Autovalores e Autovetores

Leandro Franco de Souza

Universidade de São Paulo

19 de Maio de 2020

Relembrando com um exemplo!!!

Relembraremos o conceito de autovalor e autovetor com um exemplo.

Exemplo:

Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Determinar os autovalores e autovetores de A.

Solução:

Desejamos encontrar um escalar λ e um vetor não-nulo $v = (v_1, v_2)^t$ tais que $Av = \lambda v$, ou seja,

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

Equivalentemente,

Relembrando com um exemplo!!!

Solução:

$$\begin{cases} 3v_1 + 4v_2 = \lambda v_1 \\ 2v_1 + v_2 = \lambda v_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3-\lambda)v_1 + 4v_2 = 0 \\ 2v_1 + (1-\lambda)v_2 = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Para que o sistema homogêneo tenha solução não nula, o determinante da matriz dos coeficientes deve ser igual a zero, ou seja,

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} &= (3-\lambda)(1-\lambda) - 2\cdot 8 \\ &= \lambda^2 - 4\lambda - 5 \\ &= (\lambda-5)(\lambda+1) = 0 \end{aligned}$$

Assim, $\lambda = 5$ e $\lambda = -1$ são os autovalores de A.

Relembrando com um exemplo!!!

Solução:

Para determinar os autovetores associados aos autovalores $\lambda = 5$ e $\lambda = -1$, devemos substituir esses valores no sistema (1). Assim para $\lambda = 5$ temos,

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} (3-5)v_1 & + & 4v_2 & = & 0 \\ 2v_1 & + & (1-5)v_2 & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccc} -2v_1 & + & 4v_2 & = & 0 \\ 2v_1 & - & 4v_2 & = & 0 \end{array} \right.$$

ou simplesmente, $v_1 - 2v_2 = 0 \Rightarrow v_1 = 2v_2$. Assim $v = (v_1, v_2)^t = (2, 1)^t$ é um autovetor correspondente ao autovalor $\lambda = 5$.

De maneira análoga obtém-se que $v = (v_1, v_2)^t = (1, -1)^t$ é um autovetor correspondente ao autovalor $\lambda = -1$.

Motivação

- Autovalores e autovetores estão presentes em diferentes ramos da matemática incluindo sistemas diferenciais, problemas de otimização. Podem ser também usados para resolver problemas de diversos campos, como economia, teoria da informação, eletrônica, teoria de controle e muitos outros.
- A menos que a matriz seja de ordem baixa ou que tenha muitos elementos iguais a zero, a expansão direta do determinante para a determinação do polinômio característico é ineficiente.
- Assim os métodos numéricos que estudaremos são obtidos sem fazer uso do cálculo do determinante. Tais métodos podem ser divididos em três grupos:
  1. Métodos que determinam o polinômio característico;
  2. Métodos que determinam alguns autovalores;
  3. Métodos que determinam todos os autovalores.

Métodos de Leverrier e Leverrier-Faddeev

- Os métodos de Leverrier e Leverrier-Faddeev são do tipo que determinam o polinômio característico.
- Para cada um dos métodos numéricos mencionados acima, necessitamos do seguinte resultado.

Teorema 7.1 - (Teorema de Newton)

Seja o polinômio $P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$, cujas raízes são $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Seja ainda

$$s_k = \sum_{i=0}^{n} x_i^k, \quad 1 \leq k \leq n,$$

então

$$k a_k + \sum_{i=0}^{k-1} a_i s_{k-i} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Exemplo de aplicação do **Teorema 7.1**

Exemplo 7.1

Sejam $s_1 = 6$, $s_2 = 14$, $s_3 = 36$ as somas das potências das raízes de um polinômio $P(x)$. Determinar $P(x)$. Pelo **Teorema 7.1** e considerando $a_0 = 1$, temos que

- $k = 1 \;\Rightarrow 1a_1 + (a_0 s_1) = 0 \Rightarrow a_1 = -a_0 s_1 \Rightarrow a_1 = -6$
- $k = 2 \;\Rightarrow 2a_2 + (a_0 s_2 + a_1 s_1) = 0 \Rightarrow 2a_2 = -a_0 s_2 - a_1 s_1 \Rightarrow a_2 = 11$
- $k = 3 \;\Rightarrow 3a_3 + (a_0 s_3 + a_1 s_2 + a_2 s_1) = 0 \Rightarrow$
  $\Rightarrow 3a_3 = -a_0 s_3 - a_1 s_2 - a_2 s_1 \Rightarrow a_3 = -6$

Portanto o polinômio procurado é

$$P(x) = \underbrace{1}_{a_0} x^3 \underbrace{-6}_{a_1} x^2 \underbrace{+11}_{a_2} x \underbrace{-6}_{a_3}.$$

Método de Leverrier

- Usaremos a seguinte notação para o polinômio característico de uma matriz A, de ordem n :

$$P(\lambda) = (-1)^n \left[\lambda^n - p_1\lambda^{n-1} - p_2\lambda^{n-2} - \ldots - p_{n-1}\lambda^n - p_n\right] \qquad (2)$$

Deduziremos a seguir o Método de Leverrier.

