Ableitung

Definition

Betrachte $f : X \to Y$ mit $X, Y \subset \mathbb{R}$ und $x_0 \in X$

f ist *differenzierbar im Punkt* x_0 *mit Ableitung* $f'(x_0)$

$$\Leftrightarrow \quad f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + o(x - x_0) \quad \text{für} \quad x \to x_0$$

$$\Leftrightarrow \quad f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

(Zum Vergleich:) f ist *stetig im Punkt* x_0

$$\Leftrightarrow \quad f(x) = f(x_0) + o(1) \quad \text{für} \quad x \to x_0$$

$$\Leftrightarrow \quad f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x)$$

Grundregeln

Summe	$(f+g)' = f' + g'$	
konstanter Faktor	$(\lambda f)' = \lambda f'$	
Produktregel	$(fg)' = f'g + fg'$	
Quotientenregel	$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$	
Kettenregel	$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$	$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$
Umkehrfunktion	$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}$	$\frac{dx}{dy} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^{-1}$

Potenzen und Logarithmus

$f(x)$	$f'(x)$	Bedingungen
const	0	
x^n	nx^{n-1}	$n \in \mathbb{Z}$ und $x \neq 0$ wenn $n < 0$
x^a	ax^{a-1}	$a \in \mathbb{R}$ und $x > 0$
$\log x$	$\frac{1}{x}$	$x > 0$
e^x	e^x	
a^x	$a^x \cdot \log a$	$a > 0$

Kreisfunktionen

$f(x)$	$f'(x)$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$

Hyperbelfunktionen

$f(x)$	$f'(x)$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\tanh x$	$\frac{1}{\cosh^2 x}$
$\operatorname{arsinh} x$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\operatorname{arcosh} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\operatorname{artanh} x$	$\frac{1}{1-x^2}$