Komplexe Analysis

Diese Vorlesung ist nicht einfach zusammenhängend

Prof. Giovanni Felder

FS 2011

Michal Sudwoj

(Mitschrift)

Simon Etter

(Korrektur & Ergänzung)

Geschrieben in

XeLaTeX

Inhaltsverzeichnis

Teil I

Vorlesungsnotizen

Kapitel 1

Fourierreihen

Def.: Periodische Funktion:
Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heisst **periodisch** mit Periode $T > 0$ (oder T-periodisch) falls

$$\forall t \in \mathbb{R} : f(t+T) = f(t)$$

Bsp.:

$$f(t) = \begin{cases} \sin(t) \\ \cos(t) \end{cases}$$

ist 2π-periodisch.
Auch $\sin(nt)$ ist 2π-periodisch für alle ganzen Zahlen n.

$$f(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$$

ist T-periodisch:

$$\sin\left(\frac{2\pi}{T}(t+T)\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + 2\pi\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$$

Auch $\sin\left(\frac{2\pi}{T}nt\right)$, $\cos\left(\frac{2\pi}{T}nt\right)$ für $n \in \mathbb{Z}$

Satz: J. Fourier 1807:
Jede[1] T-periodische Funktion lässt sich als trigonometrische Reihe

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + a_1\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) + a_2\cos\left(\frac{2\pi}{T}2t\right) + a_3\cos\left(\frac{2\pi}{T}3t\right) + \dots$$
$$+ b_1\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) + b_2\sin\left(\frac{2\pi}{T}2t\right) + b_3\sin\left(\frac{2\pi}{T}3t\right) + \dots$$

darstellen, mit reellen Koeffizienten $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, b_1, b_2, b_3, \dots$

Fragen:

- Für welche Funktionen gilt das?
- Wie bestimmit man die "Fourierkoeffizienten" a_i, b_i?

Def.: Fourierreihe:

Eine **Fourierreihe** ist eine Reihe der Form

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \sin\left(\frac{2\pi}{T} nt\right) + b_n \cos\left(\frac{2\pi}{T} nt\right)\right)$$

Viel einfacher: komplexe Zahlen

$$e^{\imath\varphi} = \cos\varphi + \imath \sin\varphi$$
$$e^{-\imath\varphi} = \cos\varphi - \imath \sin\varphi$$
$$\cos\varphi = \frac{1}{2}\left(e^{\imath\varphi} + e^{-\imath\varphi}\right)$$
$$\sin\varphi = \frac{1}{2\imath}\left(e^{\imath\varphi} + e^{-\imath\varphi}\right)$$

Def.: komplexe Fourierreihe:
Eine **(komplexe) Fourierreihe** ist eine Reihe der Form

$$f(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{\frac{2\pi\imath}{T} nt}, c_n \in \mathbb{C}$$

Wenn sie konvergiert (d.h. wenn $\lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{\frac{2\pi\imath}{T} nt}$ existiert für alle $t \in \mathbb{R}$) definiert sie eine T-periodische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$
Durch Umformung lässt sich jede reelle Fourierreihe in diese Form bringen:

$$c_0 = \frac{1}{2} a_0$$
$$c_n = \frac{1}{2}\left(a_n - \imath b_n\right)$$

$$c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + \imath b_n) = \overline{c_n}, n > 0$$

Bsp.:

Schreibe die 2π-periodische Funktion $f(t) = \cos^3(t)$ als Fourierreihe.

$$\begin{aligned}
\cos^3(t) &= \frac{1}{8}\left(e^{\imath t} + e^{-\imath t}\right)^3 \\
&= \frac{1}{8}\left(e^{3\imath t} + 3e^{\imath t} + 3e^{\imath t} + e^{-3\imath t}\right) \\
&= \frac{3}{4}\cos(t) + \frac{1}{4}\cos(3t)
\end{aligned}$$

Fourierreihe mit $a_1 = \frac{3}{4}, a_3 = \frac{1}{4}$, Rest $= 0$

1.1 Exkurs: Differential- und Integralrechnung von komplexwertigen Funktionen

$f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}, f \mapsto u(t) + \imath v(t)$

u, v reellwertige Funktionen

$$\begin{aligned}
f'(t) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(t+h) - f(h)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{u(t+h) - u(t)}{h} + \imath \frac{v(t+h) - v(t)}{h} \\
&= u'(t) + \imath v'(t)
\end{aligned}$$

Es gelten die gleichen Regeln wie bei reellwertigen Funktionen.

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t := \int_a^b u(t)\,\mathrm{d}t + \imath \int_a^b v(t)\,\mathrm{d}t$$

Hauptsatz der Integralrechnung

$$\int_a^b f(t) = F(b) - F(a)$$
$$F(t) = U(t) + \imath V(t)$$
$$F'(t) = f(t)$$

$$e^{at}, a \in \mathbb{C}$$
$$e^{at} = 1 + at + \frac{(at)^2}{2!} + \dots$$
$$\frac{d}{dt} e^{at} = a e^{at}$$
$$\int e^{at}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a} e^{at} + C, a \neq 0$$

1.2 Fourierreihen

Wie bestimmt man die Fourierkoeffizienten c_n aus der Funktion $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{2\pi\imath n}{T} t}$?
Grundlegende Identität: Orthogonalitätsrelation

$$\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{\frac{2\pi\imath}{T} nt} e^{-\frac{2\pi\imath}{T} mt}\,\mathrm{d}t = \begin{cases} 1 & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases}$$

Bew.:

$$\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{\frac{2\pi\imath}{T}(n-m)t}\,\mathrm{d}t \overset{n\neq m}{=} \frac{1}{T}\left[\frac{1}{\frac{2\pi\imath}{T}(n-m)}e^{\frac{2\pi\imath}{T}(n-m)t}\right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}$$
$$= \frac{1}{\frac{2\pi\imath}{T}(n-m)}\left(e^{2\pi\imath(n-m)\frac{1}{2}} - e^{2\pi\imath(n-m)(-\frac{1}{2})}\right)$$
$$= 0$$
$$n = m : \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} 1\,\mathrm{d}t = 1\blacksquare$$

Folgerung: Ein trigonometrisches Polynom ist eine Funktion der Form $f(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{\frac{2\pi\imath}{T}nt}$
Die c_n bestimmt man aus f durch

$$\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-\frac{2\pi\imath}{T}nt}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=-N}^{N} c_n\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{\frac{2\pi\imath}{T}}e^{-\frac{2\pi\imath}{T}nt}\,\mathrm{d}t = c_m, (-N \leq m \leq N)$$

1.3 Lineare Algebra

Sei V der Vektorraum über $\mathbb{C}$ aller trigonometrischen Polynomen mit Periode T. Basis von V: $e^{\frac{2\pi\imath}{T}nt}$, $n \in \mathbb{Z}$
Erinnerung: Ein Skalarprodukt auf einem komplexen Vektorraum V ist eine Abblidung

$$V \times V \to \mathbb{C}; v, w \mapsto \langle v, w\rangle$$

1)

$$\langle c_1v_1 + c_2v_2, w\rangle = c_1\langle v_1, w\rangle + c_2\langle v_2, w\rangle$$

2)

$$\langle v, w\rangle = \overline{\langle w, v\rangle}$$

3)

$$\forall v \neq 0 : \langle v, v\rangle > 0$$

Bsp.:

$$V = \mathbb{C}^n$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right\rangle = x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} + \ldots + x_n\overline{y_n}$$

Eine orthonormierte Basis von V ist eine Basis $v_1, v_2, \ldots$ so, dass $\langle v_i, v_j\rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$. Dann gilt für jedes $v \in V$

$$v = \sum_n c_n v_n, c_n = \langle v, v_n\rangle$$

$$e^{-\frac{2\pi\imath}{T}t}, 1, e^{\frac{2\pi\imath}{T}t}, e^{-\frac{2\pi\imath}{T}2t}$$

sind eine orthonormierte Basis des Vektorraums der trigonometrischen Polynome bezüglich des Skalarprodukts

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\overline{g(t)}\,\mathrm{d}t$$

(Das ist ein Skalarprodukt , 1) , 2) klar)

3)

$$\langle f, f\rangle = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\overline{f(t)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(t)|^2\,\mathrm{d}t > 0$$

wenn f nicht identisch 0 ist.

Orthogonalitätsrelationen $\iff$ $\langle e^{\frac{2\pi\imath}{T}t}, e^{\frac{2\pi\imath}{T}t}\rangle = \delta_{n,m}$
Saubere Notation $e_n(t) := e^{\frac{2\pi\imath}{T}nt}$

$$\langle e_n, e_n\rangle = \delta_{n,m}$$

$$f = \sum_{n=-N}^{N} c_n e_n, c_n = \langle f, e_n\rangle$$

Def.: Fourierkoeffizient:

Sei f eine T-periodische Funktion (d.h. $f(t+T) = f(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$) ; die **Fourierkoeffiziente** von f sind

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-\frac{2\pi}{T} \imath n t} \, \mathrm{d}t$$

Def.: Lipschitz Stetigkeit:

f heisst Lipschitz-stetig falls es ein $C > 0$ gibt so, dass $|f(t) - f(t')| \leq c\,|t - t'|$ für alle t nahe genug zu t'.

Bsp.:

Stetig differenzierbare Funktionen auf $[a, b]$ sind Lipschitz-stetig.

Satz:

Ist f T-periodisch und Lipschitz-stetig, dann gilt

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{2\pi\imath}{T} n t}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$, wobei

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-\frac{2\pi \imath}{T} nt} \, \mathrm{d}t$$

Fix

Daraus folgt dasselbe für reelle Fourierreihen:
f reelle T-periodische Lipschitzstegige Funktion. Dann gilt:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{2\pi}{T} nt\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi}{T} nt\right)\right)$$

wobei $a_n = c_n + c_{-n} = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos\left(\frac{2\pi}{T} nt\right) \mathrm{d}t, b_n = -\frac{c_n - c_{-n}}{\imath} = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin\left(\frac{2\pi}{T} nt\right) \mathrm{d}t$

Bem.:

Wenn f eine gerade Funktion ist, d.h. $f(t) = f(-t)$, dann

$$b_n \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \underbrace{f(t) \sin\left(\frac{2\pi}{T} nt\right)}_{\text{ungerade Funktion}} \mathrm{d}t = 0$$

Man erhält eine "Kosinusreihe"

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi}{T} nt\right)$$

Analog: Falls f ungerade ist (d.h $f(-t) = -f(t)$), dann hat f eine Sinusreihe

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{2\pi}{T} nt\right)$$

Bsp.:

$f(t) = 1 - \frac{2}{\pi}\,|t|$ für $-\pi \leq t \leq \pi$; 2π-periodisch fortgesetzt ;
$f(t) = f(-t)$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nt)$$

$$a_n = \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \frac{2}{\pi}\,|t|) \cos(nt)\,\mathrm{d}t$$

Falls f z.B. Lipschitz-stetig ist, dann konvergiert die Fourier-Reihe in jedem Punkt t gegen f, d.h. die Folge der Partialsummen

$$s_N(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} (\dots)$$

erfüllt $\lim_{N\to\infty} s_N(t) = f(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$

Bsp.:

$$f(t) = 1 - \frac{2}{\pi}\,|t|\,, -\pi \leq t \leq \pi, 2\pi\text{-periodisch fortgesetzt}$$

$$f(t) = f(-t) \implies b_n = 0$$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{2\pi}\cdot 2\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(1-\frac{2}{\pi}t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi}\cos(nt)\,\mathrm{d}t + \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t\cos(nt)\,\mathrm{d}t\right) \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\left[\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^{\pi} - \frac{2}{n}\left[\frac{1}{n}t\sin(nt) + \frac{1}{n^2}\cos(nt)\right]_0^{\pi}\right) \\
&= \frac{4}{\pi^2}\frac{1}{n^2}(-\underbrace{\cos(n\pi)}_{(-1)^n}+1) \\
&= \begin{cases} 0 & n \text{ gerade} \\ \frac{8}{\pi^2}\frac{1}{n^2} & n \text{ ungerade} \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
1-\frac{2}{\pi}|t| &= \frac{8}{\pi^2}\sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ ungerade}}}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos(nt), -\pi\le t\le\pi \\
&= \frac{8}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\cos((2k+1)t)
\end{aligned}$$

Es folgt

$$1 = \frac{8}{\pi^2}\sum_{\text{ungerade Zahlen } n\ge 1}\frac{1}{n^2} \qquad (t=0)$$

Also:

$$1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\ldots = \frac{\pi^2}{8} \qquad \text{(Euler)}$$

Fourier-Reihe einer nicht stetigen Funktion, "Rechtecksignal"

$$f(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < \frac{T}{2} \\ -1 & -\frac{T}{2} \leq t < 0 \end{cases}, T\text{-periodisch fortgesetzt}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{2\pi}{T}nt\right)$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin\left(\frac{2\pi}{T}nt\right)\mathrm{d}t \\ &= \frac{2}{T}\cdot 2\int_0^{\frac{T}{2}} 1\sin\left(\frac{2\pi}{T}nt\right)\mathrm{d}t \\ &= \frac{4}{T}\left[-\frac{T}{2\pi n}\cos\left(\frac{2\pi}{T}nt\right)\right]_0^{\frac{T}{2}} \\ &= \frac{2}{\pi n}(-(-1)^n + 1) \\ &= \begin{cases} 0 & n \text{ gerade} \\ \frac{4}{\pi n} & n \text{ ungerade} \end{cases} \end{aligned}$$

Partialsumme (n ungerade)

$$s_N(t) = \frac{4}{\pi}\left(\sin\left(\frac{2\pi}{T}3t\right)\right) + \ldots + \frac{1}{N}\sin\left(\frac{2\pi}{T}Nt\right)$$

$$f(t+T) = f(t)\forall t \in \mathbb{R}$$

$$c_n = \frac{1}{T}\int -\frac{T}{2}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-\frac{2\pi\imath}{T}nt}\,\mathrm{d}t = \langle f, e_n\rangle, e_n(t) = e^{\frac{2\pi\imath}{T}nt}$$

Partialsummen der Fourier-Reihe von f

$$s_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{\frac{2\pi\imath}{T}nt}$$

Falls f z.B. stetig differenzierbar

$$f(t) = \lim_{N\to\infty} s_N(t) = \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{2\pi\imath}{T}nt}}_{\text{Fourierreihenentwickelung von } f}$$

Satz:

Falls f stetig differenzierbar ausser an endlich vielen Sprungstellen ist, wobei der Linke und rechte Grenzwert von f und f' an den Sprungstellen existiert, dann gilt immer noch

$$\lim_{N\to\infty} s_N(t) = f(t)$$

ausser für t Sprungstelle.
Für t_0 eine Sprungstelle

$$\lim_{N\to\infty} s_N(t_0) = \frac{1}{2}(\lim_{t\to t_0^-} f(t) + \lim_{t\to t_0^+} f(t))$$

Bem.:

Wenn $g(t)$ T-periodisch ist dann

$$\forall a, b : b - a = T \implies \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g(t)\,\mathrm{d}t \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

Es folgt insbesondere

$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-\frac{2\pi\imath}{T}nt}\,\mathrm{d}t$$

1.4 Überschwingungen (Gibbsphänomen)

Bsp.:

Siehe oben.

$$f(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < \frac{T}{2} \\ -1 & -\frac{T}{2} \leq t < 0 \end{cases}, T\text{-periodisch fortgesetzt}$$

$$s_N(t) = \frac{4}{\pi}\left(\sin\left(\frac{2\pi}{T}3t\right)\right) + \ldots + \frac{1}{N}\sin\left(\frac{2\pi}{T}Nt\right)$$

Wir betrachten $s_N(\frac{a}{N}$ für grosse N und $0 \leq a \leq 10$. Für $T = 2\pi$

$$s_N\left(\frac{a}{N}\right) = \frac{4}{\pi}\sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ ungerade}}}^{N} \frac{1}{n}\sin\left(n\frac{a}{N}\right) = \frac{2}{\pi}\sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ ungerade}}}^{N} \frac{\sin\left(\frac{na}{N}\right)}{\frac{na}{N}} \cdot 2\frac{2}{N}$$

Riemannsumme für das Integral $\frac{2}{\pi}\int_0^a \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$

$$\lim_{N\to\infty} s_N\left(\frac{a}{N}\right) = \frac{2}{\pi}\int_0^a \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}Si(a)$$

$$Si(a) = \int_0^a \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x \qquad \text{"Integralsinus"}$$

$$Si'(a) = \frac{\sin a}{a} = 0 \text{ für } a = n\pi, n \in \mathbb{Z}^{>0}$$

Für grosse N sieht also die Partialsumme $s_N(t)$ für $t \approx 0$ folgendermassen

$$\frac{2}{\pi} Si(\pi) \approx 1.8$$

Bei $s_N(t)$ ist der Sprung um ca. 20% grösser als bei $f(t)$

1.5 Differenzierbarkeit

Prinzip: je glatter die Funktion desto schneller konvergiert die Foureierreihe. Sei z.B. f stetig differenzierbar

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-\frac{2\pi\imath n}{T}t}\,\mathrm{d}t \\
&\overset{n\neq 0}{=} \underbrace{0}_{[T\text{-periodisch}]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}} \quad -\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f'(t)\left(-\frac{T}{2\pi\imath n}\right)\underbrace{e^{-\frac{2\pi\imath n}{T}t}}_{|\cdot|=1}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi\imath n}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f'(t)\underbrace{e^{-\frac{2\pi\imath n}{T}t}}_{|\cdot|=1} \\
|c_n| &\leq \frac{1}{|n|}\frac{T}{2\pi}\underbrace{\max_t |f'(t)|}_{\cos t}
\end{aligned}$$

Der n-te Fourierkoeffizient von $f'(t)$ ist $d_n = \frac{2\pi\imath}{T} n c_n$. Dies erhält man auch durch Differenzieren der Fouierreihe.

$$\begin{aligned}
f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{2\pi\imath n}{T}t} \\
f'(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi\imath n}{T} c_n e^{\frac{2\pi\imath n}{T}t}
\end{aligned}$$

Wenn f k-mal stetig differenzierbar ist

$$c_n = \frac{1}{2\pi\imath n}\int_{-\frac{T}{2}}^{T} 2f'(t)e^{-\frac{2\pi\imath n}{T}}\,\mathrm{d}t = \frac{T}{(2\pi\imath n)^2}\int_{-\frac{T}{2}}^{T} 2f''(t)e^{-\frac{2\pi\imath n}{T}}\,\mathrm{d}t$$

$$|c_n| \leq \frac{T^k}{(2\pi\,|n|)^k}\max_{-\frac{T}{2}\leq t\leq\frac{T}{2}}\left|f^{(k)}(t)\right| = \frac{\text{const.}}{|n|^k}$$