- De fato, dada uma matriz A quadrada de ordem n e $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ seus autovalores, isto é, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ são os zeros do polinômio (2). Fazendo

$$s_k = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k, \quad 1 \leq k \leq n \qquad (3)$$

então, pelo **Teorema 7.1**, temos que:

$$kp_k = s_k - p_1 s_{k-1} - \ldots - p_{k-1} s_1, \quad 1 \leq k \leq n. \qquad (4)$$

Método de Leverrier

- Assim se conhecermos os $s_k, \quad 1 \leq k \leq n$, poderemos determinar os coeficientes $p_1, p_2, \ldots, p_n$ de $P(\lambda)$.
- Vejamos então como determinar as somas parciais s_k.
- Fazendo expansão direta do determinante de $A - \lambda I$, o coeficiente de λ_{n-1} em $P(\lambda)$ é $(-1)^{n-1}\left[a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}\right].$
- Por outro lado esse mesmo coeficiente em (2) é $(-1)^{n-1}p_1$. Logo devemos ter:

$$p_1 = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn} = tr(A) \tag{5}$$

- Além disso, de (4), $s_1 = p_1$, e portanto $s_1 = tr(A)$, isto é, a soma dos autovalores da matriz A é igual ao traço de A.
- Então, desde que os autovalores de A^k são a k^a potência dos autovalores de A, assim temos que:

$$s_k = tr(A^k)$$

Método de Leverrier

- Assim os números $s_1, s_2, \ldots, s_n$ são obtidos através do cálculo das potências de A e (4) pode ser usada para determinar os coeficientes do polinômio característico.
- Para determinar as raízes do polinômio característico pode-se utilizar os métodos numéricos estudados para tal, e assim obtemos os autovalores de A.

Exemplo do método de Leverrier

Seja

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Determinar seus autovalores usando o Método de Leverrier.

Solução:

Temos que

$$s_1 = tr(A) = 1$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow s_2 = tr(A^2) = 5$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow s_3 = tr(A^3) = 1$$

Solução (continuação):

Usando (4), obtemos:

$$\begin{aligned} p_1 &= s_1 \Rightarrow p_1 = 1 \\ 2p_2 &= s_2 - p_1 s_1 \Rightarrow p_2 = 2 \\ 3p_3 &= s_3 - p_1 s_2 - p_2 s_1 \Rightarrow p_3 = -2 \end{aligned}$$

De (2), segue que:

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= (-1)^3 \left[\lambda^3 - p_1\lambda^2 - p_2\lambda - p_3\right] \\ &= -\left[\lambda^3 - \lambda^2 + 2\lambda - 2\right] \\ &= -\lambda^3 + \lambda^2 - 2\lambda + 2 \end{aligned}$$

Método de Leverrier

Solução (continuação):

Para determinar os autovalores de A basta determinar os zeros de $P(\lambda)$. E fácil verificar que $\lambda = 1$ é uma raiz de $P(\lambda)$, assim podemos reescrever $P(\lambda) = (\lambda - 1)\left(-\lambda^2 + 2\right)$

MatLab/Octave

Programar o método de Leverrier no MatLab/Octave

Método de Leverrier-Faddeev

- Uma modificação do método de Leverrier, simplifica os cálculos dos coeficientes do polinômio característico e fornece, em alguns casos, os autovetores de A.
- Para descrever tal método, definimos uma sequência de matrizes $A_1, \ldots, A_n$ da seguinte forma

$$\begin{aligned}
A_1 &= A, \quad q_1 = tr(A_1), \quad B_1 = A_1 - q_1 I; \\
A_2 &= AB_1, \quad q_2 = \frac{tr(A_2)}{2}, \quad B_2 = A_2 - q_2 I; \\
A_3 &= AB_2, \quad q_3 = \frac{tr(A_3)}{3}, \quad B_3 = A_3 - q_3 I; \qquad (6) \\
&\vdots \\
A_n &= AB_{n-1}, \quad q_n = \frac{tr(A_n)}{n}, \quad B_n = A_n - q_n I;
\end{aligned}$$

