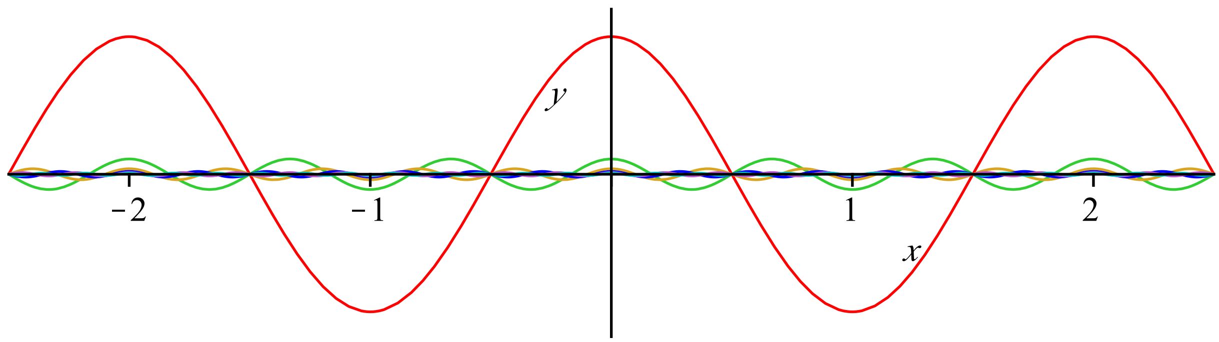
Beispiel zu Fourierreihen (Maple Worksheet)

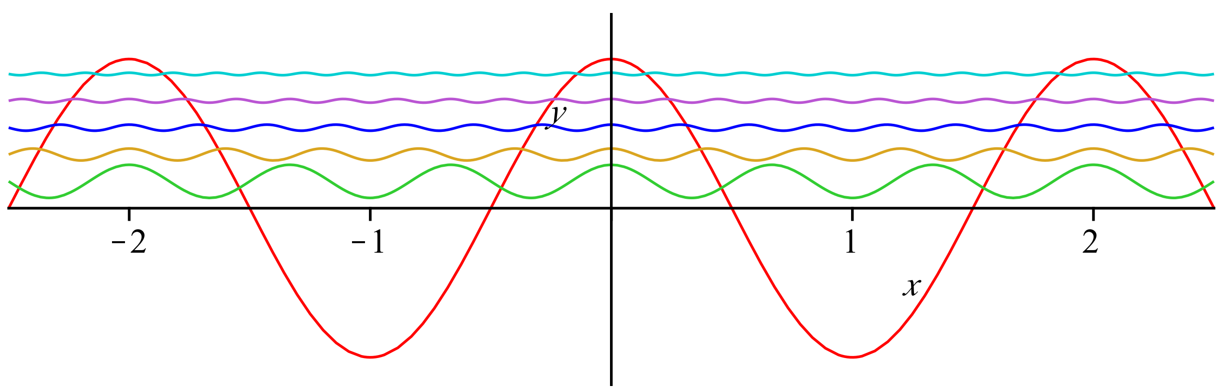
Wir betrachten die Überlagerung von Cosinuswellen der Frequenzen 2k für alle ungeraden k>0 mit den Amplituden 1/k^2. Die ersten sechs Komponenten sind:

```
> plot( [cos(Pi*x) ,
>        cos(3*Pi*x)/9  ,
>        cos(5*Pi*x)/25 ,
>        cos(7*Pi*x)/49 ,
>        cos(9*Pi*x)/81 ,
>        cos(11*Pi*x)/121 ]
>      , x=-2.5..2.5 , y=-1...1.2 , xtickmarks=[-2,-1,0,1,2] ,
  ytickmarks=0 );
```



Um sie besser sehen zu können, sind sie hier vertikal auseinander gerückt:

