

Analysis II

Prof. Richard Pink

FS 2011

Michal Sudwoj

msudwoj@student.ethz.ch
(Mitschrift)

Simon Etter

ettersi@student.ethz.ch
(Korrektur & Ergänzung)

Geschrieben in

Inhaltsverzeichnis

I Vorlesungsnotizen	3
1 Einschub: Stetigkeit	4
2 Differentialgleichungen	9
2.1 Existenz- und Eindeutigkeitssatz	10
2.2 Lösungen von Differentialgleichungen in Termen bekannter Funktionen und Integralen	15
2.2.1 Separierbare Differentialgleichungen erster Ordnung	15
2.2.2 Homogene Differentialgleichungen ertster Ordnung	16
2.2.3 Allgemeine lineare Differentialgleichung erster Ordnung	19
Homogener Fall	19
Inhomogener Fall	19
2.2.4 Lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung	21
2.2.5 Lineare Differentialgleichung beliebiger Ordnung	25
Homogener Fall	25
Inhomogener Fall	31
2.2.6 Systeme von linearen Differentialgleichungen erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten	34
2.3 Differentialrechnung in mehreren Variablen	38
Höhere Ableitungen	55
Taylor-Entwickelung	57
Globale Extrema	64
Extrema mit Nebenbedingungen	66
Lagrange-Ansatz	69
Extrema mit mehreren NB	71
2.4 Implizite Funktionen	73
2.4.1 Allgemeine Dimension	76
2.5 Funktionalmatrix	79
2.5.1 Kettenregel	80
Spezialfälle	82
3 Mehrdimensionale Integration	85
3.1 Grundeigenschaften	86
Substitution	92

INHALTSVERZEICHNIS

INHALTSVERZEICHNIS

Anwendungen: Masse (/Ladung), Schwerpunkt, etc.	99
Spezialfall: Rotationskörper	99
Uneigentilches Integral	109
3.1.1 Linienintegral	111
Flächenintegral	114
4 Vektorfelder	119
4.1 Feldlinien	121
4.2 Potentiale	122
4.2.1 Explizite Berechnung eines Potentials	123
Analog in \mathbb{R}^3	125
4.3 Satz von Green in \mathbb{R}^2	133
4.3.1 Anwendung	135
Polarplanimeter von Amsler	136
4.4 Stokes	144
Bedeutung von $\operatorname{rot} \mathbf{K}$	146
4.5 Anwendungen	148
4.5.1 Hydrostatik	148
4.5.2 Hydrodynamik	149
4.5.3 Wärmeleitung	150
4.5.4 Laplace in \mathbb{R}^2	151
Kreisförmige schwingende Membran; Radius $R > 0$	152
II Anhänge	154
A Vorlesungsvorlagen	155
A.1 Predator-Prey Modell	156
A.2 Lineare DifferentialGleichungen mit konstanten Koeffizienten	163
A.3 Beispiele zum Thema Differenzierbarkeit	164
A.4 Beispiele zum Thema Implizite Funktionen	169
Index	172
ToDo	173

Teil I

Vorlesungsnotizen

Kapitel 1

Einschub: Stetigkeit

$f : X \rightarrow \mathbb{R}^n, X \subset \mathbb{R}^m$

f stetig $\iff \forall x \in X \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall y \in X : |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

f gleichmäßig stetig \iff

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in X \forall y \in X : |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

Overfull

Bem.:

gleichmäßig stetig \Rightarrow stetig
gleichmäßig stetig $\not\Leftarrow$ stetig

Bsp.:

$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto |x| \rightsquigarrow \delta := \varepsilon$ tut's
 $|x - y| < \varepsilon \implies ||x| - |y|| < \varepsilon$

Bsp.:

$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sin x \rightsquigarrow d :=$ tut's

$$\begin{aligned} |\sin x - \sin y| &\stackrel{\text{MWS}}{=} \left| \frac{d \sin x}{dx} \right|_{x=t} \text{ für ein } t \text{ zu } x, y \\ |\sin x - \sin y| &= |\cos t| \leq 1 \end{aligned}$$

Bsp.:

$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ nicht gleichmässig stetig. Denn wenn zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ es täte, dann insbesondere $y = x + \frac{\delta}{2}$

$$\left| x^2 - (x + \frac{\delta}{2})^2 \right| = \left| \frac{\delta}{2}(2x + \frac{\delta}{2}) \right| \rightarrow \infty \text{ für } x \rightarrow \infty, \text{ insbesondere nicht } < \varepsilon$$

für alle $x \in \mathbb{R}$

Bsp.:

$\mathbb{R}^{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x}$ gleichmässig stetig, denn: auf $[0, 1]$ wegen Satz (siehe unten), auf $[1, \infty[$ wegen $|f'(x)| \leq 1 \rightsquigarrow$ auf $[0, \infty[$ tut's jeweils das kleinere δ

Satz:

X kompakt \implies jede Folge in X besitzt eine konvergente Teilfolge.

