}^2 \\
&\vdots \\
a_{nn} &= g_{n1}{}^2 + g_{n2}{}^2 + \cdots + g_{nn}{}^2
\end{aligned}
$$

Logo, os elementos diagonais de G são dados por:

$$\begin{cases} g_{11} & = \sqrt{a_{11}} \\ g_{ii} & = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} g_{ik}^2}, \text{ para } i = 2, \ldots, n \end{cases} \tag{1}$$

Elementos não diagonais de G: Para melhor compreensão de como obtêm-se os elementos não diagonais separa-se a análise por colunas, assim:

1ª coluna: Os elementos da 1ª coluna de G, são obtidos igualando-se os elementos da 1ª coluna de A com o produto de cada linha de G pela 1ª coluna de G^t.

Decomposição: Método de Cholesky

$$\begin{aligned} a_{21} &= g_{21}g_{11} \\ &\dots \\ a_{nn} &= g_{n1}g_{11} \end{aligned}$$

Logo $g_{i1} = \frac{a_{i1}}{g_{11}}$, para $i = 2, \dots, n$.

2ª coluna: Os elementos da 2ª coluna de G, são obtidos igualando-se os elementos da 2ª coluna de A (abaixo da diagonal principal) com o produto de cada linha de G pela 2ª coluna de G^t.

$$\begin{aligned} a_{32} &= g_{31}g_{21} + g_{32}g_{22} \\ &\dots \\ a_{n2} &= g_{n1}g_{21} + g_{n2}g_{22} \end{aligned}$$

Decomposição: Método de Cholesky

Logo $g_{i2} = \frac{a_{i2} - g_{i1} g_{21}}{g_{22}}$, para $i = 3, \ldots, n$.

Se continuar calculando da 3ª até a penúltima coluna de G, obtêm-se a fórmula geral dada por

$$\begin{cases} g_{i1} & = \frac{a_{i1}}{g_{11}}, \text{ com } i = 2, \ldots, n \\ g_{ij} & = \frac{a_{ij} - \sum\limits_{k=1}^{j-1} g_{ik} g_{jk}}{g_{jj}}, \text{ com } 2 \leq j < i. \end{cases} \tag{2}$$

Utilizadas numa ordem conveniente, as fórmulas (1) e (2) determinam todos os elementos da matriz G. A ordem conveniente adotada é encontrar os elementos das colunas, da primeira até a ultima, ou seja, encontrar os elementos na ordem:

$$g_{11}, g_{21} \cdots, g_{n1}, g_{22}, g_{32} \cdots, g_{n2}, g_{33}, g_{43} \cdots, g_{n3}, \cdots, g_{nn}$$

Observações sobre o método de Cholesky:

1. Se A satisfaz as condições do método de Cholesky, a aplicação do método requer menos cálculos que a decomposição LU;
2. O fato de A ser positiva definida garante que na decomposição teremos somente raízes quadradas de números positivos;
3. No caso da decomposição LU tem-se que $\det(A) = u_{11} \cdot u_{22} \cdots u_{nn}$, uma vez que os elementos diagonais de L são unitários. No caso do Método de Cholesky tem-se que $A = GG^T$ e assim

$$\det(A) = \det(GG^T) = \det(G) \cdot \det(G^T) = \det(G)^2 = (g_{11} \cdot g_{22} \cdots g_{nn})^2$$

Aplicação à Solução de Sistemas Lineares

Pode-se aplicar a decomposição GG^t para obtermos a solução de sistemas lineares. Seja o sistema $Ax = b$ de ordem n determinado, onde A satisfaz as condições do processo de Cholesky. Uma vez calculado a matriz G a solução de $Ax = b$ fica reduzida, como no método da Decomposição LU , a solução do par de sistemas triangulares:

$$\begin{cases} Gy & = b \\ G^t x & = y \end{cases} \tag{3}$$

Lembrando!!!

Como decompomos a matriz A como o produto de G por G^t temos que $Ax = b$ é equivalente a $G\,\underbrace{G^t x}_{y} = b$, chegando em (3).

Método de Cholesky: MatLab/Octave