

X ENCONTRO ACADÊMICO

MODELAGEM COMPUTACIONAL

MÉTODOS DE ELEMENTOS FINITOS MISTOS PARA O PROBLEMA DA ELASTICIDADE LINEAR EM MALHAS DE QUADRILÁTEROS

Thiago O. Quinelato

Abimael F. D. Loula

thiagoq@lncc.br

aloc@lncc.br

Laboratório Nacional de Computação Científica

Av. Getúlio Vargas, 333, Quitandinha, 25651-075, Rio de Janeiro, Petrópolis, Brasil

Maicon R. Correa

maicon@ime.unicamp.br

Universidade Estadual de Campinas

Rua Sérgio Buarque de Holanda, 651, Barão Geraldo, 13083-859, São Paulo, Campinas, Brasil

Todd Arbogast

arbogast@ices.utexas.edu

The University of Texas at Austin

1 University Station C0200, 78712, Texas, Austin, Estados Unidos da América

Resumo. *O problema da elasticidade descreve as deformações de um corpo e as tensões a que ele está submetido, relacionando-as ao conjunto de forças atuantes sobre ele. Sua aproximação deve preservar a continuidade da tração, implicando na conservação local do momento linear, o que não acontece quando métodos de elementos finitos baseados em deslocamento são usados. Uma forma de contornar essa deficiência é a adoção de formulações mistas, que exigem a escolha de espaços de aproximação compatíveis. Outra característica desejável é a simetria do tensor de tensões, que implica na conservação do momento angular. A condição de simetria é exigida de forma variacional, ideia que tem sido amplamente utilizada em malhas formadas por triângulos, fornecendo aproximações de qualidade aceitável tanto para o deslocamento quanto para a tensão. Neste trabalho, é destacado que os espaços de aproximação comumente adotados não são aplicáveis a malhas formadas por quadriláteros convexos arbitrários, já que nesse caso a solução aproximada para o tensor de tensões (a principal variável de interesse) sofre significativa deterioração. Uma formulação híbrida é adotada, o que reduz o custo computacional e melhora a qualidade da matriz resultante. Por fim, as imprecisões observadas são explicadas e alternativas viáveis às estratégias usuais de aproximação são sugeridas.*

Palavras-chave: Elasticidade linear, Método dos elementos finitos, Malhas quadrilaterais

1 INTRODUÇÃO

O problema da elasticidade linear descreve as deformações de um corpo e as tensões a que ele está submetido, relacionado-as ao conjunto de forças atuantes sobre ele. Há diversos desafios relacionados a este problema, que justificam o desenvolvimento de modelos matemáticos e computacionais para obtenção de aproximações numéricas estáveis e precisas. Em particular, neste trabalho o comportamento de um modelo proposto por (Arnold et al., 2015) para o problema da elasticidade linear em malhas de quadriláteros é comparado com dois outros métodos, que são aqui introduzidos. O objetivo é verificar como a distorção da malha de elementos finitos afeta a qualidade da aproximação obtida com os métodos numéricos estudados.

Este trabalho está inserido no contexto de desenvolvimento de métodos de elementos finitos mistos baseados na formulação de Hellinger-Reissner para o problema da elasticidade linear. Ou seja, métodos em que as variáveis de interesse (tensão e deslocamento) são aproximadas simultaneamente em subespaços de dimensão finita \mathcal{S}_h e \mathcal{U}_h . O interesse por esse tipo de método (chamado de método misto) se dá pelo fato de que as aproximações para o campo de tensões são melhores que aquelas obtidas em formulações baseadas apenas em deslocamento. Uma questão importante a ser estudada quando formulações mistas são utilizadas é a estabilidade do método numérico, que é em geral condicionada a uma relação de compatibilidade entre os espaços adotados para os campos de tensão e deslocamento.

A principal dificuldade na construção de aproximações para a formulação de Hellinger-Reissner é a conservação do momento angular. A dificuldade reside em atender a condição de compatibilidade entre os espaços de aproximação preservando a simetria do campo de tensões. Este trabalho segue as ideias de Fraeijs de Veubeke (Arnold et al., 1984, 2006) e utiliza um multiplicador de Lagrange associado à rotação para impor a condição de simetria do tensor de tensões de forma variacional. Formulações mistas híbridas baseadas nessa ideia foram originalmente apresentadas por Amara e Thomas (1979). No problema discreto, a rotação é aproximada por um polinômio independente em cada elemento e seus graus de liberdade podem ser condensados graças ao processo de hibridização. Dessa maneira, a introdução de uma variável para reforçar a condição de simetria das tensões (e, consequentemente, a conservação do momento angular) não causa aumento do sistema global de equações resultante da discretização do problema. Além disso, a utilização de métodos híbridos facilita a construção de bases locais para os espaços de aproximação.

