DR_CAN 卡尔曼滤波器笔记

https://space.bilibili.com/230105574/channel/collectiondetail?sid=1814741

笔记作者：钒煋

说明

致敬 DR_CAN 博士！

笔记是本人根据 B 站 DR_CAN 博士视频编写，每个公式都是用 Mathtype 逐个编辑的，基本为逐字稿。

笔记仅供参考和查阅，可作为参考文本和 DR_CAN 博士视频一起学习，读者朋友也可以此为笔记模板进行补充，形成自己的笔记，方便后续使用。

如有错误，欢迎指正，邮箱:1805439208@qq.com

更多内容输出，请关注公众号“钒煋”二维码，同 B 站“钒煋”：

卡尔曼滤波器

引言：

卡尔曼滤波器出现的背景：处理不确定性。

系统不确定性体现：

1、不存在完美的数学模型；

2、系统的扰动不可控，也很难建模；

3、测量传感器存在误差。

引入部分：

Eg：假设测一枚硬币，第 1 个人测量结果为 z_1，第 2 人测量结果为 z_2，……，第 k 个人测量结果为 z_k，第 k+1 个人的测量结果为 z_{k+1}。估计硬币的真实值是多少？

估计硬币的真实值：取平均值。

定义：$\hat{x}_k$ 为第 k 的估计值。按照取平均值的方法，定义第 k 次平均值如下：

$$\hat{x}_k = \frac{z_1 + z_2 + \ldots + z_k}{k} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} z_i \tag{1}$$

根据式（1）进行处理：

$$\begin{aligned}
\hat{x}_k &= \frac{z_1 + z_2 + \ldots + z_k}{k} \\
&= \frac{k-1}{k-1}\frac{z_1 + z_2 + \ldots + z_k}{k} \\
&= \frac{k-1}{k}\frac{z_1 + z_2 + \ldots + z_k}{k-1} \\
&= \frac{k-1}{k}\left(\frac{z_1 + z_2 + \ldots + z_{k-1}}{k-1} + \frac{z_k}{k-1}\right) \\
&= \frac{k-1}{k}\left(\hat{x}_{k-1} + \frac{z_k}{k-1}\right) \\
&= \hat{x}_{k-1} - \frac{\hat{x}_{k-1}}{k} + \frac{z_k}{k} \\
&= \hat{x}_{k-1} + \frac{1}{k}\left(z_k - \hat{x}_{k-1}\right)
\end{aligned} \tag{2}$$

得：

$$\hat{x}_k = \hat{x}_{k-1} + \frac{1}{k}\left(z_k - \hat{x}_{k-1}\right) \tag{3}$$

根据（3）可知：

1）当 $k \to 1$，$\hat{x}_k = z_k$。说明测量结果起到较大作用。

2）当 $k \to \infty$， $\hat{x}_k = \hat{x}_{k-1}$。说明测量结果已不重要。

对式（3）进行总结：令 $K_k = \frac{1}{k}$，得

$$\hat{x}_k = \hat{x}_{k-1} + K_k \left(z_k - \hat{x}_{k-1} \right) \tag{4}$$

解释公式（4）：

当前估计值 $\hat{x}_k$ = 上次估计值 $\hat{x}_{k-1}$ + 卡尔曼增益 K_k *(当前测量值 z_k -上次估计值 $\hat{x}_{k-1}$)

K_k：卡尔曼增益。

公式体现了：递推思想，当前估计值只和上一次估计值及当前测量值相关。

基本卡尔曼滤波器：

基本公式：

$$\hat{x}_k = \hat{x}_{k-1} + K_k \left(z_k - \hat{x}_{k-1} \right) \tag{5}$$

定义：

估计误差： e_{EST}

测量误差： e_{MEA}

卡尔曼增益 K_k （核心公式）为：

$$K_k = \frac{e_{EST_{k-1}}}{e_{EST_{k-1}} + e_{MEA_k}} \tag{6}$$

分析 k 时刻：

1） $e_{EST_{k-1}} \gg e_{MEA_k}$： $K_k \approx 1$， $\hat{x}_k \approx z_k$。

2） $e_{MEA_k} \gg e_{EST_{k-1}}$： $K_k \approx 0$， $\hat{x}_k \approx \hat{x}_{k-1}$。

实现步骤：

Step1：计算卡尔曼增益 $K_k = \frac{e_{EST_{k-1}}}{e_{EST_{k-1}} + e_{MEA_k}}$；

Step2：计算 $\hat{x}_k = \hat{x}_{k-1} + K_k \left(z_k - \hat{x}_{k-1} \right)$；

Step3：更新 $e_{EST_k} = (1 - K_k) e_{EST_{k-1}}$。（后面详细推导）

假定所测量真实为 50，测量误差为 3，测量实际结果（47~53）。初始设定估计值 40，估计误差为 5。

表 1 卡尔曼滤波典型计算案例

k	zk	eMEAk	x^k	Kk	eESTk	平均值
0	0	0	40	0	5	0
1	51	3	46.875	0.625	1.875	51
2	48	3	47.30769	0.384615	1.153846	49.5
3	52	3	48.61111	0.277778	0.833333	50.33333
4	49	3	48.69565	0.217391	0.652174	50
5	50	3	48.92857	0.178571	0.535714	50
6	53	3	49.54545	0.151515	0.454545	50.5
7	52	3	49.86842	0.131579	0.394737	50.71429
8	47	3	49.53488	0.116279	0.348837	50.25
9	52	3	49.79167	0.104167	0.3125	50.44444
10	49	3	49.71698	0.09434	0.283019	50.3
11	51	3	49.82759	0.086207	0.258621	50.36364
12	53	3	50.07937	0.079365	0.238095	50.58333
13	47	3	49.85294	0.073529	0.220588	50.30769
14	49	3	49.79452	0.068493	0.205479	50.21429
15	48	3	49.67949	0.064103	0.192308	50.06667
16	52	3	49.81928	0.060241	0.180723	50.1875
17	47	3	49.65909	0.056818	0.170455	50
18	53	3	49.83871	0.053763	0.16129	50.16667
19	51	3	49.89796	0.05102	0.153061	50.21053
20	47	3	49.75728	0.048544	0.145631	50.05