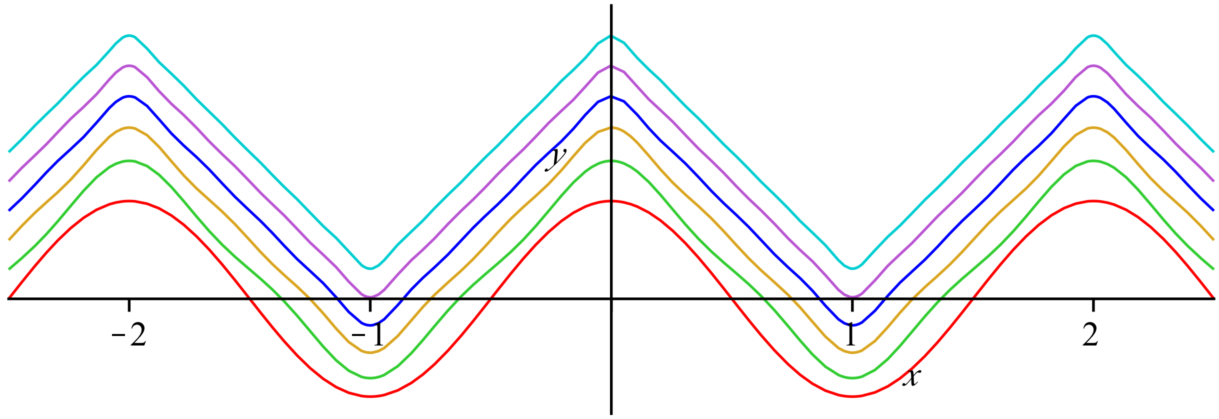
```
> plot( [cos(Pi*x) ,
>        cos(3*Pi*x)/9 + .18 ,
>        cos(5*Pi*x)/25 + .36 ,
>        cos(7*Pi*x)/49 + .54 ,
>        cos(9*Pi*x)/81 + .72 ,
>        cos(11*Pi*x)/121 + .9 ]
>      , x=-2.5..2.5 , y=-1.2..1.3 , xtickmarks=[-2,-1,0,1,2] ,
  ytickmarks=0 );
```



Die ersten Partialsummen sind Funktionen mit den folgenden Graphen (wieder der Übersichtlichkeit wegen vertikal verschoben):

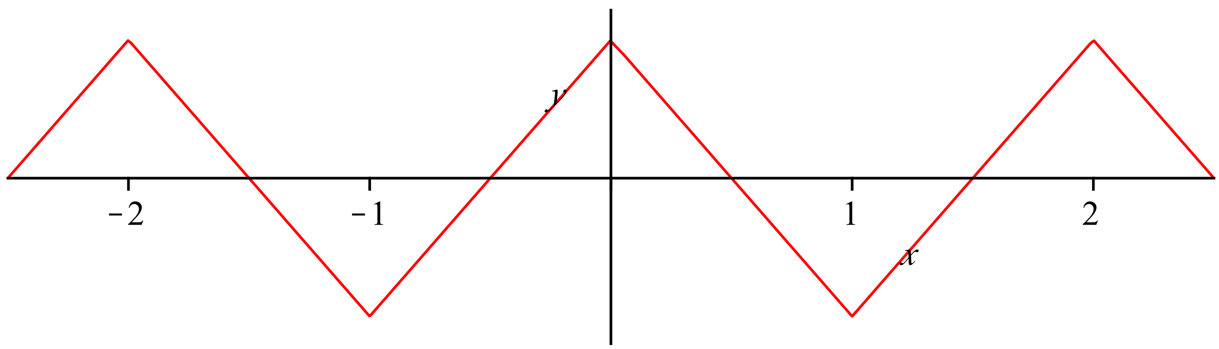
```
> plot( [cos(Pi*x) ,
>        cos(Pi*x) + cos(3*Pi*x)/9 + .3 ,
>        cos(Pi*x) + cos(3*Pi*x)/9 + cos(5*Pi*x)/25 + .6 ,
>        cos(Pi*x) + cos(3*Pi*x)/9 + cos(5*Pi*x)/25 + cos(7*Pi*x)
  /49 + .9 ,
>        cos(Pi*x) + cos(3*Pi*x)/9 + cos(5*Pi*x)/25 + cos(7*Pi*x)
  /49 + cos(9*Pi*x)/81 + 1.2 ,
>        cos(Pi*x) + cos(3*Pi*x)/9 + cos(5*Pi*x)/25 + cos(7*Pi*x)
  /49 + cos(9*Pi*x)/81 + cos(11*Pi*x)/121 + 1.5 ]
```

```
>       , x=-2.5..2.5 , y=-1.2..3 , xtickmarks=[-2,-1,0,1,2] ,
  ytickmarks=0 );
```



