

# X ENCONTRO ACADÊMICO

## MODELAGEM COMPUTACIONAL

### A DERIVADA TOPOLÓGICA APLICADA EM PROBLEMAS INVERSOS E DE OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA

**Cinthia Gomes Lopes**

**Thiago José Machado**

cinthia@lncc.br

thiagojm@lncc.br

Laboratório Nacional de Computação Científica

Av. Getúlio Vargas 333, CEP 25651-075, Petrópolis, Rio de Janeiro, Brasil

**Resumo.** A derivada topológica foi rigorosamente definida por Sokołowski e Źochowski em 1999 e, desde então, tem se mostrado uma importante ferramenta para o tratamento de diferentes problemas, dentre os quais destacam-se: otimização topológica, problemas inversos, processamento de imagens, modelagem constitutiva multiescala, análise de sensibilidade à fratura mecânica, modelagem de evolução de dano e análise de sensibilidade em problemas de contato. A derivada topológica é obtida a partir da análise assintótica de soluções clássicas para problemas de valores de contorno em domínios singularmente perturbados, combinada com a análise assintótica de funcionais de forma com relação ao parâmetro que governa o tamanho da perturbação. Neste trabalho, são apresentados alguns resultados obtidos nos contextos de otimização topológica com restrição em tensão e problemas inversos de reconstrução de fonte.

**Palavras-chave:** Derivada topológica, Análise de sensibilidade, Otimização topológica, Problemas inversos.

## 1 INTRODUÇÃO

A derivada topológica de um funcional de forma pode ser caracterizada como o termo de correção de primeira ordem proveniente de uma expansão assintótica deste funcional. Ao realizar perturbações em um domínio, tais como a inserção de furos ou termos fonte, a derivada topológica mensura a variação do funcional. Logo, em problemas onde se deseja minimizar um funcional, utiliza-se a derivada topológica para indicar uma direção de descida.

Desde que foi definida em Sokołowski & Żochowski (1999), a derivada topológica tem se mostrado uma importante ferramenta para vários problemas, tais como: otimização topológica, problemas inversos, processamento de imagens, mecânica da fratura, modelagem de evolução do dano e modelagem multi-escala. Para mais detalhes o leitor pode consultar Novotny & Sokołowski (2013). Em particular, este trabalho traz alguns resultados recentes de aplicações da derivada topológica na obtenção de estruturas e mecanismos flexíveis através de otimização topológica Amstutz & Novotny (2010); Amstutz *et al.* (2012); Lopes & Novotny (2016); Lopes *et al.* (2015) e na resolução de problemas inversos de reconstrução de fontes Canelas *et al.* (2014, 2015); Machado *et al.* (2016).

## 2 A DEFINIÇÃO DA DERIVADA TOPOLÓGICA

Considere um domínio  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ , com  $d \geq 2$ . Associado ao domínio  $\Omega$ , introduz-se uma função característica  $\chi : \mathbb{R}^d \rightarrow \{0, 1\}$  tal que  $\chi = \mathbb{1}_\Omega$ . Suponha que  $\Omega$  seja sujeito a uma perturbação infinitesimal confinada em uma pequena região  $\omega_\varepsilon(\hat{x}) = \hat{x} + \varepsilon\omega$ , onde  $\hat{x}$  é um ponto arbitrário de  $\Omega$ ,  $\varepsilon > 0$  e  $\omega \subset \Omega$  é um conjunto conexo. Esta perturbação gera uma nova função  $\chi_\varepsilon : \Omega \times \mathbb{R}^d \rightarrow \{0, 1, \gamma\}$  tal que

$$\chi_\varepsilon(\hat{x}, x) = \begin{cases} \chi(x), & \text{se } x \in \mathbb{R}^d \setminus \omega_\varepsilon(\hat{x}), \\ \gamma, & \text{se } x \in \omega_\varepsilon(\hat{x}), \end{cases} \quad (1)$$

onde  $\gamma$  é uma constante real não negativa. Se  $\gamma = 0$ , a perturbação é dita singular e, portanto,  $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \omega_\varepsilon(\hat{x})$  é um domínio topologicamente diferente do domínio inicial. Por outro lado, se  $\gamma > 0$  a perturbação é dita regular e não ocorre perturbação na topologia do domínio inicial. Em seguida, assume-se que um dado funcional de forma  $\psi(\chi_\varepsilon(\hat{x}))$  admite a seguinte expansão assintótica:

$$\psi(\chi_\varepsilon(\hat{x})) = \psi(\chi) + f(\varepsilon)D_T\psi(\hat{x}) + \mathcal{R}(\varepsilon), \quad (2)$$

onde  $f(\varepsilon)$  é uma função positiva que tende a zero quando o tamanho da perturbação tende a zero e  $\mathcal{R}(\varepsilon) = o(f(\varepsilon))$ . Por fim,  $D_T\psi(\hat{x})$  é denominada a derivada topológica do funcional  $\psi$  avaliada no ponto  $\hat{x}$ . Além disso, reescrevendo (2), obtém-se a seguinte definição clássica de derivada topológica Sokołowski & Żochowski (1999):

$$D_T\psi(\hat{x}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\psi(\chi_\varepsilon(\hat{x})) - \psi(\chi)}{f(\varepsilon)}.$$

Para mais detalhes o leitor pode consultar Novotny & Sokołowski (2013). Agora, com o intuito de fixar as ideias acima, apresenta-se o seguinte exemplo.