Beweisidee:

Halbierungsprinzip

Satz:

X kompakt, $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig $\implies f$ ist gleichmässig stetig

Bew.:

Wenn nicht, sei $\varepsilon > 0$, so dann: $\forall \delta > 0 \exists x \exists y \in X : |x - y| < \delta \wedge |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$

Zu jedem $r \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$: wähle $x_r \in X, y_r \in X : |x_r - y_r| < \frac{1}{r}, |f(x_r) - f(y_r)| \geq \varepsilon$

Dann ist (x_r) eine Folge in X , d.h.: \exists natürliche Zahlen $r_1 < r_2 < r_3 < \dots$ sodass $\lim_{i \rightarrow \infty} x_{r_i} = x \in X \implies |x - x_{r_i}| \rightarrow 0$ für $i \rightarrow \infty$

$$\underbrace{|x - y_{r_i}|}_{\rightarrow 0} \leq \underbrace{|x - x_{r_i}|}_{\rightarrow 0} + \underbrace{|x_{r_i} - y_{r_i}|}_{\leq \frac{1}{r_i} \rightarrow 0}$$

Aber: f stetig in $x \implies \exists \delta > 0 : \forall z \in X : |z - x| < \delta \implies |f(z) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$

$\implies \exists i_0 \forall i \geq i_0 :$

$$|x - x_{r_i}| < \delta \implies |f(x) - f(x_{r_i})| < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$|x - y_{r_i}| < \delta \implies |f(x) - f(y_{r_i})| < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\implies |f(x_{r_i}) - f(y_{r_i})| \leq \frac{2\varepsilon}{3} \text{ Widerspruch!}$$

Def.: Lipschitz stetig:

f heisst **Lipschitz stetig**, falls $\exists C > 0 : \forall x, y \in X : |f(x) - f(y)| \leq C \cdot |x - y|$ (dann tut's $\delta := \frac{\epsilon}{C}$ in gleichmaessiger Stetigkeit)

Def.: lokal Lipschitz stetig:

f heisst **lokal Lipschitz stetig**, falls:
 $\forall x \in X : \exists C > 0 \exists \delta > 0 : \forall y \in X : |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| \leq C \cdot |x - y|$

Bsp.:

$\mathbb{R}^{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^\alpha$ für $0 < \alpha < 1$ ist nicht lokal Lipschitz stetig, denn:
 $x = 0, |f(x) - f(y)| = y^\alpha \not\leq C \cdot y$ für $y \rightarrow 0$

Bem.:

f differenzierbar $\implies f$ lokal Lipschitz stetig.

Bew.:

head = Denn Für $x \in X$ fest: $f(y) = f(x) + f'(x) \cdot (x - y)$

$$\implies |f(y) - f(x)| \leq |f'(x)| \cdot |x - y| + |x - y|$$

$$\implies C := |f'(x)| + 1$$

$$\frac{g(x)}{|x-y|} \rightarrow 0 \text{ für } y \rightarrow x$$

$$\implies \exists \delta > 0 : \frac{|g(x)|}{|x-y|} \leq 1$$

Dieses C und dieses δ tun's!

Bem.:

Die Grundrechenarten sind lokal Lipschitz stetig.

Bem.:

Jede Komposition von lokal Lipschitz stetigen Funktionen ist Lipschitz stetig.

Kapitel 2

Differenzialgleichungen

Def.: gewöhnliche Differentialgleichung n -ter Ordnung:

Eine **Differentialgleichung** ist eine Gleichung der Form

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

für eine Funktion $F : X \rightarrow \mathbb{R}, X \subset \mathbb{R}^{n+2}$

$$n = 0 : F(x, y) = 0$$

Eine Funktion $x \mapsto y(x)$ mit $F(x, y(x)) = 0$ heisst **implizite Funktion**. So heisst sie auch **implizite Differentialgleichung**.

"explizite" Differentialgleichung n -ter Ordnung:

$$y^{(n)} = G(x, y, \dots, y^{(n-1)})$$

für eine Funktion G .

