Vorlesung Analysis II für D-ITET im FS 2011

Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Zu einer *homogenen linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten*

$$Ly = y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

gehört das *charakteristische Polynom*

$$\mathrm{ch}_L(\lambda) := \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0.$$

Seine Nullstellen heissen *Eigenwerte* der Gleichung oder des Differentialoperators L.

Zu jedem Eigenwert λ der Multiplizität $m \geq 1$ gehören die *Fundamentallösungen* $x^\ell e^{\lambda x}$ für $0 \leq \ell \leq m-1$. Die Linearkombination dieser Fundamentallösungen zu allen Eigenwerten, mit beliebigen konstanten Koeffizienten, ist die *allgemeine Lösung* von $Ly = 0$.

Hat L reelle Koeffizienten und möchte man reelle Fundamentallösungen, so muss man dies für nicht-reelle Eigenwerte modifizieren. Dann ordnet man jedem Paar komplex konjugierter Eigenwerte $\mu \pm i\nu \notin \mathbb{R}$ der Multiplizität $m \geq 1$ statt der obigen die reellen Fundamentallösungen $x^\ell e^{\mu x}\cos\nu x$ und $x^\ell e^{\mu x}\sin\nu x$ für $0 \leq \ell \leq m-1$ zu.

Haben alle Eigenwerte die Multiplizität 1, so vereinfacht sich die Situation. Dann gehört zu jedem Eigenwert λ die Fundamentallösung $e^{\lambda x}$, bzw. zu jedem Paar komplex konjugierter Eigenwerte $\mu \pm i\nu \notin \mathbb{R}$ die reellen Fundamentallösungen $e^{\mu x}\cos\nu x$ und $e^{\mu x}\sin\nu x$.

Für die *inhomogene lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten* $Ly = g(x)$ sucht man zuerst eine *partikuläre Lösung* y_p. Ihre *allgemeine Lösung* hat dann die Form $y_h + y_p$, wobei y_h die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung $Ly = 0$ ist.

Sind $y_{p,j}$ partikuläre Lösungen von $Ly = g_j(x)$ und c_j Konstanten für $1 \leq j \leq k$, so ist $c_1 y_{p,1} + \ldots + c_k y_{p,k}$ eine partikuläre Lösung von $Ly = c_1 g_1(x) + \ldots + c_k g_k(x)$. Für gewisse $g(x)$ findet man eine partikuläre Lösung durch Ansatz.

Ist λ kein Eigenwert von L, so hat die Gleichung $Ly = e^{\lambda x}$ eine partikuläre Lösung der Form $Be^{\lambda x}$. Die Konstante B bestimmt man durch Einsetzen und Koeffizientenvergleich.

Ist λ kein Eigenwert von L und $p(x)$ ein Polynom vom Grad r, so hat die Gleichung $Ly = p(x)e^{\lambda x}$ eine partikuläre Lösung der Form $q(x)e^{\lambda x}$ für ein Polynom $q(x)$ vom Grad r. Die Koeffizienten von $q(x)$ bestimmt man durch Einsetzen und Koeffizientenvergleich.

Ist λ ein Eigenwert der Multiplizität m und $p(x)$ ein Polynom vom Grad r, so hat die Gleichung $Ly = p(x)e^{\lambda x}$ eine partikuläre Lösung der Form $q(x)e^{\lambda x}$ für ein Polynom $q(x)$ vom Grad $r + m$.

Hat L reelle Koeffizienten und nicht die Eigenwerte $\mu \pm i\nu$, so hat die Gleichung $Ly = A_1 e^{\mu x}\cos\nu x + A_2 e^{\mu x}\sin\nu x$ eine partikuläre Lösung der Form $B_1 e^{\mu x}\cos\nu x + B_2 e^{\mu x}\sin\nu x$ für Konstanten B_1 und B_2.

Hat L reelle Koeffizienten und Nullstellen $\mu \pm i\nu$ der Ordnung m, und sind $p_1(x)$ und $p_2(x)$ Polynome vom Grad $\leq r$, so hat die Gleichung $Ly = p_1(x)e^{\mu x}\cos\nu x + p_2(x)e^{\mu x}\sin\nu x$ eine partikuläre Lösung der Form $q_1(x)e^{\mu x}\cos\nu x + q_2(x)e^{\mu x}\sin\nu x$ für Polynome $q_1(x)$ und $q_2(x)$ vom Grad $\leq r + m$.

Für Anfangs-, Rand-, oder sonstige Nebenbedingungen stellt man zuerst die allgemeine Lösung auf und bestimmt dann deren Koeffizienten.