**Exemplo 1.** Considere o seguinte funcional associado ao domínio não perturbado:

$$\psi(\chi) := \int_{\Omega} g(x) dx.$$

Suponha que  $\Omega$  seja sujeito a uma perturbação singular, ou seja,  $\gamma = 0$  em (1), e que  $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  é Lipschitz contínua em  $\omega_\varepsilon(\hat{x})$ . Desta forma, o funcional associado ao domínio topologicamente perturbado é escrito como:

$$\psi(\chi_\varepsilon(\hat{x})) := \int_{\Omega_\varepsilon} g(x) dx. \quad (3)$$

Deseja-se obter uma expansão do tipo (2) para o funcional (3). Neste sentido, pode-se escrever o funcional acima da seguinte maneira:

$$\psi(\chi_\varepsilon(\hat{x})) = \int_{\Omega_\varepsilon} g(x) dx \pm \int_{\omega_\varepsilon} g(\hat{x}) dx = \psi(\chi) - |\omega_\varepsilon|g(\hat{x}) + \int_{\omega_\varepsilon} [g(\hat{x}) - g(x)] dx. \quad (4)$$

Comparando a expressão (4) com a expansão (2), é conveniente escolher  $f(\varepsilon) = |\omega_\varepsilon|$ . Logo, a derivada topológica é  $D_T\psi(\chi) = -g(\hat{x})$ . Basta então, mostrar que a última integral do lado direito de (4) é um resíduo. De fato, usando a desigualdade triangular e a hipótese sobre a função  $g$ , tem-se:

$$\left| \int_{\omega_\varepsilon} [g(\hat{x}) - g(x)] dx \right| \leq \int_{\omega_\varepsilon} c|\hat{x} - x| dx \leq c\varepsilon|\omega_\varepsilon| = o(|\omega_\varepsilon|).$$

### 3 OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA COM RESTRIÇÃO EM TENSÃO

A otimização topológica estrutural é um campo de pesquisa que vem sendo aplicado com sucesso em diferentes problemas da engenharia (o leitor interessado pode consultar Eschenauer & Olhoff (2001) para uma visão geral dos métodos de otimização topológica). Em geral, na otimização topológica, uma determinada quantidade de material é distribuída em um domínio inicial, sujeito a certas restrições e condições de contorno e, através de um processo numérico iterativo, minimiza-se (ou maximiza-se) uma função custo preestabelecida. Uma vez que a derivada topológica fornece uma direção de descida no processo de otimização, para um dado funcional de forma, neste trabalho utiliza-se tal ferramenta para obter a topologia ótima de estruturas elásticas e mecanismos flexíveis sujeitos a uma restrição na tensão de von Mises. Cabe ressaltar que, em contraste com os métodos de otimização topológica encontrados na literatura, a derivada topológica não requer um modelo material baseado em densidades intermediárias. Esta característica é crucial em problemas com restrição em tensão uma vez que esquemas de interpolação são desnecessários. Desta forma, as dificuldades decorrentes dos procedimentos baseados em densidades intermediárias são naturalmente evitados. Além disso, a derivada topológica tem a vantagem de fornecer uma fórmula analítica para a sensibilidade topológica que permite obter a topologia ótima em poucas iterações. Como podemos escrever o problema de otimização de estruturas como sendo um caso particular do de otimização de mecanismos flexíveis, começa-se por apresentar a formulação do problema para este último.

#### 3.1 Formulação do problema

Considere um domínio  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$  aberto e limitado com fronteira Lipschitz  $\Gamma$  e um subdomínio  $\Omega \subset \mathcal{D}$ . A fronteira  $\Gamma$  é dividida em dois subconjuntos disjuntos  $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$ , onde  $\Gamma_N = \Gamma_{in} \cup \Gamma_{out} \cup \Gamma_0$  sendo  $\Gamma_{in}$ ,  $\Gamma_{out}$  e  $\Gamma_0$  mutuamente disjuntos. As trações de entrada, saída e nulas são prescritas sobre  $\Gamma_{in}$ ,  $\Gamma_{out}$  e  $\Gamma_0$ , respectivamente, enquanto os deslocamentos são prescritos sobre  $\Gamma_D$ . Então, dado o domínio  $\mathcal{D}$ , o problema de otimização consiste em encontrar um subdomínio  $\Omega \subset \mathcal{D}$  que satisfaça o seguinte problema de minimização:

$$\begin{cases} \text{Minimizar } \mathcal{F}_\Omega(u) := \mathcal{J}(u) + \beta|\Omega| \\ \text{sujeito a } \sigma_M(u) \leq \bar{\sigma}, \quad \text{q.t.p. } \Omega^* \subset \Omega, \end{cases} \quad (5)$$

onde  $\Omega = \Omega^* \cup \omega \subset \mathcal{D}$ , com  $\omega$  usado para denotar a região de  $\Omega$  onde não é submetida à restrição em tensão. Em (5),  $\beta > 0$  é um parâmetro de penalização do volume,  $\mathcal{J}(u)$  é dado por