Bem.:

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \max_{a\leq t\leq b}|f(t)|\cdot(b-a)$$

1.6 Parsevalidentität

Lineare Algebra: V komplexer Vektorraum mit Skalarprodukt, $e_1, e_2, \ldots$ orthonormierte Basis

$$V \ni v = \sum_n \langle v, e_n\rangle e_n$$

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle} \qquad \text{Norm von } v$$

$$\|v\| = \sqrt{\sum_n |\langle v, e_n\rangle|^2}$$

Bew.:

$$
\begin{aligned}
\langle v, v\rangle &= \langle \sum_n \langle v, e_n\rangle e_n, \sum_m \langle v, e_m\rangle e_m\rangle \\
&= \sum_{n,m} \langle v, e_n\rangle \overline{\langle v, e_m\rangle} \underbrace{\langle e_n, e_m\rangle}_{\delta_{n,m}} \\
&= \sum_n |\langle v, e_n\rangle|^2
\end{aligned}
$$

$V = \{\text{trigonometrische Polynome}\}$

$f = \sum c_n e_n$ mit $e_n(t) = e^{\frac{2\pi \imath}{T} nt}$ und $c_n = \langle f, e_n\rangle$

$\|v\|^2 = \sum_n |\langle v, e_n\rangle|^2$

$$\underbrace{\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t}_{\langle f, f\rangle} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$$

Parsevalidentität: gilt allgemein für stetige Funktionen f

1.7 Eine Anwendung von Fourier-Reihen

Bsp.:

Wärmeleitung auf einem Ring
$f(\varphi)$ = Anfangstemeratur zur Zeit $t = 0$ im Punkt $(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$
Zeitevolution der Temperatur wird durch die Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, \varphi) = D \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}(t, \varphi) \quad D > 0$$

gegeben $u(t,\varphi)$ Temperatur zur Zeit t
Anfangsbedingung: $u(0,\varphi) = f(\varphi)$ sei gegeben

$$f(\varphi + 2\pi) = f(\varphi), u(t,\varphi) = u(t, \varphi + 2\pi)$$

$$f(\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\imath n\varphi} \quad c_n \text{ gegeben}$$

$$u(t,\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(t) e^{\imath n\varphi}$$

$c_n(t)$ aus $c_n = c_n(0)$ bestimmen? Wärmegleichung

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}c_n(t)}{\mathrm{d}t} e^{\imath n\varphi} = D \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\imath n)^2 c_n(t) e^{\imath n\varphi}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\mathrm{d}c_n(t)}{\mathrm{d}t} + Dn^2 c_n(t) \right) e^{\imath n\varphi} = 0 \text{ für alle } t > 0, \varphi$$

$$\frac{\mathrm{d}c_n(t)}{\mathrm{d}t} = -Dn^2 c_n(t) \text{ für alle } n$$

$$c_n(0) = c_n$$

$$c_n(t) = e^{-Dn^2 t} c_n$$

$$\text{Lösung: } u(t,\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-Dn^2 t} e^{\imath n\varphi}$$

$$\text{Sei } f(\varphi) = \begin{cases} 1 & 0 < \varphi \leq \pi \\ -1 & -\pi < \varphi \leq 0 \end{cases}$$

$$\implies f(\varphi) = \frac{4}{\pi} \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ ungerade}}}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(n\varphi)$$

$$= \frac{4}{\pi} \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ ungerade}}}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{1}{2\imath} (e^{\imath n\varphi} - e^{-\imath n\varphi})$$

$$= \frac{4}{\pi} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \text{ ungerade}}}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{1}{2\imath} e^{\imath n\varphi}$$

$$\implies c_n(0) = \frac{4}{\pi} \frac{1}{n} \frac{1}{2\imath}$$

$$c_n(t) = \frac{4}{\pi}\frac{1}{n}\frac{1}{2\imath}e^{-Dn^2t}$$

$$\implies u(t,\varphi) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{1}{2\imath}e^{-Dn^2t}e^{\imath n\varphi}$$

$$= \frac{4}{\pi}\sum_{\substack{n=1\\ n \text{ ungerade}}}^{\infty}\frac{1}{n}e^{-Dn^2t}\sin(n\varphi)$$

Bemerkung:

- $c_n(t)$ ist exponentiell klein für n gross falls $t > 0$
- $u(t,\varphi)$ glatt als Funktion von φ
- Für $t < 0$ konvergiert die Reihe im Allgemeinen nicht, d.h. $c_n(t) \to \infty$ für $n \to \infty$

1.8 Partialsummen als beste Näherung im quadratischen Mittel

f T-periodisch

$$e_n(t) = e^{\frac{2\pi\imath}{T}nt}$$

$$c_n = \langle f, e_n\rangle = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\overline{e_n(t)}\,\mathrm{d}t$$

$$s_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e_n(t)$$

$$V_N = \{\text{ trigonometrische Polynome von Grad } \leq N\}$$

$$:= \left\{\text{Linearkombinationen } \sum_{n=-N}^{N} d_n e_n \text{ von } e_{-N}, e_{-N+1}, \dots, e_N\right\}$$

V_N Unterraum des Raumes der T-periodischen Funktionen.
Die ortogonale Projektion eines Vektors f auf dem Unterraum V_N ist $\sum_{n=-N}^{N}\langle f, e_n\rangle e_n$ und es ist der Punkt in V_N der am nächsten bezüglich des Abstands $\|f - p\| =$

$\sqrt{\langle f-p, f-p\rangle}$ zu f liegt. Es gilt nämlich für $p = \sum_{n=-N}^{N} d_n e_n \in V_N$

$$\begin{aligned}
\|f-p\| &= \left\langle f - \sum_{n=-N}^{N} d_n e_n, f - \sum_{m=-N}^{N} d_m e_m \right\rangle \\
&= \langle f, f\rangle - \sum_{m=-N}^{N} \overline{d_m} \langle f, e_m\rangle - \sum_{n=-N}^{N} d_n \langle e_n, f\rangle + \sum_{n=-N}^{N} d_n \overline{d_n} \\
&= \langle f, f\rangle + \sum_{n=-N}^{N} (-\overline{d_n} c_n - d_n \overline{c_n} + d_n \overline{d_n}) \\
&= \langle f, f\rangle + \sum_{n=-N}^{N} (-c_n \overline{c_n} + (d_n - c_n)(\overline{d_n} - \overline{c_n})) \\
&= \langle f, f\rangle - \sum_{n=-N}^{N} |c_n|^2 + \sum_{n=-N}^{N} |d_n - c_n|^2 = 0 \iff c_n \\
&= d_n
\end{aligned}$$

$\|f-p\|$ ist am kleinsten, wenn $p = s_N$
Allgemein: W unitärer Vektorraum d.h. ein komplexer Vektorraum mit einem Skalarprodukt [z.B. $W = \{$ stetige, T-periodische Funktionen $\}$, $\langle f, g\rangle = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\overline{g(t)}\,\mathrm{d}t$]. $V \subset W$ endlichdimensionaler Unterraum [z.B $V = \{$ trigonometrische Polynome von Grad $\leq N\}$]. $e_{-N}, \ldots, e_N$ orthonormierte Basis von V [im Beispiel $e_n(t) = e^{\frac{2\pi\imath}{T}nt}$]. Orthogonalprojektion von $f \in W$ auf V:

$$\pi(f) = \sum_{n=-N}^{N} \langle f, e_n\rangle\, e_n$$

$\pi(f)$ ist die beste Näherung von f in V, d.h. $\pi(f)$ ist der Vektor p in V, der den kleinsten Abstand $\|f-p\| = \sqrt{\langle f-p, f-p\rangle}$ zu f hat.
Für Fourierreihen: Der Abstand zwischen stitigen T-periodische Funktionen f und einem beliebigen trigonometrischen Polynom p von Grad $\leq N$ ist am kleinsten wenn $p = S_N = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^n, c_n = \langle f, e_n\rangle = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-\frac{2\pi\imath}{T}nt}\,\mathrm{d}t.$
$\sqrt{\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(t)-p(t)|^2\,\mathrm{d}t}$ ist am kleinsten, wenn $p(t) = S_N(t)$

Kapitel 2

Fouriertransformationen

"Fourrierreihen im limes $T \to \infty$"

Def.: Integral:
Das Integral

$$\int -\infty^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$$

einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ist definert als

$$\lim_{M\to\infty} \int_{-M}^{M} f(t)\,\mathrm{d}t$$

(falls der Grenzwert existiert).

Def.: integrabel:
Eine Funktion f heisst **integrabel** falls der Grenzwert

$$\lim_{M\to\infty} \int_{-M}^{M} |f(t)|\,\mathrm{d}t$$

existiert. (man schreibt auch $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t < \infty$)
Dann existiert auch $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ und es gilt

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t$$

Def.: Fourriertransformierte:
Die **Fourriertransformierte** einer integrablen Funktion ist die Funktion

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-\imath\omega t}\,\mathrm{d}t, \omega \in \mathbb{R}$$

Intuition:

$$\hat{f}(\omega) = \lim_{T\to\infty} (Tc_n|_{\omega=\frac{2\pi}{T}n}) = \lim_{T\to\infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-\imath\omega t}\,\mathrm{d}t$$

Wohldefiniert da $|f(t)e^{-\imath\omega t}| = |f(t)|$
Umkehrformel: Kann man f aus $\hat{f}$ wiedergewinnen?
Intuition:

$$\begin{aligned} f(t) &= \lim_{T\to\infty} \sum_{\omega=\frac{2\pi}{t}n} c_n e^{\imath\omega t} \\ &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi} \sum_{\omega=\frac{2\pi}{t}n} \underbrace{\frac{2\pi}{T}}_{\Delta\omega} \hat{f}(\omega)e^{\imath\omega t} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{\imath\omega t}\,\mathrm{d}\omega \end{aligned}$$

(Riemann-Summe)

Satz: Umkehrsatz von Fourier:

Sei f integrabel und $\hat{f}$ integrabel. Dann gilt

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{\imath \omega t} \, \mathrm{d}\omega$$

Bew.:

später

Bsp.1:

$$f(t) = \chi_{[a,b]}(t) := \begin{cases} 1 & a \leq t \leq b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

charakteristische Funktion von $[a, b]$

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{[a,b]}(t) e^{-\imath\omega t} \,\mathrm{d}t \\
&= \int_a^b 1 e^{-\imath\omega t} \,\mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{1}{-\imath\omega} e^{-\imath\omega t} \right]_a^b \\
&= \frac{1}{-\imath\omega} (e^{-\imath\omega b} - e^{-\imath\omega a}) \\
&= e^{-\imath\omega \frac{a+b}{2}} \frac{1}{-\imath\omega} (e^{\imath\omega \frac{a-b}{2}} - e^{-\imath\omega \frac{a-b}{2}}) \\
&= \underbrace{e^{-\imath\omega \frac{a+b}{2}}}_{|\cdot|=1} \frac{2 \sin\left(\omega \frac{b-a}{2}\right)}{\omega}
\end{aligned}$$

Bem.:

Man kann zeigen, dass $\hat{f}(\omega)$ stetig ist und $\lim_{\omega\to\pm\infty}\hat{f}(\omega)=0$ (Riemann-Lebesgue).

Bsp.2:

$$f(t)=e^{-a\frac{t^2}{2}},\, a>0$$
$$\hat{f}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\frac{t^2}{2}-\imath\omega t}\,\mathrm{d}t$$
$$\text{z.B. } \hat{f}(0)=\int_{-\infty}^{\infty}=e^{-a\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t=\sqrt{\frac{2\pi}{a}}$$
$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\frac{t^2}{2}-bt}\,\mathrm{d}t &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{a}{2}(t+\frac{b}{a})^2+\frac{b^2}{2a}}\,\mathrm{d}t\\ &= e^{\frac{b^2}{2a}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{a}{2}(t+\frac{b}{a})^2}\,\mathrm{d}t\\ &= e^{\frac{b^2}{2a}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{a}{2}s^2}\,\mathrm{d}s\\ &= \sqrt{\frac{2\pi}{a}}e^{\frac{b^2}{2a}}\end{aligned}$$

Setze $b=\imath\omega$ (wieso das erlaubt ist, werden wir aus der Funktionentheorie lernen)

$$\hat{f}(\omega)=\sqrt{\frac{2\pi}{a}}e^{-\frac{\omega^2}{2a}}$$

Verifikation des Umkehrsatzes für diese Funktion

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{\frac{2\pi}{a}}e^{-\frac{\omega^2}{2a}}e^{\imath\omega t}\,\mathrm{d}\omega &= \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2\pi}{a}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{a}\frac{\omega^2}{2}+\imath t\omega}\,\mathrm{d}\omega\\ &= \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2\pi}{a}}e^{-\frac{(-t)^2}{2\frac{1}{a}}}\\ &= e^{-\frac{at^2}{2}}\end{aligned}$$

Bsp.3:

$$\begin{aligned} f(t) &= e^{-|t|}\\ \hat{f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|-\imath\omega t}\,\mathrm{d}t\\ &= \int_{0}^{\infty} e^{-t-\imath\omega t}\,\mathrm{d}t + \int_{-\infty}^{0} e^{+t-\imath\omega t}\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{-1}{1+\imath\omega}[e^{-t-\imath\omega t}]_0^{\infty} + \frac{1}{1-\imath\omega}[e^{t-\imath\omega t}]_{-\infty}^{0}\\ &= \frac{1}{1+\imath\omega}+\frac{1}{1-\imath\omega}\\ &= \frac{1}{1+\omega^2}\end{aligned}$$

1) Die Fouriertransformation ist linear $h(t) = af(t) + bg(t) \implies \hat{h}(\omega) = a\hat{f}(\omega) + b\hat{g}(\omega) \Leftarrow$ Linearität von $\int_{-\infty}^{\infty}$

2) $g(t) = f(t-a) \implies \hat{g}(\omega) = e^{-\imath a\omega}\hat{f}(\omega)$

3) $g(t) = f\left(\frac{t}{a}\right) \wedge a > 0 \implies \hat{g}(\omega) = a\hat{f}(a\omega)$

Bew.:

$\hat{g}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-\imath\omega t}\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{t}{a}\right)e^{-\imath\omega t}\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-\imath\omega a t}a\,\mathrm{d}t = a\hat{f}(a\omega)$

4) $g(t) = e^{\imath a t}f(t) \implies \hat{g}(\omega) = \hat{f}(\omega - a)$, analog zu 2)

5) $g(t) = f'(t)$, g, f integrabel , $f(t) \to 0$ für $t \to \pm\infty \implies \hat{g} = \imath\omega\hat{f}(\omega)$

Bew.:

$$\hat{g}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)e^{-\imath\omega t}\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\imath\omega e^{-\imath\omega t}\,\mathrm{d}t$$

Satz: Falltungssatz:

$$(f * g)(t) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t-s)g(s)\,\mathrm{d}s$$
$$\widehat{(f * g)}(\omega) = \hat{f}(\omega)\cdot\hat{g}(\omega)$$

Faltung(sprodukt)

f, g integrabel
Faltung von f und g:

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-s)g(s)\,\mathrm{d}s$$

Man kann zeigen, dass das Integral existiert für alle t und eine integable Funktion $f * g$ definiert.

Bsp.:

Signal $g(t)$

$\rightsquigarrow$ Signal $h(t) =$ Mittelwert von g im Zeitintervall $[t-a, t]$.

$$h(t) = \frac{1}{a}\int_{t-a}^{t} g(s)\,\mathrm{d}s$$

ist eine Faltung von g mit einer Funktion

$$\Phi(t) = \begin{cases} \frac{1}{a} & 0 \leq t \leq a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Tatsächlich gilt:

$$(\Phi * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(t-s)g(s)\,\mathrm{d}s$$

$$\Phi(t-s) = \begin{cases} \frac{1}{a} & 0 \leq t-s \leq a \iff t \geq s \geq t-a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$(\Phi * g)(t) = \frac{1}{a}\int_{t-a}^{t} g(s)\,\mathrm{d}s$$

Satz:

$$\widehat{f * g}(\omega) = \hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega)$$

Bew.:

$$
\begin{aligned}
\widehat{f * g}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} (f * g)(t) e^{-\imath\omega t} \,\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t-s) g(s) e^{-\imath\omega t} \,\mathrm{d}s \right) \mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t-s) g(s) e^{-\imath\omega t} \,\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}s \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} g(s) \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t-s) e^{-\imath\omega t} \,\mathrm{d}t \right)}_{\hat{f}(\omega) e^{-\imath\omega s}} \mathrm{d}s \\
&= \hat{f}(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} g(s) e^{-\imath\omega s} \,\mathrm{d}s \\
&= \hat{f}(\omega) \hat{g}(\omega)
\end{aligned}
$$

Satz: Satz von Fubini:

Wenn $F(t,s)$ stetig, $t \mapsto F(t,s)$ integrabel für alle s , $s \mapsto F(t,s)$ integrabel für alle t, dann

$$
\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} F(t,s) \,\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}s = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} F(t,s) \,\mathrm{d}s \right) \mathrm{d}t
$$

Satz: Unkehrsatz von Fourier:

Wenn $f, \hat{f}$ integrabel, f stetig, dann gilt

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{\imath\omega t} \,\mathrm{d}\omega$$

Bew.:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{\imath\omega t} \,\mathrm{d}\omega \\
=&\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{-\imath\omega s} e^{\imath\omega t} \,\mathrm{d}s \right) \mathrm{d}\omega \\
=&\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{-\imath\omega(s-t)-\varepsilon\frac{\omega^2}{2}} \,\mathrm{d}s \right) \mathrm{d}\omega \\
=&\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(s) \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\imath\omega(s-t)-\varepsilon\frac{\omega^2}{2}} \,\mathrm{d}\omega \right) \mathrm{d}s \\
=&\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(s) \sqrt{\frac{2\pi}{\varepsilon}} e^{-\frac{(s-t)^2}{2\varepsilon}} \,\mathrm{d}s \\
=&\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2\pi}{\varepsilon}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t+\sqrt{\varepsilon}u) e^{-\frac{u^2}{2}} \sqrt{\varepsilon} \,\mathrm{d}u \\
=&f(t) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} \,\mathrm{d}u \\
=&f(t)
\end{aligned}$$

$$f(t) = e^{-a\frac{t^2}{2}}, a > 0$$
$$\hat{f}(\omega) = \sqrt{\frac{2\pi}{a}} e^{-\frac{\omega^2}{2a}}$$

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t) = Ae^{\imath\omega t} + \overline{A}e^{-\imath\omega t}$$

"harmonische Schwingungen mit Kreisperiode ω (Periode $T = \frac{2\pi}{\omega}$)"

$$f(t+T) = f(t) \quad f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{2\pi}{T}\imath nt}$$

Superposition von harmonischen Schwingungen mit Kreisfrequenz

$$n \cdot \omega_0 \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

f allgemein aber integrabel($\Leftarrow f(t) \to\to 0$ schnell genung für $t \to \infty$)

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{\imath\omega t}\,\mathrm{d}\omega$$
$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-\frac{2\pi\imath}{T}nt}\,\mathrm{d}t$$
$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-\imath\omega t}\,\mathrm{d}t$$

Kapitel 3

Analytische Funktionen

Komplexe Ableitung einer Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ (oder $\Omega \to \mathbb{C}$, $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen)

Def.: komplexe Ableitung:

Die **(komplexe) Ableitung** der Funktion f in $z \in \Omega$ ist der Grenzwert

$$f'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

falls es existiert. D.h.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \left| \frac{f(z+h) - f(z)}{h} - f'(z) \right| < \varepsilon$$

für alle h mit $|h| < \delta$

Bsp.4:

$$f(z) = z^2$$

$$
\begin{aligned}
f'(z) &= \lim_{h\to 0} \frac{(z+h)^2 - z^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{z^2 + 2hz + h^2 - z^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} (2z + h) \\
&= 2z
\end{aligned}
$$

Bsp.5:

$$f(z) = \overline{z}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\overline{z+h} - \overline{z}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\overline{h}}{h} \text{ existiert nicht!}$$

Wenn h reell ist $\frac{\overline{h}}{h} = \frac{h}{h} = 1$

Wenn $h = \imath k$ imaginär ist ($k \in \mathbb{R}$) $\frac{\overline{h}}{h} = \frac{-\imath k}{\imath k} = -1$

Ähnlich: $f(z) = \Re(z), \Im(z)$ sind micht komplex differenzierbar.

