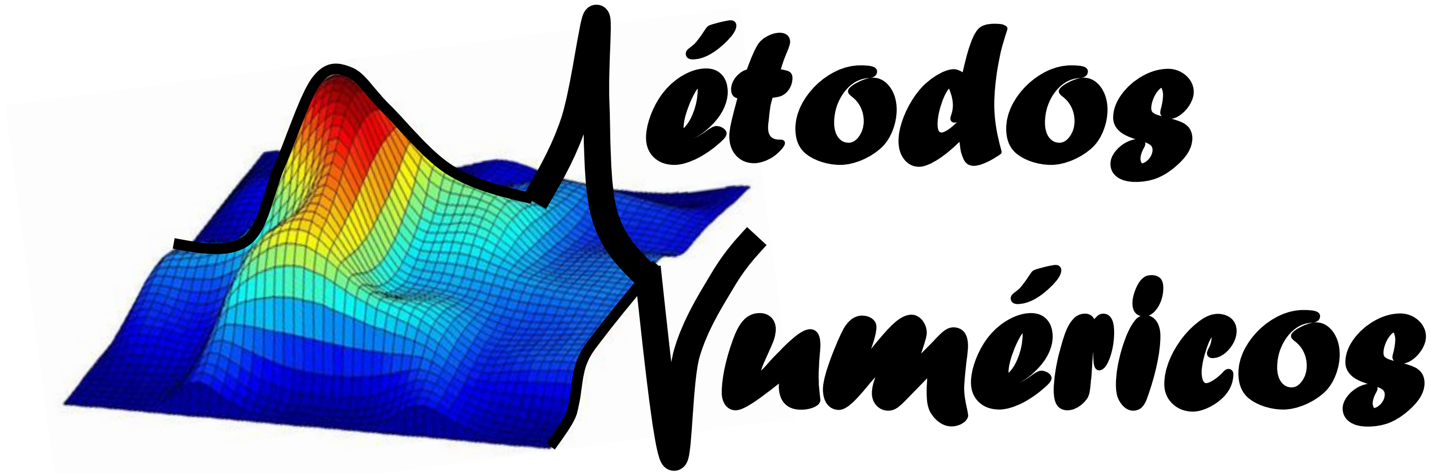



# SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES
## (Continuação)

**Prof. Erivelton Geraldo Nepomuceno**

**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA**

**UNIVERSIDADE DE JOÃO DEL-REI**
**PRÓ-REITORIA DE PESQUISA**

**CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS**
**DIRETORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO**

UFSJ
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO JOÃO DEL-REI

CEFET-MG

**2016**

Métodos Numéricos

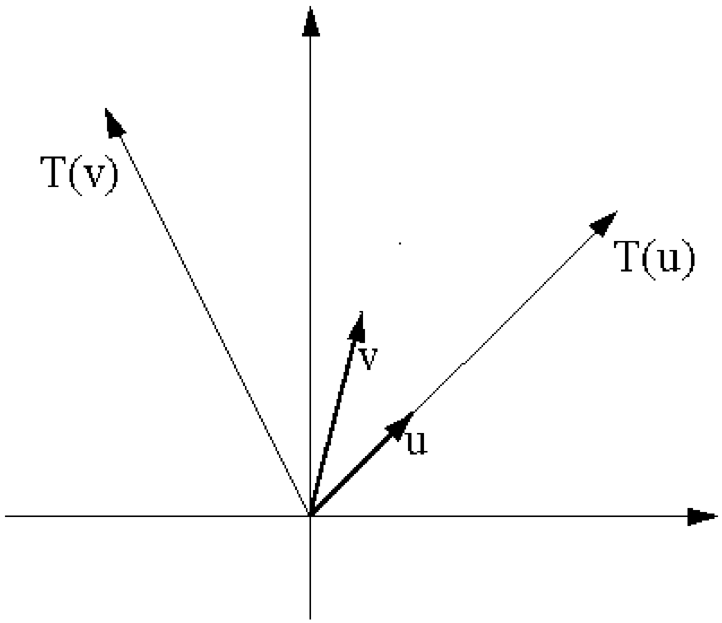
# Determinação Numérica de Auto-Valores e Auto-Vetores