$$\mathcal{J}(u) := \int_{\Gamma_{in}} q_{in} \cdot u \, dx + \kappa \int_{\Gamma_{out}} q_{out} \cdot u \, dx, \quad (6)$$

onde as trações  $q_{in}$  e  $q_{out}$  e o escalar  $\kappa > 0$  são conhecidos. Além disso,  $\bar{\sigma}$  denota a tensão limite do material,  $\sigma_M$  representa a tensão efetiva de von Mises e  $u$  é solução do seguinte problema variacional: Encontrar  $u \in \mathcal{U} := \{\varphi \in H^1(\mathcal{D}; \mathbb{R}^2) : \varphi|_{\Gamma_D} = 0\}$  tal que

$$\int_{\mathcal{D}} \sigma(u) \cdot \nabla^s \eta = \int_{\Gamma_{in}} q_{in} \cdot \eta + \int_{\Gamma_{out}} q_{out} \cdot \eta \quad \forall \eta \in \mathcal{U}, \quad (7)$$

onde  $\sigma(u)$  é o tensor tensão de Cauchy e  $\nabla^s(\cdot)$  denota a parte simétrica do  $\nabla(\cdot)$ . A presença de uma restrição local em tensão dificulta tratar o problema de otimização diretamente. Aqui, será utilizada a abordagem proposta por Amstutz & Novotny (2010) que consiste em aproximar o problema de otimização original por meio de uma função de penalização regularizada para a restrição em tensão. Desta forma, o problema de otimização com restrição (5) pode ser aproximado pelo seguinte problema de otimização penalizado:

$$\text{Minimize}_{\Omega \subset \mathcal{D}} \mathcal{F}_\Omega^\alpha(u) := \mathcal{F}_\Omega(u) + \alpha \mathcal{G}(u), \quad (8)$$

em que  $\alpha > 0$  denota um dado coeficiente de penalização e  $\mathcal{G}(u)$  é escrito como Amstutz & Novotny (2010)

$$\mathcal{G}(u) := \int_{\Omega^*} \Phi(S_M^2(u)) \quad \text{sendo} \quad \Phi(t) \equiv \Phi_p(t) = [1 + (t)^p]^{1/p} - 1, \quad (9)$$

onde  $p \geq 1$  é um parâmetro real dado e  $S_M(u) = \sigma_M(u)/\bar{\sigma}$ .

### 3.2 Resultado da derivada topológica

A derivada topológica associada ao problema (8) com respeito à nucleação de uma pequena inclusão circular com propriedade material diferente do meio, é dada por Lopes & Novotny (2016):

$$D_T \mathcal{F}_\Omega^\alpha(x) = \beta D_T |\Omega|(x) + D_T \mathcal{J}(x) + \alpha D_T \mathcal{G}(x) \quad \forall x \in \mathcal{D},$$

em que a derivada topológica do volume e do funcional  $\mathcal{J}(u)$  escrevem-se como:

$$D_T |\Omega|(x) = \begin{cases} -1, & \text{se } x \in \Omega, \\ 1, & \text{se } x \in \mathcal{D} \setminus \bar{\Omega} \end{cases} \quad \text{e} \quad D_T \mathcal{J}(x) = -\mathbb{P}_\gamma \sigma(u(x)) \cdot \nabla^s v(x).$$

O contraste  $\gamma$  é tal que:  $\gamma = \rho_0$  em  $\Omega$  e  $\gamma = \rho_0^{-1}$  em  $\mathcal{D} \setminus \bar{\Omega}$ . O tensor de polarização  $\mathbb{P}_\gamma$  é dado por

$$\mathbb{P}_\gamma = \frac{1 - \gamma}{1 + \gamma a_2} \left( (1 + a_2) \mathbb{I} + \frac{1}{2} (a_1 - a_2) \frac{1 - \gamma}{1 + \gamma a_1} \mathbb{I} \otimes \mathbb{I} \right); \quad a_1 = \frac{\lambda + \mu}{\mu}, \quad a_2 = \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu},$$

em que  $\mu$  e  $\lambda$  denotam os coeficientes de Lamé. E a derivada topológica do funcional de penalização  $\mathcal{G}(u)$  é dada por

$$D_T \mathcal{G}(x) = - \left[ \mathbb{P}_\gamma \sigma(u) \cdot \nabla^s v + (\gamma - 1) \mathbb{1}_{\Omega^*} \Phi'(S_M^2(u)) \mathbb{T}_\gamma \mathbb{B} S(u) \cdot S(u) + \rho_0 \mathbb{1}_{\Omega^*} \Upsilon(S(u)) \right. \\ \left. + \mathbb{1}_{\Omega^*} \Phi'(S_M^2(u)) \frac{1}{4} \left( \frac{1 - \gamma}{1 + \gamma a_2} \right)^2 \left( 5(2S(u) \cdot S(u) - \text{tr}^2 S(u)) + 3 \left( \frac{1 + \gamma a_2}{1 + \gamma a_1} \right)^2 \text{tr}^2 S(u) \right) \right. \\ \left. + \mathbb{1}_{\Omega^*} \Psi(S(u)) + (\gamma - 1) \mathbb{1}_{\Omega^*} \Phi(S_M^2(u)) \right] (x),$$

sendo  $S(u) = \sigma(u)/\bar{\sigma}$  e  $\mathbb{T}_\gamma := (\mathbb{P}_\gamma - \mathbb{I})/(1 - \gamma)$ . Para os demais termos, o leitor pode consultar o trabalho Lopes & Novotny (2015).

