Lista de Exercícios - Método Iterativos

SME0305 - Métodos Numéricos e Computacionais I
Professor responsável: Leandro Franco de Souza — lefraso@icmc.usp.br
Estagiário PAE: Juniormar Organista — juniormarorganista@usp.br

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, ICMC - USP

Exercícios

Jacobi-Richardson

1. Usando o método de Jacobi-Richardson, obter a solução do sistema

$$\begin{cases} 10x_1 + x_2 - x_3 &= 10 \\ x_1 + 10x_2 + x_3 &= 12 \\ 2x_1 - x_2 + 10x_3 &= 11 \end{cases}$$

com 3 casas decimais corretas.

2. Dado o sistema:

$$\begin{cases} 10x_1 + x_2 - x_3 &= 10 \\ 2x_1 + 10x_2 + 8x_3 &= 20 \\ 7x_1 + x_2 + 10x_3 &= 30 \end{cases}.$$

(a) Verificar a possibilidade de aplicação do método de Jacobi-Richardson.

(b) Se possível resolvê-lo pelo método do item (a), obtendo o resultado com $\epsilon < 10^{-2}$.

Gauss-Seidel

1. Dado o sistema:

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 6x_3 &= 1 \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 &= 2 \\ -x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 3 \end{cases}.$$

Mostrar que reordenando as equações e incógnitas podemos fazer com que o critério de Sassenfeld seja satisfeito, mas não o das linhas.

2. Considere o sistema:

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 &= 7 \\ -x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + 10x_3 &= -1 \end{cases}$$

(a) Verificar a possibilidade de aplicação do método de Gauss-Seidel, usando o critério de Sassenfeld.

(b) Se possível, resolvê-lo pelo método do item (a), obtendo o resultado com $\epsilon < 10^{-2}$.

Complementares

1. Supomos que o sistema:

$$\begin{cases} x_1 - \alpha x_2 &= c_1 \\ -\alpha x_1 + x_2 - \alpha x_3 &= c_2 \\ -\alpha x_2 + x_3 &= c_3 \end{cases}$$

seja resolvido iterativamente pelas fórmulas:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} &= \alpha x_2^{(k)} + c_1 \\ x_2^{(k+1)} &= \alpha \left(x_1^{(k)} + x_3^{(k)} \right) + c_2 \\ x_3^{(k+1)} &= \alpha x_2^{(k)} + c_3 \end{cases}$$

Para que valores de α a convergência do método definido acima é garantida? Justifique.

2. Considere o sistema $Ax = b$, onde:

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -1 & 4 \\ 1 & 10 & 9 \\ 2 & -3 & -10 \end{pmatrix}; \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Entre os métodos iterativos que você conhece qual você aplicaria? Por que? Resolva-o pelo método escolhido.

3. Considere o sistema $Ax = b$, onde:

$$A = \begin{pmatrix} 50 & -1 & 4 \\ 1 & 50 & 9 \\ 2 & -3 & -50 \end{pmatrix}; \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 45 \\ 42 \\ 49 \end{pmatrix}$$

Aplique a este sistema o mesmo método aplicado no exercício anterior. Como se comparam as taxas de convergência? Por que?

4. Considere os sistemas:

$$(I) = \begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 & = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 & = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 & = 1 \end{cases}; \quad (II) = \begin{cases} 5x_1 + 4x_2 + x_3 & = 2 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 & = 2 \\ 3x_1 + 3x_2 + 6x_3 & = -9 \end{cases}$$

Aplicando os critérios que você conhece qual dos métodos iterativos será seguramente convergente? Justifique.

5. Considere o sistema:

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - x_3 & = 1 \\ 2x_1 - x_2 & = 1 \\ -x_2 + 2x_3 - x_4 & = 1 \\ -x_3 + x_4 & = 1 \end{cases}$$

Reordene as equações convenientemente e aplique o método de Gauss-Seidel com garantia de convergência.

6. Certos sistemas de equações lineares podem ser convenientemente tratados pelo método iterativo de Gauss-Seidel. Depois de uma simples generalização, o método pode ser também usado para alguns sistemas não lineares. Determinar desse modo uma solução do sistema:

$$\begin{cases} x - 0.1y^2 + 0.05x^2 & = 0.7 \\ y + 0.3x^2 - 0.1xz & = 0.5 \\ z + 0.4y^2 + 0.1xz & = 1.2 \end{cases}$$

com erro relativo inferior a 10^{-2}.

7. Considere cada um dos seguintes sistemas de 3 equações:

$$(I) = \begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 7x_3 & = 18 \\ x_1 + 6x_2 - x_3 & = 10 \\ 10x_1 - 2x_2 + 7x_3 & = 27 \end{cases}; \quad (II) = \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 & = 20 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 & = 10 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 & = 12 \end{cases}$$

(a) Sem rearranjar as equações, tente achar as soluções iterativamente, usando os métodos de Jacobi e de Gauss-Seidel, começando com $x^{(0)} = (1.01, 2.01, 3.01)^t$;

(b) Rearranje as equações de tal modo que satisfaçam os critérios de convergência e repita o que foi feito no item (a).

(c) Verifique suas soluções nas equações originais.

8. Considere o sistema:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 9 \\ 11 \end{pmatrix}$$

(a) É possível aplicar a este sistema os métodos iterativos que você conhece com garantia de convergência?

(b) Reordene as equações convenientemente de tal forma que seja possível aplicar o método de Gauss-Seidel com garantia de convergência.

9. Dado o sistema linear:

$$\begin{pmatrix} \alpha & 2 & -2 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 2 & 2 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

para que valores de α haverá convergência se desejarmos utilizar o método de Jacobi?

10. Considere o sistema linear do exercício anterior com $\alpha = 1$ e $x^{(0)} = (1, 2, 3)^t$. A aplicação do método de Jacobi fornece a tabela:

k	0	1	2	3
x_1	1	3	-1	-1
x_2	2	-2	2	2
x_3	3	-3	1	1

Existe alguma contradição com o exercício anterior? Você saberia explicar porque o método de Jacobi convergiu.

11. Considere o sistema linear $Ax = b$, onde:

$$\begin{pmatrix} 20 & 3 & 1 \\ a & 20 & 1 \\ 1 & a & 6 \end{pmatrix}$$

Para que valores de a o critério das linhas é verificado?