Bsp.6:

$$f(z) = z^n$$

$$
\begin{aligned}
f'(z) &= \lim_{h \to 0} \frac{(z+h)^n - z^n}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{z^n + nhz^{n-1} + \cdots - z^n}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} (nz^{n-1} + \cdots) \\
&= nz^{n-1}
\end{aligned}
$$

Def.: Analytische Funktion:
$f : \Omega \to \mathbb{C}, \Omega \subset \mathbb{C}$ offen, heisst **analytisch** falls $f'(z)$ für alle $z \in \Omega$ existiert [und f' stetig ist][1]

Regeln (Beweise wie im Reellen)

1. Linearität: f, g analytisch auf $\Omega, c_1, c_2 \in \mathbb{C} \implies c_1 f + c_2 g$ analytisch und es gilt $(c_1 f + c_2 g)' = c_1 f' + c_2 g'$. $\implies$ Polynome $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$ mit komplexen Koeffizienten a_i sind analytisch auf ganz $\mathbb{C}$ und $f'(z) = a_1 + 2a_2 z + \cdots + na_{n-1} z^{n-1}$
2. Produktregel: f, g analytisch auf $\Omega \implies f \cdot g$ anaytisch und $(fg)' = f'g + fg'$
3. Quotientregel: f, g analytisch auf $\Omega \implies \frac{f}{g}$ analytisch auf $\Omega \setminus \{$ Nullstellen von $g\}$ und $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$
4. Kettenregel: $f \circ g(z) = f(g(z))$ ist analytisch wo definiert und es gilt $(f \circ g)' = f'(g(z) \cdot g'(z)$
5. Rationale Funktionen: $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$; P, Q Polynome. f ist analytisch auf $\mathbb{C} \setminus \{$ Nullstellen von $Q\}$

Bsp.:

$$f(z) = \frac{1}{z-a}$$
$$f'(z) = \frac{1}{(z-a)^2}$$

3.1 Konvergente Potenzreihen

Potenzreihe um $a \in \mathbb{C}$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n \quad a_n \in \mathbb{C}$$
$$= a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \cdots$$

Aus der Analysis:
Es gibt einen "Konvergenzradius" $0 \leq R \leq \infty$ so, dass die Riehe konvergiert absolut für $|z-a| \leq R$ und divergiert für $|z-a| > R$

Bsp.:

$$1 + z + z^2 + z^3 + \cdots = \frac{1}{1-z}, |z| < 1 = R$$

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

Konvergente Potenzreihen (d.h. Potenzreihen mit Konvergenzradius $R > 0$) definieren analytische Funktionen

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

auf Ω = Konvergenzkreisscheibe = $\{z \in \mathbb{C} : |z-a| < R\}$ und es gilt

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n (z-a)^{n-1}$$

Bsp.7:

Exponentialfunktion $\lambda \in \mathbb{C}$

$$f(z) = e^{\lambda z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda z)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!}(z-0)^n, R = \infty, \Omega = \mathbb{C}$$

$$\begin{aligned} f'(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} n z^{n-1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} n z^{n-1} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^{m+1}}{m!} n z^m \\ &= \lambda e^{\lambda z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin(z) &\underset{\text{Def.}}{=} \frac{e^{\imath z} - e^{-\imath z}}{2\imath} \qquad (z \in \mathbb{C}) \\
&= z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots \\
\sin(z) &\underset{\text{Def.}}{=} \frac{e^{\imath z} + e^{-\imath z}}{2} \qquad (z \in \mathbb{C}) \\
&= 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots \\
\sin'(z) &= (z)' - \left(\frac{z^3}{3!}\right)' + \left(\frac{z^5}{5!}\right)' - \cdots = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots = \cos(z) \\
\cos'(z) &= -\sin(z)
\end{aligned}$$

3.2 Cauchy-Riemann Differenzialgleichungen

Eine Funktion $\mathbb{C} \supset \Omega \to \mathbb{C}$ kann aufgefasst werden als eine Abbildung

$$\begin{aligned}
&\mathbb{R}^2 \supset \Omega \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y)) \\
&f(x + \imath y) = u(x, y) + \imath v(x, y); x, y \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Bsp.:

$$\begin{aligned}
&f(z) = e^z \\
&f(x + \imath y) = e^{x + \imath y} = e^x \cos y + \imath e^z \sin y \\
&u(x, y) = e^x \cos y \\
&v(x, y) e^x \sin y
\end{aligned}$$

3.2.1 Partielle Ableitung einer reellen oder komplexwertigen Funktion von zwei reellen Variablen

$$\begin{aligned}
u_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\mathbb{R} \ni \varepsilon \to 0} \frac{u(x + \varepsilon, y) - u(x, y)}{\varepsilon} \\
u_x &= \frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{\mathbb{R} \ni \varepsilon \to 0} \frac{u(x, y + \varepsilon) - u(x, y)}{\varepsilon}
\end{aligned}$$

Beziehung zwischen $f'(z)$ und u_x, u_y, v_x, v_y. f sei analytisch.

$$
\begin{aligned}
f'(z) &= \lim_{\mathbb{C}\ni h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h} \\
&= \lim_{\mathbb{R}\ni \varepsilon\to 0} \frac{f(z+\varepsilon)-f(z)}{\varepsilon} \\
&= \lim_{\mathbb{R}\ni \varepsilon\to 0} \frac{f(z+\imath\varepsilon)-f(z)}{\imath\varepsilon} \\
&\underset{\text{einerseits}}{=} \lim_{\mathbb{R}\ni \varepsilon\to 0} \frac{f(x+\varepsilon+\imath y)-f(x+\imath y)}{\varepsilon} = f_x(x+\imath y) \\
&\qquad = u_x(x,y) + \imath v_x(x,y) \\
&\underset{\text{anderseits}}{=} \lim_{\mathbb{R}\ni \varepsilon\to 0} \frac{f(x+\imath(y+\varepsilon))-f(x+\imath y)}{\imath\varepsilon} = \frac{1}{\imath} f_y(x+\imath y) \\
&\qquad = \frac{1}{\imath}(u_y + \imath v_y) \\
&\qquad = v_y - \imath u_y
\end{aligned}
$$

f analytisch $\implies u_x = v_y, u_y = -v_x$

Satz:

$f(x+\imath y) = u(x,y) + \imath v(x,y)$ ist genau analytisch für $(x,y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$ wenn u_x, u_y, v_x, v_y definiert und stetig auf Ω sind und die Cauchy-Riemann Differentialgleichungen $u_x = v_y, u_y = -v_x$ auf Ω erfült sind.

Bsp.:

$$f(x+\imath y) = (x+\imath y)^2 = \underbrace{x^2 - y^2}_{u} + \underbrace{2\imath xy}_{v}$$

$u_x = 2x = v_y$ und $u_y = -2y = -v_x$

Bem.:

analytisch = holomorph

Bew.:

Noch zu zeigen: Aus den CR-Gleichungen von u, v folgt Analytizität von f.
Erinnerung aus der Analysis:
$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar

$$F(x + \Delta x, y + \Delta y) =$$

$$F(x, y) + \underbrace{F'(x, y)}_{\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} + o\left(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}\right)$$

$$(\Delta x, \Delta y) \to 0$$

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix}$$

Falls u, v die Cauchy-Riemann-Gleichungen erfüllen

$$F' = \begin{pmatrix} u_x & -v_x \\ v_x & u_x \end{pmatrix}$$

$$F'(x, y) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x h_1 - v_x h_2 \\ v_x h_1 + u_x h_2 \end{pmatrix}$$

$$f(z + h) = f(z) + (u_x h_1 - v_x h_2) + \imath(v_x h_1 + u_x h_2) + o(|h|)$$

$$= f(z) + \underbrace{(u_x + \imath v_x)}_{f_x(z)} \underbrace{(h_1 + \imath h_2)}_{h} + o(|h|)$$

$$\frac{f(z + h) - f(z)}{h} = f_x(z) + \frac{o(|h|)}{h}$$

Die komplexe Ableitung existiert und $f'(z) = f_x(z)$ ■

Bem.:

CR Gliechungen $\iff f_x - \imath f_y = 0$. Falls f analytisch ist gilt also $f'(z) = f_x(z) = \imath f_y(z)$

3.2.2 Der Logarithmus

Erinnerung: $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0} = (0, \infty)$ invertierbar: es existiert eine inedeutige Funktion $\log : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ (auch $\ln$) so, dass

$$\begin{aligned} e^{\log x} &= x \forall x > 0 \\ \log e^x &= x \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$\log z$ für $z \in \mathbb{C}$?

$$e^{\log z} = z$$

z sei gegeben. Suche $\log z = a + \imath b$, $a, b \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} e^a e^{\imath b} &= z \\ |e^a| &= |z| \\ e^{\imath b} &= \frac{z}{|z|} \end{aligned}$$

(a) keine Lösung wenn $z = 0$; $\log 0$ nicht definiert

(b) $z \neq 0$: $a = \log |z|$. b ist nicht eindeutig bestimmt

$$\begin{aligned} z &= re^{\imath\varphi} \\ b &= \varphi + 2\pi k \quad kin\mathbb{Z} \\ &= \arg z + 2\pi k \\ \text{Konvention: } &-\pi \leq \arg z < \pi \\ \text{Lösungen: } &\log z = \log |z| + \imath \arg z + 2\pi\imath k \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Def.: Hauptwert des Logarithmus:

$$\mathrm{Log}: \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0} \to \mathbb{C}$$
$$-\pi < \arg z < \pi$$
$$z \mapsto \mathrm{Log}\, z = \log z + \imath \arg z$$

Ableitung von $\mathrm{Log}\, z$

$$(e^{\mathrm{Log}\, z})' = z', z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$$
$$\underbrace{e^{\mathrm{Log}\, z}}_{z} \mathrm{Log}'\, z = 1$$
$$\mathrm{Log}'\, z = \frac{1}{z}$$

n-te Wurzel

Potenz: $z \mapsto z^n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$
Hauptwert der n-te Wurzel:

$$\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0} \to \mathbb{C}$$
$$z \mapsto z^{\frac{1}{n}} := e^{\frac{1}{n} \mathrm{Log}\, z}$$
$$re^{\imath\varphi} \mapsto e^{\frac{1}{n} \mathrm{Log}\, re^{\imath\varphi}} = e^{\frac{1}{n}(\log r + \imath\varphi)} = r^{\frac{1}{n}} e^{\frac{\varphi}{n}}$$

Allgemeiner für $a \in \mathbb{C}$

$$z^a := e^{a \,\mathrm{Log}\, z}$$

für $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$. Kettenregel:

$$(z^a)' = \frac{a}{z} e^{a\, \mathrm{Log}\, z} = az^{a-1}$$

Analysis: Satz der inversen Funktionen

$$F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \quad (n = 2 \text{ für uns) stetig differenzierbar}$$

Def.:
note = Ableitung (Tangentialabbildung) , index = Ableitung Tangentialabbildung , indexformat = 1!(2) 2!(1)

$$F'(x), x = (x_1, \dots, x_n)$$

lineare Abbildung

$$F(x+h) = F(x) = F'(x) \cdot h + o(|h|) \quad h \to 0$$

Satz: Satz der inverse Funktion:
Wenn $F'(x_0)$ invertierbar ist, dann gibt es eine Umgebung U von x_0 so, dass $F : U \to F(U) = V$ invertierbar ist. Die inverse Abbildung $F^{-1} : V \to U$ ist stetig differenzierbar und

$$(F^{-1})'(F(x)) = (F'(x))^{-1}$$

$f(x+iy) = u(x,y) + \imath v(x,y)$ analytisch:

$$F' = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & x_y \end{pmatrix}$$

hat die Form

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

$$(F')^{-1} = \frac{1}{a^2+b^2} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

hat dieselbe Form.
$\implies$ Sei $f : \Omega \to \mathbb{C}$ analytisch , $z_0 \in \Omega$, $f'(z_0) \neq 0$. Dann gibt es eine Umgebung U von z_0 in Ω, sodass $f : U \to f(U) =: V$ invertierbar ist. Die inverse

Funktion $f^{-1}: V \to U$ ist analytisch mit Ableitung $(f^{-1})'(f(z)) = \frac{1}{f'(z)}$.

Bsp.:

$$f = \exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z_0 = 0$$
$$f(z) = e^z$$
$$f'(z_0) = 1$$
$$U = \{z \in \mathbb{C} | -\pi < \Im z < \pi\}$$
$$f(U) = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$$
$$f^{-1}: V \to U \text{ ist } \mathrm{Log}$$
$$\mathrm{Log}' e^z = \frac{1}{e^z}$$

Tangentialabbildung, Winkeltreue

Betrachte Bilder von Kurven in $\mathbb{C}$. Parameterdarstellung:

$$\gamma : t \mapsto z(t), a \leq t \leq b$$

(z.B. Kreis: $t \mapsto re^{\imath t}, -\pi \leq t \leq \pi$)
Bild vonγ durch f analytisch hat Parameter-Darstellung

$$t \mapsto f(z(t))$$

Kettenregel $[a, b] \xrightarrow{z} \mathbb{C} \xrightarrow{f} \mathbb{C}$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(z(t)) = f'(z(t))\dot{z}(t) \quad \dot{z}(t) = \frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t}$$

Tangentialvektor (Geschwindigkeitsvekor)

Bew.:

$$
\begin{aligned}
&z(t+\Delta t) = z(t) + \Delta z \quad \Delta z = \dot{z}(t) + o(\Delta t) \quad \Delta t \to 0\\
&f(z+h) = f(z) + f'(z)h + o(|h|)\\
&f(z(t+\Delta t) = f(z(t) + \Delta z)\\
&\qquad\qquad\quad = f(z(t)) + f'(z(t)\Delta z + o(|\Delta z|)\\
&\qquad\qquad\quad = f(z(t)) + f'(z(t)\dot{z}(t)\Delta t\\
&\qquad\qquad\quad + \underbrace{f'(z(t)o(\Delta t) + o(|\dot{z}(t)\Delta t|)}_{o(\Delta t)}\\
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(z(t)) = f'(z(t))\dot{z}(t)
\end{aligned}
$$

Der Tangentialvektor $\dot{w}(t)$ der Bildkurve $t \mapsto w(t) = f(z(t))$ ist

$$\dot{w}(t) = f'(z(t))\dot{z}(t)$$

$\implies$ Haben zwei Kurven durch z_0 denselben Tangentialvektor in z_0 dann haben ihre Bilder denselben Tangentialvektor in $f(z_0)$, $w = f'(z_0)v$
Die **Tangentialabbildung** in z_0

$$v \mapsto f'(z_0)v$$

ist für analytische Funktionen mit $f'(z_0) \neq 0$ eine Drehstreckung: wenn $f'(z_0) = re^{\imath\varphi}$, dann ist sie die zusammensetzung der Drehung $v \mapsto e^{\imath\varphi}v$ mit Wikel φ und Streckung $v \mapsto rv$ mit Streckfaktor $r = |f'(z_0)|$
Drehstreckungen sind **winkeltreu**. $\angle(v_1, v_2) = \Phi$ dann $\angle(f'(z_0)v_1, f'(z_0)v_2) = \Phi$. Man sagt, das analytische Funktionen mit $f' \neq 0$ **winkeltreu** oder **konform** sind; Winkel awischen Tangentialvektoren sind erhalten.

Exponentialfunktion $z \mapsto e^z$
Bild von $\gamma : t \mapsto at$, $a = a_1 + \imath a_2$, $\varphi \frac{a_2}{a_1}$, $a_1, a_2 \neq 0$.

$$t \mapsto w(t) = e^{at} = e^{a_1 t}(\cos a_2 t + \imath \sin a_2 t)$$

Zweite Folgerung aus $\dot{w}(t) = f'(z(t))\dot{z}(t)$
Sei f analytisch auf einer zusammenhängende[2] offene Menge Ω und $f'(z) = 0$ für alle $z \in \Omega$. Dann gilt:
f ist konstant.
Zu zeigen: $f(z_1) = f(z_2)$ für alle $z_1, z)2 \in \Omega$. Sei $\gamma : t \mapsto z(t), t \in [a, b]$ sodass $z(a) = z_1, z(b) = z_2$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(z(t)) = f'(z(t))\dot{z}(t) = 0$$
$$f(z_1) - f(z_2) = \int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(z(t))\,\mathrm{d}t = 0$$

Bild von $\gamma : t \mapsto at, a = a1 + \imath a_2$

$$t \mapsto w(t) = e^{at} = e^{a_1 t}(\cos(a_2 t) + \imath \sin(a_2 t))$$

Folge:
Zweite Folgerung aus $\dot{w}(t) = f'(z(t))\dot{z}(t)$: f analytisch auf einer zusammenhängenden[3] offenen Menge Ω.
$f'(z) = 0$ für alle $z \in \Omega$

[2] je zwei Punkte in Ω können durch ein Kurve in Ω verbunden werden.