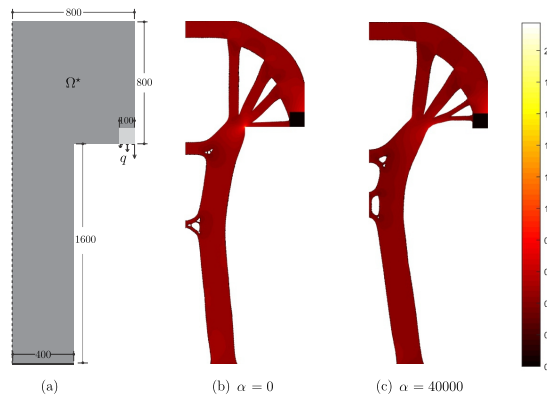
**Observação 1.** No caso particular em que considera-se  $\kappa = 1$  em (6), o funcional  $\mathcal{J}(u)$  resulta no seguinte funcional de complacência (Amstutz, 2006):  $\mathcal{K}(u) := \langle q, u \rangle_{\Gamma_N}$ . Neste caso, a derivada topológica associada ao problema é escrita como Lopes et al. (2015)

$$D_T \mathcal{K}(x) = \mathbb{P}_\gamma \sigma(u(x)) \cdot \nabla^s u(x) \quad \forall x \in \mathcal{D}. \quad (10)$$

### 3.3 Exemplos numéricos

Em ambos os exemplos a seguir, toda a implementação computacional foi realizada no software MatLab2010 onde utilizou-se o Método de Elementos Finitos, em particular, Galerkin com discretização via elementos triangulares lineares.

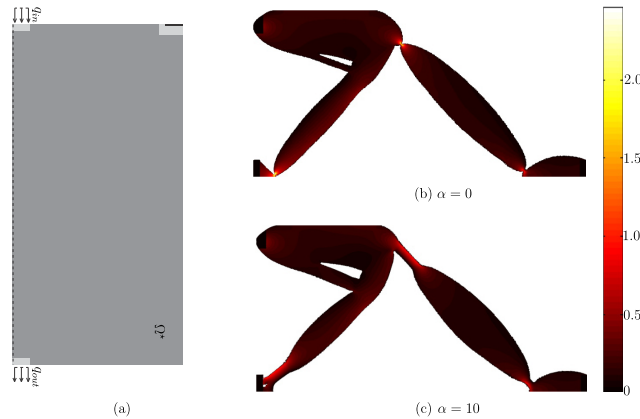
Primeiramente, considera-se a otimização topológica de estruturas elásticas sujeitas a restrição em tensão (veja Observação 1). Em particular, deseja-se obter a topologia ótima para uma torre de alta tensão. Desta forma, o domínio inicial é dado conforme a Fig. 1(a) cujas dimensões estão em milímetros. Esta estrutura é modelada utilizando condição de simetria vertical e está submetida a um carregamento com distribuição linear cuja resultante é igual a  $-17000 \text{ N}$ .



**Figura 1:** Domínio inicial e condições de contorno (a) e Distribuição de tensão ( $\sqrt{S_M}$ ) para os casos sem (b) e com (c) restrição em tensão.

Para o caso sem restrição em tensão ( $\alpha = 0$ ), Fig. 1(b), a tensão máxima ultrapassa a tensão limite do material devido à presença de singularidade no domínio de projeto. Por sua vez, o resultado para o caso com restrição em tensão ( $\alpha = 40000$ ) é apresentado na Fig. 1(c) com tensão máxima  $\max_{\Omega}(S_M) = 1.0952$ . Neste caso, observa-se que a tensão máxima obtida não

ultrapassa a tensão admissível uma vez que o canto presente no domínio inicial é arredondado eliminando a singularidade e suavizando a tensão local (veja Fig. 1(c)).



**Figura 2: Domínio inicial e condições de contorno (a) e distribuição de tensão para os casos sem (b) e com (c) restrição em tensão.**

Agora, lida-se com a otimização de mecanismos flexíveis com restrição em tensão. Objetiva-se aqui desenhar um inversor. O domínio inicial é representado por um retângulo  $100 \times 50 \text{ mm}^2$  preso no canto esquerdo de comprimento  $5 \text{ mm}$ , veja a Fig. 2. O inversor é modelado usando condição de simetria horizontal e está submetido a dois carregamentos uniformemente distribuídos:  $q_{in} = 10 \text{ N/mm}^2$  e  $q_{out} = 5 \text{ N/mm}^2$ . Finalmente, escolhe-se  $\beta = 0.02$  e  $\kappa = 10.0$ . Observe-se que a tensão máxima associada ao caso sem restrição excede a tensão limite devido à presença de juntas móveis, como mostra a Fig. 2(b). Por outro lado, no caso com restrição ( $\alpha = 10.0$ ) a tensão máxima não ultrapassa a tensão limite e a topologia final não apresenta juntas, como pode ser observado na Fig. 2(c).