Propriedades da sequência: $A_1, \ldots, A_n$

1. Os termos q_k obtidos na sequência (6), são os coeficientes do polinômio característico (2), isto é, $q_k = p_k$, para $k = 1, 2, \ldots, n$.
2. Se A é uma matriz de ordem n, então $B_n = \Theta$ (matriz nula).
3. Se A é uma matriz não singular, de ordem n, então

$$A^{-1} = \frac{1}{p_n} B_{n-1}.$$

Método de Leverrier-Faddeev

Observações:

- Com o método de Leverrier-Faddeev, obtemos o polinômio característico de A. Para determinar seus autovalores basta determinar os zeros de $P(\lambda)$.
- Se ao fazer os cálculos B_n resultar numa matriz diferente da matriz nula, você terá cometido erros de cálculo.
- Como $B_n = \Theta$ e $B_n = A_n - p_n I$ então A_n é uma matriz diagonal com todos os elementos não nulos iguais a p_n.
- Se A é singular então $p_n = 0$. Nesse caso $\lambda = 0$ é um autovalor de A.

Cálculo dos Autovetores

- Sejam $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ autovalores distintos de A, então cada coluna não nula da matriz

$$Q_k = \lambda_k^{n-1} I + \lambda_k^{n-2} B_1 + \ldots + \lambda_k B_{n-2} + B_{n-1} \tag{7}$$

é um autovetor correspondente ao autovalor λ_k.

- Ao invés de determinarmos a matriz Q_k, é muito mais vantajoso calcularmos apenas uma coluna u de Q_k, da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} u_0 &= e \\ u_i &= \lambda_k u_{i-1} + b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1. \end{aligned} \tag{8}$$

onde e é uma coluna adotada da matriz identidade e b_i é sua correspondente coluna da matriz B_i, isto é, se adotamos e como sendo a i-ésima coluna da matriz identidade então $b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}$ em (8) serão, respectivamente, a i-ésima coluna das matrizes $B_1, B_2, \ldots, B_{n-1}$.

Cálculo dos Autovetores

- Logo, $u = u_{n-1}$ é o autovetor correspondente ao autovalor λ_k. Note que em (8), i varia de 1 até $n-1$ pois $B_n = \Theta$.

Exemplo do método de Leverrier-Faddeev

Considere a matriz dada por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

. Usando o método de Leverrier-Faddeev, determinar:

a. Polinômio característico;
b. Autovalores e correspondentes autovetores;
c. A^{-1}.

Solução:

Item (a): Para determinar o polinômio característico devemos construir a sequência A_1, A_2, A_3. Assim, usando (6), obtemos:

$$A_1 = A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow p_1 = tr(A_1) \Rightarrow p_1 = 1$$

Logo

$$B_1 = A_1 - p_1 I \Rightarrow B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Solução (continuação):

Agora

$$A_2 = AB_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow p_2 = \frac{tr(A_2)}{2} \Rightarrow p_2 = \frac{4}{2} = 2$$

e

$$B_2 = A_2 - p_2 I \Rightarrow B_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Por fim

$$A_3 = AB_2 \Rightarrow A_3 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Solução (continuação):

Assim

$$p_3 = \frac{tr(A_3)}{3} \Rightarrow p_3 = \frac{-6}{3} = -2.$$

Afim de que tenhamos indícios de que os cálculos corretos, façamos

$$B_3 = A_3 - p_3 I \Rightarrow B_3 = \Theta.$$

Portanto, de (2), segue que

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= (-1)^3 \left[\lambda^3 - p_1\lambda^2 - p_2\lambda - p_3\right] \\ &= -\left[\lambda^3 - \lambda^2 + 2\lambda - 2\right] \\ &= -\lambda^3 + \lambda^2 - 2\lambda + 2 \end{aligned}$$

Como já vimos no exemplo de método de Leverrier, as raizes são $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -\sqrt{2}$ e $\lambda_3 = \sqrt{2}$.

Solução (continuação):

Item (b): Encontraremos o autovetor associado ao autovalor λ_1, os demais são deixados como exercício. De fato, para $\lambda_1 = 1$, seja $e = (1, 0, 0)^t$. Assim:

$$
\begin{aligned}
u_0 &= e \Rightarrow u_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
u_1 &= \lambda_1 u_0 + b_1 \Rightarrow u_1 = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Solução (continuação):

$$u_2 \;=\; \lambda_1 u_1 + b_2 \Rightarrow u_2 = 1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Logo $u = (0, -1, -1)^t$ é um autovetor correspondente ao autovalor $\lambda_1 = 1$.
Item (c): Pelas propriedades apresentadas, temos que

$$A^{-1} = \frac{1}{p_3} B_2 \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Método de Leverrier-Faddeev

MatLab/Octave

Programar o método de Leverrier-Faddeev no MatLab/Octave