Autovalores e Autovetores - Métodos das Potencias

Leandro Franco de Souza

Universidade de São Paulo

26 de Maio de 2020

Métodos das Potencias

- O Método das Potências consiste em determinar o autovalor de maior valor absoluto de uma matriz A, e seu correspondente autovetor, sem determinar o polinômio característico;
- O método é útil na prática, desde que se tenha interesse em determinar apenas alguns autovalores, maior em módulo, e, que estes estejam bem separados, em módulo, dos demais;
- O método das potências baseia-se no seguinte teorema.

Métodos das Potencias

Teorema 7.2:

Seja A uma matriz real de ordem n e sejam $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ seus autovalores e $u_1, u_2, \ldots, u_n$ seus correspondentes autovetores. Suponha que os autovetores são linearmente independentes, e que $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \ldots \geq |\lambda_n|$. Seja a sequência dada por $y_{k+1} = Ay_k$ com $k = 0, 1, 2, \ldots$, onde y_0 é um vetor arbitrário, que permite a expansão:

$$y_0 = \sum_{j=1}^{n} c_j u_j$$

com c_j escalares quaisquer e $c_1 \neq 0$, então:

$$\lim_{k \to \infty} \frac{(y_{k+1})_r}{(y_k)_r} = \lambda_1, \text{ onde o índice } r \text{ indica a r-ésima componente.}$$

Além disso, quando $k \to \infty$, y_k tende ao autovetor correspondente a λ_1.

Método das Potências

Dado um vetor y_k qualquer, não nulo, construímos os outros dois vetores y_{k+1} e z_{k+1}, do seguinte modo:

$$z_{k+1} = Ay_k$$

e

$$y_{k+1} = \frac{1}{\alpha_{k+1}} z_{k+1}, \text{ onde } \alpha_{k+1} = \max_{1 \leq r \leq n} \left\{ |(z_{k+1})_r| \right\}.$$

Método das Potências (Passos)

Dado um vetor y_0 qualquer, não nulo, construímos a sequência dos demais vetores, do seguinte modo:

1. $z_1 = Ay_0$ e $y_1 = \frac{1}{\alpha_1} z_1 = \frac{1}{\alpha_1} Ay_0$, com $\alpha_1 = \max\limits_{1 \le r \le n} \{|(z_1)_r|\}$;
2. $z_2 = Ay_1$ e $y_2 = \frac{1}{\alpha_2} z_2 = \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2} A^2 y_0$, com $\alpha_2 = \max\limits_{1 \le r \le n} \{|(z_2)_r|\}$;
3. $\vdots$
4. $z_k = Ay_{k-1}$ e $y_k = \frac{1}{\alpha_k} z_k = \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_k} A^k y_0$, com $\alpha_k = \max\limits_{1 \le r \le n} \{|(z_k)_r|\}$;
5. Por fim $z_{k+1} = Ay_k$.

Para obtermos λ_1 fazemos

$$\lim_{k \to \infty} \frac{(z_{k+1})_r}{(y_k)_r} = \lim_{k \to \infty} \frac{(A^{k+1} y_0)_r}{(A^k y_0)_r} = \lambda_1 \quad (1)$$

Observações:

- No limite, todas as componentes de $\frac{(y_{k+1})_r}{(y_k)_r}$, tendem para λ_1;
- Na prática, uma das componentes converge mais rapidamente do que as outras;
- Quando uma das componentes satisfizer a precisão desejada teremos o autovalor procurado;
- Para obtermos λ_1 com uma precisão ε, em cada passo calculamos aproximações para λ_1 usando (1). O teste do erro relativo para cada componente de λ_1, isto é:

$$\frac{|\lambda_1^{k+1} - \lambda_1^{k}|_r}{|\lambda_1^{k+1}|_r} < \varepsilon.$$

é usado como critério de parada;

Métodos das Potencias

Observações:

- Quando todas as componentes de (1) forem iguais, então o vetor y_k dessa iteração é o autovetor correspondente ao autovalor λ_1;
- Se algum vetor resultar no vetor nulo, o método falha. Tal fato deve ocorrer se as hipóteses não foram satisfeitas;

Exemplo do Método das Potências:

Usando o método das potências determinar o autovalor de maior valor absoluto da matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

com precisão de 10^{-3} (Resolvido no MatLab/Octave).