Interpretation für $n = 1$:

$$y' = G(x, y); G : X \rightarrow \mathbb{R}, x \subset \mathbb{R}^2$$

Richtungsfeld durch G bestimmt.

Graph einer Lösung = Kurve, die überall tangential zum Richtungsfeld ist.

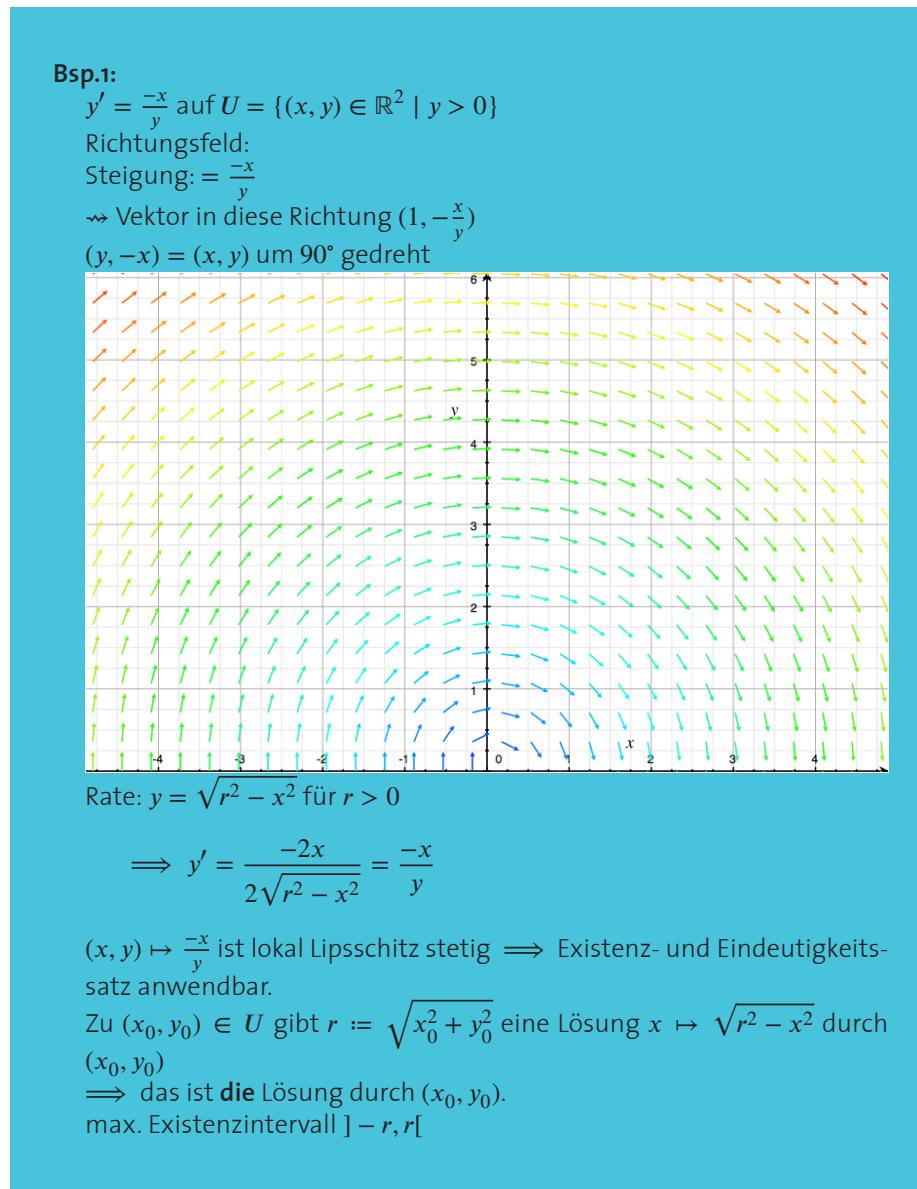
2.1 Exsistenz- und Eindeutigkeitssatz

Satz: Exsistenz- und Eindeutigkeitssatz:

Sei $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen und $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ lokal Lipschitz stetig. Sei $(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}) \in U$ ein Anfangspunkt.