Dann gilt: f ist konstant

Bew.:

Zu zeigen: $f(z_1) = f(z_2)$ für alle $z_1, z_2 \in \Omega$
Sei $\gamma : t \mapsto z(t), t \in [a, b]$ so dass

$$z(a) = z_1$$

$$z(b) = z_2$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(z(t)) = f'(z(t)) \cdot \dot{z}(t) = 0$$

$$f(z_2) - f(z_1) = \int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(z(t))\,\mathrm{d}t = 0 \quad a \in D$$

3.3 Möbiustransformationen

3.3.1 Inversion

$I : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*, z \mapsto \frac{1}{z}$ invertierbare analytische Funktion
$I^{-1} = I$

Beh.:

I bildet Kreise in $\mathbb{C}^*$ nach Kreise in $\mathbb{C}^*$ ab.

Bew.:

Sei K ein Kreis mit Mittelpunkt $a \in \mathbb{C}$ Radius $R > 0$. $K = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| = R\}$
K liegt in $\mathbb{C}^*$ wenn $|a| \neq R$

$$I(K) = \left\{ w \in \mathbb{C} \middle| \left| \frac{1}{w} - a \right| = R \right\} \qquad (*) \{?\}$$

$$\implies |1 - wa| = R\,|w|$$

$|w - c| = \dfrac{R}{\left||a|^2 - R^2\right|}$ Kreis mit Mittelpunkt c und Radius $\dfrac{R}{\left||a|^2 - R^2\right|}$

$$\left| w - \frac{1}{a} \right| = \frac{R}{|a|}\,|w| \qquad a \neq 0$$

Bew.:

Direkter Beweis, dass $*$ einen Kreis beschreibt.
Verwende: $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$, Quadratisch Ergänzen.

$$(1 - wa)(1 - \overline{wa}) = R^2 w\overline{w}$$
$$(|a|^2 - R^2)w\overline{w} - aw - \overline{aw} + 1 = 0$$
$$(|a|^2 - R^2)(w\overline{w} - cw - \overline{cw} + \frac{1}{|a|^2 - R^2} = 0 \quad c = \frac{a}{|a|^2 - R^2}$$
$$(w - c)(\overline{w} - \overline{c}) - |c|^2 + \frac{1}{|a|^2 - R^2} = 0$$
$$|w - a|^2 = \frac{R^2}{(|a|^2 - R^2)^2}$$

3.3.2 Allgemeine Möbius-Transformtionen

Def.: Möbiustransformation:
Eine **Möbiustransformation** ist eine Funktion der Form

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, ad - bc \neq 0$$

(wenn $ad - bc = 0$ ist $f = \text{const.}$, sofern definiert)

$$
\begin{aligned}
f_1(z) &= \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1} \\
f_2(z) &= \frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2} \\
f_1 \circ f_2(z) &= f_1(f_2(z)) \\
&= \frac{a_1 \frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2} + b_1}{c_1 \frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2} + d_1} \cdot \frac{c_2 z + d_2}{c_2 z + d_2} \\
&= \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) z + a_1 b_2 + b_1 d_2}{(c_1 a_2 + d_1 c_2) z + c_1 b_2 + d_1 d_2} = \frac{az + b}{cz + d}
\end{aligned}
$$

Wobei

$$
\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}
$$

$$
ad - bc = \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \det(\ldots)\det(\ldots) = (a_1 d_1 - b_1 c_1)(a_2 d_2 - b_2 c_2) \neq 0
$$

Möbiustransformationen sind invertierbar:

$$
f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \iff f^{-1}(z) \frac{dz - b}{-cz + a}
$$

Bem.:

Die Matrizen $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix}$ entsprechen der gleichen Möbiustransformation

$$
z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}
$$

für alle $\lambda \neq 0$

Analog: Kreisscheibe $|z-a| \leq R$ wird nach der Kreisscheibe $|w-c| \leq \frac{R}{\left||a|^2-R^2\right|}$ abgebildet, falls $R < |a|$, oder nach den äusseren Gebeit $|w-c| \leq \frac{R}{\left||a|^2-R^2\right|}$, falls $R > |a|$
Falls $R = |a|\,, a \neq 0\; (**) : aw + \overline{aw} = 1$
$\Longrightarrow$ Gleichung einer Gerade. Jede Gerade, die nicht durch 0 geht, hat diese Form.
Zusammenfassend: I bildet Kreise und Geraden nach Kreise und Geraden ab. (Übung: Geraden durch 0 werden nach Geraden durch 0 abgebildet)
Es ist bequem, die erweiterte Komplexe Ebene $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ einzuführen und $\frac{1}{0} = \infty$ und $\frac{1}{\infty} = 0$ zu definieren. Dann ist $I : \overline{\mathbb{C}} \to C, I^{-1} = I$, die verallgemeinerte Kreise nach verallgemeinerten Kreisen abgebildet werden.
Verallgemeinerte Kreise: Kreise oder "Kreise durch ∞" = Geraden.
$\overline{\mathbb{C}}$ = Riemannsche Zahlenkugel.

Bsp.:

1) $id(z) = z$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \frac{1z+0}{0z+1} = z$$

Bem.:

Möbiustransformationen bilden eine Gruppe bezüglich $\circ$ $f \circ g(z) = f(g(z))$

2) $t_b(z) = z + b, b \in \mathbb{C}$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \frac{1z+b}{0z+1} = z + b$$

3) $S_a(z) = az, a \in \mathbb{C}, a \neq 0$ Drehstreckung mit Faktor a

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4) $I(z) = \frac{1}{z}$ Inversion

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Satz:
Jede Möbiustransformation lässt sich schreiben als Zusammensetzung von Transformationen der Form 1) - 4)

Bew.:

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, ad - bc \neq 0$$

Sei zuerst $c \neq 0$

$$z \overset{S_c}{\mapsto} cz \overset{t_d}{\mapsto} cz + d \overset{I}{\mapsto} \frac{1}{cz+d}$$
$$\overset{t_\lambda}{\mapsto} \frac{1}{cz+d} + \lambda = \frac{\lambda cz + \lambda + \lambda d}{cz+d}$$
$$\overset{S_\mu}{\mapsto} \frac{\mu\lambda cz + \mu(1+\lambda d)}{cz+d}$$

μ, λ wählen, so dass $\mu\lambda c = a$, $\mu(1+\lambda d) = b$

$$\Longrightarrow \quad \mu + \frac{a}{c}d = b$$
$$\Longleftrightarrow \quad \mu = b - \frac{a}{c}d = -\frac{ad-bc}{c}$$
$$\lambda = \frac{a}{c\mu}$$

Wenn $c = 0$: $f(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d} = t_{\frac{b}{d}} \circ S_{\frac{a}{d}}(z)$

Folge:

Möbiustransformationen bilden verallgemeinerte Kreise nach verallgemeinerten Kreisen ab. Dasselbe gilt für verallgemeinerte Kreisscheiben.

Bew.:

Das gilt offensichtlich für S_a, t_d und auch für I.

Wir erweitern die Definition einer MT auf $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, z \neq -\frac{d}{c}$$

$$f\left(-\frac{d}{c}\right) := \infty, f(\infty) := \lim_{z\to\infty} \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} \text{Wenn } c = 0 : f(z) = \frac{az+b}{d}, z \in \mathbb{C}$$

$$f(\infty) := \infty$$

$$\implies f : \overline{\mathbb{C}} \mapsto \overline{\mathbb{C}} \text{ bijektiv}$$

Seien $z_1, z_2, z_3 \in \overline{\mathbb{C}}$ verschiedene Punkte. Dann gibt es eine eindeutige Möbiustransformation f mit $f(z_1) = 0, f(z_2) = \infty, f(z_3) = 1$

Bew.:

für $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$
Eindeutigkeit:

Wenn f_1, f_2 diese Eigenschaft haben, dann
$f_1 \circ f_2^{-1}(0) = f_1(z_1) = 0$
$f_1 \circ f_2^{-1}(1) = 1$
$f_1 \circ f_2^{-1}(\infty) = \infty$
D.h. $h := f_1 \circ f_2^{-1}$ bildet $0, \infty, 1$ nach $0, \infty, 1$

$$h(0) = 0 \implies \frac{b}{d} = 0$$
$$h(\infty) = \infty \implies c = 0$$
$$h(1) = 1 \implies \frac{ad}{d} + \frac{b}{d} = \frac{a}{d} \cdot 1 = 1$$
$$\implies a = a, b = c = 0$$
$$h(z) = \frac{az}{a} = z \quad h = id$$
$$f_1 \circ f_2^{-1} = id \iff f_1 = f_2$$

Existenz: Doppelverhältnis

Def.: Doppelverhältnis:

Das **Doppelverhältnis** (cross ratio) von vier verschiedenen komplexen Zahlen z_0, z_1, z_2, z_3 ist die Zahl

$$(z_0, z_1, z_2, z_3) = \frac{(z_0 - z_1)(z_3 - \dots}{(z_0 - z_2)(z_3 - \dots}$$

Beh.:

Die gesuchte Möbiustransformation ist

$$f(z) = (z_0, z_1, z_2, z_3) = \frac{(z - \dots \; - z_2)}{(z - \dots \; - z_1)} = \frac{az + b}{cz + d}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_3 - z_2 & -z_1(z_3 \dots \\ z_3 - z_1 & -z_2(z_3 \dots \end{pmatrix}$$

$\det \neq 0$, wenn z_1, z_2, z_3 verschieden sind.

$$f(z_1) = 0$$
$$f(z_2) = \infty$$
$$f(z_3) = 1$$

$\blacksquare$

Folge:

1) sind $z_1, z_2, z_3 \in \overline{\mathbb{C}}$ verschieden, $w_1, w_2, w_3 \in \overline{\mathbb{C}}$ verschieden, dann gibt es eine eindeutige MT f welche z_1 nach w_1, z_2 nach w_2, z_3 nach w_3 abbildet.

Bew.:

Sei $f_1 : z_1, z_2, z_3 \mapsto 0, \infty, 1$; $f_2 : w_1, w_2, w_3 \mapsto 0, \infty, 1$. Setze $f = f_2^{-1} \circ f_1$. Eindeutigkeit wie oben.

2) Gegeben zwei (verallgemeinerte) Kreise K_1, K_2, dann gibt es eine MT f die K_1 nach K_2 abbildet (nicht eindeutig)

Bew.:

Wähle je 3 Punkte auf K_1, K_2, verwende 1

Dasselbe gilt für verallgemeinerte Kreisscheiben.

3) Sei g eine MT. Dann gilt für alle z_1, z_2, z_3 verschieden:

$$(z, z_1, z_2, z_3) = (g(z), g(z_1), g(z_2), g(z_3))$$

Bew.:

$z \mapsto (g(z), g(z_1), g(z_2), g(z_3))$ bildet z_1 nach 0, z_2 nach ∞, z_3 nach 1 ab. $z \mapsto (z, z_1, z_2, z_3)$ auch. Also sind diese Abbildungen wegen der Eindeutigkeit gleich.

3.3.3 Abbildungen von Gebieten

Def.: Gebiet:
Ein **Gebiet** in $\mathbb{C}$ ist eine zusammenhängende offene Teilmenge von $\mathbb{C}$

Def.: einfach zusammenhängend:
Ein Gebiet Ω heisst **einfach zusammenhängend**, falls jede geschlossene Kurve γ in Ω zu einem Punkt zusammenziehbar ist, d.h. Es gibt eine stetige Abbildung $(t,s) \mapsto z(t,s) \in \Omega, 0 \leq t,s \leq 1$ mit $z(1,s) = z(0,s), z(t,0)$ =const. , $t \mapsto z(t,1)$ Parameterdarstellung von γ.

Bsp.:
BILD

Riemannscher Abbildungsatz

Zu jedem einfach zusammenhängenden Gebiet Ω mit $\Omega \neq \varnothing, \Omega \neq \mathbb{C}$ gibt es eine analytische bijektive Abbildung $f : \Omega \to D$ mit analytischer Inversen $f^{-1} : D \to \Omega$ auf die Offene Einheitskreisscheibe $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$.
Es folgt, dass für Paare Ω_1, Ω_2 solcher Gebiete ein solches $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ exis-

Satz: Riemannscher Abbildungssatz:
$\Omega \subset \mathbb{C}$ einfach zusammenhängendes Gebiet ($\Omega \neq \varnothing, \Omega \neq \mathbb{C}$) dann gibt es eine konforme Abbildung $f : \Omega \to D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$

Def.: konform:

$f : \Omega_1 \to \Omega_2$ heisst **konform**, falls f analytisch, bijektiv mit $f'(z) \neq 0$ für alle $z \in \Omega_1$. Dann ist f^{-1} auch konform.

Bsp.1:

Ω = Obere Halbebene = $\{z \in \mathbb{C} \mid \Im z > 0\}$.
Was ist $f : \Omega \to D$?
Suche in den Möbiustransformationen.
f MT die

- $\infty \mapsto 1$
- $0 \mapsto -1$
- $1 \mapsto -\imath$

abbildet.

$$g : \begin{cases} 1 \mapsto \infty \\ -1 \mapsto 0 \\ -\imath \mapsto 1 \end{cases}$$

$$g(w) = c \cdot \frac{w+1}{w-1}$$

$$g(-\imath) = c \cdot \frac{-\imath+1}{-\imath-1} = \frac{c(-\imath+1)^2}{(-\imath-1)(-\imath+1)} = \frac{-2\imath}{-2}c = \imath c = 1$$

$$c = -\imath$$

$$g(w) = -\imath\frac{w+1}{w-1}$$

$$g(0) = \imath \in \Omega$$

$$f = g^{-1}$$

$$w = f(z) \iff z = g(w)$$

$$f(z) = \frac{z-\imath}{z+\imath}$$

Bsp.2:

Sektor: $\Omega = \{z \mid 0 < \arg z < \alpha\}$

$$z \mapsto z^{\frac{\pi}{\alpha}} := e^{\frac{\pi}{\alpha}\operatorname{Log} z}$$

$$re^{\imath\varphi} \mapsto r^{\frac{\pi}{\imath}} e^{\imath\frac{\pi}{\alpha}\varphi}$$

$$\begin{matrix} r > 0 \\ 0 < \varphi < \alpha \end{matrix} \iff 0 < \frac{\pi}{\alpha}\varphi < \pi$$

Die konforme Abbildung ist

$$f(z) = \frac{z^{\pi\alpha} - \imath}{z^{\pi\alpha} + \imath}$$

Bsp.3:

Streifen $\Omega = \{z \mid -\imath a \leq \Im z \leq \imath a\}$

$$w = e^{\frac{\pi z}{a}} = e^{\frac{\pi x}{a} + \imath\pi\frac{y}{a}} = e^{\frac{\pi x}{a}} e^{\imath\pi\frac{y}{a}}$$

$$-\pi < \frac{\pi y}{a} < \pi$$

konforme Abbildung

$$w = \frac{\imath e^{\frac{\pi z}{a}} - \imath}{\imath e^{\frac{\pi z}{a} + \imath}} = \frac{e^{\pi z} a - 1}{e^{\frac{\pi z}{a}} + 1}$$

Kapitel 4

Integration in der komplexen Analysis

Erinnerung $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ stetig.

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{\varepsilon \to 0} \sum_{i=0}^{N-1} f(\tau_i)\Delta t_i \quad t_i = t_{i+1} - t_i$$

Zu jedem ε wird eine Zerlegung des Intervalls $[a, b]$ gewählt

$$a = t_0 \leq t_1 < \cdots < t_N = b$$

mit $|\Delta t_i| < \varepsilon$, und Auswertungspunkte τ_i mit $t_i \leq \tau_i \leq t_{i+1}$
Mit dieser Definition gilt:

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \Re(f(t))\,\mathrm{d}t + \imath \int_a^b \Im(f(t))\,\mathrm{d}t$$

Sei jetzt $f : \mathbb{C} \supset \Omega \to \mathbb{C}$ stetig, γ eine Kurve in Ω mit einer Orientierung (=Durchlaufsinn)

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{i=0}^{N-1} f(\zeta_i)\Delta z_i, \quad \delta z_i = z_{i+1} - z_i$$

für γ eine Kurve von p nach q, wählen wir zu jedem ε eine Zerlegung also eine Folge $p = z_0, z_1, \ldots, z_N = q$ von Punkten auf γ mit $|z_{i+1} - z_i| < \varepsilon$ für alle i, sowie Auswertungspunkte ζ_i auf γ zwischen z_i und z_{i+1}

Sei $t \mapsto z(t)$ eine Parameterdarstellung von $\gamma, a \le t \le b, z(a) = p, z(b) = q$. Gegeben eine Zerlegung $a = t_0 < \cdots < t_N = b$ von $[a, b]$ erhalten wir eine Zerlegung $p = z(t_0), \ldots, z(t_N) = q$ von γ. Auswertungspunkte τ_i zwischen t_i, t_{i+1} $rightsquigarrow$ Auswertungspunkte $\zeta_i = z(\tau_i)$ zwischen $z(t_i), z(t_N)$

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{i=0}^{N-1} f(z(\tau_i))\underbrace{\frac{z(t_{i+1} - z(t_i)}{t_{i+1} \qquad {\scriptstyle =\dot z(\tau_i)}} - t_i}\,\Delta t_i \quad \Delta t_i = t_{i+1} - t_i$$

$$\overset{\text{MWS}}{=} \int_a^b f(z(t))\dot z(t)\,\mathrm{d}t$$

($t \mapsto z(t)$ stetig differenzierbar)
Resultat: Sei γ eine Kurve von p nach q in Ω mit stetig differenzierbaren Parameterdarstellung $t \mapsto z(t), a \le t \le b, z(a) = p, z(b) = q$. Dann gilt

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b f(z(t))\dot z(t)\,\mathrm{d}t$$

(Merkhilfe: $\mathrm{d}z = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t$)

Bsp.4:

γ Strecke von 0 nach $a \in \mathbb{C}$ von $f(z) = z^n$.
Parameterdarstellung von γ: $t \mapsto \underbrace{ta}_{z(t)}\ 0 \leq t \leq 1$

$$\begin{aligned}\int_\gamma z^n \,\mathrm{d}z &= \int_0^1 z(t)^n \dot{z}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 (ta)^n a \,\mathrm{d}t \\ &= a^{n+1} \int_0^1 t^n \,\mathrm{d}t \\ &= \frac{a^{n+1}}{n+1}\end{aligned}$$

Bsp.5:

γ ein Kreis mit Radius r Mittelpunkt 0 von r nach r in Gegenuhrzeigersinn. Parameterdarstellung:

$$t \mapsto z(t) = re^{\imath t} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$\int_\gamma z^n \,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} (re^{\imath t})^n \imath r e^{\imath t}\,\mathrm{d}t$$

$$\dot{z}(t) = \imath r e^{\imath t} \qquad\qquad = r^{n+1}\imath \int_0^{2\pi} e^{\imath t(n+1)}\,\mathrm{d}t$$

$$= \begin{cases} 0 & n \neq -1 \\ 2\pi\imath & n = -1 \end{cases}$$

Bsp.6:

$$\begin{aligned}\int_\gamma \overline{z}^n \, \mathrm{d}z &= \int_0^{2\pi} (re^{-\imath t})^n \imath r e^{-\imath t} \, \mathrm{d}t \\ &= r^{n+1}\imath \int_0^{2\pi} e^{\imath t(1-n)} \, \mathrm{d}t \\ &= \begin{cases} 0 & n \neq 1 \\ 2\pi\imath r^2 & n = 1 \end{cases}\end{aligned}$$

(hängt nicht trivial von r ab)

Bsp.7:

γ = Intervall $[a, b]$ von a nach b, f stetig $\Omega \to \mathbb{C}$
Parameterdarstellung $t \mapsto z(t) = t \; a \leq t \leq b$, $\dot{z}(t) = 1$

$$\int_\gamma f(z) \, \mathrm{d}z = \int_a^b f(t) \cdot 1 \, \mathrm{d}t$$

Das Riemmanintegral der reellen Analysis ist also der Spezialfall wo γ eine Strecke auf der reellen Achse ist.