Métodos das Potencias Inversas

- O Método da Potência Inversa é usado para determinar o autovalor de menor valor absoluto e seu correspondente autovetor de uma matriz A;
- O método é útil na prática, desde que se tenha interesse em determinar apenas o autovalor, de menor módulo, e, que este esteja bem separado dos demais;
- O método da potência inversa é semelhante ao método das potências, com a diferença que agora assumimos:

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \ldots \geq |\lambda_{n-1}| > |\lambda_n|$$

Método das Potências Inversas

Dado um vetor y_k qualquer, não nulo, construímos os outros dois vetores y_{k+1} e z_{k+1}, do seguinte modo:

$$z_{k+1} = A^{-1} y_k$$

e

$$y_{k+1} = \frac{1}{\alpha_{k+1}} z_{k+1}, \text{ onde } \alpha_{k+1} = \max_{1 \le r \le n} \{|(z_{k+1})_r|\}$$

e portanto

$$\lambda_n^{-1} = \lim_{k \to \infty} \frac{(z_{k+1})_r}{(y_k)_r}$$

Observações:

- Note que na prática não é necessário calcular A^{-1}, pois

$$z_{k+1} = A^{-1} y_k \Rightarrow A z_{k+1} = y_k;$$

- Para resolver o sistema linear acima, pode utilizar o método LU

Exemplo do Método das Potências Inversas:

Determinar o menor autovalor, em módulo, da matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

com precisão de 10^{-3} (Resolvido no MatLab/Octave).

Métodos das Potencias com deslocamento

Suponha que A tenha autovalores λ_i, reais, tais que $\lambda_1 > \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_{n-1} \geq \lambda_n$ e considere a sequência de vetores definidas por:

$$z_{k+1} = (A - qI)y_k$$

e

$$y_{k+1} = \frac{1}{\alpha_{k+1}} z_{k+1}, \text{ onde } \alpha_{k+1} = \max_{1 \leq r \leq n} \{|(z_{k+1})_r|\}$$

onde I é a matriz identidade de ordem n e q é um parâmetro qualquer.

Observação:

1. Se λ_i é autovalor de A, então $A - qI$ tem como autovalores $\lambda_i - q$, ou seja, os autovalores de A são deslocados q unidades na reta real;
2. Os autovetores de $A - qI$ são os mesmos da matriz A.

Observação:

Aplicando o Teorema 7.2 a matriz $A - qI$, pode se mostrar que y_k converge para o autovetor correspondente aquele que maximiza $|\lambda_i - q|$. Portanto se:

1. $q < \frac{\lambda_1 + \lambda_n}{2}$, então $y_k \to u_1$ e $\lim\limits_{k \to \infty} \frac{(z_{k+1})_r}{(y_k)_r} = \lambda_1 - q$;
2. $q > \frac{\lambda_1 + \lambda_n}{2}$, então $y_k \to u_n$ e $\lim\limits_{k \to \infty} \frac{(z_{k+1})_r}{(y_k)_r} = \lambda_n - q$;
3. $q = \frac{\lambda_1 + \lambda_n}{2}$, então $\lambda_1 - q = -(\lambda_n - q)$, e assim $A - qI$ tem dois autovalores de mesmo módulo, mas de sinais opostos. Neste caso, a sequência de vetores oscilará entre dois limites os quais são duas combinações de u_1 e u_2.

Métodos das Potencias com Deslocamento

Exemplo do Método das Potências com Deslocamento:

Determinar o autovalor de menor valor absoluto da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

usando o método das potências com deslocamento e com precisão de 10^{-3} (Resolvido no MatLab/Octave).