Espaços de dimensão finita baseados no trabalho de Raviart e Thomas (1977) foram apresentados por Arnold et al. (2015). Nesse trabalho os autores observam que essa estratégia pode ser aplicada a malhas de paralelogramos, apresentando taxas ótimas de convergência em $H(\text{div})$ para o campo de tensões e em L^2 para os campos de deslocamentos e rotações. Entretanto, para malhas com quadriláteros arbitrários há certa dificuldade de convergência para a tensão na seminorma de $H(\text{div})$.

A proposta é estudar a convergência de estratégias de aproximação da formulação de Hellinger-Reissner usando alternativas aos espaços adotados em Arnold et al. (2015). A primeira escolha de espaços é baseada nos espaços apresentados por Arnold et al. (2005) para o problema de Darcy e fornece boas aproximações para as variáveis de interesse. Entretanto, o número de graus de liberdade nos problemas locais é significativamente maior quando comparamos com os espaços de Arnold et al. (2015). Uma combinação de espaços baseada no trabalho de Arbogast e Correa (2016) é então apresentada e a convergência desta aproximação

é estudada.

Este trabalho está apresentado da seguinte forma: primeiro são introduzidas as notações que serão utilizadas no texto; a seguir, o problema da elasticidade linear é apresentado em dimensões infinita e finita; logo após, os resultados de experimentos numéricos em malhas de quadrados e trapézios são relatados e discutidos.

2 NOTAÇÕES

\mathbb{M} é usado para denotar o conjunto dos tensores de ordem 2 e \mathbb{S} para denotar o subespaço de \mathbb{M} formado por tensores simétricos. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um aberto limitado com contorno $\Gamma = \partial\Omega$. O espaço das funções $f : \omega \rightarrow \mathbb{F}$ (com $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{M}$ ou \mathbb{S}) cujo quadrado é integrável é denotado por $L^2(\omega, \mathbb{F})$, com produto interno $(u, v)_\omega$ e norma $\|v\|_\omega^2 = (v, v)_\omega$ definidos da forma usual. O índice ω será omitido quando $\omega = \Omega$. Considere a seguinte definição para o espaço $H(\text{div}, \Omega, \mathbb{M})$:

$$H(\text{div}, \Omega, \mathbb{M}) := \{\boldsymbol{\tau} \in L^2(\Omega, \mathbb{M}); \text{div } \boldsymbol{\tau} \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^2)\}$$

e o espaço $H(\text{div}, \Omega, \mathbb{S})$ definido de forma similar.

A discretização por elementos finitos do domínio Ω é feita da forma usual: uma malha \mathcal{T}_h de elementos quadrilaterais convexos K é definida no domínio Ω_h . O conjunto de todas as arestas em \mathcal{T}_h é denotado por \mathcal{E}_h . Arestas interiores, isto é, aquelas compartilhadas por dois elementos, formam o conjunto \mathcal{E}_h^0 , enquanto as arestas do contorno formam o conjunto $\mathcal{E}_h^\partial = \mathcal{E}_h \setminus \mathcal{E}_h^0$.

O conjunto dos polinômios definidos no domínio $e \subset \mathbb{R}$ de grau máximo k é indicado por $\mathbb{P}_k(e)$. Essa notação é estendida para um conjunto de arestas \mathcal{E} como segue:

$$\mathbb{P}_k(\mathcal{E}) = \{v \in \mathbb{P}_k(e) \forall e \in \mathcal{E}\}.$$

$\tilde{\mathbb{P}}_k(K)$ são os polinômios de grau k definidos no domínio $K \subset \mathbb{R}^2$ e $\mathbb{P}_k(K)$ é o conjunto dos polinômios em K de grau máximo k . Além disso, a notação $\mathbb{P}_{r,s}(K)$ é utilizada para indicar o conjunto de polinômios em K de graus máximos r em x_1 e s em x_2 .