4.1 Eigenschaften des Linienintegrals $\int_\gamma$

1.
$$\int_\gamma (\lambda f(z) + \mu g(z)) \, \mathrm{d}z = \lambda \int_\gamma f(z) \, \mathrm{d}z + \mu \int_\gamma g(z) \, \mathrm{d}z; \lambda, \mu \in \mathbb{C}$$

2.
$$int_\gamma f(z) \, \mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f(z) \, \mathrm{d}z + \int_{\gamma_2} f(z) \, \mathrm{d}z$$

γ die Vereinigung von γ_1 und γ_2 ist, wobei der Endpunkt von γ_1 = Anfangspunkt von γ_2

Eine Kurve $t \mapsto z(t)$ heisst **geschlossen** falls $z(b) = z(a)$. Aus 2 folgt: Ist γ geschlossen, so ist $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$ unabhängig von der Wahl des Anfangpunktes.

Bew.:

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z &\underset{2}{=} \int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z \\ &= \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z \\ &= \int_{\tilde{\gamma}} f(z)\,\mathrm{d}z\end{aligned}$$

3.

$$\int_{-\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = -\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$$

wobei $-\gamma$ die Kurve γ mit entgegengesetztem Durchlaufsinn bezeichnet.

Bsp.:

$$\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Bew.:

Wenn $t \mapsto z(t)$ eine Parameterdarstellung von γ ist mit $a \leq t \leq b$ dann $t \mapsto z(-t)$ $-b \leq t \leq -a$ ist eine Parameterdarstellung von $-\gamma$.

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(z(-t)) = -\dot{z}(-t)\\
&\int_{-\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{-b}^{-a} f(z(-t))(-\dot{z}(t))\,\mathrm{d}z\\
&\qquad = \int_b^a f(z(s))\dot{z}(s)\,\mathrm{d}s\\
&\qquad = -\int_a^b f(z(t))\dot{z}(t)\,\mathrm{d}t\\
&\qquad = -\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z
\end{aligned}$$

4.

$$\left|\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leq \max_{z\in\gamma}|f(z)| \cdot \text{ Länge von } \gamma$$

Dreiecksungleichung $|a+b| \leq |a|+|b|$, $|a_1 + \cdots + a_N| \leq |a_1|+\cdots+|a_N|$

$$\left|\sum_{i=0}^{N-1} f(\zeta_i)\Delta z_i\right| \leq \sum_{i=0}^{N-1} \underbrace{|f(\zeta_i)|}_{\leq \max_{z\in\gamma}|f(z)|} |\Delta z_i| \leq \max_{z\in\gamma}|f(z)| \sum_{i=0}^{N-1} \underbrace{|\Delta z_i|}_{\text{Länge des Polygonzugs } z_0,\ldots,z_N}$$

Im Grenzwert $\varepsilon \to 0$ erhalten wir die Behauptung

Def.: analytische Stammfunktion:
Sei $f : \Omega \to \mathbb{C}$ analytisch. Eine **analyische Stammfunktion** von f ist eine analytische Funktion $F : \Omega \to \mathbb{C}$ mit $F'(z) = f(z) \forall z \in \Omega$

Satz:

Wenn $f : \Omega \to \mathbb{C}$ analytisch eine Stammfunktion F hat und γ eine Kurve in Ω von p nach q ist, dann gilt

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = F(q) - F(p)$$

(Insbesondere hängt $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$ nur von der Endpunkten p und q von γ und nicht vom Verlauf von $gamma$)

Korrolar:

In diesem Fall gilt

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

für alle geschlossene Kurven γ.

Bsp.8:

$$f(z) = z^n, n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$$

$$F(z) = \frac{z^{n+1}}{n+1}$$

$\Omega = \mathbb{C}$ (oder $\mathbb{C}^*$ falls $n < 0$)

$\displaystyle\int_\gamma z^n\,\mathrm{d}z = \frac{q^{n+1}}{n+1} - \frac{p^{n+1}}{n+1}$ für alle Kurven γ von p nach q

Bsp.9:

$$f(z) = \frac{1}{z} \quad \Omega = \mathbb{C}^*$$

f hat keine Stammfunktion. Hätte f eine Stammfunktion, so wäre

$$\int_{|z|=1} \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z = 0$$

aber es gilt

$$\int_{|z|=1} \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z = 2\pi\imath$$

Bsp.10:

$$f(z) = \frac{1}{z} \text{ auf } \Omega = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^{\leq 0}$$

Der Hauptwert Log des Logarithmus ist eine Stammfunktion ($\operatorname{Log}'(z) = \frac{1}{z}$)
(Der Kreis $|z| = 1$ liegt nicht in Ω)

4.1.1 Welche Funktionen haben Stammfunktionen?

Def.: sternförmig:
Ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{C}$ heisst **sternförmig** bezüglich $a \in \Omega$ falls mit $z \in \Omega$ auch die Strecke $[a, z]$ von a nach z ebenfalls in Ω liegt.

Bsp.1:
$\Omega = \mathbb{C}$ für jeden a

Bsp.2:
$\Omega =$ Kreisscheibe, alle a

Bsp.3:
BILD

Copy Bild from Simon

Bsp.4:
$\Omega = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^{<0}$, a z.B. 1

Satz:
Sei Ω sternförmig bezüglich a. Jede analytische Funktion auf Ω besitzt eine Stammfunktion. Sie ist eindeutig bis auf eine additive Konstante.

Bew.: Beweis und Formel:

Sei $f : \Omega \to \mathbb{C}$ analytisch

$$F(z) = \int_{[a,z]} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$$

(a) F ist analytisch

Parameterdarstelung von $[a, z] : t \mapsto a + t(z-a), 0 \leq t \leq 1$

$$F(z) = \int_0^1 f(a+t(z-a))(z-a)\,\mathrm{d}t$$

Der Integrand ist (als Funktion von z) für jedes t analytisch. "Grenzwert unter dem Integral" $\implies$ komplexe Ableitung existiert.

(b)

$$\begin{aligned} F'(z) &= \lim_{h\to 0} \frac{F(z+h)-F(z)}{h} \qquad h \text{ parallel zu } z-a \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\int_{[a,z+h]} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta - \int_{[a,z]} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta\right) \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_{[z,z+h]} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{1}}{\cancel{h}} \int_0^1 f(z+th)\cdot \cancel{h}\,\mathrm{d}t \\ &= f(z) \end{aligned}$$

$t \mapsto z + th, 0 \leq t \leq 1$

Bew.: Eindeutigkeit:

Sind F_1, F_2 zwei Stammfunktionen, dann ist $(F_1 - F_2)' = 0 \iff F_1 = F_2 + c$

Bsp.:

$f(z) = \frac{1}{z}$ auf $\Omega = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^{<0}$
$F(z) = \int_{[1,z]} \frac{1}{\zeta} \,\mathrm{d}\zeta$ ist eine Stammfunktion von $\frac{1}{z}$ $(F'(z) = \frac{1}{z})$
$F(1) = 0 = \operatorname{Log} 1$

Es folgt: (Alternative Definition von Log):

$$\int_{[1,z]} \frac{1}{\zeta} \,\mathrm{d}\zeta = \operatorname{Log} z \quad z \in \Omega$$
$$= \int_0^1 \frac{1}{1 + t(z-1)} (z-1) \,\mathrm{d}t$$

Wir haben gesehen, dass:

1) Wenn f eine analytische Stammfunktion besitzt, dann $\int_\gamma f(z) \,\mathrm{d}z = 0$ für alle geschlossene Kurven in Ω

2) Ist $f : \Omega \to \mathbb{C}$ analytisch auf einem sternförmigen Gebeit Ω, dann hat f eine analytische Stammfunktion $F(z) = \int_{[a,z]} f(\zeta) \,\mathrm{d}\zeta$

$\Longrightarrow$

Satz: Satz von Cauchy für sternförmige Gebiete:

Ω sternförmig , $f : \Omega \to \mathbb{C}$ analytisch
$\implies \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$ für alle geschlossenen γ in Ω

Bem.: zu Satz von Cauchy:

Gilt allgemein für einfach zusammenhängende Gebiete Ω (alle sternförmigen Gebiete sind einfach zusammenhängend)

Bem.: zu Satz von Cauchy:

Gilt nicht für allgemeine Gebeite z.B. $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ nicht einfach zusammenhängend

$$f(z) = \frac{1}{z} \implies \int_{|z|=1} \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z = 2\pi\imath \neq 0$$

4.1.2 Anwendung

$$\Omega = \mathbb{C}, f(z) = e^{-\frac{z^2}{2}}$$

Fouriertransformierte von f:

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{z^2}{2}-\imath\omega z}\,\mathrm{d}z$$

Wir wissen

$$\hat{f}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{z^2}{2}}\,\mathrm{d}z = \sqrt{2\pi}$$

Quadratische Ergänzung

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\omega) &= = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(z+\imath\omega)^2-\frac{\omega^2}{2}} \,\mathrm{d}z \\
&= e^{-\frac{\omega}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(z+\imath\omega)^2} \,\mathrm{d}z \\
&= e^{-\frac{\omega}{2}} \lim_{L\to\infty} \int_{-L}^{L} e^{-\frac{1}{2}(z+\imath\omega)^2} \,\mathrm{d}z
\end{aligned}$$

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_4 + (-\gamma_2) + (-\gamma_3)$$

$$0 = \int_\gamma e^{-\frac{1}{2}(z+\imath\omega)^2} \,\mathrm{d}z = I_1 - I_2 - I_3 + I_4$$

$$I_j = \int_{\gamma_j} e^{-\frac{1}{2}(z+\imath\omega)^2} \,\mathrm{d}z \quad j = 1,2,3,4$$

$$I_1 = \int_{-L}^{L} e^{-\frac{1}{2}(z+\imath\omega)^2} \,\mathrm{d}z$$

$$I_2 = \int_{-L}^{L} e^{-\frac{1}{2}(t-\imath\omega+\imath\omega)^2} \,\mathrm{d}t = \int_{-L}^{L} e^{-\frac{1}{2}t^2} \,\mathrm{d}t$$

$$\gamma_2 : z(t) = -\imath\omega + t, -L \leq t \leq L$$

Zu zeigen: $I_3, I_4 \to 0$ für $L \to \infty$

$$I_4 = \int_0^1 e^{-(L-\imath\omega t)^2} \cdot (-\imath\omega) \,\mathrm{d}t = \int_0^1 \underbrace{e^{-\frac{L^2}{2}+\imath\omega L+\frac{\omega^2 t^2}{2}} (-\imath\omega)}_{|\cdot| \leq e^{-\frac{L^2}{2}} \cdot |e^{\imath\omega L t}| \cdot e^{\frac{\omega^2}{2}} \cdot |\omega|} \mathrm{d}t$$

$$\gamma_4 : z(t) = L - \imath\omega t, 0 \leq t \leq 1$$

$$|I_4| \leq e^{-\frac{L^2}{2}+\frac{\omega^2}{2}} |\omega| \overset{L\to\infty}{\to} 0$$

Analog für I_3

Es folgt: $\lim_{L\to\infty} I_1 = \lim_{L\to\infty} I_2$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(z+\imath\omega)^2} \,\mathrm{d}z = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}z^2} \,\mathrm{d}z = \sqrt{2\pi}$$

$$\hat{f}(\omega) = e^{-\frac{\omega^2}{2}} \lim_{L\to\infty} I_{1/2} = e^{-\frac{\omega^2}{2}} \sqrt{2\pi}$$

Folge: Folgerung von Cauchy:

Jede auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet analytische Funktion besitzt eine Stammfunktion, nämlich

$$F(z) = \int_\gamma f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$$

wobei γ eine beliebige Kurve von einem festen Punkt a nach z ist.

Fix

Def.: Umlaufzahl:

Sei γ eine geschlossene Kurve, $a \in \mathbb{C}$, $a \notin \gamma$.

Beh.: $$\frac{1}{2\pi\imath}\int_\gamma \frac{1}{z-a}\,\mathrm{d}z =: n(\gamma, a)$$

ist eine ganze Zahl. Sie heisst **Umlaufzahl** von γ bezüglich a.

Bew.:

Zur Vereinfachung setzen wir $a = 0$

$$n(\gamma, 0) = \frac{1}{2\pi\imath}\int_\gamma \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z$$

$\frac{1}{z}$ hat eine Stammfunktion in jedem Sektor S mit Öffnungswinkel $< 2\pi$

Ist $S \subset \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^{\leq 0}$ kann man Log nehmen, sonst ei anderer stetigen Zweig Log_S der Logarithmus, z.B. für $S = \left\{\frac{3\pi}{4} < \arg z < \frac{5\pi}{4}\right\}$:

$$\mathrm{Log}_S(re^{\imath\varphi}) = \log r + \imath\varphi, \text{ wobei } \frac{3\pi}{4} < \varphi < \frac{5\pi}{4}$$

$$\int_\gamma \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z + \cdots + \int_{\gamma_n} \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z$$

wobei jeder Teilstück γ_j von z_j nach z_{j+1} in einem solchen Sektor liegt.

$$\int_{\gamma_j} \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z = \log_{S_j} z_{j+1} - \log_{S_j} z_j = \log_{S_j} \frac{r_{j+1}}{r_j} + \imath(\underbrace{\varphi_{j+1} - \varphi_j}_{\Delta\varphi_j; |\Delta\varphi_j| < 2\pi})$$

$$\int_\gamma \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z = \cancel{\log r_2} - \cancel{\log r_1} + \imath\Delta\varphi_1 + \cancel{\log r_3} - \cancel{\log r_2} + \imath\Delta\varphi_2 + \cdots + \cancel{\log r_1} -$$

$$\implies \int_\gamma \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z = \imath\Delta\varphi = \imath n(\gamma, 0)\cdot 2\pi$$

Rechenmethode:
Wähle Halbgerade von a die γ in endlich vielen Punkten trifft.
$n(\gamma, a)$ = Anzahl Kreuzungen im positiven Sinn − Anzahl Kreuzungen im negativen Sinn

Lemma:
Der Satz von Cauchy gilt auch, wenn man annimmt, das f auf $\Omega \setminus \{a\}$ analytisch ($a \in \Omega$ fest) und stetig auf Ω ist. (Beweis siehe Blatter)

Satz: Cauchy-Integralformel:
Sei $f : \Omega \to \mathbb{C}$ auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet Ω. Dann gilt für jede geschlossene Kurve γ und $a \in \Omega, a \notin \gamma$

$$\frac{1}{2\pi\imath}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\,\mathrm{d}z = n(\gamma, a) f(a)$$

Bsp.:

$$\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z}\,\mathrm{d}z = 2\pi\imath \cdot 1 \cdot e^0 = 2\pi\imath$$

Bew.:

$$\frac{1}{2\pi\imath}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi\imath}\int_\gamma \frac{f(z)-f(a)}{z-a}\,\mathrm{d}z + \underbrace{\frac{1}{2\pi\imath}\int_\gamma \frac{f(a)}{z-a}\,\mathrm{d}z}_{f(a)\cdot 2\pi\imath n(\gamma,a)}$$

Die Funktion

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(a)}{z-a} & z \neq a \\ f'(a) & z = a \end{cases}$$

ist stetig auf Ω und analytisch auf $\Omega \setminus \{a\}$

$$\text{Lemma} \implies \int_\gamma g(z)\,\mathrm{d}z = \int_\gamma \frac{f(z)-f(a)}{z-a}\,\mathrm{d}z = 0 \quad \blacksquare$$

Satz: Satz von Cauchy:

$f : \Omega \to \mathbb{C}$ analytisch

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$$

für alle geschlossene Kurven γ

Satz: Cauchy-Integralformel:

$f : \Omega \to \mathbb{C}$ analytisch

$$\frac{1}{2\pi\imath}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\,\mathrm{d}z = n(\gamma, a) f(a)$$

für alle geschlossene γ in Ω die nicht durch a gehen

Bsp.:

für γ ein Kreis mit a in seinem Inneren

$$\frac{1}{2\pi\imath}\int_K \frac{f(z)}{z-a}\,\mathrm{d}z = f(a)$$

Nützlich: Cauchy Formel als Darstellungssatz:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\imath}\int_K \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta$$

$f(z)$ ist auf eine Kreisscheibe eindeutig bestimmt durch die Werte von f auf dem Rand.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z)^2} f'(z) = \frac{1}{2\pi\imath}\int_K \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\,\mathrm{d}\zeta$$

$$f''(z) = \frac{2}{2\pi\imath}\int_K \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^3}\,\mathrm{d}\zeta$$

$$f'''(z) = \frac{2\cdot 3}{2\pi\imath}\int_K \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^4}\,\mathrm{d}\zeta$$

Induktion:

Analytische Funktionen sind unendlich oft differenzierbar. Alle höhere Ableitungen sind analytisch. Es gilt für die n-te Ableitung:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi\imath}\int_K \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta$$

Anwendung: Mittelwert-Eigenschaft

K = Kreis, $|z-a| = r$

$$t \mapsto z(t) = a + re^{\imath t}$$
$$0 \le t \le 2\pi$$
$$f(a) = \frac{1}{2\pi\imath}\int_{|z-a|=r}\frac{f(z)}{z-a}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi\imath}\int_0^{2\pi}\frac{f(a+re^{\imath t})}{re^{\imath t}}\underbrace{\imath re^{\imath t}}_{\dot z(t)}\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a+re^{\imath t})\,\mathrm{d}t$$

Riemannscher Hebbarkeitssatz

Lemma: Technisches Lemma (s.Autographie):
Die Formel

$$F(z) = \int_{[a,z]} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$$

für die Stammfunktion von f gilt auch wenn f analytisch in $\Omega \setminus \{a\}$ ist und stetig auf Ω

Satz: Riemannscher Hebbarkeitssatz:
Sei f analytisch auf $\Omega \setminus \{a\}$, beschränkt ($|f(z)| < M$) uaf einer Umgebung von a. Dann hat f eine analytische Fortsetzung auf Ω

$f(z) = \frac{z}{e^z-1}$ nicht definiert in $z = 0$
Betrachte $\frac{e^z-1}{z}$

$$\frac{e^z-1}{z} = \frac{1+z+\frac{z^2}{2!}+\cdots-1}{z} = 1+\frac{z}{2!}+\frac{z^2}{3!}+\cdots$$

$$\lim_{z\to 0}\frac{e^z-1}{z} = 1$$

$$\implies \lim_{z\to 0}\frac{z}{e^z-1} = 1$$

Folge:

Es folgt aus dem Satz:

$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} f(z) & z \neq 0 \\ 1^z = 0 & \end{cases}$$

ist eine analytische Fortsetzung von f in einer Umgebung von 0

Beweis: s.Blatter
Taylorreihe:
Sei f analytisch auf Ω. Dann gilt für alle $a \in \Omega$

$$f(z) = f(a) + f'(a)(z-a) + \frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2 + \cdots$$

Diese Reihe konvergiert für alle z in der grössten in Ω enthaltener offener Kreischeibe um a.