# Introdução

- Seja uma <u>transformação linear</u> especial: $T(v) = \lambda v$
- Onde, $\lambda$ é o auto-valor (escalar) e v é auto-vetor ($v \geq 0$).
- Como toda transformação linear pode ser escrita pela multiplicação de uma matriz por um vetor então: $T(v) = Av$
- Logo: $Av = \lambda v$ ou $Av - \lambda v = 0$ que resulta no sistema homogêneo: $(A - \lambda I)\, v = 0$ tem solução diferente da trivial somente se o determinante da matriz dos coeficientes é igual a zero.
- Sendo **A** a matriz canônica que representa um operador linear T, tem-se:
  - Auto-valores $\lambda$ de T ou de A: são as raízes da equação $\det(A - \lambda I) = 0$,
  - Auto-vetores v de T ou de A: para cada $\lambda$, são as soluções da equação $Av = \lambda v$ ou $(A - \lambda I)v = 0$.

# Introdução

## Interpretação Geométrica




Um significado prático:

- Os auto-vetores são vetores que, sob a ação de um operador linear, resultam num vetor de mesma direção. Os auto-vetores estão sempre ligados ao operador linear, ou seja, cada operador linear admite um conjunto específico de auto-vetores.
- Para cada auto-valor ʎ, podem existir vários auto-vetores v tais que T(v) = ʎv. Esses são auto-vetores associados ao auto-valor ʎ. Haverá infinitos auto-vetores associados a cada auto-valor, exceto no caso de um espaço vetorial finito.

- **u** é auto-vetor de T pois existe $\lambda \in$ R tal que T(**u**) = $\lambda$**u**.
- **v** não é auto-vetor de T pois existe $\lambda \in$ R tal que T(**v**) = $\lambda$**v**.

# Introdução

**Propriedades dos Auto-valores e dos Auto-vetores:**

1. A soma dos auto-valores de uma matriz é igual ao seu traço, que é a soma dos elementos de sua diagonal principal;
2. Auto-vetores correspondentes a diferentes auto-valores são linearmente independentes;
3. Uma matriz é singular só, e só se, tiver um auto-valor nulo;
4. Se X for um auto-vetor de A correspondente ao auto-valor $\lambda$, e se A for inversível, então X é um auto-vetor de $A^{-1}$, correspondente ao auto-valor $1/\lambda$;
5. Se X for um auto-vetor de A, então kX também o será, para qualquer $k \neq 0$, e ambos X e kX correspondem ao mesmo auto-valor $\lambda$.
6. Uma matriz com elementos reais tem auto-valores reais e/ou complexos conjugados em pares.

# Introdução

**Propriedades dos Auto-valores e dos Auto-vetores:**

7. Uma matriz e sua transposta possuem os mesmos auto-valores;
8. Os auto-valores de uma matriz triangular superior ou inferior são os valores de sua diagonal principal;
9. O produto de todos os auto-valores de uma matriz, considerando sua multiplicidade, é igual ao determinante desta matriz;
10. Se X for um auto-vetor de A correspondente ao auto-valor $\lambda$, então X é um auto-vetor de (A-cI), correspondente ao auto-valor $\lambda$ -c, para qualquer escalar c.
11. Os n auto-valores de uma matriz A (nxn), além de poderem ser reais ou complexos, podem apresentar diferentes multiplicidades. Se todos apresentarem multiplicidade 1, então tem-se n auto-valores distintos.

# Introdução

**Propriedades dos Auto-valores e dos Auto-vetores:**

12. Se $\lambda$ é uma auto-valor de T, então o operador linear pode apenas variar o módulo e o sentido do vetor, nunca sua direção.