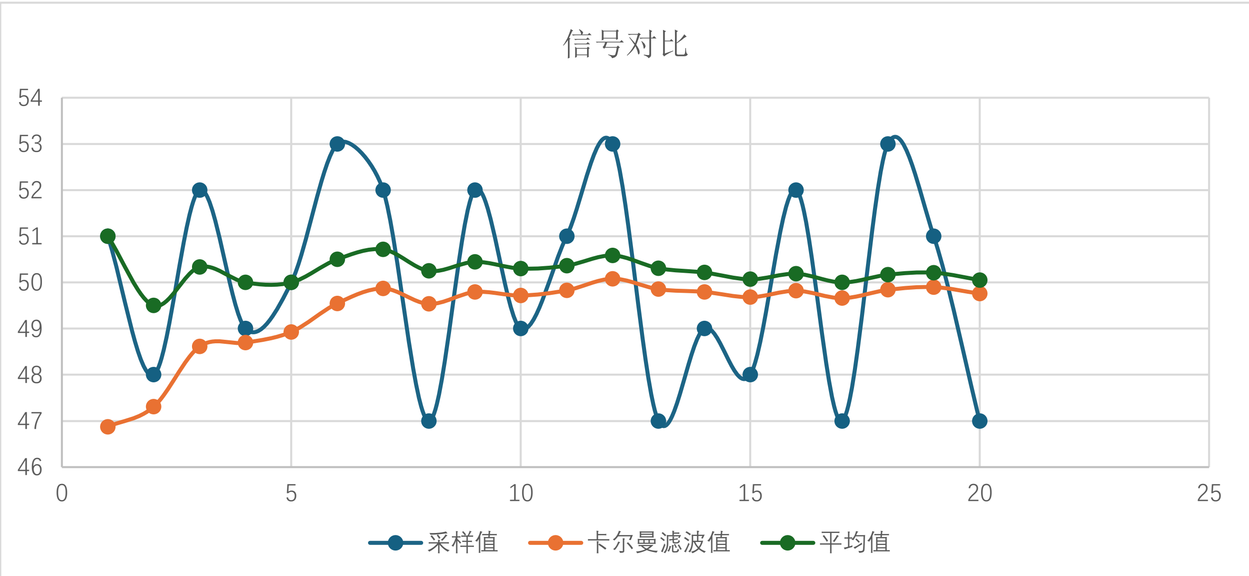


图 1 各曲线对比说明图

数据融合 Date fusion，标准差 Standard Deviation，协方差矩阵，状态空间方程，观测器。

引入部分：

Eg：假设有两个称（cheng），称 30g 物体，结果分别为：$z_1 = 30g$，$z_1 = 32g$，其标准差分别为$\sigma_1 = 2g$，$\sigma_2 = 4g$。

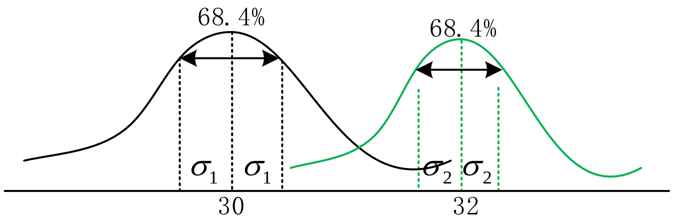


图 2 正态分布示意图

估计其真实值：$\hat{z}$。

$$\hat{z} = z_1 + K(z_2 - z_1) \tag{7}$$

其中，K 为卡尔曼增益。$K \in [0,1]$。

分析：

1）当 $K=0$，$\hat{z} = z_1$；

2）当 $K=1$，$\hat{z} = z_2$

求解 K，使得 $\sigma_{\hat{z}}$ 最小，即方差 Var($\hat{z}$)最小。

$$\begin{aligned}\sigma_{\hat{z}} &= Var\left[z_1 + K(z_2 - z_1)\right] \\ &= Var\left[z_1 - Kz_1 + Kz_2\right] \\ &= Var\left[z_1(1-K) + Kz_2\right]\end{aligned} \tag{8}$$

由于 z_1、z_2 相互独立。

$$\begin{aligned}\sigma_{\hat{z}}^2 &= Var\left[z_1(1-K) + Kz_2\right] \\ &= Var\left[z_1(1-K)\right] + Var(Kz_2) \\ &= (1-K)^2 Var(z_1) + K^2 Var(z_2) \\ &= (1-K)^2 \sigma_1^2 + K^2 \sigma_2^2\end{aligned} \tag{9}$$

求 $\sigma_{\hat{z}}$ 的最小值，对上式求导计算极小值。

$$\begin{aligned}&\frac{d\sigma_{\hat{z}}}{dk}=\frac{d\left[\left(1-K\right)^{2}\sigma_{1}^{2}+K^{2}\sigma_{2}^{2}\right]}{dk}=0\\&\Rightarrow -2\left(1-K\right)\sigma_{1}^{2}+2K\sigma_{2}^{2}=0\\&\Rightarrow K\left(\sigma_{1}^{2}+\sigma_{2}^{2}\right)=\sigma_{1}^{2}\\&\Rightarrow K=\frac{\sigma_{1}^{2}}{\left(\sigma_{1}^{2}+\sigma_{2}^{2}\right)}\end{aligned} \tag{10}$$

其标准差分别为$\sigma_1=2g$， $\sigma_2=4g$。即

$$K=\frac{\sigma_{1}^{2}}{\left(\sigma_{1}^{2}+\sigma_{2}^{2}\right)}=\frac{2^{2}}{2^{2}+4^{2}}=0.2 \tag{11}$$

因此:

$$\begin{aligned}&\hat{z}=z_{1}+K\left(z_{2}-z_{1}\right)\\&\hat{z}=30+0.2\left(32-30\right)\\&\hat{z}=30.4\end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}&\sigma_{\hat{z}}^{2}=\left(1-K\right)^{2}\sigma_{1}^{2}+K^{2}\sigma_{2}^{2}\\&\sigma_{\hat{z}}^{2}=\left(1-0.2\right)^{2}\times 2^{2}+0.2^{2}\times 4^{2}\\&\sigma_{\hat{z}}^{2}=\left(1-0.2\right)^{2}\times 2^{2}+0.2^{2}\times 4^{2}=3.2\\&\sigma_{\hat{z}}=1.79\end{aligned} \tag{13}$$

协方差矩阵 Covariance matrix

方差的计算：

$$\begin{aligned}&\bar{x}=\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}x_{i}\\&\sigma_{xx}^{2}=\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\left(x_{i}-\bar{x}\right)^{2}\end{aligned} \tag{14}$$