Seja $\mathbf{F}_K : \hat{K} \rightarrow K$ um difeomorfismo do elemento de referência $\hat{K} = (0, 1)^2 \subset \mathbb{R}^2$ para o quadrilátero convexo K . Uma função escalar (ou vetorial) $\hat{\varphi}$ definida em \hat{K} é transformada para uma função $\varphi = P_K^0 \hat{\varphi}$ em K por composição:

$$\varphi(\mathbf{x}) = (P_K^0 \hat{\varphi})(\mathbf{x}) = \hat{\varphi}(\hat{\mathbf{x}}),$$

onde $\mathbf{x} = \mathbf{F}_K \hat{\mathbf{x}}$. Funções vetoriais $\hat{\varphi}$ em \hat{K} também podem ser transformadas para funções $\varphi = P_K^1 \hat{\varphi}$ em K pela transformação de Piola:

$$\hat{\varphi}(\mathbf{x}) = (P_K^1 \hat{\varphi})(\mathbf{x}) = \frac{1}{J_K(\hat{\mathbf{x}})} [\mathbf{D}\mathbf{F}_K(\hat{\mathbf{x}})] \hat{\varphi}(\hat{\mathbf{x}}),$$

onde $J_K = \det \mathbf{D}\mathbf{F}_K$. A transformação de Piola conserva a continuidade da componente normal das funções transformadas e por isso é a maneira adequada para transformar funções vetoriais em $H(\text{div})$. Ainda, a transformação de Piola também pode ser usada para transformar uma função tensorial $\varphi(\hat{K})$ para uma função $\varphi(K)$. Neste caso a transformação é aplicada a cada linha da representação matricial de φ . Também será usado P_K^1 para denotar essa operação.

3 O PROBLEMA DA ELASTICIDADE LINEAR BIDIMENSIONAL

Por simplicidade, o problema da elasticidade linear será formulado como segue:

Problema da Elasticidade Linear: Dados $\tilde{\mathbf{u}} : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $\mathbf{g} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$, encontrar o campo de deslocamentos $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ e o campo de tensões efetivas $\boldsymbol{\sigma} : \Omega \rightarrow \mathbb{S}$ tais que

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma} &= \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \quad \text{em } \Omega, \\ \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{g} \quad \text{em } \Omega, \\ \mathbf{u} &= \tilde{\mathbf{u}} \quad \text{sobre } \Gamma,\end{aligned}$$

onde $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{x}) : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}$ é o tensor de complacência uniformemente limitado em Ω e positivo-definido, que no caso isotrópico é dado por

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{2\mu} \left(\boldsymbol{\sigma} - \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \operatorname{tr} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{I} \right),$$

$\lambda \geq 0$ e $\mu > 0$ são as constantes de Lamé e $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \nabla^s \mathbf{u} = \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T]$ é a parte simétrica do gradiente de \mathbf{u} .

A definição para a rotação $r(\mathbf{u}) = \operatorname{as}(\nabla \mathbf{u})/2$ (onde $\operatorname{as} \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_{12} - \boldsymbol{\tau}_{21}$ mede a assimetria de uma matriz $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{M}$) é usada para reescrever a equação constitutiva da elasticidade:

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma} = \nabla \mathbf{u} - \mathbf{R},$$

com

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & r \\ -r & 0 \end{bmatrix}.$$

Sejam os espaços $\mathcal{S} = H(\operatorname{div}, \Omega, \mathbb{M})$, $\mathcal{U} = L^2(\Omega, \mathbb{R}^2)$ e $\mathcal{R} = L^2(\Omega, \mathbb{R})$. Assim, a formulação variacional do Problema da Elasticidade Linear será

Problema Variacional: Dados $\tilde{\mathbf{u}} \in H^{1/2}(\Gamma, \mathbb{R}^2)$ e $\mathbf{g} \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^2)$, encontrar $(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}, r) \in \mathcal{S} \times \mathcal{U} \times \mathcal{R}$ tais que

$$\begin{aligned}(\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) + (\mathbf{u}, \operatorname{div} \boldsymbol{\tau}) + (r, \operatorname{as} \boldsymbol{\tau}) &= (\tilde{\mathbf{u}}, \boldsymbol{\tau} \boldsymbol{\nu})_\Gamma, \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \mathcal{S}, \\ (\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\eta}) &= (\mathbf{g}, \boldsymbol{\eta}), \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{U}, \\ (\operatorname{as} \boldsymbol{\sigma}, s) &= 0, \quad \forall s \in \mathcal{R},\end{aligned}$$

onde $\boldsymbol{\nu}$ é o vetor normal exterior a Γ .

Note que a condição de simetria do tensor de tensão deixou de ser uma restrição às funções do espaço \mathcal{S} , sendo nesta formulação imposta pela formulação variacional.

4 APROXIMAÇÕES POR ELEMENTOS FINITOS

O espaço de aproximação para a tensão é baseado em um produto de espaços RT (Raviart e Thomas, 1977), ABF (Arnold et al., 2005) ou AC (Arbogast e Correa, 2016) em cada elemento:

$$\mathcal{S}_h := \{ \boldsymbol{\sigma}_h \in H(\operatorname{div}, \Omega_h, \mathbb{M}); \boldsymbol{\sigma}_h|_K \in \mathcal{V}^2(K) \ \forall K \in \mathcal{T}_h \},$$

Tabela 1: Comparação entre o número de graus de liberdade locais dos espaços de aproximação.