13. Se v é auto-vetor associado à $\lambda$, então qualquer vetor paralelo a v também é auto-vetor associado $\lambda$.

# Introdução

**Condições de Estabilidade Baseadas nos Auto-valores:**

- Um ponto de equilíbrio x de um sistema dinâmico não-linear contínuo é **assintoticamente estável** se todos os auto-valores possuírem **parte real negativa**: $Re\{\lambda_i\} < 0$, $i = 1,...,n$.
- Um ponto de equilíbrio x de um sistema dinâmico não-linear discreto é **assintoticamente estável** se todos os auto-valores possuírem **módulo menor que a unidade**: $|\lambda_i| < 1$, $i = 1,...,n$.
- Um ponto de equilíbrio x de um sistema dinâmico não-linear contínuo é **instável** se ao menos um auto-valor possuir parte real positiva: $Re\{\lambda_i\} > 0$, $i = 1,...,n$.
- Um ponto de equilíbrio x de um sistema dinâmico não-linear discreto é **instável** se ao menos um auto-valor possuir módulo maior do que a unidade: $|\lambda_i|$, $i = 1,...,n$.

# Introdução

**Condições de Estabilidade Baseadas nos Auto-valores:**

- No caso de sistemas contínuos, se pelo menos um auto-valor possuir parte real nula, então o ponto de equilíbrio x pode ser estável, assintoticamente estável ou instável.

- No caso de sistemas discretos, se pelo menos um auto-valor possuir módulo unitário, então o ponto de equilíbrio x pode ser estável, assintoticamente estável ou instável.

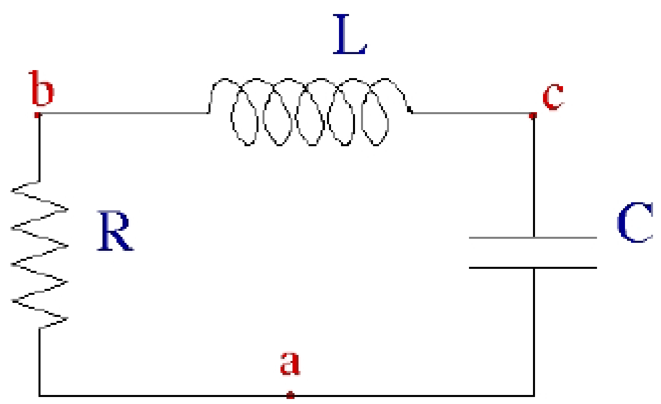
Para auto-valores com parte real positiva, a exponencial cresce com o tempo e o sistema é instável, caso contrário, converge para a solução.

# Introdução

**Exemplo de Aplicação:**

Seja x(t) a corrente no circuito RLC:

$$L\frac{d^2x(t)}{d^2t}+R\frac{dx(t)}{dt}+C^{-1}x(t)=0$$



# Introdução

Na forma matricial:

$$L\frac{d^2x(t)}{d^2t}+R\frac{dx(t)}{dt}+C^{-1}x(t)=0$$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x(t) \\ \frac{dx(t)}{dt} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-1}{CL} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x(t) \\ \frac{dx(t)}{dt} \end{bmatrix}$$

O Polinômio característico de A:

$$P_A(\lambda)=\lambda^2+\frac{R}{L}\lambda+\frac{1}{CL}$$

As oscilações vão depender da distribuição dos auto-valores no plano complexo.

Solução:

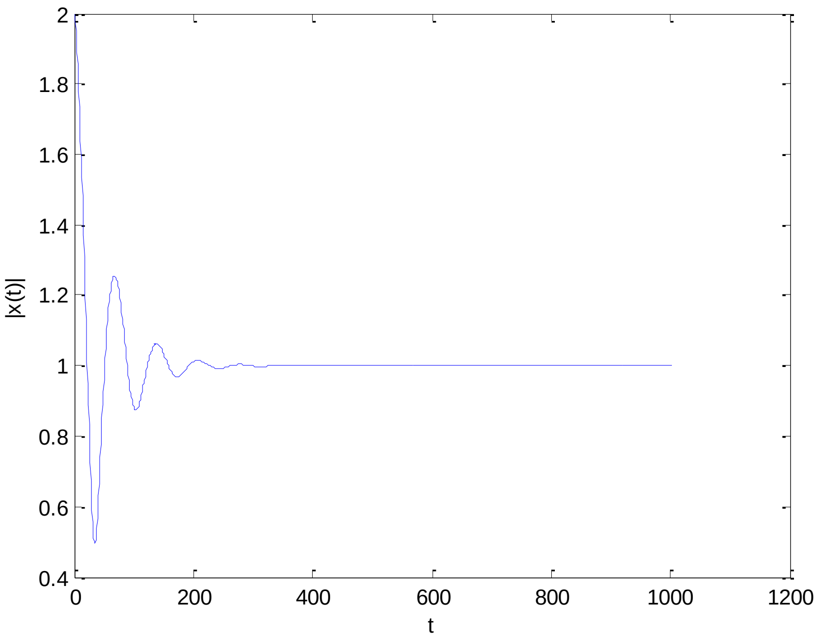
$$x(t)=y_1e^{\lambda_1 t}+y_1e^{\lambda_2 t}$$