Bew.: Bewies für $a = 0$:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\imath}\int_K \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}z \quad K = \text{ Kreis um } 0 \text{ mit Radius } r$$

$$|z| < |\zeta| = r$$

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta}\frac{1}{1-\frac{z}{\zeta}} = \frac{1}{\zeta} + \frac{z}{\zeta^2} + \frac{z^2}{\zeta^3} + \cdots \quad \left|\frac{z}{\zeta}\right| < 1$$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\imath}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta z^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n$$

$f : \Omega \to \mathbb{C}, \Omega \subset \mathbb{C}$ eine zusammenhängende analytische Funktion.

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\,\mathrm{d}z = 2\pi\imath f(a)$$

$$n!\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}z = 2\pi\imath f^{(n)}(a)$$

Satz: Satz von Liouville:

$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analytisch

f sei beschränkt, d.h. $|f(z)| \leq M, z \in \mathbb{C}$

$\Longrightarrow$ f ist konstant

$$f'(a) = \frac{1}{2\pi\imath}\int_{\gamma_r}\frac{f(z)}{(z-a)^2}\,\mathrm{d}z \to |f'(a)| \leq \frac{1}{2\pi\imath}2\pi r M\frac{1}{r^2} = \frac{M}{r} \to 0\ (r \to \infty)$$

$$f'(a) = 0$$

$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analytisch

$$|f(z)| \leq M(1 + |z|^n)$$

f ist ein Polynom

$$\left|f^{(n)}(a)\right| \leq \frac{M}{r^n} n!$$

M Maximum auf einer Kreisscheibe mit Radius r
$\gamma_1, \dots, \gamma_n$ geschlossene Kurven
$\gamma = \gamma_1 + \dots + \gamma_n$ Zyklus

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{j=1}^{n} \int_{\gamma_j} f(z)\,\mathrm{d}z$$

Def.: nullhomologer Zyklus:
$$\forall z \notin \Omega : n(\gamma, z) = 0$$

$f : \Omega \to \mathbb{C}$ analytisch, Ω beliebiges Gebiet, γ nullhomologer Zyklus

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

$G \subset \Omega$ Gebiet mit ∂G

$$\int_{\partial G} \frac{f(z)}{z-a}\,\mathrm{d}z = 2\pi\imath n(\partial G, a) f(a) \quad a \in G$$

$$f : \Omega \to \mathbb{C}$$
$$\int_{\partial G} \frac{f(z)}{z-w}\,\mathrm{d}z = 2\pi\imath f(w) n(\partial G, w)$$
$$0 = \int_{\partial D_b} \frac{f(z)}{z-w}\,\mathrm{d}z - \int_{\partial D_a} \frac{f(z)}{z-w}\,\mathrm{d}z$$

4.1.3 Laurentreihen und Residuum

Def.: Laurent-Reihe:

Eine Potenzreihe der Form

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^k = \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} \frac{1}{z_k} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

heisst **Laurent-Reihe**

Def.: Randzyklus:
Randzyklus ∂G eines Gebeits G

$$\begin{cases} n(\partial G, z) = 1 & \text{für } z \in G \\ n(\partial G, z) = 0 & \text{für } z \notin G \cup \partial G \end{cases}$$

("Gebiet liegt in Umlaufrichtung links")

$f : \Omega \to \mathbb{C}$ analytisch
$G = \{z \in \mathbb{C} : a < |z - z_0| < b\}$
$w \in G$

$$f(w) = \frac{1}{2\pi\imath} \int_{\partial G} \frac{f(z)}{z - w} \,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi\imath} \int_{\partial D_b} \frac{f(z)}{z - w} \,\mathrm{d}z - \frac{1}{2\pi\imath} \int_{\partial D_a} \frac{f(z)}{z - w} \,\mathrm{d}z$$

$g_b(w) := \int_{\partial D_b} \frac{f(z)}{z - w} \,\mathrm{d}z, |w - z_0| < b = |z - z_0|$ (dort ist g_b analytisch)

$$\frac{1}{z - w} = \frac{1}{z - z_0 - (w - z_0)} = \frac{1}{z - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{w - z_0}{z - z_0}} = \frac{1}{z - z_0} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{w - z_0}{z - z_0}\right)^j$$

$$
\begin{aligned}
g_b(w) &= \int_{\partial D_b} \frac{f(z)}{z-z_0} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{w-z_0}{z-z_0}\right)^j \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} (w-z_0)^j \underbrace{\int_{\partial D_b} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{j+1}}\,\mathrm{d}z}_{c_j} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} c_j \cdot (w-z_0)^j
\end{aligned}
$$

$$g_a(w) := \int_{\partial D_a} \frac{f(z)}{z-w}\,\mathrm{d}z \quad |w-z_0| > a \text{ (dort ist } g_a \text{ analytisch)}$$

$$\frac{1}{z-w} = \frac{1}{w-z_0} \cdot \frac{1}{\underbrace{\frac{z-z_0}{w-z_0}}_{|\cdot|<1} - 1} = -\frac{1}{w-z_0} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^j$$

$$
\begin{aligned}
g_a(w) &= -\sum_{j=0}^{\infty} (w-z_0)^{-j-1} \int_{\partial D_a} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{-j}}\,\mathrm{d}z \\
&= -\sum_{j=-\infty}^{-1} (w-z_0)^j \underbrace{\int_{\partial D_a} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{j+1}}\,\mathrm{d}z}_{c_j} \\
&= -\sum_{j=-\infty}^{-1} (w-z_0)^j \cdot c_j
\end{aligned}
$$

$$d_j = \frac{1}{2\pi\imath} \int_{\partial D_r} \frac{f(z)}{(z-w)^{j+1}}\,\mathrm{d}z$$

Fix

Bsp.:

$$f(z) = \frac{1}{z^2-1} \implies \text{Singularitäten bei } \pm 1$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{z^2-1} &= \frac{1}{(z-1)(z+1)} \\
&= \frac{1}{z-1} \cdot \frac{1}{2+(z-1)} \\
&= \frac{1}{z-1} \frac{1}{1-\frac{1-z}{2}} \cdot \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2(z-1)} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{-z+1}{2} \right)^j \\
&= \frac{1}{2(z-1)} \sum_{j=0}^{\infty} (z-1)^j \left(-\frac{1}{2} \right)^j \\
&= -\sum_{j=-1}^{\infty} (z-j)^j \left(-\frac{1}{2} \right)^{j+2}
\end{aligned}
$$

$0 < |z-1| < 2$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{z^2-1} &= \frac{1}{z-1} \cdot \frac{1}{2+(z-1)} \\
&= \frac{1}{(z-1)^2} \frac{1}{1+\frac{2}{z-1}} \\
&= \frac{1}{(z-1)^2} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{-2}{z-1} \right)^j \\
&= \sum_{j=-\infty}^{-2} (-2)^{j+2} (z-1)^j \\
&= \frac{1}{(z-1)^2} - \frac{2}{(z-1)^3} + \cdots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{z+1}{z^3-z^2} \\
&= \frac{1}{z^2}\cdot\frac{z+1}{z-1} \\
&= \frac{1}{z^2}\cdot\frac{z}{z-1} + \frac{1}{z^2}\cdot\frac{1}{z-1} \\
&= -\frac{1}{z}\frac{1}{1-z} - \frac{1}{z^2}\frac{1}{1-z} \\
&= -\frac{1}{z}\sum_{j=0}^{\infty} z^j - \frac{1}{z^2}\sum_{j=0}^{\infty} z^j \\
&= -\frac{1}{z^2} - \frac{2}{z} - 2\sum_{j=0}^{\infty} z^j
\end{aligned}
$$

4.1.4 Isolierte Singularitäten

1. Hauptteil nicht vorhanden: $f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j(z-z_0)^j$
   $\implies$ z_0 ist hebbare Singularität $f(z_0) := \lim_{z\to z_0} f(z)$ (Grenzwert existiert)

2. Hauptteil besteht aus endlich vielen Termen

$$
\begin{aligned}
&h(z) = \sum_{j=1}^{N} c_{-j}(z-z_0)^{-j} \\
&\implies \lim_{z\to z_0} f(z) = \infty \\
&g(z) := \begin{cases} \frac{1}{f(z)} & z \neq z_0 \\ 0 & z = 0 \end{cases} \quad g \text{ analytisch in Umgebung von } z_0\text{, dort } g(z) \neq 0 \text{ für } \forall z \neq z_0
\end{aligned}
$$

g hat NS endlicher Ordnung

$$
g(z) = (z-z_0)^N, g_0(z), g_1(z) \neq 0
$$

$$f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^N} \cdot \frac{1}{\underbrace{g_1(z)}_{f_1(z) \text{ analytisch in Umgebung von } z_0}}$$

$$= \frac{1}{(z-z_0)^N} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} d_j (z-z_0)^j = d_0(z-z_0)^{-N} + \dots + d_{N-1}(z-z_0)^{-1} + \dots$$

$\implies$ f hat Pol N-ter Ordnung in z_0

3.

$$\text{Hauptteil } = \sum_{j=1}^{\infty} d_j (z-z_0)^{-j}$$

Bsp.:

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \left(\frac{1}{z}\right)^j$$

"f hat eine wesentliche Singularität in z_0"

Satz: Satz von Picard:
Falls f eine wesentliche Singluratität in z_0 hat, so nimmt f in jeder Umgebung $\dot{U}$ von z_0 jeden Wert $w \in \mathbb{C}$ unendlich oft an, bis auf höchstens eine Ausnahme.

$\implies$ $e^{\frac{1}{z}} = w$ hat ∞ viele Lösungen für $\forall w \neq 0$, auch falls $|z| < \varepsilon$
Eine analytische Funktion auf Ringgebiet $R = \{z \in \mathbb{C} | r < |z-a| < R\}, 0 \leq r < R \leq \infty$ kann in eine Laurentreihe

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

Die Laurentkoeffizienten c_n sind eindeutig bestimmt.

$$c_n = \frac{1}{2\pi\imath}\int_{|z-a|=s} f(z)(z-a)^{-n-1}\,\mathrm{d}z \text{ für jedes } s, r < s < R$$

Bem.:

Dieselbe Funktion kann verschiedene Laurent-Reihen in verschiedenen Ringgebieten haben.

Bsp.:

$$\frac{1}{1-z} = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} z^n & 0 < |z| < 1 \\ -\sum_{n=-\infty}^{-1} & 1 < |z| < \infty \end{cases}$$

$$\frac{1}{1-z} = \frac{\frac{1}{z}}{\frac{1}{z}-1} = -\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n} \quad \left(\left|\frac{1}{z}\right| < 1\right)$$

Speziallfall: Laurent-Reihe um einen isolierten Singularität

f analytisch auf $\Omega \setminus \{a\}, a \in \Omega$
In einer Umgebung von a hat f eine Laurent-Entwickelung

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n \quad 0 < |z-a| < R$$

in den Punktierten Kreisscheibe um a mit Radius R.

$$c_n = \frac{1}{2\pi\imath}\int_{|z-a|=\varepsilon} f(z)(z-a)^{-n-1}\,\mathrm{d}z \quad 0 < \varepsilon < R$$

Der Koeffizient $c_{-1} = \frac{1}{2\pi\imath}\int_{|z-a|=\varepsilon} f(z)\,\mathrm{d}z$ heisst Residuum von f an der Stelle a

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z) = \operatorname{res}(f|a) = \frac{1}{2\pi\imath}\int_{|z-a|=\varepsilon} f(z)\,\mathrm{d}z$$

Bsp.:

$$f(z) = \frac{e^z - 1}{z^3}$$

hat eine Isolierte Singularität $z = 0$

$$\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = \frac{1}{2\pi\imath} \int_{|z-a|=\varepsilon} \frac{e^z - 1}{z^3}\,\mathrm{d}z$$

Zum Ausrechnen

$$\frac{e^z - 1}{z^3} = \frac{z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots}{z^3} = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2z} + \cdots$$

$$\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = \text{Koeffizient von } \frac{1}{z} = \frac{1}{2}$$

Satz: Residuumsatz:

Sei f analytisch auf einem Gebiet Ω ausser an isolierten Singularitäten. Sei $G \subset \Omega$ mit Randzyklus ∂G in Ω der nicht durch die Singularitäten geht. Seien $a_1, \ldots, a_n$ die isolierten Singularitäten in G. Dann gilt

$$\frac{1}{2\pi\imath} \int_{\partial G} f(z)\,\mathrm{d}z = \operatorname*{res}_{z=a_1} f(z) + \cdots + \operatorname*{res}_{z=a_n} f(z)$$

Bew.:

$G' = G \setminus$ kleine Kreisscheiben um $a_1, \dots, a_n$. f ist analytisch auf G'. Cauchy:

$$\begin{aligned}\int_{\partial G'} f(z)\,\mathrm{d}z = 0 \\ &= \int_{\partial G} f(z)\,\mathrm{d}z - \int_{|z-a_1|=\varepsilon} f(z)\,\mathrm{d}z \\ &- \dots - \int_{|z-a_n|=\varepsilon} f(z)\,\mathrm{d}z\end{aligned}$$

Bew.: 2. Erklärung:

Die Integrale $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$ änder sich nicht wenn man γ deformiert (im Definitionsbereich):

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma'} f(z)\,\mathrm{d}z + \underbrace{\int_{\gamma''} f(z)\,\mathrm{d}z}_{=0 \text{ Cachy}}$$

Also gilt

$$\begin{aligned}\int_{\partial G} f(z)\,\mathrm{d}z &= \int_{\gamma'} f(z)\,\mathrm{d}z \\ \int_{\text{Strecken}} &= 0 \\ &= \sum_{j=1}^{n} \int_{|z-a_j|=\varepsilon} f(z)\,\mathrm{d}z \\ &= 2\pi\imath \sum_{j=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=a_j} f(z)\end{aligned}$$

Bsp.:

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\cos\varphi}\,\mathrm{d}\varphi$$
$$z = e^{\imath\varphi}$$
$$\cos\varphi = \frac{e^{\imath\varphi}+e^{-\imath\varphi}}{2} = \frac{z-z^{-1}}{2}$$
$$\mathrm{d}z = \imath e^{\imath\varphi}\,\mathrm{d}\varphi = \imath z\,\mathrm{d}\varphi$$
$$I = \frac{1}{\imath}\int_{|z|=1} \frac{1}{2+\frac{z+z^{-1}}{2}}\frac{1}{z}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{\imath}\int_{|z|=1}\frac{2}{z^2+4z+1}\,\mathrm{d}z$$

$a \in \mathbb{C}$ heisst isolierte Singularität einer analytischen Funktion f wenn f in a nicht definiert ist aber es gibt eine punktierte Kreisscheibe $0 < |z-a| < r$ wo f definiert ist.

Bsp.:

$$f = \frac{1}{\sin\frac{1}{z}}$$

nicht definiert für $z = 0, \frac{1}{\pi n}, n \in \mathbb{Z}$

Um isolierten Singularitäten hat f eine Laurent-Entwickelung

$$f(z) = \cdots + \frac{c_{-2}}{(z-a)^2} + \frac{c_{-1}}{z-a} + c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \cdots \qquad r > |z-a| > 0$$

(a) $\cdots = c_{-2} = c_{-1} = 0$ $f(z) = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \cdots$ Hebbare Singularität

Bsp.:

$$\frac{\sin z}{z}$$

(b) $\cdots + c_{-(N+2)} = c_{-(N+1)} = 0, c_{-N} \neq 0 \; (N > 0)$

$$f(z) = \underbrace{\frac{c_{-N}}{(z-a)^N} + \frac{c_{-N+1}}{(z-a)^{N-1}} + \cdots + \frac{c_{-1}}{z-a}}_{\text{Hauptteil}} + c_0 + c_1(z-a) + \cdots$$

a eine Polstelle der Ordnung N. f hat einen Pol der Ordnung N an der Stelle a

Def.: einfacher Pol:

Ein Pol der Ordnung 1 heisst **einfacher Pol**

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z-a} + c_0 + \cdots$$

(c) Wesentliche Singularitäten = isolierte Singularität der keine Pole und nicht hebbar sind.