- (a) Die Gleichung $y^{(n)} = F(x, y, \dots, y^{(n-1)})$ hat eine Lösung $y : [x_0, x_0 + \varepsilon[\rightarrow \mathbb{R}$ mit $y^{(i)}(x_0) = y_0^{(i)}$ für alle $0 \leq i \leq n-1$ für ein $\varepsilon > 0$.
- (b) Zwei solche Lösungen stimmen auf dem Durchschnitt ihrer Existenzintervalle überein.
- (c) Es existiert eine eindeutige "maximale" Lösung, d.h. mit ε maximal, d.h. auf $[x_0, x_1[$ mit x_1 maximal
- (d) Diese maximale Lösung verlässt jede kompakte Teilmenge $K \subset U$, d.h. $\exists \xi \in [x_0, x_1[$ mit $\forall x \in [\xi, x_1[$: $(x, y(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) \notin K$

Analog auf $]x_2, x_1]$ nach hinten! Analog vektorwertige Funktionen: $U \subset \mathbb{R}^{1+n \cdot m}, y : [x_0, x_0 + \varepsilon[\rightarrow \mathbb{R} \Leftrightarrow$ System von m gekoppelten Differentialgleichungen



Bsp.2:

$$y' = \underbrace{y^2}_{\text{lokal Lipschitz stetig}} \text{ auf } U = \mathbb{R}^2$$

Rechengang: Vertausche x, y :

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} = y^2 &\stackrel{y \neq 0}{\iff} \frac{dx}{dy} = \frac{1}{y^2} \iff x = \int \frac{dy}{y^2} = \frac{-1}{y} + c \\ &\iff \frac{-1}{y} = c - x \iff y = \frac{1}{c - x} \end{aligned}$$

Test:

$$\left(\frac{1}{c-x}\right)' = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{c-x}\right) = \frac{-1}{(c-x)^2} = \left(\frac{1}{c-x}\right)^2$$

\implies Die Funktion $x \mapsto y := \frac{1}{c-x}$ ist eine Lösung. $\mathbb{R} \setminus \{c\} \rightarrow \mathbb{R}$ für jedes $c \in \mathbb{R}$.

Diese gilt durch $(x_0, y_0) \iff x_0 \neq c \wedge y_0 = \frac{1}{c-x_0} \neq 0 \iff \frac{1}{y_0} = c - x_0 \iff y_0 \neq 0 \wedge c = \frac{1}{y_0} + x_0$

\rightsquigarrow Maximallösungen: auf $]-\infty, c[$ oder $]c, \infty[$ sowie $y \equiv 0$ auf \mathbb{R}

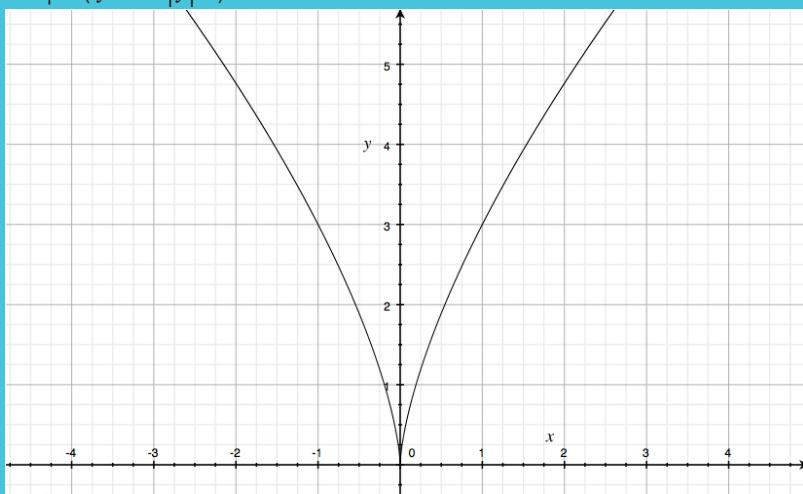
KAPITEL 2. DIFFERENZIALGLEICHUNGEN

2.1. EXSISTENZ- UND EINDEUTIGKEITSSATZ

Bsp.3:

$$y' = 3|y|^{\frac{2}{3}}$$

Graph ($y \mapsto 3|y|^{\frac{2}{3}}$)



nicht lokal Lipschitz stetig bei $y = 0$

Fall $y > 0$:

$$\frac{dy}{dx} = 3y^{\frac{2}{3}}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}}$$

$$x = \int \frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}} dy = y^{\frac{1}{3}} + c$$

$$y^{\frac{1}{3}} = x - c$$

$$y = (x - c)^3$$

Diese $> 0 \iff x > c$

\rightsquigarrow Lösung: $]c, \infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto (x - c)^3$

Test: $y' = 3(x - c)^2 = 3|x - c|^{\frac{2}{3}}$

Fall $y < 0$...