协方差的计算：

$$\begin{aligned}&\bar{x}=\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}x_{i},\bar{y}=\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}y_{i}\\&\sigma_{xy}^{2}=\sigma_{yx}^{2}=\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\left(x_{i}-\bar{x}\right)\left(y_{i}-\bar{y}\right)\end{aligned} \tag{15}$$

表 2 方差典型计算

定义	x	y	z
球员	身高	体重	年龄
瓦尔迪	179	74	33
奥巴梅扬	187	80	31

萨拉赫	175	71	28
平均值	180.33333	75	30.666667
方差	24.888889	14	4.2222222

表 3 协方差典型计算

协方差	x	y	z
x	x^2	xy	xz
y	yx	y^2	yz
z	zx	zy	z^2

协方差	x	y	z
x	24.888889	18.666667	4.4444444
y	18.666667	14	3.3333333
z	4.4444444	3.3333333	4.2222222

Eg2：

如下系统：

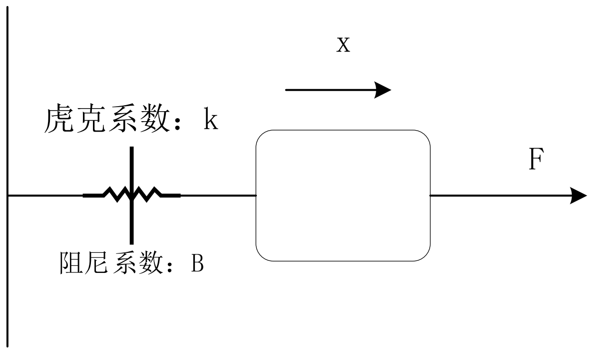


图 3 弹簧阻尼系统受力分析

系统微分方程：

$$F - kx - B\dot{x} = m\ddot{x} \qquad (16)$$

取状态量$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = \dot{x} \end{cases}$，则系统状态空间方程：关键每一行为一阶微分方程。

$$F - kx - B\dot{x} = m\ddot{x} \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} = -\frac{k}{m}x - \frac{B}{m}\dot{x} + \frac{F}{m}$$

$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = \dot{x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{x} = x_2 \\ \dot{x}_2 = \ddot{x} = -\dfrac{k}{m}x - \dfrac{B}{m}\dot{x} + \dfrac{F}{m} \end{cases} \Rightarrow \qquad (17)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{k}{m} & -\dfrac{B}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{m} \end{bmatrix} F$$

测量量定义：

z_1：所测量的位置量；

z_2：所测量的速度量；

$$\begin{cases} z_1 = x = x_1 \\ z_2 = \dot{x} = x_2 \end{cases} \tag{18}$$

化成一般形式：

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{k}{m} & -\dfrac{B}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{m} \end{bmatrix} F \quad \Rightarrow \quad \dot{X}(t) = AX(t) + BU(t) \\ \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad Z(t) = HX(t) \end{cases} \tag{19}$$

离散化：

$$\begin{cases} X_k = AX_{k-1} + BU_k \\ Z_k = HX_k \end{cases} \tag{20}$$

考虑系统不确定性：即系统包含过程噪声 w_{k-1} 和测量噪声 v_k。

$$\begin{cases} \dot{X}_k = AX_{k-1} + BU_k + w_{k-1} \\ Z_k = HX_k + v_k \end{cases} \tag{21}$$

问题：如何通过计算结果 X_k 和测量 Z_k 估计相对更为准确的结果：$\hat{X}_k$。

解决方案：计算结果 X_k 和测量 Z_k 曲线融合 Fusion。

卡尔曼滤波器，卡尔曼增益、因数详细推导：

状态空间方程：

$$\begin{cases} \dot{X}_k = AX_{k-1} + BU_k + w_{k-1} \\ Z_k = HX_k + v_k \end{cases} \tag{22}$$

w_{k-1}：过程噪声。概率分布为 $p(w) \sim (0, Q)$，其中，0 为期望，Q 为 w 的协方差矩阵。

$$Q = E\left[w \cdot w^T \right] \tag{23}$$

E：表示期望。

Eg：若

$$
\begin{aligned}
&w=\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \Rightarrow w^T=\begin{bmatrix} w_1 & w_2 \end{bmatrix} \\
&Q=E\left[w\cdot w^T\right]\Rightarrow \\
&Q=E\left[\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} w_1 & w_2 \end{bmatrix}\right]=E\begin{bmatrix} w_1^2 & w_1w_2 \\ w_2w_1 & w_1^2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} E\left(w_1^2\right) & E\left(w_1w_2\right) \\ E\left(w_2w_1\right) & E\left(w_1^2\right) \end{bmatrix} \\
&Q=\begin{bmatrix} \sigma_{w_1}^2 & \sigma_{w_1}\sigma_{w_2} \\ \sigma_{w_2}\sigma_{w_1} & \sigma_{w_2}^2 \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{24}
$$

协方差矩阵：

$$
Q=\begin{bmatrix} \sigma_{w_1}^2 & \sigma_{w_1}\sigma_{w_2} \\ \sigma_{w_2}\sigma_{w_1} & \sigma_{w_2}^2 \end{bmatrix}
\tag{25}
$$

方差公式：

$$
VAR(X)=E\left(X^2\right)-E^2(X)
\tag{26}
$$

解释：X 方差 $=\mathrm{X}^2$ 的期望 $-$X 期望的平方

w_{k-1}：过程噪声。概率分布为 $P(w)\sim(0,Q)$，其中，0 为期望，Q 协方差矩阵。即：

$$
Q=E\left(ww^T\right)
\tag{27}
$$

$$
\begin{aligned}
&E(w)=0\Rightarrow E^2(w)=0\Rightarrow \\
&VAR(X)=E\left(X^2\right)
\end{aligned}
\tag{28}
$$

v_k：测量噪声。概率分布为 $p(v)\sim(0,R)$，其中，0 为期望，R 为 v 的协方差矩阵。即：

$$
R=E\left(vv^T\right)
\tag{29}
$$

根据公式：

$$
\begin{cases} \dot{X}_k=AX_{k-1}+BU_k+w_{k-1} \\ Z_k=HX_k+v_k \end{cases}
\tag{30}
$$

