

Lista 8: Métodos Iterativos para Sistema Lineares e Redução de Dados

Prof. João Paixão - 4/06/2021

Nessa lista você pode trabalhar individualmente ou com um grupo de até 4 alunos.

1. Inclua as funções abaixo, devidamente comentadas e testadas, na biblioteca da lista passada:

(a) COMPRESSÃO

(b) GAUSS-JACOBI

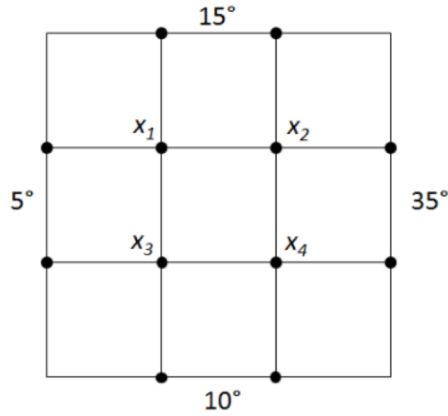
(c) GAUSS-SEIDEL

2. Faça o gráfico do sistema linear

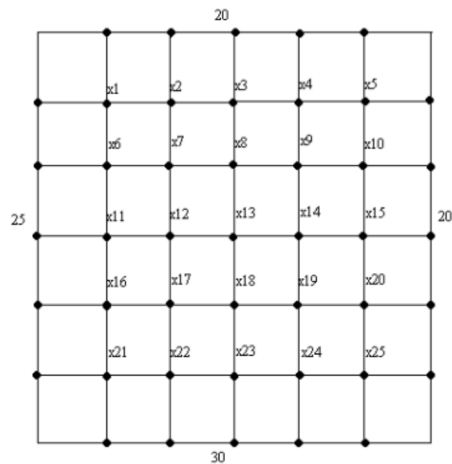
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 = 2 \end{cases}$$

e resolva-os pelo método de Gauss-Jacobi e Gauss-Seidel com n passos tal que a **tolerância** $= ||x^{(n)} - x^{(n-1)}||$ seja menor que 10^{-3} . Marque as iterações no gráfico.

3. **Problema da temperatura de um lago** Queremos descobrir a temperatura em diferentes lugares no interior de um lago (vértices x_1, x_2, x_3 e x_4), mas só conseguimos medir a temperatura de 5, 10, 15 e 35 graus Celsius nas margens (laterais do quadrado na figura abaixo). Quando o calor está em equilíbrio, a temperatura em cada vértice no interior do lago é aproximadamente a média das temperaturas dos 4 vértices vizinhos.



- Modele o problema como um sistema linear $Ax = b$.
- Uma condição suficiente para que ambos os métodos Gauss-Jacobi e Gauss-Seidel converjam para a solução é verificar que a matriz A do sistema é diagonal dominante. Isso se verifica neste problema?
- Determine a temperatura nos 4 vértices do interior do quadrado com o Gauss-Seidel e Gauss-Jacobi tal que a tolerância $= \|x^{(n)} - x^{(n-1)}\|$ seja menor que 10^{-3} .
- Agora a temperatura das margens mudou e queremos discretizar o lago ainda mais (figura abaixo). Determine a temperatura dos vértices do interior do quadrado com o método de Gauss-Seidel e Gauss-Jacobi tal que a tolerância $= \|x^{(n)} - x^{(n-1)}\|$ seja menor que 10^{-3} .