## 4 O PROBLEMA DE RECONSTRUÇÃO DE FONTES

Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  um conjunto aberto e limitado com fronteira Lipschitz, denotada por  $\partial\Omega$ . Considere o subconjunto  $\Gamma_m \subseteq \partial\Omega$ , onde  $\Gamma_m$  tem medida de Lebesgue não-nula e  $\omega$  é aberto. Considere o seguinte problema de valor de contorno:

$$\begin{cases} \mathcal{A}u = b^* & \text{em } \Omega, \\ u = u^* & \text{sobre } \Gamma_m, \\ -\partial_n u = q^* & \text{sobre } \Gamma_m. \end{cases} \quad (11)$$

O problema de reconstrução de fontes consiste em determinar a fonte  $b^*$  a partir de medições da função  $u$  tomadas sobre  $\Gamma_m$  ou dentro de um subconjunto de  $\Omega$ . Em outras palavras, a fim de determinar a fonte  $b^*$ , assume-se que as funções  $u^*$  e  $q^*$  são conhecidas sobre  $\Gamma_m$ . Dependendo da natureza do problema inverso, pode-se também assumir que apenas um dos dados de Cauchy é conhecido sobre  $\Gamma_m$  e que a função  $u$  seja conhecida dentro de um subconjunto aberto  $\omega \subseteq \Omega$ . Na equação (11),  $\mathcal{A}$  representa um operador linear genérico de segunda ordem. Para maiores detalhes sobre o estado da arte deste problema, veja Machado (2016).

## 4.1 Problema de otimização associado

Da maneira como está apresentado, o problema inverso (11) não possui solução única, ou seja, é possível determinar pelo menos duas fontes  $b_1^*$  e  $b_2^*$  que produzem os mesmos dados de Cauchy  $u^*$  e  $q^*$ . Logo, necessita-se restringir o espaço de busca da fonte  $b^*$  a fim de que o problema inverso possua solução única. Mesmo após recuperar a unicidade de solução, se o operador  $\mathcal{A}$  for compacto, então a solução do problema inverso não é estável, ou seja, não possui dependência contínua com relação aos dados de Cauchy.

A metodologia proposta para resolver o problema inverso (11) consiste em definir um problema de otimização equivalente e utilizar derivada topológica para minimizar o funcional associado. Logo, em vez de lidar com o problema inverso, que é mal posto, a estratégia proposta consiste em tratar um problema de otimização, que é direto e bem posto. Mais ainda, para evitar métodos clássicos de regularização, a ideia utilizada consiste em definir um conjunto de fontes admissíveis  $C(\Omega) \ni b^*$ , de modo que a fonte dada no problema de otimização também pertença a este conjunto. A definição do conjunto de fontes admissíveis depende das hipóteses consideradas acerca da fonte  $b^*$ . De maneira geral, este conjunto pode ser dado por:

$$C(\Omega) = \left\{ \varphi \in L^d(\Omega); \varphi(x) = \sum_{i=1}^M g_i(x) \right\}. \quad (12)$$

No **Caso 1**, considera-se que  $b^*$  é uma fonte constante por partes cujo suporte é a união de conjuntos estrelados  $\omega_i$ , o que implica em  $d = 2$  e  $g_i(x) = \gamma_i \mathbb{1}_{\omega_i}(x)$  (Canelas *et al.*, 2014, 2015). No **Caso 2**, assume-se que  $b^*$  é uma fonte concentrada o que acarreta em  $g_i(x) = \alpha_i \delta(x - x_i)$  e  $d = 1$  (Machado *et al.*, 2016). Para o caso particular do problema inverso do potencial, onde busca-se reconstruir a fonte a partir apenas dos dados de Cauchy, tanto para o Caso 1 quanto para o Caso 2, o funcional de forma do problema de otimização é definido da seguinte forma:

$$\mathcal{J}(u^D, u^N) = \|u^D - u^N\|_{L^2(\Omega)}. \quad (13)$$

A definição deste funcional baseia-se no critério introduzido em Kohn & Vogelius (1984). As funções  $u^D$  e  $u^N$  são soluções dos seguintes problemas auxiliares:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{A}u^D = b & \text{em } \Omega, \\ u^D = u^* & \text{sobre } \Gamma_m \end{array} \right. \quad \text{e} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{A}u^N = b + c & \text{em } \Omega, \\ -\partial_n u^N = q^* & \text{sobre } \Gamma_m, \\ \int_{\Omega} u^N dx = \int_{\Omega} u^D dx \end{array} \right. \quad (14)$$

Em ambos os problemas auxiliares, a fonte  $b \in C(\Omega)$  é conhecida. Tanto para o Caso 1 quanto para o Caso 2, é possível verificar que os problemas auxiliares são bem postos e que tanto  $u^D$  quanto  $u^N$  são quadrado integráveis em  $\Omega$  (ver Clason & Kunisch (2011) e Pieper & Vexler (2013)), o que garante que o funcional (13) está bem definido em ambos os casos.