(a) $\lim_{z\to a} f(z)$ existiert

(b) $\lim_{z\to a} |f(z)| = \infty$

(c) $\lim_{z\to a} |f(z)|$ existiert nicht auch als uneigentlicher (∞) Limes

Wie rechnet man das Residuum, c_{-1} an einer einfachen Polstelle?
f hat einen einfachen Pol an der Stelle a genau dann wenn der Grenzwert $\lim_{z\to a}(z-a)f(z)$ existiert; dieser Grenzwert ist das Residuum c_{-1}

1) $\operatorname{res}_{z=a} f(z) = \lim_{z\to a}(z-a)f(z)$ (a einfache Polstelle)

2) Sei $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$, p, q analytisch in einer Umgebung von $a \in \mathbb{C}$. Sei a eine einfache Nullstelle von q, d.h. $q(z) = (z-a)h(z)$ wobei $h(z)$ analytisch und $h(a) \neq 0$ (oder $q(z) = a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + a^3(z-a)^3 + \cdots, a_1 \neq 0$)

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to a}(z-a)\frac{p(z)}{q(z)} &= \lim_{z\to a}\frac{(z-a)p(z)}{a_1(z-a)+a_2(z-a)^2+\cdots} \\
&= \lim_{z\to a}\frac{p(z)}{\underbrace{a_1+a_2(z-a)+\cdots}_{=h(z)}} \\
&= \frac{p(a)}{a_1} \\
&= \frac{p(a)}{q'(a)}
\end{aligned}$$

$$\operatorname*{res}_{z=a}\frac{p(z)}{q(z)} = \frac{p(a)}{q'(a)}$$

p, q analytisch, q hat eine einfache Nullstelle an der Stelle a

Bsp.:

$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{\cos\varphi+2} = \frac{1}{\imath}\int_{|z|=1}\frac{2}{z^2+4z+1}\,\mathrm{d}z$$

$$\overset{\text{Residuensatz}}{=} \frac{1}{\imath}2\pi\imath \sum_{\substack{|a|<1 \\ \text{Singularitäten}}} \operatorname*{res}_{z=a}\frac{2}{z^4+4z+1}$$

Singularitäten: $z^2 + 4z + 1 = 0$

$a_{1,2} = -2 \pm \sqrt{3}$

$$= \frac{1}{\imath}2\pi\imath \operatorname*{res}_{z=-2+\sqrt{3}}\frac{2}{z^4+4z+1}$$

Verwende 2) mit $p = 2, q = z^4 + 4z + 1$

$$= \frac{1}{\imath}2\pi\imath\,\frac{2}{2z+4}\bigg|_{z=-2+\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

$$\int_0^{2\pi} = \frac{2+\cos\varphi}{\mathrm{d}}\varphi = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

Allgemeiner: Wenn R eine rationale Funktion in zwei Variablen ist,

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} R(\cos\varphi, \sin\varphi) &= \left| \begin{array}{l} z = e^{\imath\varphi} \\ \mathrm{d}z = \imath e^{\imath\varphi}\,\mathrm{d}\varphi \\ \mathrm{d}\varphi = \frac{1}{\imath}\frac{\mathrm{d}z}{z} \end{array} \right| \\
&= \frac{1}{\imath}\int_{|z|=1} R\left(\frac{1}{2}(z+z^{-1}), \frac{1}{2\imath}(z-z^{-1}\right) \\
&= 2\pi \sum_{\substack{\text{Singularität } a \\ \text{mit } |a|<1}} R\left(\frac{1}{2}(z+z^{-1}), \frac{1}{2\imath}(z-z^{-1}\right)\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Bsp.:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

Sei γ der Weg, der aus $[-R, R]$ und dem Halbkreis $\gamma' : |z| = R, \Im z > 0$

$$\left|\int_{\gamma'}\frac{1}{1+z^2}\,\mathrm{d}z\right| \le \underbrace{\max_{|z|=R}\left|\frac{1}{1+z^2}\right|}_{\le\frac{c}{R^2}}\pi R \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} \infty \quad \text{für } R \text{ gross}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x &= \lim_{R\to\infty}\int_\gamma \frac{1}{1+z^2}\,\mathrm{d}z \\
&= 2\pi\imath \operatorname*{res}_{z=\imath}\lim_{z\to\imath}(z-\imath)\frac{1}{1+z^2} \\
&= 2\pi\imath\frac{1}{2\imath}
\end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \pi$$

$$1 + z^2 = (z+\imath)(z-\imath)$$

Bem.:
Wir hätten den Integrationsweg auch in der unteren Halbebene schliessen können, mit demselben Resultat (Übung)

Bsp.:
Fouriertransformierte von $\frac{1}{1+x^2}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} e^{-\imath\omega x}\,\mathrm{d}x \qquad \omega \in \mathbb{R}$$

$$\int_\gamma \frac{1}{1+x^2} e^{-\imath\omega z}\,\mathrm{d}z$$

$e^{-\imath\omega z} \overset{\substack{y>0 \\ z=x+\imath y}}{=} e^{-\imath\omega x} e^{\omega y}$ beschränkt falls $\omega < 0$

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} e^{-\imath\omega x}\,\mathrm{d}x \underset{\omega<0}{=} & \lim_{R\to\infty} \int_\gamma \frac{1}{1+z^2} e^{-\imath\omega z}\,\mathrm{d}z \\
&= 2\pi\imath \operatorname*{res}_{z=\imath} \frac{1}{1+z^2} e^{-\imath\omega z}\,\mathrm{d}z \\
&= 2\pi\imath \lim_{z\to\imath} (z-\imath) \frac{1}{1+z^2} e^{-\imath\omega z} \\
&= \pi e^{\omega} \qquad (\omega \leq 0)
\end{aligned}$$

Für $\omega > 0$: Entweder verwende die untere Halbebene oder **bemerke, dass**

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} e^{-\imath\omega x}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} e^{\imath\omega x}\,\mathrm{d}x = \hat{f}(\omega)$$

$$\omega > 0 : \hat{f}(\omega) = \hat{f}(-\omega) = \pi e^{-|\omega|}$$

Schlussresultat: $\hat{f}(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} e^{-\imath\omega x}\,\mathrm{d}x = \pi e^{-|\omega|}$

Bsp.:

$$\int_0^\infty \frac{t^\lambda}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \qquad -1<\lambda<1 \implies \lambda-2<-1$$

Idee: Betrachte den Integrationsweg: BILD
$I_\gamma = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$
Idee: $I_1, I_3 \to 0$ für $r \to 0, R \to \infty, \delta \to 0$
I_2, I_4 Polynomial zu I

$$\left(I_j = \int_{\gamma_j} \frac{e^{\lambda \operatorname{Log} z}}{1+z^2}\,\mathrm{d}z \right)$$

$$I_\gamma = \int_\gamma \frac{e^{\lambda \operatorname{Log} z}}{1+z^2}\,\mathrm{d}z$$

I_2: Parameterdarstellung von $-\gamma_2$:

$$t \mapsto t^{\imath(\pi-\delta)} \qquad r<t<R$$

$$\begin{aligned} I_2 &= -\int_r^R \frac{e^{\lambda(\operatorname{Log} t + \imath(\pi-\delta))}}{1+t^2 e^{2\imath(\pi-\delta)}}\,\mathrm{d}t \\ &= -e^{\imath\lambda(\pi-\delta)} \int_r^R \frac{t^2}{1+t^2 e^{-2\imath\delta}}\,\mathrm{d}t \\ &\underset{\substack{\delta\to 0\\ r\to 0\\ R\to\infty}}{\longrightarrow} -e^{\imath\lambda\pi} \int_0^\infty \frac{t^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

$$I_4 : t \mapsto t e^{-\imath(\pi-\delta)}$$

$$I_4 \underset{\substack{\delta\to 0\\ r\to 0\\ R\to\infty}}{\to} e^{-\imath\lambda\pi} \int_0^\infty \frac{t^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

$$|I_1| \le CR^{\lambda-2} 2\pi R = 2\pi C R^{\lambda-1} \underset{R\to\infty}{\to} 0 \quad (\lambda < 1)$$

$$|I_3| \le \mathcal{C} r^{\lambda} 2\pi r = 2\pi \mathcal{C} r^{\lambda+1} \underset{r\to 0}{\to} 0 \quad (\lambda > -1)$$

$$I_\gamma = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$$

$$\underset{\substack{\delta\to 0\\ r\to 0\\ R\to\infty}}{\to} 0 + -e^{\imath\lambda\pi} I + 0 + e^{-\imath\lambda\pi} I = (e^{-\imath\lambda\pi} - e^{+\imath\lambda\pi}) I$$

$$I_\gamma = 2\pi\imath \left(\operatorname*{res}_{z=\imath} \frac{e^{\lambda \operatorname{Log} z}}{1+z^2} + \operatorname*{res}_{z=-\imath} \frac{e^{\lambda \log z}}{1+z^2} \right)$$

$$2\pi\imath \frac{e^{\lambda \operatorname{Log} z}}{2\imath} + \frac{e^{\lambda \operatorname{Log} z}}{-2\imath}$$

$$\int_0^\infty \frac{t^{l\lambda}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \pi \frac{\sin\left(\frac{\pi\lambda}{2}\right)}{\sin(\pi\lambda)} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi\lambda}{2}\right)}$$

Bild

4.1.5 Residuen an Polen höheren Ordnung

$f(z)$ hat einen Pol der Ordnung $\le n$ and der Stelle a, $f(z) = \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + \frac{c_{-n+1}}{(z-a)^{n-1}} + \cdots + \frac{c_{-1}}{z-a} + c_0 + c_1(z-a) + \cdots ; 0 < |z-a| < r \iff g(z) = (z-a)^n f(z)$ hat eine hebbare Singularität an der Stelle a d.h. g hat eine Taylorreihe um a:

$$g(z) = c_{-n} + c_{-n+1}(z-a) + \cdots + c_{-1}(z-a)^{n-1} + \cdots$$

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z) = \text{ Koeffizient von } (z-a)^{n-1} \text{ in der Taylorreihe} = \frac{g^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\imath t}}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t = \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} \frac{e^{\imath z}}{(z^2+1)^2}\,\mathrm{d}z$$

$$= \lim_{R\to\infty} 2\pi\imath \operatorname*{res}_{z=\imath} \frac{e^{\imath z}}{(z^2+1)^2}$$

$$z^2+1 = \underbrace{(z-\imath)}_{\to 0 \Leftarrow z\to\imath}(z+\imath)$$

$$\frac{e^{\imath z}}{(z^2+1)^2} = \frac{1}{(z-\imath)^2}\underbrace{\left(\frac{e^{\imath z}}{(z+1)^2}\right)}_{g(z)}$$

$$= \frac{1}{(z-1)^2}\left(g(\imath) + \underbrace{g'(\imath)(z-\imath)}_{=\operatorname{res}_{z=\imath}\frac{e^{\imath z}}{(z^2+1)^2}} + \frac{g''(\imath)}{2!}(z-a)^2 + \cdots\right)$$

$$g'(\imath) = \left.\left(\frac{\imath e^{\imath z}}{(z+\imath)^2} - 2\frac{e^{\imath z}}{(z+\imath)^3}\right)\right|_{z=\imath}$$

$$= \frac{\imath}{2\imath}e^{-1} - \frac{2}{(2\imath)^3}e^{-1}$$

$$= \frac{1}{4e}(-\imath-\imath) = \frac{-\imath}{2e}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\imath t}}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t = 2\pi\imath g'(\imath) = \frac{\pi}{e}$$

Bsp.:

Fourierreihe von $f(t) = \frac{1}{a+\sin t}$ (2π-periodisch) ; $|a| > 1$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\imath t}$$

$$
\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{a+\sin t} e^{-\imath n t}\,\mathrm{d}t \\
\left|\begin{aligned} z &= e^{\imath t} \\ \mathrm{d}z &= \imath z\,\mathrm{d}t \end{aligned}\right| &= \frac{1}{2\pi\imath}\int_{|z|=1} \frac{1}{a+\frac{2\imath}{(}z - z^{-1})} z^{-n}\frac{1}{z}\,\mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{2\pi\imath}\int_{|z|=1} \frac{2\imath}{z^2+2\imath a - 1} z^{-n}\,\mathrm{d}z \\
z^2 + 2\imath a - 1 &= (z-z_+)(z-z_-) \\
z_\pm &= \imath\underbrace{(-1\pm\sqrt{a^2+1})}_{\in\mathbb{R}}
\end{aligned}
$$

Sei z.B. $a > 0$.
Pole in der Einheitskreisscheibe $z = z_+$ (und falls $n > 0$ $z = 0$).
Berechne c_n für $n \leq 0$ (kein Pl bei 0), verwende $c_n = \overline{c_{-n}}$ für $n > 0$ (Siehe *)

$$
n \leq 0
$$

$$
\begin{aligned}
c_n &= \operatorname*{res}_{z=z_+} \frac{2\imath}{(z-z_+)(z-z_-)} z^{-n} = \frac{2\imath z_+^{-n}}{z_+ - z_-} \qquad (n \leq 0) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{\imath n t}}{a+\sin t}\,\mathrm{d}t = \begin{cases} \frac{\imath^{-m}}{\sqrt{a^2-1}}(\sqrt{a^2-1}-a)^{|n|} & a > 1 \\ \frac{-\imath^{-m}}{\sqrt{a^2-1}}(-\sqrt{a^2-1}-a)^{|n|} & a < 1 \end{cases}
\end{aligned}
$$

Kapitel 5

Laplace Transformationen

$f(t)$ sei eine für $t \geq 0$ definierte Funktion.

Def.: Laplace-Transformierte:
Die **Laplace-Transformierte** von f ist

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t$$

$s \in \mathbb{C}$, so dass das Integral existiert.

Bsp.:

$$f(t) = t^n \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$F(s) = \int_0^\infty t^n e^{-st}\,\mathrm{d}t$$

definiert für $\Re(s) > 0$ $(e^{-st} = e^{-\Re(s)t}\underbrace{e^{-\imath\Im(s)t}}_{|\cdot|=1})$

Für $n = 0$

$$\int_0^\infty e^{-st}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{s}e^{-st}\right]_0^\infty = \frac{1}{s}$$

$n > 0$

$$\int_0^\infty \underbrace{t^n}_{\downarrow} \underbrace{e^{-st}}_{\uparrow}\,\mathrm{d}t = \cancel{\left[t^n \frac{1}{-s} e^{-st}\right]_0^\infty} - \int_0^\infty n t^{n-1} \frac{1}{-s} e^{-st}\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{n}{s} \int_0^\infty t^{n-1} e^{-st}\,\mathrm{d}t$$

Iteriere

$$\int_0^\infty t^n e^{-st}\,\mathrm{d}t = \frac{n}{s} \cdot \frac{n-1}{s} \cdot \frac{n-2}{s} \cdots \frac{1}{s} \int_0^\infty e^{-st}\,\mathrm{d}t = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

Bsp.:

$$f(t) = e^{at} \quad a \in \mathbb{C}$$

$$F(s) = \int_0^\infty e^{at-st}\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty e^{(a-s)t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{s-a}, \Re(s) > \Re(a)$$

Sei $f(t)$ eine vis auf Sprungstellen stetige Funktion, mit

$$|f(t)| \leq Ce^{at} \quad C, a \in \mathbb{R}$$

Dann ist $F(s)$ für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\Re(s) > a$. $F(s)$ ist analytisch in dieser Halbebene.

Bsp.: Heaviside Funktion:

$$H(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

oder allgemeiner

$$H(t-a) = \begin{cases} 1 & t \geq a \\ 0 & t < a \end{cases}$$

Für $a \geq 0$

$$\begin{aligned} f(t) &= H(t-a) \\ F(s) &= \int_0^\infty H(t-s)e^{-st}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_a^\infty e^{-st}\,\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^\infty \\ &= \frac{e^{-as}}{s} \end{aligned}$$

5.1 Notationen

$$F = \mathcal{L}[f]$$

Die Laplacetransformation $\mathcal{L}$ bildet f auf F ab.

$$f(t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet F(s)$$

z.B $t^n \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \frac{n!}{s^{n+1}}$

5.2 Inverse Laplace-Transformation

Def.: inverse Laplace-Transformierte:

$f(t)$ heisst **inverser Laplace-Transformierte** von $F(s)$ falls $F = \mathcal{L}[f]$. Wir schreiben $f = \mathcal{L}^{-1}[F]$

Fix

Bem.:

Es gibt eine Formel, in den Anwendungen meistens nutzlos. Besser: Tabellen konsultation

Bsp.:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right] = t$$

5.3 Eigenschaften

Aus der Linearität des Integrals folgt

(1)

$$\mathcal{L}[\lambda f + \mu g] = \lambda\mathcal{L}[f] + \mu\mathcal{L}[g] \quad \lambda, \mu \in C$$

$$\frac{2}{s} + \frac{1}{s^2} \bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\circ\, 2 + t$$

(2) Verschibungssatz

$$f \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet F \quad g \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet G$$
$$f(t) = e^{-at} g(t) \implies F(s) = G(s+a)$$

Bew.:

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-at} g(t) e^{-st} \,\mathrm{d}t = \int_0^\infty g(t) e^{-(s+a)t} \,\mathrm{d}t$$

(3)

$$\mathcal{L}\left[\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right] = ?$$

Sei $g(t) = \dfrac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}$, f differenzierbar , $|f| \leq Ce^{at}$

$$G(s) = \int_0^\infty \underbrace{\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}}_{\uparrow} \underbrace{e^{-st}}_{\downarrow}$$

$$= \left[f(t)e^{-st}\right]_0^\infty - \int_0^\infty f(t) e^{-st}(-s) \,\mathrm{d}t$$

$$= -f(0) + sF(s)$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right] = sF(s) - f(0)$$

Iteriere

$$\mathcal{L}\left[\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}t^2}\right] = s\mathcal{L}\left[\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right] - \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(s) = s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)$$

Mit Induktion

$$F = \mathcal{L}[f]$$
$$\mathcal{L}\left[\frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}t^n}\right] = s^n F(s) - \sum_{j=0}^{n-1} s^{n-1-j} \frac{\mathrm{d}^j f}{\mathrm{d}t^j}(s)$$

Bsp.: Erste Anwendung: Anfangswertproblem:

$$\begin{cases} y'(t) = ay(t) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Sei $Y = \mathcal{L}[y]$

$$\overbrace{sY(s)}^{\mathcal{L}[y']} - y(0) = \overbrace{aY(s)}^{\mathcal{L}[ay]}$$
$$sY(s) - 1 = aY(s)$$
$$(s-a)Y(s) = 1$$
$$Y(s) = \frac{1}{s-a}$$

Tabelle:

$$y(t) = e^{at}$$

5.4 Weitere Beispiele von LT

Bsp.1:

$$f(t) = \sin(at) \quad a \in \mathbb{R}$$

$$
\begin{aligned}
F(s) &= \int_0^\infty \sin(at)e^{-st}\,\mathrm{d}t \quad (\Re s > 0)\\
&= \int_0^\infty \frac{1}{2\imath}(e^{\imath at} - e^{-\imath at})e^{-st}\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{2\imath}\left(\frac{1}{s-\imath a} - \frac{1}{s+\imath a}\right)\\
&= \frac{1}{2\imath}\frac{2\imath a}{s^2+a^2}\\
&= \frac{a}{s^2+a^2}
\end{aligned}
$$