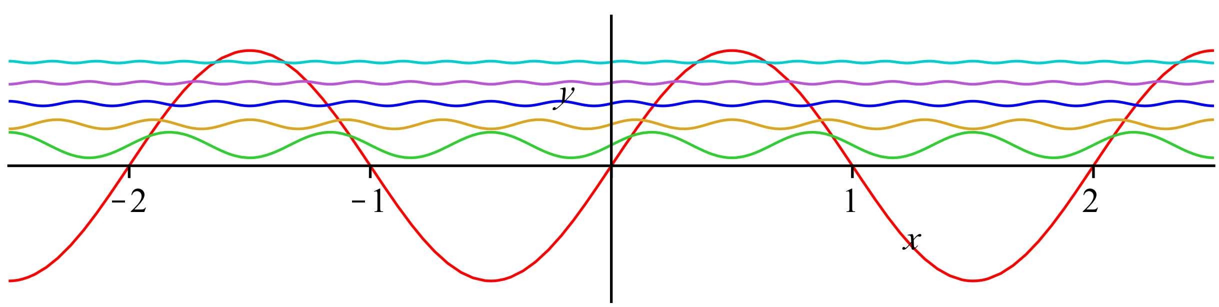
Da die Reihe \sum 1/k^2 eine konvergente Majorante ist, konvergiert die Fourierreihe absolut für jede reelle Zahl x. Die Grenzfunktion ist zwischen je zwei aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen linear, und ihr Graph hat tatsächlich die Sägezahnform, die man aus dem obigen Bild erahnen kann:

```
> plot( sum( cos((2*k-1)*Pi*x)/(2*k-1)^2 , k=1..infinity)
>      , x=-2.5..2.5 , y=-1.5..1.5 , xtickmarks=[-2,-1,0,1,2] ,
  ytickmarks=0 );
```



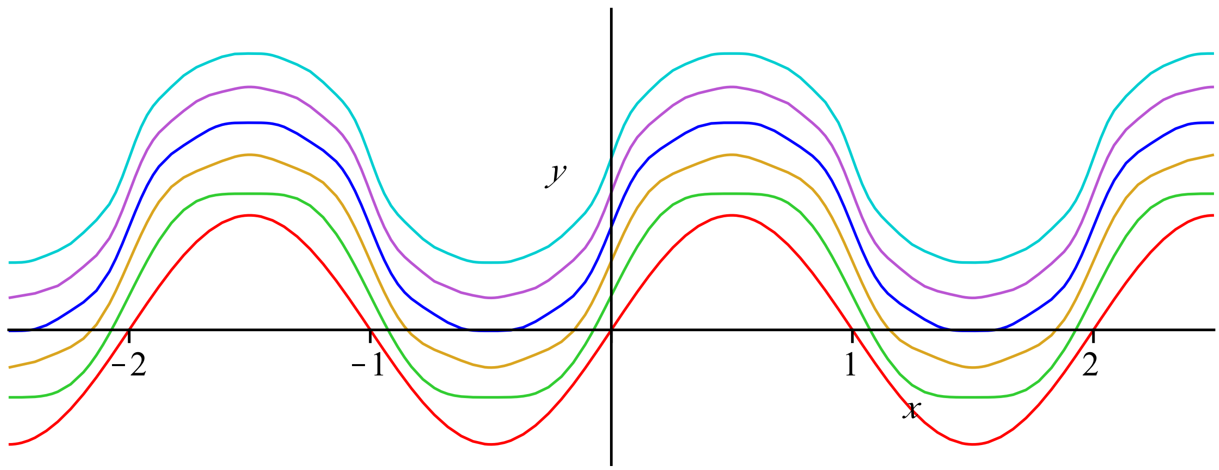
Wenn wir mit denselben Frequenzen und Amplituden jeweils den cosinus durch sinus ersetzen, so bedeutet dies, dass wir auf die einzelnen Komponenten verschiedene Phasenverschiebungen anwenden. Die Komponenten behalten dabei bis auf Verschiebung ihre Form:

```
> plot( [sin(Pi*x) ,
>        sin(3*Pi*x)/9 + .18 ,
>        sin(5*Pi*x)/25 + .36 ,
>        sin(7*Pi*x)/49 + .54 ,
>        sin(9*Pi*x)/81 + .72 ,
>        sin(11*Pi*x)/121 + .9 ]
>       , x=-2.5..2.5 , y=-1.2..1.3 , xtickmarks=[-2,-1,0,1,2] ,
  ytickmarks=0 );
```