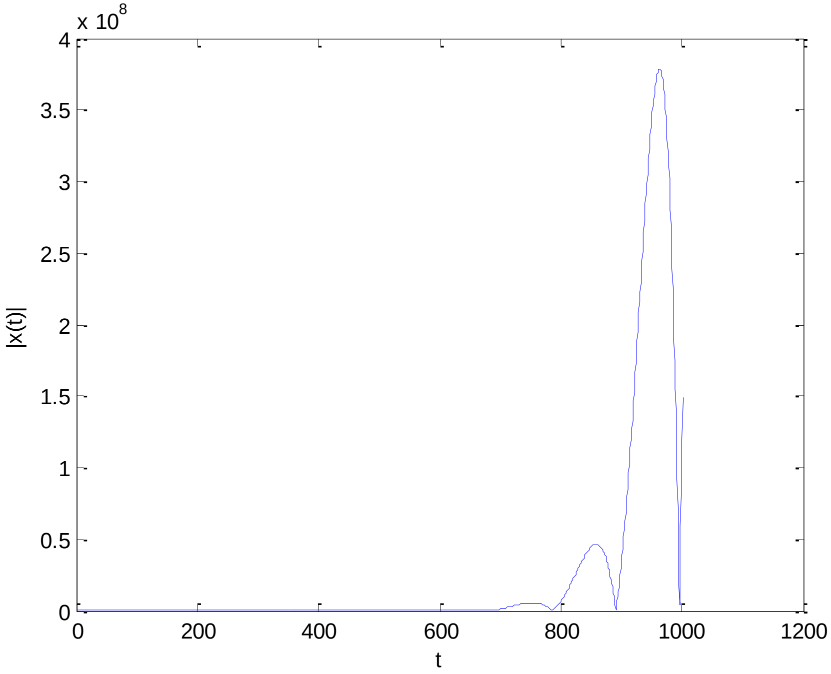
# Introdução

Resposta :