已知量为：

$$
\begin{cases} \dot{X}_k=AX_{k-1}+BU_k \\ Z_k=HX_k \end{cases}
\tag{31}
$$

但因为缺少w_{k-1}：过程噪声；v_k：测量噪声。将上式定义为下式：

$$\begin{cases} \hat{X}_k^- = AX_{k-1} + BU_k \\ H^- Z_k = H^- HX_k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{X}_k^- = AX_{k-1} + BU_k \\ X_{meas} = H^- Z_k \end{cases} \tag{32}$$

$\hat{X}_k^-$定义为X先验估计值，认为是算出来的结果；

X_{meas}定义为X的测量值，认为是测量出来的结果。

但因为缺少噪声项，上面两者都是不准确的，因此有卡尔曼滤波器。

如何将两个不准确的结果转化为较为准确的结果，引出：Data Fusion（曲线融合）。

定义：$\hat{X}_k$为X的后验估计值，或最终结果值。

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + G\left(H^- z_k - \hat{x}_k^-\right) \tag{33}$$

分析可知：

1）$G=0$时，$\hat{x}_k = \hat{x}_k^-$；说明相信算出来的结果。

2）$G=1$时，$\hat{x}_k = H^- z_k$；说明相信测出来的结果。

一般通用表达式：

$$G = K_k H \tag{34}$$

所以

$$\begin{aligned} &\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K_k H\left(H^- z_k - \hat{x}_k^-\right) \Rightarrow \\ &\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K_k\left(z_k - H\hat{x}_k^-\right) \end{aligned} \tag{35}$$

更一般公式为：

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K_k\left(z_k - H\hat{x}_k^-\right) \tag{36}$$

此时：$K_k \in \left[0, H^-\right]$，可知：

1）$K_k = 0$时，$\hat{x}_k = \hat{x}_k^-$；说明相信算出来的结果。

2）$K_k = 1$时，$\hat{x}_k = H^- z_k$；说明相信测出来的结果。

下面问题转换为寻找合适的K_k，使得最终结果的误差最小，即估计值$\hat{x}_k$趋近于实际值x_k。

而K_k与检测误差相关。

定义检测误差e_k

$$e_k = x_k - \hat{x}_k \tag{37}$$

e_k：检测误差。概率分布为 $p(e_k) \sim (0, P)$，其中，0 为期望，P 为 e_k 的协方差矩阵。即：

$$P = E\left[e \cdot e^T\right] \tag{38}$$

如果有两项，则

$$P = \begin{bmatrix} \sigma_{e_1}^2 & \sigma_{e_1}\sigma_{e_2} \\ \sigma_{e_2}\sigma_{e_1} & \sigma_{e_2}^2 \end{bmatrix} \tag{39}$$

说明：如果估计值与实际误差最小，即误差的方差最小，即越接近于期望值 0。

问题转化为 P 的迹（tr(P)）最小，即协方差矩阵的对角线相加后的值最小：

$$tr(P) = \sigma_{e_1}^2 + \sigma_{e_2}^2 \tag{40}$$

则：

$$\begin{aligned} P &= E\left[e \cdot e^T\right] \\ P &= E\left[(x_k - \hat{x}_k) \cdot (x_k - \hat{x}_k)^T\right] \end{aligned} \tag{41}$$

由式（34）：带入协方差矩阵计算：

$$\begin{aligned} \hat{x}_k &= \hat{x}_k^- + K_k\left(z_k - H\hat{x}_k^-\right) \Rightarrow \\ x_k - \hat{x}_k &= x_k - \left[\hat{x}_k^- + K_k\left(z_k - H\hat{x}_k^-\right)\right] \\ x_k - \hat{x}_k &= x_k - \hat{x}_k^- - K_k z_k + K_k H\hat{x}_k^- \end{aligned} \tag{42}$$

因为

$$\begin{cases} \dot{X}_k = AX_{k-1} + BU_k + w_{k-1} \\ Z_k = HX_k + v_k \end{cases} \tag{43}$$

所以

$$\begin{aligned} x_k - \hat{x}_k &= x_k - \hat{x}_k^- - K_k z_k + K_k H\hat{x}_k^- \\ &= x_k - \hat{x}_k^- - K_k\left(Hx_k + v_k\right) + K_k H\hat{x}_k^- \\ &= x_k - \hat{x}_k^- - K_k Hx_k - K_k v_k + K_k H\hat{x}_k^- \\ &= \left(x_k - \hat{x}_k^-\right) - K_k H\left(x_k - \hat{x}_k^-\right) - K_k v_k \\ &= \left(I - K_k H\right)\left(x_k - \hat{x}_k^-\right) - K_k v_k \end{aligned} \tag{44}$$

定义先验误差 e_k^-：

$$e_k^- = \left(x_k - \hat{x}_k^-\right) \tag{45}$$

由式（39）和式（42）（43）得

$$
\begin{aligned}
&P=E\left[e\cdot e^{T}\right]\\
&P=E\left[\left(x_k-\hat{x}_k\right)\cdot\left(x_k-\hat{x}_k\right)^{T}\right]\\
&P=E\left[\left[\left(I-K_kH\right)e_k^{-}-K_kv_k\right]\cdot\left[\left(I-K_kH\right)e_k^{-}-K_kv_k\right]^{T}\right]
\end{aligned}
\tag{46}
$$

矩阵计算的一般公式：

$$
\begin{aligned}
&\left(AB\right)^{T}=B^{T}A^{T}\\
&\left(A+B\right)^{T}=A^{T}+B^{T}
\end{aligned}
\tag{47}
$$

所以：

$$
\begin{aligned}
&\left[\left(I-K_kH\right)e_k^{-}-K_kv_k\right]^{T}\\
&=\left[\left(I-K_kH\right)e_k^{-}\right]^{T}-\left(K_kv_k\right)^{T}\\
&=e_k^{-T}\left(I-K_kH\right)^{T}-v_k{}^{T}K_k{}^{T}
\end{aligned}
\tag{48}
$$