	\mathcal{S}_h	\mathcal{U}_h	\mathcal{R}_h	Total
RT ₁	24	8	3	35
ABF ₁	32	16	3	51
AC ₁	20	6	3	29

onde

$$\begin{aligned}\mathcal{V}(K) &= \mathcal{V}^{RT}(K) := P_K^1(\mathbb{P}_{k+1,k}(\hat{K}), \mathbb{P}_{k,k+1}(\hat{K})), \\ \mathcal{V}(K) &= \mathcal{V}^{ABF}(K) := P_K^1(\mathbb{P}_{k+2,k}(\hat{K}), \mathbb{P}_{k,k+2}(\hat{K})) \quad \text{ou} \\ \mathcal{V}(K) &= \mathcal{V}^{AC}(K) := \mathbb{P}_k^2(K) \oplus \mathbf{x}\tilde{\mathbb{P}}_k(K) \oplus \text{span}\{\sigma_1, \sigma_2\},\end{aligned}$$

com $\sigma_1 = P_K^1(\text{curl}(\hat{x}_1^2 \hat{x}_2))$ e $\sigma_2 = P_K^1(\text{curl}(\hat{x}_1 \hat{x}_2^2))$.

Já o espaço para os deslocamentos é polinomial por partes, transformado por composição a partir do elemento de referência (para RT e ABF):

$$\begin{aligned}\mathcal{U}_h^{RT} &:= \{\mathbf{u}_h \in L^2(\Omega_h, \mathbb{R}^2); \mathbf{u}_h|_K \in P_K^0(\mathbb{P}_{k,k}^2(\hat{K})) \forall K \in \mathcal{T}_h\}, \\ \mathcal{U}_h^{ABF} &:= \{\mathbf{u}_h \in L^2(\Omega_h, \mathbb{R}^2); \mathbf{u}_h|_K \in P_K^0(\mathcal{R}_k^2(\hat{K})) \forall K \in \mathcal{T}_h\},\end{aligned}$$

com $\mathcal{R}_k(\hat{K}) = \mathbb{P}_{k+1,k+1}(\hat{K}) \setminus \text{span}\{\hat{x}_1^{k+1} \hat{x}_2^{k+1}\}$, ou definido nas coordenadas do elemento (para AC):

$$\mathcal{U}_h^{AC} := \{\mathbf{u}_h \in L^2(\Omega_h, \mathbb{R}^2); \mathbf{u}_h|_K \in \mathbb{P}_k^2(K) \forall K \in \mathcal{T}_h\}.$$

O espaço para as rotações é polinomial por partes, definido nas coordenadas do elemento:

$$\mathcal{R}_h := \{r_h \in L^2(\Omega_h, \mathbb{R}); r_h|_K \in \mathbb{P}_k(K) \forall K \in \mathcal{T}_h\}.$$

Na Tabela 1 é comparado o número de graus de liberdade locais dos espaços definidos acima, para o caso particular $k = 1$.

Usando essas definições para os espaços de dimensão finita, o problema discreto é apresentado em uma formulação mista:

Problema Discreto: Dados $\tilde{\mathbf{u}} \in (\mathbb{P}_k^2(\mathcal{E}_h^\partial))'$ e $\mathbf{g} \in \mathcal{U}'_h$, encontrar $(\boldsymbol{\sigma}_h, \mathbf{u}_h, r_h) \in \mathcal{S}_h \times \mathcal{U}_h \times \mathcal{R}_h$ tais que

$$\begin{aligned}(\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma}_h, \boldsymbol{\tau}) + (\mathbf{u}_h, \text{div } \boldsymbol{\tau}) + (r_h, \text{as } \boldsymbol{\tau}) &= (\tilde{\mathbf{u}}, \boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\nu})_\Gamma, \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \mathcal{S}_h, \\ (\text{div } \boldsymbol{\sigma}_h, \boldsymbol{\eta}) &= (\mathbf{g}, \boldsymbol{\eta}), \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{U}_h, \\ (\text{as } \boldsymbol{\sigma}_h, s) &= 0, \quad \forall s \in \mathcal{R}_h.\end{aligned}$$