Lösung: $]-\infty, c[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto (x - c)^3$

\rightsquigarrow Lösung: $]-\infty, c[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto (x - c)^3$

KAPITEL 2. DIFFERENZIALGLEICHUNGEN

2.1. EXSISTENZ- UND EINDEUTIGKEITSSATZ

Bsp.:

Finde alle Kurven in \mathbb{R}^2 , welche die Hyperbeln $xy = \text{const}$ überall senkrecht schneiden (**Orthogonaltrajektorien**)
Durch (x_0, y_0) geht die Hyperbel $xy = x_0 y_0$

$$\begin{aligned} xy &= x_0 y_0 \\ y &= \frac{x_0 y_0}{x} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{-x_0 y_0}{x^2} \\ \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0} &= -\frac{y_0}{x_0} \\ \text{Orthogonale Steigung: } &+ \frac{x_0}{y_0} \end{aligned}$$

Gesuchte Kurve hat die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$$

Die ist **separierbar**. Trick: Multipliziere mit $y \cdot dx$

$$\begin{aligned} y dy &= x dx \\ y^2 &= \int 2y dy = \int 2x dx = x^2 + c \\ y &= \pm \sqrt{x^2 + c} \\ y^2 - x^2 &= c \\ (y - x)(y + x) &= c \text{ Drehung um } 45^\circ \text{ Grad} \end{aligned}$$

Antwort: Alle um 45° gedrehten Hyperbeln
Nachrechnen \Rightarrow okay, auch für $x = 0$ und $y = 0$

2.2 Lösungen von Differentialgleichungen in Termen bekannter Funktionen und Integralen

2.2.1 Separierbare Differentialgleichungen erster Ordnung

$$y' = g(x) \cdot K(y)$$

Ansatz:

- (a) Für y_0 mit $K(y_0) = 0$ ist $y \equiv y_0$ eine Lösung
- (b) Für $K(y) \neq 0$ multipliziere mit $dx \cdot K(y)^{-1}$

$$\int \frac{dy}{K(y)} = \int g(x) dx$$

$$H(y) = F(x) + c$$

$H(y)$ ist lokal invertierbar, da $\frac{dH}{dy}(y) = \frac{1}{K(y)} \neq 0$
 ↳ Lösung ist: $y = H^{-1}(F(x) + c)$

Bsp.:

$$\frac{dy}{dx} = 1 + y^2$$

$$1 + y^2 \neq 0 \text{ immer}$$

$$\int \frac{dy}{1 + y^2} = \int dx$$

$$\arctan y = x + c$$

$$y = \tan(x + c)$$

KAPITEL 2. DIFFERENZIALGLEICHUNGEN

2.2. LÖSUNGEN VON DIFFERENTIALGLEICHUNGEN IN TERMEN BEKANNTER FUNKTIONEN UND INTEGRALEN

Bsp.:

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}$$

konstante Lösungen: $y = \pm 1$

nichtkonstante Lösungen:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\arcsin y = \arcsin x + c$$

$$y = \sin(\arcsin x + c)$$

$$= x \cdot \cos c + \cos \arcsin x \cdot \sin c$$

$$= x \cdot b \pm \sqrt{1-x^2} \cdot a, a^2 + b^2 = 1$$

$$= xb + \sqrt{1-x^2} \cdot a$$

2.2.2 Homogene Differentialgleichungen erster Ordnung

$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ mit $f(x, y) = f(cx, cy)$ für alle c, x, y

Äquivalent: $\frac{dy}{dx} = f\left(1, \frac{y}{x}\right)$

Ansatz: $u = \frac{y}{x}$

$$\Leftrightarrow \frac{du}{dx} = \frac{\frac{dy}{dx}}{x} - \frac{y}{x^2} = \frac{f(1, u)}{x} - \frac{u}{x}$$

$\frac{du}{dx} = \frac{f(1, u) - u}{x}$ separierbar

KAPITEL 2. DIFFERENZIALGLEICHUNGEN

2.2. LÖSUNGEN VON DIFFERENTIALGLEICHUNGEN IN TERMEN BEKANNTER FUNKTIONEN UND INTEGRALEN

Bsp.:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y + \sqrt{x^2 + y^2}}{x}$$

$$\frac{y}{x} = u \Leftrightarrow u + \sqrt{1 + u^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{du}{dx} = \frac{\sqrt{1 + u^2}}{x}$$

\Leftrightarrow keine konstante Lösungen

$$\int \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\text{arsinh } u = \log |x| + c$$

$$u = \sinh(\log |x| + c) = \sinh \log ax = \frac{e^{\log ax} - e^{-\log ax}}{2} = \frac{ax - \frac{1}{ax}}{2}$$

$$\Leftrightarrow y = ux = \frac{ax - \frac{1}{ax}}{2} \cdot x = \frac{a^2 x^2 - 1}{2a}$$