因此：

$$
\begin{aligned}
&P_k=E\left[e\cdot e^{T}\right]\\
&P_k=E\left[\left(x_k-\hat{x}_k\right)\cdot\left(x_k-\hat{x}_k\right)^{T}\right]\\
&P_k=E\left[\left[\left(I-K_kH\right)e_k^{-}-K_kv_k\right]\cdot\left[\left(I-K_kH\right)e_k^{-}-K_kv_k\right]^{T}\right]\\
&P_k=E\left[\left[\left(I-K_kH\right)e_k^{-}-K_kv_k\right]\cdot\left[e_k^{-T}\left(I-K_kH\right)^{T}-v_k{}^{T}K_k{}^{T}\right]\right]\\
&P_k=E\left[\left(I-K_kH\right)e_k^{-}e_k^{-T}\left(I-K_kH\right)^{T}-\left(I-K_kH\right)e_k^{-}v_k{}^{T}K_k{}^{T}-K_kv_ke_k^{-T}\left(I-K_kH\right)^{T}+K_kv_kv_k{}^{T}K_k{}^{T}\right]\\
&P_k=E\left[\left(I-K_kH\right)e_k^{-}e_k^{-T}\left(I-K_kH\right)^{T}\right]-E\left[\left(I-K_kH\right)e_k^{-}v_k{}^{T}K_k{}^{T}\right]\\
&\qquad-E\left[K_kv_ke_k^{-T}\left(I-K_kH\right)^{T}\right]+E\left[K_kv_kv_k{}^{T}K_k{}^{T}\right]
\end{aligned}
\tag{49}
$$

因为$E\left(AB\right)=E\left(A\right)E\left(B\right)$（若 A、B 事件独立）

所以：

$$
\begin{aligned}
&E\left[\left(I-K_kH\right)e_k^{-}v_k{}^{T}K_k{}^{T}\right]\\
&=\left(I-K_kH\right)E\left(e_k^{-}v_k{}^{T}\right)K_k{}^{T}\\
&=\left(I-K_kH\right)E\left(e_k^{-}\right)E\left(v_k{}^{T}\right)K_k{}^{T}
\end{aligned}
\tag{50}
$$

因为$E\left(e_k^{-}\right)=0,E\left(v_k{}^{T}\right)=0$。

所以

$$
\begin{aligned}
P_k &= E\left[\left(I-K_kH\right)e_k^-e_k^{-T}\left(I-K_kH\right)^T\right]-E\left[\left(I-K_kH\right)e_k^-v_k{}^TK_k{}^T\right] \\
&\quad -E\left[K_kv_ke_k^{-T}\left(I-K_kH\right)^T\right]+E\left[K_kv_kv_k{}^TK_k{}^T\right] \\
P_k &= E\left[\left(I-K_kH\right)e_k^-e_k^{-T}\left(I-K_kH\right)^T\right]+E\left[K_kv_kv_k{}^TK_k{}^T\right] \\
P_k &= \left(I-K_kH\right)E\left[e_k^-e_k^{-T}\right]\left(I-K_kH\right)^T+K_kE\left[v_kv_k{}^T\right]K_k{}^T
\end{aligned}
\tag{51}
$$

定义 P_k^- 为先验误差的协方差：

$$
P_k^- = E\left(e_k^-e_k^{-T}\right) \tag{52}
$$

因为 $E\left[v_kv_k{}^T\right]=R$ 。所以误差的协方差矩阵 P_k 为：

$$
\begin{aligned}
P_k &= \left(I-K_kH\right)E\left[e_k^-e_k^{-T}\right]\left(I-K_kH\right)^T+K_kE\left[v_kv_k{}^T\right]K_k{}^T \\
P_k &= \left(I-K_kH\right)P_k^-\left(I-K_kH\right)^T+K_kRK_k{}^T \\
P_k &= \left(P_k^- - K_kHP_k^-\right)\left(I^T-H^TK_k^T\right)+K_kRK_k{}^T \\
P_k &= P_k^- - K_kHP_k^- - P_k^-H^TK_k^T + K_kHP_k^-H^TK_k^T + K_kRK_k{}^T
\end{aligned}
\tag{53}
$$

上式中：

$$
\begin{aligned}
&\left(P_k^-H^TK_k^T\right)^T = P_k^{-T}\left(H^TK_k^T\right)^T \\
&= P_k^{-T}\left(K_k^T\right)^T\left(H^T\right)^T = P_k^{-T}K_kH \\
&= K_kHP_k^{-T}
\end{aligned}
\tag{54}
$$

回归到问题： P_k 的迹（tr(P)）最小，即误差的协方差矩阵的对角线相加后的值最小：

$$
tr\left(P\right)=\sigma_{e_1}^2+\sigma_{e_2}^2 \tag{55}
$$

下面求 tr(P)

$$
\begin{aligned}
tr\left(P_k\right) &= tr\left(P_k^- - K_kHP_k^- - P_k^-H^TK_k^T + K_kHP_k^-H^TK_k^T + K_kRK_k{}^T\right) \\
&= tr\left(P_k^-\right)+tr\left(-K_kHP_k^- - P_k^-H^TK_k^T\right)+tr\left(K_kHP_k^-H^TK_k^T+K_kRK_k{}^T\right) \\
&\because tr\left(X\right)=tr\left(X^T\right), K_kHP_k^-=\left(P_k^-H^TK_k^T\right)^T \\
&\therefore tr\left(-K_kHP_k^- - P_k^-H^TK_k^T\right)=-2tr\left(K_kHP_k^-\right) \\
&\therefore tr\left(P_k\right)=tr\left(P_k^-\right)-2tr\left(K_kHP_k^-\right)+tr\left(K_kHP_k^-H^TK_k^T\right)+tr\left(K_kRK_k{}^T\right)
\end{aligned}
\tag{56}
$$

P_k 的迹（tr(P)）最小，因此对 P_k 求导：

基本公式：①

$$\frac{d\left[tr\left(AB\right)\right]}{dA}=B^{T} \tag{57}$$

证明上式：①

$$\begin{aligned}
&A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \\
&\left(AB\right)=\begin{bmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & \\ & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{bmatrix} \\
&tr\left(AB\right)=a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \\
&\frac{d\left[tr\left(AB\right)\right]}{dA}=\begin{bmatrix} \frac{\partial\left[tr\left(AB\right)\right]}{\partial a_{11}} & \frac{\partial\left[tr\left(AB\right)\right]}{a_{12}} \\ \frac{\partial\left[tr\left(AB\right)\right]}{\partial a_{21}} & \frac{\partial\left[tr\left(AB\right)\right]}{\partial a_{22}} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \end{bmatrix}=B^{T}
\end{aligned} \tag{58}$$