Na formulação híbrida, os espaços para aproximação dos deslocamentos e das rotações são os mesmos da formulação mista, enquanto a continuidade da tração é imposta pela formulação variacional através de multiplicadores de Lagrange. Assim, as tensões são procuradas no espaço

$$\mathcal{S}_h := \{\boldsymbol{\sigma}_h \in L^2(\Omega_h, \mathbb{M}); \boldsymbol{\sigma}_h|_K \in \mathcal{V}^2(K) \forall K \in \mathcal{T}_h\},$$

com $\mathcal{V}(K)$ como definido anteriormente. Introduzindo o espaço

$$\mathcal{L}_h^\varphi := \{\hat{\mathbf{u}} \in \mathbb{P}_k^2(e) \mid \forall e \in \mathcal{E}_h; \hat{\mathbf{u}}|_e = \varphi|_e \mid \forall e \in \mathcal{E}_h^\partial\}$$

para o multiplicador de Lagrange, a seguinte formulação hibridizada para o problema da elasticidade pode ser apresentada:

Problema na Forma Híbrida: Dados $\tilde{\mathbf{u}} \in (\mathbb{P}_k^2(\mathcal{E}_h^\partial))'$ e $\mathbf{g} \in \mathcal{U}'_h$, encontrar $(\boldsymbol{\sigma}_h, \mathbf{u}_h, r_h, \hat{\mathbf{u}}_h) \in \mathcal{S}_h \times \mathcal{U}_h \times \mathcal{R}_h \times \mathcal{L}_h^{\tilde{\mathbf{u}}}$ tais que

$$\begin{aligned} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left[(\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma}_h, \boldsymbol{\tau})_K + (\mathbf{u}_h, \operatorname{div} \boldsymbol{\tau})_K + (r_h, \operatorname{as} \boldsymbol{\tau})_K - (\hat{\mathbf{u}}_h, \boldsymbol{\tau} \boldsymbol{\nu})_{\partial K \cap \mathcal{E}_h^0} \right] &= 0, & \forall \boldsymbol{\tau} \in \mathcal{S}_h, \\ \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_h, \boldsymbol{\eta})_K &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\mathbf{g}, \boldsymbol{\eta})_K, & \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{U}_h, \\ \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\operatorname{as} \boldsymbol{\sigma}_h, s)_K &= 0, & \forall s \in \mathcal{R}_h, \\ \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\boldsymbol{\sigma}_h \boldsymbol{\nu}, \hat{\boldsymbol{\eta}})_{\partial K \cap \mathcal{E}_h^0} &= 0, & \forall \hat{\boldsymbol{\eta}} \in \mathcal{L}_h^0, \end{aligned}$$

onde a última equação impõe fracamente a continuidade da tração nas interfaces dos elementos.

5 RESULTADOS NUMÉRICOS

Nesta seção são relatados resultados numéricos correspondentes a estudos de convergência das aproximações propostas para o problema da elasticidade linear em sua formulação híbrida. O domínio é o quadrado $(-1, 1) \times (-1, 1)$ e são consideradas duas sequências de malhas: uma construída pela subdivisão regular em quadrados e outra com malhas em que cada elemento é congruente a um trapezoide (Fig. 1). Condições de contorno de Dirichlet são impostas em $\hat{\mathbf{u}}$ sobre o contorno Γ e a solução exata

$$\mathbf{u}(x, y) = \begin{bmatrix} \cos(\pi x) \sin(\pi y) \\ \sin(\pi x) \cos(\pi y) \end{bmatrix}$$

é usada, juntamente aos parâmetros $\lambda = 123$ e $\mu = 79,3$ para determinar a força de corpo \mathbf{g} .

A convergência de aproximações utilizando os espaços de dimensão finita apresentados na seção anterior é estudada em malhas de 8×8 , 16×16 , 32×32 , 64×64 , 128×128 , 256×256 e 512×512 elementos quadrados e trapezoidais. Os resultados são exibidos na Tabela 2 para as malhas de quadrados e na Tabela 3 para as malhas de trapézios.