## 4.2 Problemas perturbados

O próximo passo consiste em perturbar o termo fonte  $b$  dos problemas auxiliares e mensurar a perturbação gerada sobre o funcional (13). No Caso 1, a perturbação da fonte consiste em adicionar  $m$  funções constantes por partes com suportes circulares de raio  $\varepsilon_i$ . No Caso 2, a

perturbação ocorre adicionando  $m$  cargas pontuais à fonte original. Em ambos os casos, a fonte resultante de tais perturbações será denotada por  $b_\varepsilon$ , sendo denominada fonte perturbada. Observe que, em cada caso, a fonte perturbada continua pertencendo ao conjunto  $C(\Omega)$ , definido em (12). Os problemas provenientes da perturbação na fonte são definidos a seguir. O funcional toma a seguinte forma:

$$\mathcal{J}(u_\varepsilon^D, u_\varepsilon^N) = \|u_\varepsilon^D - u_\varepsilon^N\|_{L^2(\Omega)}. \quad (15)$$

As funções  $u_\varepsilon^D$  e  $u_\varepsilon^N$  são soluções dos seguintes problemas auxiliares:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{A}u_\varepsilon^D = b_\varepsilon \quad \text{em } \Omega, \\ u_\varepsilon^D = u^* \quad \text{sobre } \Gamma_m \end{array} \right. \quad \text{e} \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{A}u_\varepsilon^N = b_\varepsilon + c_\varepsilon \quad \text{em } \Omega, \\ -\partial_n u_\varepsilon^N = q^* \quad \text{sobre } \Gamma_m, \\ \int_\Omega u_\varepsilon^N dx = \int_\Omega u_\varepsilon^D dx \end{array} \right. \quad (16)$$

A partir da perturbação da fonte  $b$ , procura-se uma forma de relacionar as soluções dos problemas perturbados (16) às soluções dos problemas auxiliares (14). Levando em consideração a linearidade do operador  $\mathcal{A}$ , toma-se as seguintes expansões:

$$u_\varepsilon^D = u^D + \sum_{i=1}^m \alpha_i v_i \quad \text{e} \quad u_\varepsilon^N = u^N + \sum_{i=1}^m \alpha_i (v_i + h_i), \quad (17)$$

onde as funções  $v_i$  são soluções de problemas cujas fontes envolvem diretamente as perturbações, com condição de contorno Dirichlet homogênea e  $h_i$  são soluções de problemas regulares, com condição de contorno dependente de  $v_i$ . Deseja-se fazer a análise de sensibilidade do funcional  $\mathcal{J}(\cdot, \cdot)$  com relação aos parâmetros que definem os elementos de  $C(\Omega)$ . Avaliando a variação deste funcional, obtém-se:

$$\mathcal{J}(u_\delta^D, u_\delta^N) - \mathcal{J}(u^D, u^N) = 2 \int_\Omega \sum_{i=1}^m \rho_i h_i (u^D - u^N) - \int_\Omega \left( \sum_{i=1}^m \rho_i h_i \right)^2, \quad (18)$$

onde  $\rho_i = \pi \varepsilon_i^2$  no Caso 1 e  $\rho_i = \alpha_i$  no Caso 2. Observe que o lado direito da equação (18) é uma forma quadrática com relação a  $\rho_i$ . Logo, ao minimizar a variação do funcional, obtém-se o seguinte sistema:

$$H_{ij} \rho_j = d_i, \quad (19)$$

onde  $H_{ij} = (h_i, h_j)_{L^2(\Omega)}$  e  $d_i = (h_i, u^D - u^N)_{L^2(\Omega)}$ . Após calcular a solução de (19), realiza-se uma busca exaustiva e combinatória pelo menor valor da variação  $\mathcal{J}(u_\delta^D, u_\delta^N) - \mathcal{J}(u^D, u^N)$ . Esta busca é realizada sobre um conjunto  $X \subset \Omega$ , que representa uma discretização arbitrária de  $\Omega$ . O conjunto de pontos onde a variação atinge valor mínimo fornece automaticamente as localizações ótimas  $\xi^* \in X^m$  e as intensidades ótimas  $\alpha^* \in \mathbb{R}^m$ .

Cabe ressaltar que o problema de otimização não possui solução única. Para cada valor de  $m$ , é possível encontrar um par  $(\xi^*, \alpha^*)$ . Outra observação importante diz respeito ao método de obtenção dos parâmetros ótimos. Como se trata de um problema combinatório, a busca exaustiva torna-se rapidamente inviável quando  $n \gg m$  quando  $m$  aumenta de valor. Por exemplo, em testes experimentais usando o método proposto, a solução ótima não pôde ser eficientemente obtida considerando  $n = 400$  e  $4 < m \ll n$ . Desde que este é claramente um obstáculo do método, meios alternativos podem ser utilizados para sobrepor tal dificuldade. Em Machado *et al.* (2016), foi utilizada uma abordagem metaheurística e um procedimento de busca seletiva, considerando  $m$  com valor igual ou muito próximo ao valor de  $n$ .