基本公式：②

$$\frac{d\left[tr\left(ABA^{T}\right)\right]}{dA}=2AB \tag{59}$$

也可按照①中方法证明。

$$\frac{d\left(tr\left(P_{k}\right)\right)}{dK_{k}}=0 \tag{60}$$

因此：

$$
\begin{aligned}
&\frac{d\left[tr\left(P_k\right)\right]}{dK_k}=\frac{\left[tr\left(P_k^-\right)-2tr\left(K_kHP_k^-\right)+tr\left(K_kHP_k^-H^TK_k^T\right)+tr\left(K_kRK_k{}^T\right)\right]}{dK_k}\\
&\frac{d\left[tr\left(P_k\right)\right]}{dK_k}=0-2\left(HP_k^-\right)^T+2\left(K_kHP_k^-H^T\right)+2K_kR\\
&0-2\left(HP_k^-\right)^T+2\left(K_kHP_k^-H^T\right)+2K_kR=0\Rightarrow\\
&-\left(HP_k^-\right)^T+\left(K_kHP_k^-H^T\right)+K_kR=0\\
&-P_k^{-T}H^T+K_k\left(HP_k^-H^T+R\right)=0\\
&K_k\left(HP_k^-H^T+R\right)=P_k^{-T}H^T\\
&\because(P_k^{-T}=P_k^-)\\
&K_k=\frac{P_k^{-T}H^T}{\left(HP_k^-H^T+R\right)}=\frac{P_k^-H^T}{\left(HP_k^-H^T+R\right)}
\end{aligned}
\tag{61}
$$

卡尔曼滤波器：

状态空间方程：

$$
\begin{cases}
x_k=Ax_{k-1}+Bu_{k-1}+w_{k-1}\\
z_k=Hx_k+v_k
\end{cases}
\tag{62}
$$

w_{k-1}：过程噪声。概率分布为 $p(w)\sim(0,Q)$，其中，0 为期望，Q 协方差矩阵。

v_k：测量噪声。概率分布为 $p(v)\sim(0,R)$，其中，0 为期望，R 为 v 的协方差矩阵。

先验估计①：

$$\hat{x}_k^-=A\hat{x}_{k-1}+Bu_{k-1} \tag{63}$$

后验估计②：

$$\hat{x}_k=\hat{x}_k^-+K_k\left(z_k-H\hat{x}_k^-\right) \tag{64}$$

卡尔曼增益③：

$$K_k=\frac{P_k^-H^T}{\left(HP_k^-H^T+R\right)} \tag{65}$$

计算 P_k^-：

$$P_k^-=E\left[e_k^-\cdot e_k^{-T}\right] \tag{66}$$

$$
\begin{aligned}
e_k^- &= x_k - \hat{x}_k^- \\
&= \left(Ax_{k-1} + Bu_{k-1} + w_{k-1}\right) - \left(A\hat{x}_{k-1} + Bu_{k-1}\right) \\
&= A\left(x_{k-1} - \hat{x}_{k-1}\right) + w_{k-1} \\
&= Ae_{k-1} + w_{k-1}
\end{aligned}
\tag{67}
$$

$$
\begin{aligned}
P_k^- &= E\left[e_k^- \cdot e_k^{-T}\right] \\
&= E\left[(Ae_{k-1} + w_{k-1})(Ae_{k-1} + w_{k-1})^T\right] \\
&= E\left[(Ae_{k-1} + w_{k-1})(\left(Ae_{k-1}\right)^T + w_{k-1}^T)\right] \\
&= E\left[(Ae_{k-1} + w_{k-1})(e_{k1}^T A^T + w_{k-1}^T)\right] \\
&= E\left[Ae_{k-1}e_{k1}^T A^T + Ae_{k-1}w_{k-1}^T + w_{k-1}e_{k1}^T A^T + w_{k-1}w_{k-1}^T\right] \\
&= E\left[Ae_{k-1}e_{k1}^T A^T\right] + E\left[Ae_{k-1}w_{k-1}^T\right] + E\left[w_{k-1}e_{k1}^T A^T\right] + E\left[w_{k-1}w_{k-1}^T\right]
\end{aligned}
\tag{68}
$$

w_{k-1}：期望为 0，e_{k-1}：期望为 0，

$$
\begin{aligned}
E\left[Ae_{k-1}w_{k-1}^T\right] &= AE\left[e_{k-1}\right]E\left[w_{k-1}^T\right] = 0 \\
E\left[w_{k-1}e_{k1}^T A^T\right] &= E\left[w_{k-1}\right]A^T E\left[e_{k1}^T\right] = 0
\end{aligned}
\tag{69}
$$

所以:

$$
\begin{aligned}
P_k^- &= E\left[e_k^- \cdot e_k^{-T}\right] \\
&= E\left[(Ae_{k-1} + w_{k-1})(Ae_{k-1} + w_{k-1})^T\right] \\
&= E\left[(Ae_{k-1} + w_{k-1})(\left(Ae_{k-1}\right)^T + w_{k-1}^T)\right] \\
&= E\left[(Ae_{k-1} + w_{k-1})(e_{k1}^T A^T + w_{k-1}^T)\right] \\
&= E\left[Ae_{k-1}e_{k1}^T A^T + Ae_{k-1}w_{k-1}^T + w_{k-1}e_{k1}^T A^T + w_{k-1}w_{k-1}^T\right] \\
&= E\left[Ae_{k-1}e_{k1}^T A^T\right] + E\left[Ae_{k-1}w_{k-1}^T\right] + E\left[w_{k-1}e_{k1}^T A^T\right] + E\left[w_{k-1}w_{k-1}^T\right] \\
&= E\left[Ae_{k-1}e_{k1}^T A^T\right] + E\left[w_{k-1}w_{k-1}^T\right] \\
&= AE\left[e_{k-1}e_{k1}^T\right]A^T + E\left[w_{k-1}w_{k-1}^T\right] \quad \left(E\left[e_{k-1}e_{k1}^T\right] = P_{k-1}, E\left[w_{k-1}w_{k-1}^T\right] = Q\right) \\
&= AP_{k-1}A^T + Q
\end{aligned}
\tag{70}
$$

$$
\begin{aligned}
P_k &= P_k^- - K_k H P_k^- - P_k^- H^T K_k^T + K_k H P_k^- H^T K_k^T + K_k R K_k^T \\
&= P_k^- - K_k H P_k^- - P_k^- H^T K_k^T + K_k \left(H P_k^- H^T + R \right) K_k^T \\
&= P_k^- - K_k H P_k^- - P_k^- H^T K_k^T + \frac{P_k^- H^T}{\left(H P_k^- H^T + R \right)} \left(H P_k^- H^T + R \right) K_k^T \\
&= P_k^- - K_k H P_k^- - P_k^- H^T K_k^T + P_k^- H^T K_k^T \\
&= P_k^- - K_k H P_k^- \\
\Rightarrow P_k &= \left(I - K_k H \right) P_k^-
\end{aligned}
\tag{71}
$$