6 DISCUSSÕES E CONSIDERAÇÕES FINAIS

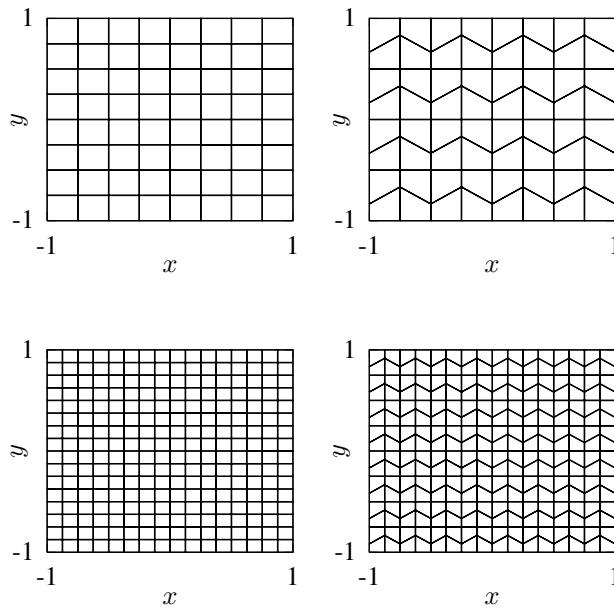
Conforme já observado por Arnold et al. (2015), a escolha dos espaços apresentados por Raviart e Thomas (1977) para aproximação do problema da elasticidade linear mostra-se adequada apenas em malhas com quadriláteros que são paralelogramos. Uma alternativa viável é buscar aproximações em um espaço formado por um produto dos espaços sugeridos por Arnold

Tabela 2: Resultados de convergência em malhas de quadrados.

n	$\ \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h\ $		$\ \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h)\ $		$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_h\ $		$\ r - r_h\ $	
	erro	ordem	erro	ordem	erro	ordem	erro	ordem
RT₁								
8	$6,271 \cdot 10^1$	1,96	$2,590 \cdot 10^2$	1,95	$6,593 \cdot 10^{-2}$	1,96	$2,044 \cdot 10^{-2}$	2,88
16	$1,580 \cdot 10^1$	1,99	$6,528 \cdot 10^1$	1,99	$1,661 \cdot 10^{-2}$	1,99	$2,555 \cdot 10^{-3}$	3,00
32	$3,957 \cdot 10^0$	2,00	$1,635 \cdot 10^1$	2,00	$4,160 \cdot 10^{-3}$	2,00	$3,182 \cdot 10^{-4}$	3,01
64	$9,897 \cdot 10^{-1}$	2,00	$4,090 \cdot 10^0$	2,00	$1,041 \cdot 10^{-3}$	2,00	$3,972 \cdot 10^{-5}$	3,00
128	$2,474 \cdot 10^{-1}$	2,00	$1,023 \cdot 10^0$	2,00	$2,602 \cdot 10^{-4}$	2,00	$4,964 \cdot 10^{-6}$	3,00
256	$6,186 \cdot 10^{-2}$	2,00	$2,557 \cdot 10^{-1}$	2,00	$6,505 \cdot 10^{-5}$	2,00	$6,204 \cdot 10^{-7}$	3,00
512	$1,547 \cdot 10^{-2}$	2,00	$6,392 \cdot 10^{-2}$	2,00	$1,626 \cdot 10^{-5}$	2,00	$7,755 \cdot 10^{-8}$	3,00
ABF₁								
8	$6,310 \cdot 10^1$	1,98	$2,202 \cdot 10^1$	3,12	$7,240 \cdot 10^{-3}$	3,11	$1,974 \cdot 10^{-2}$	2,72
16	$1,582 \cdot 10^1$	2,00	$2,672 \cdot 10^0$	3,04	$8,837 \cdot 10^{-4}$	3,03	$2,536 \cdot 10^{-3}$	2,96
32	$3,958 \cdot 10^0$	2,00	$3,313 \cdot 10^{-1}$	3,01	$1,098 \cdot 10^{-4}$	3,01	$3,177 \cdot 10^{-4}$	3,00
64	$9,898 \cdot 10^{-1}$	2,00	$4,133 \cdot 10^{-2}$	3,00	$1,371 \cdot 10^{-5}$	3,00	$3,971 \cdot 10^{-5}$	3,00
128	$2,475 \cdot 10^{-1}$	2,00	$5,164 \cdot 10^{-3}$	3,00	$1,713 \cdot 10^{-6}$	3,00	$4,963 \cdot 10^{-6}$	3,00
256	$6,186 \cdot 10^{-2}$	2,00	$6,454 \cdot 10^{-4}$	3,00	$2,141 \cdot 10^{-7}$	3,00	$6,204 \cdot 10^{-7}$	3,00
512	$1,547 \cdot 10^{-2}$	2,00	$8,067 \cdot 10^{-5}$	3,00	$2,676 \cdot 10^{-8}$	3,00	$7,755 \cdot 10^{-8}$	3,00
AC₁								
8	$6,430 \cdot 10^1$	2,09	$4,230 \cdot 10^2$	1,86	$1,073 \cdot 10^{-1}$	1,87	$1,242 \cdot 10^{-2}$	3,17
16	$1,589 \cdot 10^1$	2,02	$1,083 \cdot 10^2$	1,97	$2,752 \cdot 10^{-2}$	1,96	$2,258 \cdot 10^{-3}$	2,46
32	$3,962 \cdot 10^0$	2,00	$2,723 \cdot 10^1$	1,99	$6,925 \cdot 10^{-3}$	1,99	$3,085 \cdot 10^{-4}$	2,87
64	$9,900 \cdot 10^{-1}$	2,00	$6,816 \cdot 10^0$	2,00	$1,734 \cdot 10^{-3}$	2,00	$3,942 \cdot 10^{-5}$	2,97
128	$2,475 \cdot 10^{-1}$	2,00	$1,705 \cdot 10^0$	2,00	$4,337 \cdot 10^{-4}$	2,00	$4,954 \cdot 10^{-6}$	2,99
256	$6,187 \cdot 10^{-2}$	2,00	$4,262 \cdot 10^{-1}$	2,00	$1,084 \cdot 10^{-4}$	2,00	$6,201 \cdot 10^{-7}$	3,00
512	$1,547 \cdot 10^{-2}$	2,00	$1,066 \cdot 10^{-1}$	2,00	$2,711 \cdot 10^{-5}$	2,00	$7,754 \cdot 10^{-8}$	3,00