Bsp.2:

$$
f(t) = \cos(at) = \frac{1}{a}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sin(at) \quad a \neq 0
$$

$$
F(s) = \frac{1}{a}\left(s\cdot\frac{a}{s^2+a^2} - \underbrace{0}_{\sin(a0)}\right) = \frac{s}{s^2+a^2}
$$

(4) Skalartransformation
Sei $a > 0$.

$$
\begin{aligned}
&g(t) = f(at)\\
&G(t) = \int_0^\infty f(at)e^{-st}\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty f(\tilde{t})e^{\frac{-s}{a}\tilde{t}}\frac{1}{a}\,\mathrm{d}\tilde{t}\\
&\tilde{t} = at, t = \frac{\tilde{t}}{a}, \mathrm{d}\tilde{t} = a\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)
\end{aligned}
$$

(5) Falltungsgesetz

$$
f, g : [0,\infty) \to \mathbb{C}
$$

Faltung: $(f * g)(t) = \int_0^t f(t-t')g(t')\,\mathrm{d}t'$

Satz: Flatungssatz:

$$\mathcal{L}[f * g](s) = F(s)G(s)$$

Bew.:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[f * g](s) &= \int_0^\infty \int_0^t f(t-t')g(t')\,\mathrm{d}t' e^{-st}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty \int_0^t f(t-t')g(t')e^{-st}\,\mathrm{d}t'\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty \left(\underbrace{\int_{t'}^\infty f(t-t')g(t')e^{-st}\,\mathrm{d}t}_{0 \leq u = t-t' < \infty} \right) \mathrm{d}t' \\
&= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty f(u)g(t')e^{-s(u+t')}\,\mathrm{d}u \right) \mathrm{d}t' \\
&= \int_0^\infty \underbrace{\left(\int_0^\infty f(u)e^{-su}\,\mathrm{d}u \right)}_{F(s)} g(t')e^{-st'}\,\mathrm{d}t' \\
&= F(s)G(s)
\end{aligned}$$

(6) Zweite Ableitungsregel

$$f(t) = t^k g(t) \implies F(s) = (-1)^k \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}s^k} G(s)$$

Bew.:

$$G(s) = \int_0^\infty g(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t \quad \Re(s) >$$
$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}s^k}G(s) = \int_0^\infty \underbrace{g(t)(-t)^k}_{(-1)^k f(t)} e^{-st}\,\mathrm{d}t$$

(7) Zweiter Verschiebungssatz

$$a > 0$$
$$\mathcal{L}^{-1}[e^{-sa}F(s)] = H(t-a)f(t-a) = \begin{cases} f(t-a) & t \geq a \\ 0 & t < a \end{cases}$$

Bew.:

$$\int_0^\infty H(t-a)f(t-a)e^{-st}\,\mathrm{d}t = \int_a^\infty f(t-a)e^{-st}\,\mathrm{d}t$$
$$\underset{u=t-a}{=} \int_0^\infty f(u)e^{-s(u+a)}\,\mathrm{d}u$$
$$= e^{-sa}F(s)$$

Bsp.:

Löse

$$\ddot{x}(t) - x(t) = e^t$$

$$x(0) = 1$$
$$\dot{x}(0) = 1$$

Sei $X = \mathcal{L}[x]$. Ableitungsregel

$$\underbrace{s^2 X(s) - s - 1 - X(s)}_{\mathcal{L}[\ddot{x}]} = \frac{1}{s-1}$$

$$X(s) = \frac{1}{s^2-1}\left(s + 1 + \frac{1}{s-1}\right) = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{(s-1)^2(s+1)}$$

$$\frac{1}{(s-1)^2(s+1)} \overset{\text{PBZ}}{=} \frac{A}{(s-1)^2} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{s+1}$$

Bsp.: Kap. 7:

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} + 2x(t) = t \\ x(0) = a \end{cases} *$$

$$X(s) = \mathcal{L}[x(0)] = \int_0^\infty x(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t$$

$*$ als Gleichung für $X(s)$

$$sX(s) - \underbrace{x(0)}_{=a} + 2X(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$(s+2)X(s) = \frac{1}{s^2} + a$$

$$X(s) = \underbrace{\frac{1}{s+2}}_{\text{Übertragungsfunktion}} \left(\underbrace{\frac{1}{s^2} + a}_{\text{input}}\right)$$

Michal Sudwoj

Stand: 2. Juni 2011

Gesucht die inverse Laplacetransformierte ("Originalfunktion"). Partialbruchzerlegung

$$\begin{aligned}
\frac{1}{s+2}\frac{1}{s^2} &= \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s} + \frac{C}{s^2} \\
&= \frac{As^2 + B(s+2)s + C(s+2)}{(s+2)s^2} \\
&= \frac{(A+B)s^2 + (2B+C) + 2C}{(s+2)s^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&A + B = 0 \\
&2B + C = 0 \\
&2C = 1 \\
&C = \frac{1}{2}, B = -\frac{1}{4}, A = \frac{1}{4} \\
&X(s) = \frac{1}{4(s+2)} - \frac{1}{4s} + \frac{1}{2s^2} + \frac{a}{s+2} \\
& = \left(a + \frac{1}{4}\right)\frac{1}{s+2} - \frac{1}{4s} + \frac{1}{2s^2} \\
&x(t) = \left(a + \frac{1}{4}\right)e^{-2t} - \frac{1}{4} + \frac{t}{2}
\end{aligned}$$

Bsp.:

$$\begin{aligned}
&\ddot{x}(t) - x(t) = e^t \\
&x(0) = \dot{x}(0) = 1 \\
&s^2X(s) - s\,\underbrace{x(0)}\,1 - \underbrace{\dot{x}(0)}_{1} - X(s) = \frac{1}{s-1} \\
&(s^2 - 1)X(s) = \frac{1}{s-1} + s + 1 \\
&X(s) = \frac{1}{s^2-1}\left(\frac{1}{s-1} + s + 1\right) = \frac{1}{(s-1)^2(s+1)} + \frac{1}{s+1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{(s-1)^2(s+1)} &= \frac{A}{s-1} + \frac{B}{(s-1)^2} + \frac{C}{s+1}\\ &= \frac{A(s-1)(s+1) + B(s+1) + C(s-1)^2}{(s-1)^2(s+1)}\\ &= \frac{(A+C)s^2 + (B-2C)s - A + B + C}{(s-1)^2(s+1)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&A + C = 0\\ &B - 2C = 0\\ &-A + B + C = 1\\ &A = -C\\ &B = 2C\\ &C + 2C + C = 1\\ &C = \frac{1}{4}, B = \frac{1}{2}, A = -\frac{1}{4}\\ &X(s) = -\frac{1}{4(s-1)} + \frac{1}{2(s-1)^2} + \frac{1}{4(s+1)} + \frac{1}{s+1}\\ & = \frac{3}{4(s+1)} + \frac{1}{2(s-1)^2} + \frac{1}{4(s+1)}\\ &x(t) = \frac{3}{4}e^t + \frac{1}{2}te^t + \frac{1}{4}e^{-t}\end{aligned}$$

Bsp.:

$$\begin{aligned}&\ddot{x}(t) - x(t) = h(t)\\ &x(0) = a\\ &\dot{x}(0) = b\\ &H = \mathcal{L}[h]\\ &(s^2-1)X(s) = H(s) + sa + b\\ &X(s) = \frac{1}{s^2-1}(H(s) + sa + b)\end{aligned}$$

Bsp.: Anwendung: Gedämpfter harmonischer Oszillator mit Störkraft:

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) + 2k\dot{x}(t) = \underbrace{g(t)}_{\text{Störkraft}}$$

$$x(0) = x_0$$

$$\dot{x}(0) = v_0$$

$$X(s) = \mathcal{L}[x(t)]$$

$$G(s) = \mathcal{L}[g(\omega)]$$

$$s^2 X(s) + 2ksX(s) + \omega^2 X(s) = G(s) + sx_0 + v_0 + 2kx_0$$

$$X(s) = \frac{1}{s^2 + 2ks + \omega^2}(G(s) + sx_0 + v_0 + 2kx_0)$$

$$x(t) = \int_0^t h(t - t')g(t')\,\mathrm{d}t'$$

$$h = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2 + 2ks + \omega^2}\right]$$

h heisst Einflussfunktion. $h(t - t')$ beschreibt den Einfluss auf die Lösung zur Zeit t der Störkraft zur Zeit t'. Berechnung von h:

$$\frac{1}{s^2 + 2ks + \omega^2} = \frac{1}{(s + k)^2 + \omega^2 - k^2}$$

a) $k < \omega$ "Schwache Dämpfung"

$$\overline{\omega} := \sqrt{\omega^2 - k^2} > 0$$

$$\sin at \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \frac{a}{s^2 + a^2}$$

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s + k)^2 + \overline{\omega}^2}\right] = e^{-kt}\frac{\sin \overline{\omega}t}{\overline{\omega}}$$

b) $k > \omega$ "Starke Dämpfung"

$$a = \sqrt{k^2 - \omega^2} > 0$$

$$\frac{1}{(s + k)^2 - a^2} = \left(\frac{1}{s + k - a} - \frac{1}{s + k + a}\right)\frac{1}{2a}$$

$$h(t) = \frac{1}{2a}(e^{-(k-a)t} - e^{-(k+a)t})$$

$$h(t) = \frac{1}{2\sqrt{k^2-\omega^2}}(e^{\overbrace{-(k-\sqrt{k^2-\omega^2})t}^{>0}} - e^{\overbrace{-(k+\sqrt{k^2-\omega^2})t}^{>0}})$$

c) $\omega = k$ "kritische Dämpfung"

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+k)^2}\right] = te^{-kt}$$

5.4.1 Dirac δ-Funktion

Dirac: $\delta(t-a)$ soll eine "Funktion" sein, die 0 für alle $t \neq a$, ∞ für $t = a$, so dass $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a)\,\mathrm{d}t = 1$. $\delta(t-a)$ ist nicht definiert, doch aber

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a)\varphi(t)\,\mathrm{d}t = \varphi(a)$$

für alle Funktionen (in $\mathbb{C}^\infty$) $\varphi(t)$
δ-Funktion als Limes:

$$\delta_\varepsilon(t-a) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} & -\frac{\varepsilon}{2} \leq t-a \leq \frac{\varepsilon}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad (\varepsilon > 0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon(t-a)\,\mathrm{d}t = 1$$

$$\delta(t-a) := \lim_{\varepsilon\to 0^+} \delta_\varepsilon(t-a)$$

"im Sinne der verallgemeinerten Funktionen" bedeutet

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a)\varphi(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon(t-a)\varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

Reaktion auf einem "δ-Stoss" zur Zeit t_0

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) + 2k\dot{x}(t) + \omega^2 x(t) = \delta(t-t_0) \quad (*) \quad (\text{ oder zunächst } \delta_\varepsilon(t-a)) \\ x(0) = \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$$

$$x(t) = \int_0^t h(t-t')\delta(t'-t_0)\,\mathrm{d}t' = h(t-t_0)$$

$h(t-t_0)$ ist die Lösung von $*$

5.4.2 Laplacetransformierte von periodischen Funktionen

$f(t+T) = f(t)$ für alle $t > 0$.
$T > 0$ ist die Periode.

$$\begin{aligned}
F(s) &= \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^T f(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t + \underbrace{\int_T^{2T} f(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t}_{\substack{\int_0^T f(t+T)e^{-st}\,\mathrm{d}t \\ \overset{t+T\to t}{=} \int_0^T f(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t(e^{-sT})}} + \int_{2T}^{3T} f(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t + \cdots \\
&= \int_0^T f(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t(1 + e^{-sT} + e^{-s\cdot 2T} + e^{-s\cdot 3T} + \cdots) \\
&= \int_0^T f(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t \cdot \frac{1}{1-e^{-sT}}
\end{aligned}$$

Bsp.:

$$f(t) = \begin{cases} A & 0 \le t < h \\ 0 & h \le t < T \end{cases} \quad T\text{-periodisch fortgesetzt}$$

$A > 0, h > 0, T > 0$

$$\begin{aligned}
F(s) &= \int_0^T f(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t \frac{1}{1-e^{-sT}} \\
&= A\int_0^h e^{-st}\,\mathrm{d}t \frac{1}{1-e^{-stT}} \\
&= A\left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^h \frac{1}{1-e^{-sT}} \\
&= \frac{A}{s}\frac{1-e^{-sh}}{1-e^{-sT}}
\end{aligned}$$

5.4.3 Laplace-Transformierte der δ-Funktion

$$a > 0$$

$$\mathcal{L}[\delta(t-a)] = \underbrace{\int_0^\infty \delta(t-a)e^{-st}\,\mathrm{d}t}_{=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^\infty \delta_\varepsilon(t-a)e^{-st}\,\mathrm{d}t} = e^{-sa}$$

Für $a = 0$ muss das als Limes

$$\lim_{a\to 0^+} \mathcal{L}[\delta(t-a)] = 1$$

verstanden werden.

$$\left(\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^\infty \delta_\varepsilon(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\right)$$

5.4.4 Laplace vs. Fourier; Formel für die Inverse LT

$f \in L^1$ d.h. $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t < \infty$
$L^1 = L^1(\mathbb{R})$ besteht aus alle Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ die integrierbar sind (d.h. $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t < \infty$; Funktionen, die sich auf Mengen der Länge 0 unterscheiben, werden als gleich betrachtet.

Bsp.:

$$f(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases} \text{ ist "gleich" der Funktion } \tilde{f}(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$\tilde{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-\imath\omega t}\,\mathrm{d}t$ stetige Funktion von $\omega \tilde{f}(\omega) \to 0, \omega \to \infty$
Falls $\tilde{f} \in L^1$ dann gilt die Fourrier-Umkehrformel

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega)e^{\imath\omega t}\,\mathrm{d}\omega$$

Falls $f(t) = 0$ für alle $t < a$ dann ist

$$\tilde{f}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-\imath z t}\,\mathrm{d}t \text{ für alle } z \in H^- = \{z \in \mathbb{C} | \Im z < 0\}$$

da

$$\tilde{f}(\omega - \imath\eta) = \int_a^{\infty} f(t)e^{-\imath\omega t} \underbrace{e^{-\eta t}}_{\leq \underbrace{e^{-\eta a}}_{<1} \text{ für } t>0} \mathrm{d}t \quad \omega \in \mathbb{R}, \eta \in \mathbb{R}_{>0}$$

Die komplexe Ableitung existiert.
$\tilde{f}(\omega)$ ist der Randwert einer auf H^- definierten analytischen Funktion $\tilde{f}(z)$
Fourier Satz:

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-\imath\omega t}\,\mathrm{d}t$$
$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{\imath\omega t}\,\mathrm{d}\omega$$
$$(f, \hat{f} \in L^1)$$

Falls $f(t) = 0$ und in L^2 für $t < 0$

$$\hat{f}(z) = \hat{f}(\omega - \imath\eta) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-(\omega - \imath\eta)t}\,\mathrm{d}t$$

ist auch definiert und analytisch für

$$\eta > 0 \quad (z \in H_-)$$
$$F(s) = \hat{f}(-\imath s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t = \mathcal{L}[f] \quad s > 0 \quad (\Re s > 0)$$

Wie kann man $f(t)$ aus $F(s)$ gewinnen?

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{\imath\omega t}\,\mathrm{d}\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\imath\omega)e^{\imath\omega t}\,\mathrm{d}\omega \\ &= \frac{1}{2\pi\imath}\int_{\gamma} F(s)e^{st}\,\mathrm{d}s \end{aligned}$$

$\gamma : \omega \mapsto \imath\omega \qquad \omega \in \mathbb{R}$

(falls $\omega \mapsto F(\imath\omega)$ integrierbar ist)

Diese Formel gilt falls $f \in L^1$ und $\omega \mapsto F(\imath\omega)$ ebenfalls.
Allgemein:

Satz:

Sei f stückweise stetig mit Sprungstellen als Unstetigkeiten und es gelte $|f(t)| \leq ce^{at}, t \geq 0, a \in \mathbb{R}$. Dann ist F(s) analytisch für $\Re s \geq a$ und es gilt

$$f(t) = \frac{1}{2\pi\imath}\int_{\gamma} F(s)e^{st}\,\mathrm{d}s$$

wobei γ die Gerade $t \mapsto b + \imath t$ für beliebige $b > a$ ist.

Bsp.:

$$F(s) = \frac{1}{s^2+a^2} \qquad a \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$$

Was ist $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$?
$F(s)$ hat Pole an den Stellen $\pm\imath a$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi\imath} \int_\gamma F(s) e^{st} \,\mathrm{d}s \quad t \geq 0$$

$$\int_{\tilde{\gamma}} \frac{1}{s^2 + a^2} e^{st} \,\mathrm{d}s$$

$$\left| e^{st} \right| = e^{\frac{1}{2}\Re(s)t} \leq e^{bt}$$

$\Re(s) \leq b$ für s auf $\tilde{\gamma}$

$$\left| \frac{1}{s^2 + a^2} e^{st} \right| \leq \frac{c}{R^2} e^{bt} \underset{R\to\infty}{\to} 0$$

$$\begin{aligned} f(t) &= \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi\imath} \int \frac{1}{s^2 + a^2} e^{st} \,\mathrm{d}s \\ &= \operatorname*{res}_{s=\imath a} \frac{1}{s^2 + a^2} e^{st} + \operatorname*{res}_{s=-\imath a} \frac{1}{s^2 + a^2} e^{st} \\ &= \frac{1}{2\imath a} e^{\imath a t} - \frac{1}{2\imath a} e^{-\imath a t} \end{aligned}$$

Teil II

Anhänge

Anhang A

Tabelle: Laplacetransformationen

$f(t)$	$F(s)$	
1	$\frac{1}{s}$	$\Re(s) > 0$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\Re(s) > 0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$\Re(s) > \Re(a)$
$H(t-a)$	$\frac{1}{s}e^{-as}$	$\Re(s) > 0 \ (a > 0)$
$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	$\Re(s) > \Re(a)$
$\sin(at)$	$\frac{a^2}{s^2+a^2}$	
$\mathcal{L}\left[\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right]$	$sF(s) - f(0)$	
$\mathcal{L}\left[\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}t^2}\right]$	$s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$	
$f(at)$	$\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$	

Index

Todo list