### 4.3 RESULTADOS NUMÉRICOS

Nesta seção, serão apresentados alguns resultados numéricos referentes à resolução do sistema (19), ou seja, obtidos apenas para o caso em que o domínio de definição do problema inverso é limitado. Em todos os exemplos, o domínio  $\Omega$  é dado por um quadrado de lado  $L = 1$ , e utilizou-se elementos finitos triangulares lineares na resolução numérica. Nas figuras subsequentes, os círculos representam as cargas que constituem cada fonte, de modo que o centro indica o ponto onde a carga é aplicada e o raio é proporcional à intensidade.

O primeiro exemplo trata da reconstrução de uma fonte contendo três cargas pontuais com intensidades  $\alpha_1^* = 1.0$ ,  $\alpha_2^* = 2.0$  e  $\alpha_3^* = 3.0$ . Esta fonte está representada pela Fig. 3(a). Este exemplo serve para explicar a metodologia utilizada para determinar a quantidade de cargas. Já foi mencionado que para cada valor de  $m$ , o problema de otimização possui uma solução diferente. Desta forma, toma-se  $m$  de forma crescente até o momento em que se observa que uma das cargas possui intensidade desprezível.

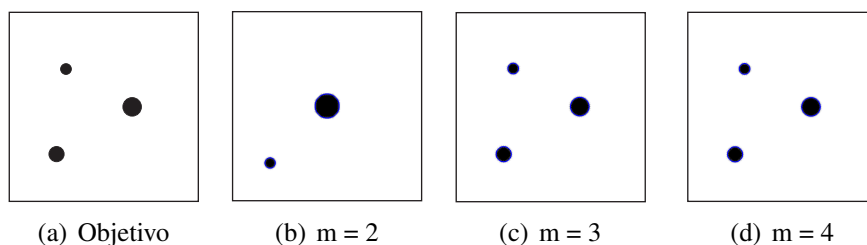


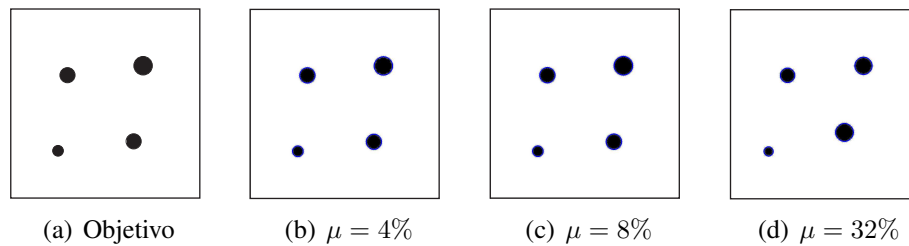
Figura 3: Exemplo 1: Determinando a quantidade exata de fontes pontuais.

As Figuras 3(b), 3(c) e 3(d) representam as soluções encontradas para  $m$  variando entre 2 e 4. Quando se toma  $m = 4$ , o vetor de intensidades ótimas é dado por  $\alpha^* = (2.0, 1.0, 3.0, 1.2342 \times 10^{-12})$ , não havendo sobreposição entre as localizações (o algoritmo não permite que isto ocorra). Pode-se concluir então que a fonte a ser reconstruída possui exatamente três cargas pontuais e que a solução correta é aquela apresentada na Fig. 3(c). Note ainda que a reconstrução é exata, ou seja, quando o valor de  $m$  coincide com o número de cargas procuradas, o problema de otimização possui a mesma solução que o problema inverso.

Visando verificar a robustez do método proposto, o próximo exemplo consiste na introdução de ruído no dado medido  $q^*$ . Isto é feito porque esta leitura foi obtida de maneira puramente sintética, o que pode mascarar eventuais instabilidades do método proposto. O ruído introduzido é do tipo Gaussiano branco, com média nula e diferentes valores de desvio-padrão. Para este exemplo, a fonte que se deseja reconstruir possui quatro cargas pontuais, localizadas nos pontos  $x_1^* = (0.20, 0.20)$ ,  $x_2^* = (-0.25, 0.15)$ ,  $x_3^* = (0.15, -0.25)$  e  $x_4^* = (-0.30, -0.25)$ , com intensidades  $\alpha_1^* = 3.0$ ,  $\alpha_2^* = \alpha_3^* = 2.0$  e  $\alpha_4^* = 1.0$ . A Figura 4(a) traz uma ilustração desta fonte. Os resultados obtidos são mostrados nas Figuras 4(b), 4(c) e 4(d), correspondentes a desvios-padrão de níveis 4%, 8% e 32%. O dado poluído com ruído, denotado por  $q_\mu^*$ , pode ser descrito pela seguinte fórmula:

$$q_\mu^* = q^*(1 + \mu\eta), \quad (20)$$

onde  $\eta$  é uma variável aleatória cuja função de densidade de probabilidade é dada por uma distribuição gaussiana e  $\mu \in \{4\%, 8\%, 32\%\}$  representa os possíveis desvios-padrão.



**Figura 4: Exemplo 2: Aumentando o nível de ruído sobre o dado lido.**

A Tabela 1 traz os resultados quantitativos da reconstrução ilustrada nas figuras acima. Note que, mesmo para um nível de ruído de 32%, as localizações são obtidas de maneira quase exata. Por outro lado, as intensidades são bem mais sensíveis e sofrem uma perturbação notável. Cabe destacar ainda que o ruído foi introduzido de maneira aleatória, sendo necessário fazer uma análise estatística para poder obter uma conclusão mais formal sobre a robustez do método.