卡尔曼滤波完整公式：

表 4 卡尔曼滤波完整公式

线性系统	$\begin{cases} x_k = Ax_{k-1} + Bu_{k-1} + w_{k-1} \\ z_k = Hx_k + v_k \end{cases}$		概率分布	$P(w) \sim (0,Q)$， $p(v) \sim (0,R)$	
卡尔曼滤波					
预测			矫正		
初始值	$\hat{x}_0$、 P_0	○	卡尔曼增益	$K_k = \dfrac{P_k^- H^T}{\left(H P_k^- H^T + R \right)}$	③
先验值：计算结果	$\hat{x}_k^- = A\hat{x}_{k-1} + Bu_{k-1}$	①	后验估计	$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K_k \left(z_k - H\hat{x}_k^- \right)$	④
先验误差协方差	$P_k^- = AP_{k-1}A^T + Q$	②	跟新误差协方差	$P_k = \left(I - K_k H \right) P_k^-$	⑤

Eg：

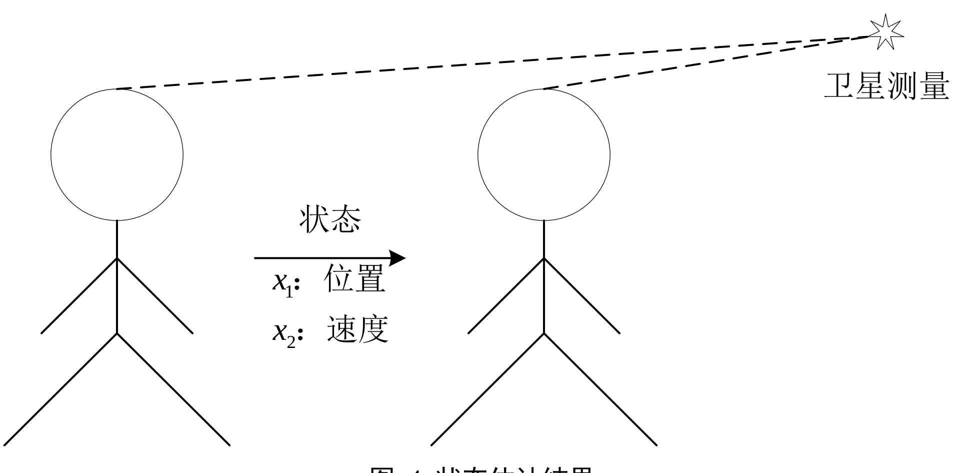


图 4 状态估计结果

状态：$\begin{matrix} x_1\text{：位置} \\ x_2\text{：速度} \end{matrix}$

采样时间为ΔT，即$k-1$和k之间的时间差。
速度：

$$x_{2,k} = x_{2,k-1} \tag{72}$$

位置：

$$x_{1,k} = x_{1,k-1} + \Delta T x_{2,k-1} \tag{73}$$

如果$\Delta T = 1$。

$$x_{1,k} = x_{1,k-1} + x_{2,k-1} \tag{74}$$

考虑系统的不确定性：

$$x_{1,k} = x_{1,k-1} + x_{2,k-1} + w_{1,k-1} \tag{75}$$

w为过程噪声（process Noise）：$p(w) \sim N(0,Q)$，式中 0：为期望，Q为协方差矩阵。

卫星测量状态：$\begin{matrix} z_1\text{：位置} \\ z_2\text{：速度} \end{matrix}$

v为过程噪声（process Noise）：$p(v) \sim N(0,Q)$，式中 0：为期望，R为协方差矩阵。

考虑测量噪声：

$$\begin{aligned} z_{1,k} &= x_{1,k} + v_{1,k} \\ z_{2,k} &= x_{2,k} + v_{2,k} \end{aligned} \tag{76}$$

系统矩阵：

$$\begin{gathered} \begin{cases} \begin{bmatrix} x_{1,k} \\ x_{2,k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_{1,k-1} \\ x_{2,k-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_{1,k-1} \\ w_{1,k-1} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} z_{1,k} \\ z_{2,k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_{1,k} \\ x_{2,k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{1,k} \\ v_{1,k} \end{bmatrix} \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} X_k = AX_{k-1} + w_{k-1} \\ Z_k = HZ_k + v_k \end{cases} \end{gathered} \tag{77}$$

通过数据融合（卡尔曼滤波）得到最优值：$\hat{X}_k$。

实验详见 EXCLE。

扩展卡尔曼滤波（Extended Kalman Filter，EKF）

回顾线性系统：Revisit Linear System

表 5 卡尔曼滤波

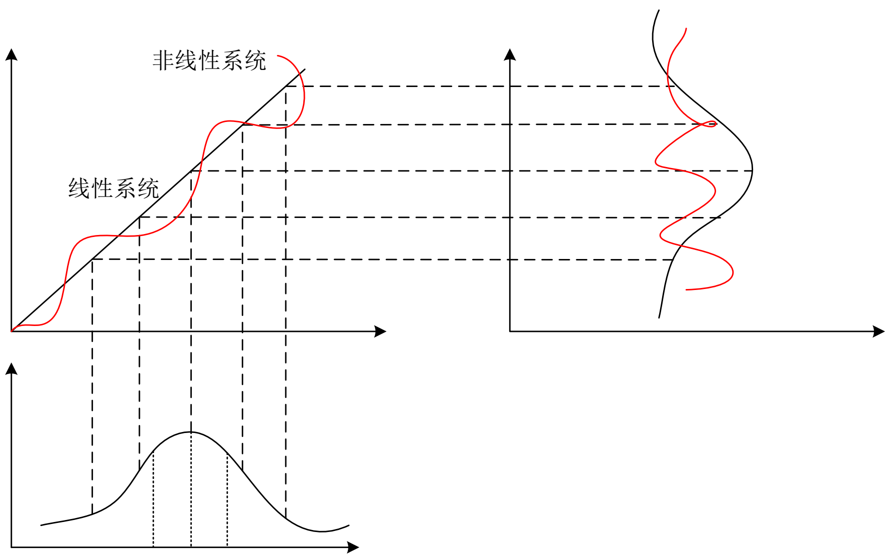
线性系统状态空间	$\begin{cases} x_k = Ax_{k-1} + Bu_{k-1} + w_{k-1} \\ z_k = Hx_k + v_k \end{cases}$		过程噪声概率分布	$P(w) \sim (0,Q)$，$p(v) \sim (0,R)$	
卡尔曼滤波递推步骤					
预测部分			矫正部分		
初始值	$\hat{x}_0$、P_0	○	卡尔曼增益	$K_k = \dfrac{P_k^- H^T}{\left(HP_k^- H^T + R\right)}$	③
先验估计计算结果	$\hat{x}_k^- = A\hat{x}_{k-1} + Bu_{k-1}$	①	后验估计最终结果	$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K_k\left(z_k - H\hat{x}_k^-\right)$	④
先验误差协方差	$P_k^- = AP_{k-1}A^T + Q$	②	更新误差协方差	$P_k = \left(I - K_k H\right)P_k^-$	⑤

