Calculo de Matriz inversa utilizando resolução de sistemas lineares

Leandro Franco de Souza

Universidade de São Paulo

22 de Abril de 2020

Cálculo da matriz inversa

Como vemos em Álgebra Linear, um método para obter a matriz inversa de A, denotado por A^{-1}, é realizar o escalonamento da matriz $[A|I]$, onde I é a matriz identidade. Ao terminar o escalonamento, o bloco do lado direito conterá A^{-1}.

Exemplo

Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$. Observe inicialmente que $\det(A) = 6$, logo é possível calcular A^{-1}.

Cálculo da matriz inversa

Afim de uma melhor compreensão, considere a notação $L_i^{(k)}$ representando a linha i da matriz $L^{(k)}$. Outra observação importante é a de que as operações expressas do lado direito são as realizadas para se obter a matriz seguinte, já utilizando algumas das informações da nova matriz. Assim,

$$L^{(0)} = [A|I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \leftarrow: \begin{array}{l} L_1^{(1)} := \frac{1}{2} L_1^{(0)} \\ L_2^{(1)} := L_2^{(0)} + L_1^{(1)} \\ L_3^{(1)} := L_3^{(0)} - 3L_1^{(1)} \end{array} \quad \Rightarrow$$

$$- -$$

$$L^{(1)} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3/2 & 2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 13/2 & -7 & -3/2 & 0 & 1 \end{array}\right] \leftarrow: \begin{array}{l} L_2^{(2)} := 2L_2^{(1)} \\ L_3^{(2)} := L_3^{(1)} - \frac{13}{2} L_2^{(1)} \end{array} \quad \Rightarrow$$

Cálculo da matriz inversa

$$L^{(2)} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3/2 & 2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -8 & -13 & 1 \end{array}\right] \leftarrow: \begin{array}{l} L_3^{(3)} := \frac{1}{6} L_3^{(2)} \\ L_2^{(3)} := L_2^{(2)} + 2L_3^{(3)} \\ L_1^{(3)} := L_1^{(2)} - 2L_3^{(3)} \end{array} \Rightarrow$$

$$L^{(3)} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3/2 & 0 & 19/6 & 13/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 & -5/3 & -7/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & -4/3 & -13/6 & 1/6 \end{array}\right] \leftarrow: \ L_1^{(4)} := L_1^{(3)} + \frac{3}{2} L_2^{(3)}$$

$$L^{(4)} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2/3 & 5/6 & 1/6 \\ 0 & 1 & 0 & -5/3 & -7/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & -4/3 & -13/6 & 1/6 \end{array}\right].$$

Logo $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2/3 & 5/6 & 1/6 \\ -5/3 & -7/3 & 1/3 \\ -4/3 & -13/6 & 1/6 \end{bmatrix}$

Cálculo da matriz inversa

Observe que os cálculos para determinar a matriz inversa de A, no exemplo anterior, são equivalentes a resolver 3 sistemas lineares utilizando o método de eliminação de Gauss com a mesma matriz A e os vetores da base canônica $e^1 = [1, 0, 0]^T$, $e^2 = [0, 1, 0]^T$ e $e^3 = [0, 0, 1]^T$ como os termos independentes dos sistemas lineares, ou seja,

$$A\mathsf{x}^i = e^i, \text{ com } i = 1, 2, 3.$$

Por fim $A^{-1} = [\mathsf{x}^1, \mathsf{x}^2, \mathsf{x}^3]$ (Verifique este fato!).

Cálculo da matriz inversa

De modo geral, o fato apresentado vale para matrizes de ordem n qualquer, desde que a matriz possua inversa, bastando resolver n sistemas lineares com a mesma matriz A e os vetores da base canônica $e^i = [0, ..., 0, \underbrace{1}_{i}, 0, ...0]^T$ tal que

$$A\mathsf{x}^i = e^i, \text{ com } i = 1, \ldots, n.$$

Por fim, tem-se que

$$A^{-1} = [\mathsf{x}^1, \ldots, \mathsf{x}^n].$$

Cálculo da matriz inversa

Para resolver os n sistemas lineares com intuito de inverter uma matriz pode-se utilizar qualquer um dos métodos apresentados em sala, desde que a matriz a ser invertida satisfaça as condições do método escolhido. A saber pode-se utilizar os métodos:

1. Método de decomposição LU;
2. Método de Cholesky;
3. Método de Eliminação de Gauss;
4. Método de Eliminação de Gauss compacto;