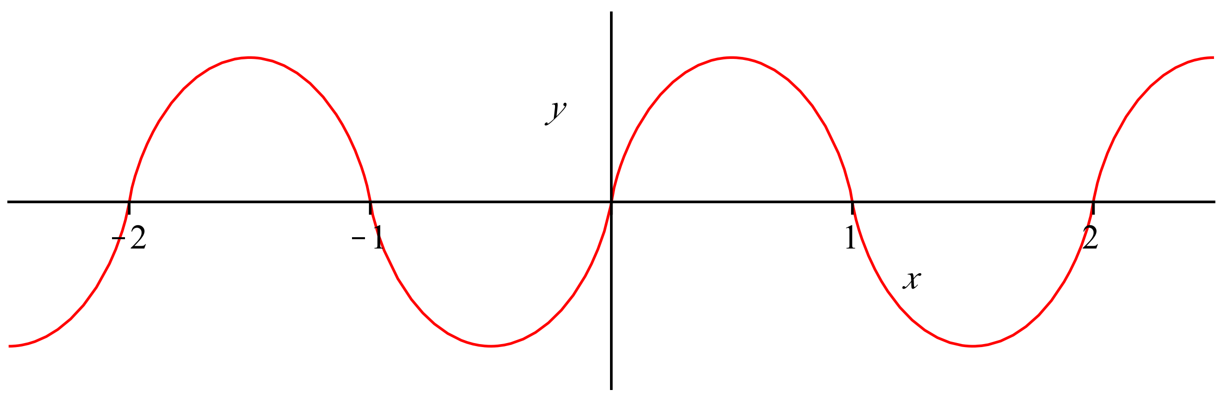
Die Überlagerung dieser Wellen sieht nun aber völlig anders aus:

```
> plot( [sin(Pi*x) ,
>        sin(Pi*x) + sin(3*Pi*x)/9 + .3 ,
>        sin(Pi*x) + sin(3*Pi*x)/9 + sin(5*Pi*x)/25 + .6 ,
>        sin(Pi*x) + sin(3*Pi*x)/9 + sin(5*Pi*x)/25 + sin(7*Pi*x)
  /49 + .9 ,
>        sin(Pi*x) + sin(3*Pi*x)/9 + sin(5*Pi*x)/25 + sin(7*Pi*x)
  /49 + sin(9*Pi*x)/81 + 1.2 ,
>        sin(Pi*x) + sin(3*Pi*x)/9 + sin(5*Pi*x)/25 + sin(7*Pi*x)
  /49 + sin(9*Pi*x)/81 + sin(11*Pi*x)/121 + 1.5 ]
>      , x=-2.5..2.5 , y=-1.2..2.8 , xtickmarks=[-2,-1,0,1,2] ,
  ytickmarks=0 );
```



Die neue Fourierreihe ist aus demselben Grund wie vorher absolut konvergent. Der Graph ihrer Grenzfunktion hat die folgende Form. Sie hat aber keine einfache Beschreibung durch elementare Funktionen (sondern hängt mit der sogenannten Dilogarithmus-Funktion zusammen).

```
> plot( sum( sin((2*k-1)*Pi*x)/(2*k-1)^2 , k=1..infinity)
>     , x=-2.5..2.5 , y=-1.2..1.2 , xtickmarks=[-2,-1,0,1,2] ,
  ytickmarks=0 );
```



Fazit: Die Form einer zusammengesetzten Welle hängt nicht nur von den Amplituden der einzelnen Frequenzen, sondern wesentlich auch von deren Phasen ab.