$$\lambda_1 = -2 + 3j$$
$$\lambda_3 = -2 - 3j$$

$$\lambda_1 = 2 + 3j$$
$$\lambda_3 = 2 - 3j$$

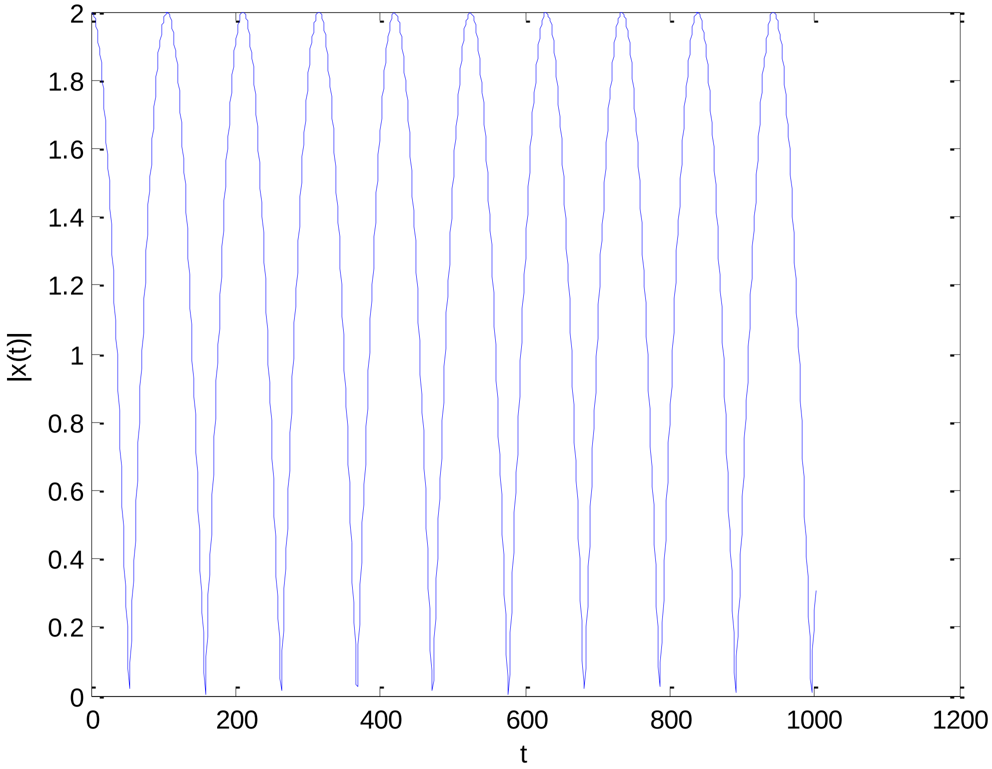


# Introdução

$$\lambda_1 = 3j$$

$$\lambda_3 = -3j$$



# Introdução

Auto-valores e auto-vetores (eigenvalues/eingenvectors) são entidades amplamente utilizadas na álgebra matricial, principalmente quando se deseja observar determinadas características de uma matriz.

- Auto-valores e auto-vetores estão presentes em diferentes ramos da matemática:
  - Formas quadráticas;
  - Sistemas diferenciais;
  - Problemas de otimização não linear.

# Introdução

- Podem ser usados para resolver problemas de diversos campos:
  - Economia;
  - Mecânica quântica;
  - Processamento de imagens;
  - Análise de vibrações;
  - Mecânica dos sólidos;
  - Estatística
  - Teoria da informação
  - Análise estrutural;
  - Eletrônica;
  - Teoria de controle;
  - E muitos outros.

# Introdução

- A menos que a matriz seja de ordem baixa ou que tenha muitos elementos iguais a zero, a expansão direta do determinante para a determinação do polinômio característico, é ineficiente. Assim existem métodos numéricos que não fazem uso do cálculo do determinante. Tais métodos podem ser divididos em três grupos:

  1. Métodos que determinam o polinômio característico
  2. Métodos que determinam alguns auto-valores,
  3. Métodos que determinam todos os auto-valores.

# Introdução

- Nos dois últimos casos os auto-valores são determinados sem conhecer a expressão do polinômio característico.
- Em relação aos métodos do 1º caso, uma vez determinado o polinômio característico de A, para calcular os auto-valores deve-se utilizar métodos numéricos para determinação dos zeros do polinômio.
- Os métodos do grupo 2, chamados iterativos, são usados se não se deseja todos os auto-valores de A.
- Em relação aos métodos do grupo 3, podem ser divididos em:
  - Métodos numéricos para matrizes simétricas,
  - Métodos numéricos para matrizes não simétricas.

# 1- Métodos que Determinam o PC

- O Algoritmo de Leverrier-Faddeev fornece uma alternativa ao cálculo do polinômio característico de uma matriz, sem a utilização de determinantes.

- Esta é uma alternativa **computacionalmente interessante**, entre outras razões, devido à redução no número de cálculos quando comparado aos métodos computacionais para o cálculo de determinantes.

O PC de uma matriz quadrada A de ordem n é dado por:

$$P(\lambda) = \det(\lambda I - A) = (-1)^n \left[\lambda^n - p_1\lambda^{n-1} - p_2\lambda^{n-2} - \ldots - p_{n-1}\lambda - p_n\right]$$

O polinômio característico de uma matriz A é mônico, ou seja, o coeficiente de $x^n$ é 1. As raízes do polinômio característico são os auto-valores da matriz.