KAPITEL 2. DIFFERENZIALGLEICHUNGEN

2.2. LÖSUNGEN VON DIFFERENTIALGLEICHUNGEN IN TERMEN BEKANNTER FUNKTIONEN UND INTEGRALEN

Bsp.:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{x + qy}{qx - y} = \frac{1 + q\frac{y}{x}}{q - \frac{y}{x}} \\ u &= \frac{y}{x} \Leftrightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{1 + qu}{q - u} \\ \frac{du}{dx} &= \frac{\frac{1+qu}{q-u} - u}{x} = \frac{\frac{1+u^2}{q-u}}{x} \\ \Leftrightarrow \int \frac{q-u}{1+u^2} du &= \int \frac{dx}{x} = \log|x| + c\end{aligned}$$

Linke Seite: $q \cdot \arctan u - \underbrace{\int \frac{u du}{1+u^2}}_{\frac{1}{2} \log(1+u^2)}$

$$q \arctan u - \frac{1}{2} \log(1+u^2) = \log|x| + c$$

nicht nach u auflösbar. Aber:

$$\begin{aligned}x &= r \cos \phi \\ y &= r \sin \phi \\ \Leftrightarrow u &= \tan \phi \\ q\phi - \underbrace{\frac{1}{2} \log \frac{1}{\cos^2 \phi}}_{+\log|\cos \phi|} &= \underbrace{\log|r \cos \phi|}_{\log r + \log|\cos \phi|} + c \\ q\phi &= \log r + c \\ r &= e^{q\phi - c} \\ x &= e^{q\phi - c} \cos \phi \\ y &= e^{q\phi - c} \sin \phi\end{aligned}$$

logarithmische Spirale

KAPITEL 2. DIFFERENZIALGLEICHUNGEN

2.2. LÖSUNGEN VON DIFFERENTIALGLEICHUNGEN IN TERMEN BEKANNTER FUNKTIONEN UND INTEGRALEN

2.2.3 Allgemeine lineare Differentialgleichung erster Ordnung

$$y' = p(x) \cdot y + q(x)$$

Homogener Fall

homogen falls $q(x) \equiv 0$

$$\frac{dy}{dx} = p(x) \cdot y \text{ ist separierbar}$$

konstante Lösungen: $y \equiv 0$

$$\log |y| = \int \frac{dy}{y} = \int p(x) dx$$

$$\underbrace{\log |y| - c}_{\log \frac{y}{a}, a \neq 0} = \int p(x) dx$$

allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$y = a \cdot e^{\int p(x) dx} \text{ für alle } a \in \mathbb{R} \text{ konstant}$$

Inhomogener Fall

Variation der Konstanten, d.h. ersetze die Konstante durch eine Funktion.

Wähle eine nichtriviale Lösung $Y \neq 0$ der homogenen Differentialgleichung:
 $Y' = p(x) \cdot Y$

Ansatz: $y(x) = Y(x) \cdot u(x)$

$$\begin{aligned} y' &= (Yu)' = Y'u + Yu' = pYu + Yu' \\ &\stackrel{=py+q}{=} pYu + q \\ &\stackrel{=pYu+q}{=} \end{aligned}$$

$$Yu' = q$$

$$u' = \frac{q}{Y}$$

$$u(x) = \int \frac{q(x)}{Y(x)} dx + c$$

$$y(x) = Y(x) \cdot \left[\int \frac{q(x)}{Y(x)} dx + c \right]$$

$$y(x) = Y(x) \cdot \int \frac{q(x)}{Y(x)} dx + c \cdot Y(x), c \text{ const.}$$

KAPITEL 2. DIFFERENZIALGLEICHUNGEN

2.2. LÖSUNGEN VON DIFFERENTIALGLEICHUNGEN IN TERMEN BEKANNTER FUNKTIONEN UND INTEGRALEN

Bsp.1:

$$y' = x^3 - xy$$

homogene DGL: $Y' = -xY$

$$\int -x \, dx = -\frac{x^2}{2} + c$$

Wähle $Y = e^{-\frac{x^2}{2}}$

$$\Rightarrow y(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \int \frac{x^3}{e^{-\frac{x^2}{2}}} \, dx + c \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$\int x^3 e^{\frac{x^2}{2}} = \left| \begin{array}{l} u = \frac{x^2}{2} \\ du = x \, dx \\ x^3 = x^2 x = 2ux \end{array} \right|$$

$$= \int \underbrace{2u}_{\downarrow} \cdot \underbrace{e^u}_{\uparrow} \, du$$

$$= 2ue^u - \int 2e^u \, du$$

$$= 2ue^u - 2e^u + c$$

$$= 2e^u(u - 1) + c$$

$$= 2e^{\frac{x^2}{2}} \left(\frac{x^2}{x} - 1 \right) + c$$

$$= e^{\frac{x^2}{2}} (x^2 - 2) + c$$

$$y(x) = x^2 - 2 + ce^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$\text{Probe: } y' = 2x - cx e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$x^3 - xy = x^2 - x(x^2 - 2 + ce^{-\frac{x^2}{2}})$$

