Lambda Calculus

Valores e Operadores Lógicos

Prof. Edson Alves

Faculdade UnB Gama

Sumário

Contextualização

- Sendo originalmente um sistema lógico, o cálculo λ possui apenas dois termos primitivos: a letra grega lambda (λ) e o ponto final (.)
- Os axiomas de construção de termos-λ (expressões, aplicação e abstração) permitem a definição de novos termos a partir destes dois termos primitivos
- Deste modo, os valores lógicos da Lógica Proposicional Booleana (verdadeiro e falso) devem ser igualmente definidos como termos-λ
- As operações lógicas, que permitem a construção de proposições compostas, também devem ser definidas como termos-λ

Valores lógicos

Verdadeiro e Falso

O valor lógico **verdadeiro** pode ser representado pela expressão-λ

$$T \equiv \lambda xy.x$$

e o valor lógico **falso** pode ser representado por

$$F \equiv \lambda xy.y$$

Observação: veja que T é, de fato, o combinador $\mathbf{K}$ e que F é o combinador $\mathbf{K}_*$, o qual é extensionalmente igual ao combinador $\mathbf{SK}$, pois

$$\mathbf{SK}xy \equiv \mathbf{K}y(xy) \equiv y \equiv Fxy$$

`if-then-else`

`if-then-else`

Se p é igual a T ou a F, a expressão-λ

$$I_F \equiv \lambda pab.pab$$

corresponde ao construto `if-then-else`.

Observação: para visualizar esta correspondência, observe que

$$(I_F)Tab \equiv Tab \equiv a$$

e que

$$(I_F)Fab \equiv Fab \equiv b$$

Operadores Lógicos

Operadores Lógicos

Sejam $x, y \in \{T, F\}$. Os operadores da lógica proposicional booleana são:

1. **conjunção**:
$$\wedge xy \equiv \lambda xy.xyx \equiv (I_F)xyx$$
2. **disjunção**:
$$\vee xy \equiv \lambda xy.xxy \equiv (I_F)xxy$$
3. **negação**:
$$\neg x \equiv \lambda x.xFT \equiv (I_F)xFT$$

Operadores Lógicos e Combinadores

Operadores Lógicos e Combinadores

As operações lógicas são extensionalmente iguais aos combinadores dados a seguir, de modo que podem ser utilizadas como operações:

1. **conjunção** (pós-fixada):
$$\mathbf{AND} \equiv F \equiv \mathbf{SK}$$
2. **disjunção** (in-fixada):
$$\mathbf{OR} \equiv T \equiv \mathbf{K}$$
3. **negação** (pós-fixada):
$$\mathbf{NOT} \equiv FT \equiv (\mathbf{SK})\mathbf{K}$$

Exemplo: tabelas-verdade

Conjunção:

$$
\begin{aligned}
(TT)(\mathbf{AND}) \equiv TTF \equiv T(TF) \equiv T \\
(TF)(\mathbf{AND}) \equiv TFF \equiv T(FF) \equiv F \\
(FT)(\mathbf{AND}) \equiv FTF \equiv F(TF) \equiv F \\
(FF)(\mathbf{AND}) \equiv FFF \equiv F(FF) \equiv F
\end{aligned}
$$

Disjunção:

$$
\begin{aligned}
(T)(\mathbf{OR})(T) \equiv TTT \equiv T(TT) \equiv T \\
(T)(\mathbf{OR})(F) \equiv TTF \equiv T(TF) \equiv T \\
(F)(\mathbf{OR})(T) \equiv FTT \equiv F(TT) \equiv T \\
(F)(\mathbf{OR})(F) \equiv FTF \equiv F(TF) \equiv F
\end{aligned}
$$

Referências

1. **BARENDREGT**, Henk; **BARENDSEN**, Erik. *Introduction to Lambda Calculus*, March 2000.
2. **ROJAS**, Raúl. *A Tutorial Introduction to the Lambda Calculus*, FU Berlin, WS-97/98.
3. Wikipédia. Lambda calculus, acesso em 03/01/2020.
4. Wikipédia. SKI combinator calculus, acesso em 07/01/2020.