# 1- Métodos que Determinam o PC

## 1.1 - Algoritmo de Leverrier:

O algoritmo de Leverrier determina os coeficientes do polinômio característico de uma matriz a partir dos traços das potências desta matriz.

**Teorema**: seja o polinômio com raizes $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$$

$$s_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k \qquad 1 < k \leq n$$

Então: $$\sum_{i=0}^{k-1} a_i s_{k-i} + k a_k = 0 \qquad 1 < k \leq n$$

Prova

JENNINGS, W. - First Course in Numerical Methods.

# 1- Métodos que Determinam o PC

Seja a matriz A quadrada de ordem n. Se $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ são os auto-valores da matriz A, isto é, os zeros do PC e se:

$$s_k = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k \qquad 1 < k \leq n$$

Então pelo teorema tem-se: $ka_k = s_k - a_1 s_{k-1} - \ldots - a_{k-1} s_1 \qquad 1 \leq k \leq n$

Relembrando que: $s_1 = \mathrm{tr}(A) \qquad s_K = \mathrm{tr}\left(A^k\right)$

Então os coeficientes são dados por:

$$a_1 = s_1$$

$$ka_k = s_k - \sum_{i=1}^{k-1} a_i s_{k-i}, \qquad 1 < k \leq n$$

$$\boxed{\sum_{i=0}^{k-1} a_i s_{k-i} + ka_k = 0}$$

# 1- Métodos que Determinam o PC

Exemplo:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$s_1 = \mathrm{tr}(A) = 1$$

$$s_2 = \mathrm{tr}(A^2) = \mathrm{tr}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = 5$$

$$s_3 = \mathrm{tr}(A^3) = \mathrm{tr}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 1$$

$$a_1 = s_1$$

$$ka_k = s_k - \sum_{i=1}^{k-1} a_i s_{k-i},$$

$$a_1 = s_1 = 1$$

$$2a_2 = s_2 - a_1 s_1 \Rightarrow a_2 = 2$$

$$3a_3 = s_3 - a_1 s_2 - a_2 s_1 \Rightarrow a_3 = -2$$

$$P(x) = -\lambda^3 + \lambda^2 + 2\lambda - 2$$

$$\lambda_1 = 1$$

$$\lambda_2 = -\sqrt{2}$$

$$\lambda_3 = \sqrt{2}$$

Métodos Numéricos

# 1- Métodos que Determinam o PC

## 1.2 - Algoritmo de Leverrier-Faddeev:

Uma modificação do método de Leverrier que simplifica os cálculos dos coeficientes do polinômio característico, através da seguinte sequência de operações:

$$A_1 = A, \qquad q_1 = \mathrm{tr}(A_1), \qquad B_1 = A_1 - q_1 I$$

$$A_2 = AB_1, \qquad q_2 = \frac{\mathrm{tr}(A_2)}{2}, \qquad B_2 = A_2 - q_2 I$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$A_n = AB_{n-1}, \qquad q_n = \frac{\mathrm{tr}(A_n)}{n}, \qquad B_n = A_n - q_n I$$

$q_i$ são os coeficientes do PC.

$$\boxed{ka_k = s_k - \sum_{i=1}^{k-1} a_i s_{k-i},}$$

Prova 1
Anexo.

# 1- Métodos que Determinam o PC

Exemplo:

$$A_1=\begin{bmatrix}3&1&5\\3&3&1\\4&6&4\end{bmatrix},\quad q_1=\mathrm{tr}(A_1)=10,\quad B_1=A_1-q_1I=\begin{bmatrix}-7&1&5\\3&-7&1\\4&6&-6\end{bmatrix}$$

$$A_2=AB_1=\begin{bmatrix}2&26&-14\\-8&-12&12\\6&-14&2\end{bmatrix},\quad q_2=\frac{\mathrm{tr}(A_2)}{2}=-4,\quad B_2=A_2-q_2I=\begin{bmatrix}6&26&-14\\-8&-8&12\\6&-14&6\end{bmatrix}$$

$$A_3=AB_2=\begin{bmatrix}40&0&0\\0&40&0\\0&0&40\end{bmatrix},\quad q_3=\frac{\mathrm{tr}(A_3)}{3}=40,\quad B_3=A_3-q_3I=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