KAPITEL 2. DIFFERENZIALGLEICHUNGEN

2.2. LÖSUNGEN VON DIFFERENTIALGLEICHUNGEN IN TERMEN BEKANNTER FUNKTIONEN UND INTEGRALEN

Bsp.2:

$$y' + \frac{y}{x} = \sqrt{x} \text{ für } x > 0$$

$$\text{homogene DGL: } Y' + \frac{Y}{x} = 0$$

$$\begin{aligned} \text{d.h. } \frac{dY}{dx} = -\frac{Y}{x} &\iff \int \frac{dY}{Y} = -\int \frac{dx}{x} \\ &\iff \log |Y| = -\log |x| + c \end{aligned}$$

$$= \log \frac{1}{|x|} + c$$

$$Y = \text{const.} \cdot \frac{1}{x}$$

$$\text{Wähle } Y = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{q(x)}{Y(x)} = \frac{\sqrt{x}}{\frac{1}{x}}$$

$$\text{Ansatz: } y = u \frac{1}{x}$$

$$y(x) = \frac{1}{x} \int x^{\frac{3}{2}} dx + \frac{c}{x} = \frac{1}{x} \left(\frac{2}{3} x^{\frac{5}{2}} \right) + \frac{c}{x}$$

$$\Rightarrow y(x) = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + \frac{c}{x}$$

2.2.4 Lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$y'' + p(x) \cdot y' + q(x) \cdot y = r(x)$$

homogen falls $r(x) = 0$

- (a) Suche Lösungen der homogenen Differentialgleichung $Y'' + pY' + qY = 0$
- (b) Variation der Konstanten für inhomogene Gleichung

KAPITEL 2. DIFFERENZIALGLEICHUNGEN

2.2. LÖSUNGEN VON DIFFERENTIALGLEICHUNGEN IN TERMEN BEKANNTER FUNKTIONEN UND INTEGRALEN

Bsp.: Ad (b):

$$y'' + y = \tan x$$

$Y'' + Y = 0$ Errate Lösungen: $\sin x, \cos x$

\Leftrightarrow allg. Lösung der homogenen DGL:

$a \cdot \sin x + b \cdot \cos x; a, b$ konstant

Ansatz: $y = u \sin x + v \cos x$

für zu bestimmende Funktionen u, v

$$\Leftrightarrow y' = (u \cos x - v \sin x) + (\underbrace{u' \sin x + v' \cos x}_{\text{Setze } =0})$$

$$\Leftrightarrow y'' = (-u \sin x - v \cos x) + (u' \cos x - v' \sin x)$$

$$\underbrace{y + y''}_{= \tan x} = u' \cos x - v' \sin x$$

$$u' \sin x + v' \cos x = 0$$

$$u' \cos x - v' \sin x = \tan x$$

Dies ist ein LGS für u' und v'

$$u'(\underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_{=1}) + v'(\underbrace{\cos x \sin x - \sin x \cos x}_{=0}) = \underbrace{\tan x \cos x}_{=\sin x}$$

$$\Leftrightarrow u' = \sin x$$

$$\text{analog: } v' = \frac{-\sin^2 x}{\cos x}$$

$$\Leftrightarrow u = \int \sin x \, dx = -\cos x + \text{const.}$$

$$v = - \int \frac{\sin^2 x}{\cos x} \, dx = \frac{1}{2} \log \left| \frac{1 - \sin x}{1 + \sin x} \right| + \sin x + \text{const.}$$