Tabela 3: Resultados de convergência em malhas de trapézios.

n	$\ \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h\ $		$\ \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h)\ $		$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_h\ $		$\ r - r_h\ $	
	erro	ordem	erro	ordem	erro	ordem	erro	ordem
RT₁								
8	$7,080 \cdot 10^1$	1,98	$3,899 \cdot 10^2$	1,72	$7,751 \cdot 10^{-2}$	1,93	$4,141 \cdot 10^{-2}$	2,51
16	$1,785 \cdot 10^1$	1,99	$1,458 \cdot 10^2$	1,42	$1,964 \cdot 10^{-2}$	1,98	$7,705 \cdot 10^{-3}$	2,43
32	$4,471 \cdot 10^0$	2,00	$6,508 \cdot 10^1$	1,16	$4,927 \cdot 10^{-3}$	1,99	$1,666 \cdot 10^{-3}$	2,21
64	$1,118 \cdot 10^0$	2,00	$3,147 \cdot 10^1$	1,05	$1,233 \cdot 10^{-3}$	2,00	$3,972 \cdot 10^{-4}$	2,07
128	$2,796 \cdot 10^{-1}$	2,00	$1,560 \cdot 10^1$	1,01	$3,083 \cdot 10^{-4}$	2,00	$9,802 \cdot 10^{-5}$	2,02
256	$6,990 \cdot 10^{-2}$	2,00	$7,783 \cdot 10^0$	1,00	$7,707 \cdot 10^{-5}$	2,00	$2,442 \cdot 10^{-5}$	2,00
512	$1,748 \cdot 10^{-2}$	2,00	$3,889 \cdot 10^0$	1,00	$1,927 \cdot 10^{-5}$	2,00	$6,100 \cdot 10^{-6}$	2,00
ABF₁								
8	$7,107 \cdot 10^1$	1,99	$5,291 \cdot 10^1$	2,66	$1,149 \cdot 10^{-2}$	3,01	$3,360 \cdot 10^{-2}$	2,20
16	$1,790 \cdot 10^1$	1,99	$1,069 \cdot 10^1$	2,31	$1,467 \cdot 10^{-3}$	2,97	$8,067 \cdot 10^{-3}$	2,06
32	$4,482 \cdot 10^0$	2,00	$2,489 \cdot 10^0$	2,10	$1,955 \cdot 10^{-4}$	2,91	$2,012 \cdot 10^{-3}$	2,00
64	$1,121 \cdot 10^0$	2,00	$6,104 \cdot 10^{-1}$	2,03	$2,961 \cdot 10^{-5}$	2,72	$5,051 \cdot 10^{-4}$	1,99
128	$2,803 \cdot 10^{-1}$	2,00	$1,519 \cdot 10^{-1}$	2,01	$5,580 \cdot 10^{-6}$	2,41	$1,267 \cdot 10^{-4}$	1,99
256	$7,007 \cdot 10^{-2}$	2,00	$3,792 \cdot 10^{-2}$	2,00	$1,255 \cdot 10^{-6}$	2,15	$3,174 \cdot 10^{-5}$	2,00
512	$1,752 \cdot 10^{-2}$	2,00	$9,476 \cdot 10^{-3}$	2,00	$3,045 \cdot 10^{-7}$	2,04	$7,945 \cdot 10^{-6}$	2,00
AC₁								
8	$8,346 \cdot 10^1$	1,95	$4,457 \cdot 10^2$	1,86	$1,136 \cdot 10^{-1}$	1,85	$2,422 \cdot 10^{-1}$	0,93
16	$2,361 \cdot 10^1$	1,82	$1,144 \cdot 10^2$	1,96	$2,923 \cdot 10^{-2}$	1,96	$2,027 \cdot 10^{-1}$	0,26
32	$6,836 \cdot 10^0$	1,79	$2,880 \cdot 10^1$	1,99	$7,350 \cdot 10^{-3}$	1,99	$1,113 \cdot 10^{-1}$	0,86
64	$1,849 \cdot 10^0$	1,89	$7,213 \cdot 10^0$	2,00	$1,837 \cdot 10^{-3}$	2,00	$3,757 \cdot 10^{-2}$	1,57
128	$4,741 \cdot 10^{-1}$	1,96	$1,804 \cdot 10^0$	2,00	$4,591 \cdot 10^{-4}$	2,00	$1,021 \cdot 10^{-2}$	1,88
256	$1,194 \cdot 10^{-1}$	1,99	$4,510 \cdot 10^{-1}$	2,00	$1,148 \cdot 10^{-4}$	2,00	$2,607 \cdot 10^{-3}$	1,97
512	$2,990 \cdot 10^{-2}$	2,00	$1,128 \cdot 10^{-1}$	2,00	$2,869 \cdot 10^{-5}$	2,00	$6,553 \cdot 10^{-4}$	1,99