**Tabela 1: Exemplo 2. Intensidades e localizações ótimas para diferentes níveis de ruído.**

	$\mu = 4\%$	$\mu = 8\%$	$\mu = 32\%$
$\xi_1^*$	(0.20, 0.20)	(0.20, 0.20)	(0.20, 0.20)
$\alpha_1^*$	3.0167 (+0.56%)	3.0334 (+1.11%)	2.9540 (−1.53%)
$\xi_2^*$	(−0.25, 0.15)	(−0.25, 0.15)	(−0.25, 0.15)
$\alpha_2^*$	1.9771 (−1.15%)	1.9543 (−2.29%)	1.9306 (−3.47%)
$\xi_3^*$	(0.15, −0.25)	(0.15, −0.25)	(0.10, −0.20)
$\alpha_3^*$	2.0036 (+0.18%)	2.0072 (+0.36%)	3.0452 (+52.26%)
$\xi_4^*$	(−0.30, −0.25)	(−0.30, −0.25)	(−0.35, −0.25)
$\alpha_4^*$	0.9955 (−0.45%)	0.9909 (−0.91%)	0.6412 (−35.88%)

## 5 CONCLUSÃO

Neste trabalho, a derivada topológica foi utilizada para tratar problemas inversos e de otimização topológica. Em particular, os problemas de reconstrução de fontes e de otimização de estruturas e mecanismos flexíveis foram abordados. Através da análise de sensibilidade topológica, foram obtidas formas analíticas para a derivada topológica, o que conduziu a resultados satisfatórios para ambos os problemas. No contexto de otimização topológica, a fórmula analítica para a sensibilidade topológica do funcional permitiu obter estruturas e mecanismos ótimos em poucas iterações e que atendem à restrição em tensão imposta. Com relação ao problema de reconstrução de fontes, a abordagem baseada na derivada topológica forneceu um método não iterativo de segunda ordem sem resíduo que, através de um processo de otimização combinatória, permitiu resolver o problema sem a necessidade de introduzir regularização do funcional de forma.

## 6 REFERÊNCIAS

- Amstutz, S. 2006. Sensitivity analysis with respect to a local perturbation of the material property. *Asymptotic Analysis*, **49**(1-2), 87–108.
- Amstutz, S., & Novotny, A. A. 2010. Topological optimization of structures subject to von Mises stress constraints. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, **41**(3), 407–420.
- Amstutz, S., Novotny, A. A., & de Souza Neto, E. A. 2012. Topological derivative-based topology optimization of structures subject to Drucker-Prager stress constraints. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **233–236**, 123–136.
- Canelas, A., Laurain, A., & Novotny, A. A. 2014. A New Reconstruction Method for the Inverse Potential Problem. *Journal of Computational Physics*, **268**, 417–431.
- Canelas, A., Laurain, A., & Novotny, A. A. 2015. A new reconstruction method for the inverse source problem from partial boundary measurements. *Inverse Problems*, **31**(7), 075009.
- Clason, C., & Kunisch, K. 2011. A duality-based approach to elliptic control problems in non-reflexive Banach spaces. *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, **17**(1), 243–266.
- Eschenauer, H. A., & Olhoff, N. 2001. Topology optimization of continuum structures: a review. *Applied Mechanics Reviews*, **54**(4), 331–390.
- Kohn, R., & Vogelius, M. 1984. Determining conductivity by boundary measurements. *Comm. Pure Appl. Math.*, **37**(3), 289–298.
- Lopes, C. G., & Novotny, A. A. 2015. Síntese de mecanismos flexíveis com restrição em tensão utilizando o conceito de derivada topológica. In: *XXXV CILAMCE - Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering*.
- Lopes, C. G., & Novotny, A. A. 2016. Topology design of compliant mechanisms with stress constraints based on the topological derivative concept. *Structural and Multidisciplinary Optimization (to appear)*.
- Lopes, C. G., dos Santos, R. B., & Novotny, A. A. 2015. Topological derivative-based topology optimization of structures subject to multiple load-cases. *Latin American Journal of Solids and Structures*, **12**, 834–860.
- Machado, T. J. 2016. *Um Novo Método para Reconstrução de Fontes Concentradas*. Ph.D. Thesis, Laboratório Nacional de Computação Científica, Petrópolis, Brazil.
- Machado, T. J., Angelo, J. S., & Novotny, A. A. 2016. A new one-shot pointwise source reconstruction method. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, doi: **10.1002/mma.4059**.
- Novotny, A. A., & Sokołowski, J. 2013. *Topological derivatives in shape optimization*. Interaction of Mechanics and Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg.
- Pieper, K., & Vexler, B. 2013. A priori error analysis for discretization of sparse elliptic optimal control problems in measure space. *SIAM Journal on Control and Optimization*, **51**(4), 2788–2808.
- Sokołowski, J., & Żochowski, A. 1999. On the topological derivative in shape optimization. *SIAM Journal on Control and Optimization*, **37**(4), 1251–1272.