Sempre !!!
Prova 1
Anexo.

$$p(x)=-x^3+10x^2-4x+40$$

# 1- Métodos que Determinam o PC

- Observação 1:

$$B_3 = A_3 - q_3 I = 0 \qquad B_3 = AB_2 - q_3 I = 0$$

$$\frac{A}{q_3} B_2 = I \qquad \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{q_3} B_2 \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{q_n} B_{n-1}$$

$A_3=AB_2$ é uma matriz diagonal com todos os elementos não nulos iguais a $q_n$.

Se A é singular $q_n$=0 e existe um auto-valor = 0.

- Observação 2: o termo constante $q_n$ é, a menos de um sinal, igual ao determinante da matriz A.

$$q_n = (-1)^n \det A$$

Assim, a sequência de operações inclui o determinante e a inversa da matriz A fornecendo uma maneira alternativa para esses cálculos !!!

- Observação 3: Se A é um matriz de ordem n então $B_n$ = 0.

# 1- Métodos que Determinam o PC

- Comentários:
  - As operações do algoritmo de Leverrier-Faddeev são bastante simples: cálculo do traço e divisão por um inteiro, modificação da diagonal e multiplicação por uma matriz fixa.
  - A matriz calculada em uma etapa depende somente da matriz calculada na etapa anterior. Portanto só é necessário guardar para a etapa seguinte, a última matriz calculada e os coeficientes.
  - Se a matriz tem elementos inteiros, os coeficientes devem ser inteiros e apenas números inteiros aparecem no algoritmo.

# 1- Métodos que Determinam o PC

1.3 - Cálculo dos auto-vetores:

Sejam $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ auto-valores distintos de A. Cada coluna não nula da matriz a seguir é um auto-vetor correspondente ao auto-valor $\lambda_k$.

$$Q_k = \lambda_k^{n-1} I + \lambda_k^{n-2} B_1 + \ldots + \lambda_k B_{n-2} + B_{n-1}$$

- $B_i$, i = 1, . . . , n–1, são as matrizes calculadas para a determinação dos coeficientes do PC, e $\lambda_k$ é o k-ésimo auto-valor de A.
- **Portanto, construídas as matrizes $B_i$ e determinados todos os auto-valores da matriz A, para obter os auto-vetores correspondentes ao auto-valor $\lambda_k$ basta calcular a matriz $Q_k$.**

# 1- Métodos que Determinam o PC

- Desde que $\lambda_k$ é auto-valor de A e portanto é raiz do PC. Assim:

$$AQ_k = \lambda_k Q_k$$

- Se u é alguma coluna não nula de $Q_k$, então, pode-se escrever que:

$$Au = \lambda_k u$$

# 1- Métodos que Determinam o PC

- Isto é, u é auto-vetor de A correspondente ao auto-valor $\lambda_k$. Assim, ao invés de determinar a matriz $Q_k$, é muito mais vantajoso calcular apenas uma coluna u de $Q_k$, da seguinte maneira:

$$u_0 = e$$

$$u_i = \lambda_k u_{i-1} + b_i, \qquad i = 1,2,\ldots,n-1$$

- e é uma coluna adotada da matriz identidade e $b_i$ é sua correspondente coluna da matriz $B_i$, u = $u_{n-1}$ é o auto-vetor correspondente ao auto-valor $\lambda_k$, i varia de 1 até n – 1 pois $B_n$ = 0.
- Observe que se calcularmos até $u_{n-1}$ e este resultar no vetor nulo, deve-se adotar outra coluna da matriz identidade e refazer os cálculos, pois por definição o auto-vetor é um vetor não nulo.



$$\boxed{Q_k = \lambda_k^{n-1} I + \lambda_k^{n-2} B_1 + \ldots + \lambda_k B_{n-2} + B_{n-1}}$$