**Figura 1: Malhas de quadrados e trapézios.**

et al. (2005). Entretanto essa estratégia resulta na adição de um significativo número de graus de liberdade nos problemas locais. A terceira escolha possível (utilizar produtos dos espaços de Arbogast e Correa (2016)) resulta em aproximações que apresentam boas taxas de convergência para os deslocamentos em $L^2(\Omega, \mathbb{R}^2)$ e para as tensões na seminorma de $H(\text{div}, \Omega, \mathbb{M})$. No entanto há alguma deficiência na convergência de tensões na norma $L^2(\Omega, \mathbb{M})$ e de rotações na norma $L^2(\Omega, \mathbb{R})$, sobretudo nas malhas menos refinadas.

A relevância da utilização de uma formulação híbrida deve ser ressaltada, já que com essa técnica os graus de liberdade do sistema global resumem-se àqueles relacionados ao multiplicador de Lagrange nas arestas. Com isso, o custo computacional da resolução do sistema linear global é o mesmo em todos os casos aqui considerados. Ainda, os espaços de aproximação para as tensões, os deslocamentos e as rotações podem ser construídos de forma local, elemento a elemento.

AGRADECIMENTOS

Thiago Quinelato recebeu auxílio financeiro do CNPq (Processo 141009/2013-6) e da Capes (Processo BEX 6993/15-0) durante a realização deste trabalho.

REFERÊNCIAS

- M. Amara e J. M. Thomas, 1979. Equilibrium finite elements for the linear elastic problem. *Numerische Mathematik*, vol. 33, n. 4, pp. 367–383.
- T. Arbogast e M. R. Correa, 2016. Two families of $H(\text{div})$ mixed finite elements on quadrilaterals of minimal dimension. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, vol. 54, n. 6, pp. 3332–3356. doi: 10.1137/15M1013705.

- D. N. Arnold, F. Brezzi, e J. Douglas Jr, 1984. Peers: A new mixed finite element for plane elasticity. *Japan Journal of Applied Mathematics*, vol. 1, n. 2, pp. 347–367.
- D. N. Arnold, D. Boffi, e R. S. Falk, 2005. Quadrilateral $H(\text{div})$ finite elements. *SIAM J. Numer. Anal.*, vol. 42, n. 6, pp. 2429–2451.
- D. N. Arnold, R. S. Falk, e R. Winther, 2006. Differential complexes and stability of finite element methods ii: The elasticity complex. In D. N. Arnold, P. B. Bochev, R. B. Lehoucq, R. A. Nicolaides, e M. Shashkov, eds, *Compatible Spatial Discretizations*, volume 142 de *The IMA Volumes in Mathematics and its Applications*, pp. 47–67. Springer New York.
- D. N. Arnold, G. Awanou, e W. Qiu, 2015. Mixed finite elements for elasticity on quadrilateral meshes. *Advances in Computational Mathematics*, vol. 41, n. 3, pp. 553–572. ISSN 1019–7168.
- P. A. Raviart e J. M. Thomas, 1977. A mixed finite element method for 2-nd order elliptic problems. In Ilio Galligani e Enrico Magenes, eds, *Mathematical Aspects of Finite Element Methods*, volume 606 de *Lecture Notes in Mathematics*, pp. 292–315. Springer Berlin / Heidelberg.