非线性系统：

$$\begin{cases} x_k = f\left(x_{k-1}, u_{k-1}, w_{k-1}\right) \\ z_k = h\left(x_k, v_k\right) \end{cases} \tag{78}$$

f，h 为非线性表达形式。误差都符合正态分布。

但正态分布的随机变量通过非线性系统后，就不再是正态分布的形式。



因此需要线性化：linearization。

线性化工具：泰勒级数（Taylor series），高维需要雅可比矩阵。

$$f(x)=f(x_0)+\frac{\partial f}{\partial x}(x-x_0)$$
$$f(x)=f(x_0)+k(x-x_0) \tag{79}$$

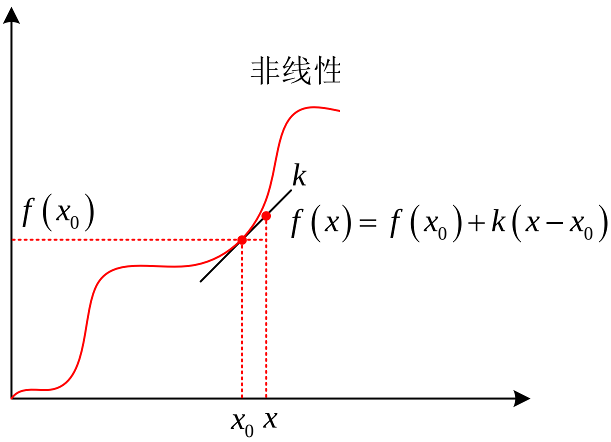


图 5 非线性的线性化处理

x_0 为：线性化点 Operating Point。

因为系统有误差。无法在真实点线性化。处理方法：$f(x_k)$ 在 $\hat{x}_{k-1}$ 处线性化。因此：

$$\begin{cases} x_k=f(x_{k-1},u_{k-1},w_{k-1}) \\ z_k=h(x_k,v_k) \end{cases} \tag{80}$$

可转化为：

$$x_k=f(\hat{x}_{k-1},u_{k-1},w_{k-1})+A(x_k-\hat{x}_{k-1})+W_kw_{k-1} \tag{81}$$

误差 w_{k-1} 为 0。 $f(\hat{x}_{k-1},u_{k-1},0)=\tilde{x}_R$。

$$x_k=\tilde{x}_R+A(x_k-\hat{x}_{k-1})+W_kw_{k-1} \tag{82}$$

其中： A 为雅各比矩阵。

$$A=\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\hat{x}_{k-1},u_{k-1}} \tag{83}$$

求矩阵 A；Eg

$$\begin{cases} f_1 = x_1 + \sin x_2 \\ f_2 = x_1^2 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \cos x_2 \\ 2x_1 & 0 \end{bmatrix} \Bigg| \begin{matrix} \hat{x}_{1k-1} \\ \hat{x}_{2k-1} \end{matrix} \tag{84}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \cos(\hat{x}_{2k-1}) \\ 2\hat{x}_{1k-1} & 0 \end{bmatrix}$$

同理：

$$W_k = \frac{\partial f}{\partial w}\bigg| \hat{x}_{k-1}, u_{k-1} \tag{85}$$

$z_k = h(x_k, v_k)$在$\tilde{x}_R$处线性化

$$z_k = h(\tilde{x}_k, v_k) + H(x_k - \tilde{x}_k) + Vv_k \quad (v_k = 0, \tilde{z}_k = h(\tilde{x}_k, 0)) \tag{86}$$

$$\begin{gathered} H = \frac{\partial h}{\partial x}\bigg| \hat{x}_k \\ V = \frac{\partial h}{\partial v}\bigg| \hat{x}_k \end{gathered} \tag{87}$$

因此：

$$\begin{cases} x_k = \tilde{x}_k + A(x_k - \hat{x}_{k-1}) + Ww_{k-1} \\ z_k = \tilde{z}_k + H(x_k - \tilde{x}_k) + Vv_k \end{cases} \tag{88}$$

概率分布：

$P(w) \sim N(0,Q)$，转化为$P(Ww_k) \sim N(0, WQW^T)$

Eg：

期望：$E(ax) = aE(x) = 0$

方差：$Var(ax) = a^2 Var(x)$

同理：

$p(v) \sim N(0,R)$，转化为$P(Vv_k) \sim N(0, VRV^T)$

非线性卡尔曼滤波：

表 6 非线性卡尔曼滤波

线性系统状态空间	$\begin{cases} x_k = Ax_{k-1} + Bu_{k-1} + w_{k-1} \\ z_k = Hx_k + v_k \end{cases}$	过程噪声概率分布	$P(w) \sim (0,Q)$， $p(v) \sim (0,R)$

扩展卡尔曼滤波递推步骤					
预测部分			矫正部分		
初始值	$\hat{x}_0$、 P_0	○	卡尔曼增益	$K_k=\frac{P_k^- H^T}{\left(HP_k^- H^T+VRV^T\right)}$	③
先验估计计算结果	$\hat{x}_k^-=f\left(\hat{x}_{k-1},u_{k-1},0\right)$	①	后验估计最终结果	$\hat{x}_k=\hat{x}_k^-+K_k\left(z_k-h\left(\hat{x}_k^-,0\right)\right)$	④
先验误差协方差	$P_k^-=AP_{k-1}A^T+WQW^T$	②	更新误差协方差	$P_k=\left(I-K_kH\right)P_k^-$	⑤