# 1- Métodos que Determinam o PC

Exemplo:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad q_1 = \operatorname{tr}(A_1) = 1, \quad B_1 = A_1 - q_1 I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = AB_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}, \quad q_2 = \frac{\operatorname{tr}(A_2)}{2} = 2, \quad B_2 = A_2 - q_2 I = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = AB_2 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad q_3 = \frac{\operatorname{tr}(A_3)}{3} = -2, \quad B_3 = A_3 - q_3 I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P(x) = -\lambda^3 + \lambda^2 + 2\lambda - 2$$

$$\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = -\sqrt{2} \quad \lambda_3 = \sqrt{2}$$

# 1- Métodos que Determinam o PC

Determinando os auto-vetores:

Para $\lambda_1$ = 1, seja e = (1, 0, 0)$^t$

$$u_0 = e \Rightarrow u_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$u_1 = \lambda_1 u_0 + b_1 \Rightarrow u_1 = 1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$u_2 = \lambda_1 u_1 + b_2 \Rightarrow u_2 = 1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Observe que para:

- $e = (0,\ 1,\ 0)^t \qquad u_2 = (0,\ -1,\ -1)^t$
  que é auto-vetor de A correspondente ao auto-valor $\lambda_1$ = 1.
- $e = (0,\ 0,\ 1)^t \qquad u_2 = (0,\ 0,\ 0)^t$
  Com esse vetor inicial não é obtida uma resposta válida.

u = (0, -1, -1)$^t$ é um auto-vetor correspondente ao auto-valor $\lambda_1$ = 1.

$$\boxed{Q_k = \lambda_k^{n-1} I + \lambda_k^{n-2} B_1 + \ldots + \lambda_k B_{n-2} + B_{n-1}}$$

Métodos Numéricos

# 1- Métodos que Determinam o PC

Determinando os auto-vetores:

Para $\lambda_2 = -\sqrt{2}$ , seja e = (1, 0, 0)$^t$

$$u_0 = e \Rightarrow u_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$u_1 = \lambda_1 u_0 + b_1 \Rightarrow u_1 = -\sqrt{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow u_1 = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$u_2 = \lambda_1 u_1 + b_2 \Rightarrow u_2 = -\sqrt{2}\begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Observe que para:

$$e = (0,\ 1,\ 0)^t \qquad u_2 = \left(-1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}, -2-\sqrt{2}\right)^t$$

$$e = (0,\ 0,\ 1)^t \qquad u_2 = \left(1+\sqrt{2}, -1-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2}\right)^t$$

- Ambos são auto-vetores de A correspondente ao auto-valor $\lambda_2 = -\sqrt{2}$ .

u = (1, -1, $\sqrt{2}$)$^t$ é um auto-vetor correspondente ao auto-valor $\lambda_2 = -\sqrt{2}$.

Métodos Numéricos

# 1- Métodos que Determinam o PC

Determinando os auto-vetores:

Para $\lambda_3 = \sqrt{2}$ , seja e = (1, 0, 0)$^t$

$$u_0 = e \Rightarrow u_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$u_1 = \lambda_1 u_0 + b_1 \Rightarrow u_1 = \sqrt{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow u_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$u_2 = \lambda_1 u_1 + b_2 \Rightarrow u_2 = \sqrt{2}\begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Observe que para:

$$e = (0,\ 1,\ 0)^t \qquad u_2 = \left(-1+\sqrt{2}, 1-\sqrt{2}, -2+\sqrt{2}\right)^t$$

$$e = (0,\ 0,\ 1)^t \qquad u_2 = \left(1-\sqrt{2}, -1+\sqrt{2}, 2-\sqrt{2}\right)^t$$

- Ambos são auto-vetores de A correspondente ao auto-valor $\lambda_2 = -\sqrt{2}$ .

u = (1, -1, - $\sqrt{2}$)$^t$ é um auto-vetor correspondente ao auto-valor $\lambda_3 = \sqrt{2}$

# 1- Métodos que Determinam o PC

E assim:

$$A^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & -0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$