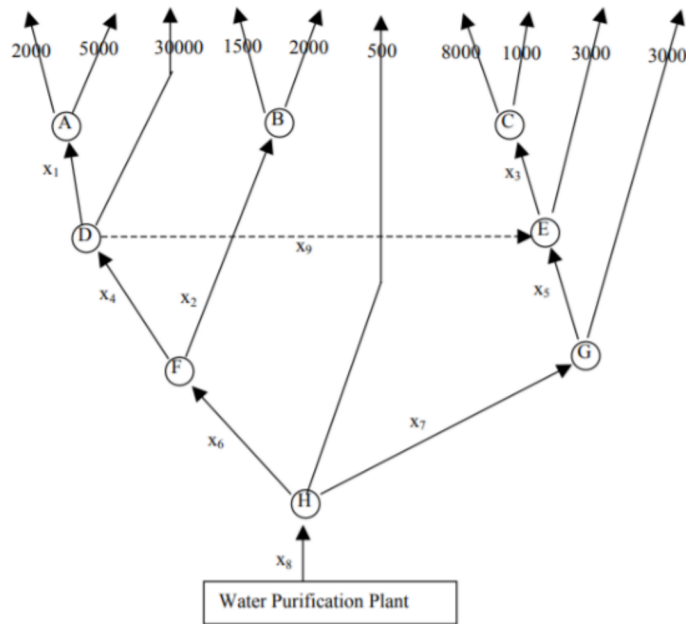


- Você consegue discretizar com mais nós? Qual é o maior número de nós que você consegue discretizar e rodar na sua máquina em menos

de 2 minutos usando Gauss-Jacobi ou Gauss-Seidel com tolerância $\leq 10^{-3}$? (Dica: para acelerar os métodos, tente usar o fato que a matriz tem muitos zeros.)

4. **Problema de distribuição de água.** Uma companhia de distribuição de água recebeu as novas demandas de fluxo, medidas em litros por minuto (números no topo da figura), dos bairros que ela atende para 2022. Ela precisa determinar o fluxo de água em cada cano (as arestas da figura).

- Faça a modelagem sem o cano pontilhado x_9 e resolva o sistema linear com o método de Gauss-Jacobi e Gauss-Seidel com tolerância de 10^{-3} . Os métodos convergem?
- (Desafio) Faça a modelagem **com** o cano pontilhado x_9 e tente resolver o sistema linear com Julia e com o método de Gauss-Jacobi e Gauss-Seidel com tolerância de 10^{-3} . O que aconteceu?

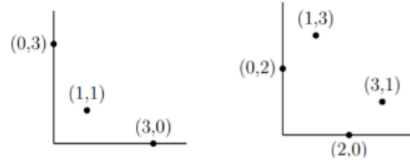


5. Determine uma matriz M de posto 1 (tal que $M = bc^t$) que melhor representa a matriz A e o erro para:

(a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(c) Qual é a representação gráfica das soluções acima nos desenhos:



6. Considere a bandeira da Grécia como uma imagem preta e branca e modele com uma matriz A .



- Qual é o posto da bandeira da Grécia (tal que $A = BC^t$)? O que a matriz B e matriz C^t representam nesse caso? Explique com as suas próprias palavras.
- Determine dois países tais quais sua bandeira tem posto = 1?
- Determine dois países tais quais sua bandeira tem posto = 2?
- Determine dois países tais quais sua bandeira tem posto = 3?

7. Considere a seguinte imagem:



- Insira esta imagem em uma matriz 5×5 . Suponha que as sombras que você vê são apenas 0, 0.5 e 1 como fizemos na aula.
 - Qual é o posto da imagem?
 - Faça compressão de dados de nível 1, 2, 3, 4 e 5 e imprima na tela com os seus erros.
8. Encontre (ou desenhe) uma imagem A , com mais ou menos 200×200 pixels (pode ser um pouco maior), que
- exija um nível de compressão maior que 3 e menor que 6 para recuperar pelo menos 99% de sua norma total.
 - exija um nível de compressão maior que 40 para recuperar pelo menos 99% de sua norma total.

Dicas: muitos ícones tem o tamanho 200x200. Experimente buscar pelos termos “200x200 png” no Google Imagens. Veja os links abaixo:

(a) <https://www.google.com/search?q=200x200%20png&tbm=isch&hl=pt-BR&tbs=ic:gray>

(b) <https://imagepng.org/>