\Leftrightarrow allg. Lösung:

$$y(x) = -\cos x \sin x + \left(\frac{1}{2} \log \left| \frac{1 - \sin x}{1 + \sin x} \right| + \sin x \right) \cdot \cos x$$

$$+ a \sin x + b \cos x$$

$$= \frac{1}{2} \cos x \log \left| \frac{1 - \sin x}{1 + \sin x} \right| + a \sin x + b \cos x$$

für Konstanten a, b

KAPITEL 2. DIFFERENZIALGLEICHUNGEN

2.2. LÖSUNGEN VON DIFFERENTIALGLEICHUNGEN IN TERMEN BEKANNTER
FUNKTIONEN UND INTEGRALEN

Too long

KAPITEL 2. DIFFERENZIALGLEICHUNGEN

2.2. LÖSUNGEN VON DIFFERENTIALGLEICHUNGEN IN TERMEN BEKANNTER FUNKTIONEN UND INTEGRALEN

Bsp.: für Lösung mit Potenzreihenansatz:

Besselsche DGL:

$$f''(x) + \frac{1}{x} f'(x) + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) \cdot f(x) = 0, n \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$$

Gesucht: alle Lösungen der Form

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot x^k \text{ für Konstanten } a_k$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot k \cdot x^{k-1}$$

$$f''(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot k \cdot (k-1) \cdot x^{k-2}$$

$$\Leftrightarrow 0 = \sum_{k=0}^{\infty} a_k k(k-1)x^{k-2}$$

$$+ \frac{1}{x} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot k \cdot x^{k-1}$$

$$+ \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot x^k$$

Setze $a_{-1} = a_{-2} = 0$

$$0 = \sum_{k=0}^{\infty} x^{k-2} [a_k k(k-1) + a_k k - a_k n^2] + \sum_{k=0}^{\infty} a_{k-2} x^{k-2}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} x^{k-2} \left[\underbrace{a_k k(k-1) + a_k k - a_k n^2}_{=0 \text{ nach Potenzreihenidentitätssatz}} + a_{k-2} \right]$$

d.h. $\forall k \geq 0 : a_k(k^2 - n^2 + a_{k-2}) = 0$

$$\Leftrightarrow \forall k \geq 0 : \begin{cases} a_k = \frac{a_{k-2}}{n^2 - k^2} & k \neq n \\ a_{n-2} = 0 & k = n \end{cases}$$

$\Leftrightarrow a_k = 0$ falls $k \not\equiv n \pmod{2}$

$a_k = 0$ falls $k < n$

Setze $a_n = a$

$$\Leftrightarrow \text{für } l \geq 0 \text{ gilt } a_{n+2l} = \frac{a_{n+2(l-1)}}{-2l(2n+2l)} = \frac{-a_{n+2(l-1)}}{4l(n+l)} \text{ falls } l \geq 1$$

Michał Sudwoj

Stand: 17. November 2011

$$\frac{(-1)^{24} a}{4^l l! (n+l)(n+l-1)\cdots(n+1)} = \frac{(-1)^l \cdot a \cdot n!}{4^l \cdot l! \cdot (n+1)!}$$



2.2.5 Lineare Differentialgleichung beliebiger OrdnungFunktionen von x

$$y^{(n)} + f_{n-1} \cdot y^{(n-1)} + \dots + f_0 y^{(0)} = g$$

Homogener Fall

homogen falls $g = 0$, sonst inhomogen
 Abkürzung: $D := \frac{d}{dx}$. Dann $y' = Dy$

$$y'' = DDy = D^2y$$

$$D^n y = y^{(n)}$$

$L := D^n + f_{n-1} D^{n-1} + \dots + f_0 D^0$ Differentialoperator n -ter Ordnung

$$Ly = g$$

Das ist eine linearer Operator

$$L(y_1 + y_2) = Ly_1 + Ly_2$$

$$L(\lambda y) = \lambda L(y) \text{ für } \lambda \text{ konstant}$$

D.h. L ist eine lineare Abbildung im Sinne der linearen Algebraz.B. wenn $f_0, \dots, f_{n-1} \in C^\infty(I)$, I Intervall

$$\Leftrightarrow L : C^\infty(I) \rightarrow C^\infty(I)$$

Die Lösungen von $Ly = 0$ sind genau der Kern von L , also ein Untervektorraum und zwar der Dimension n . Denn: die Abbildung

$$\text{Kern}(L) \rightarrow \mathbb{R}, y \mapsto (y(x_0), \dots, y^{(n-1)}(x_0))$$

ist bijektiv nach dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz
 Folgen:

- (a) Sind y_1, \dots, y_n linear unabhängige Lösungen, so ist jede Lösung gleich $\lambda_1 y_1 + \dots + \lambda_n y_n$ für Konstanten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$
- (b) Ist y_p eine "partikuläre" Lösung von $Ly_p = g$, so hat die allgemeine Lösung $Ly = g$ die Gestalt $y_p + \lambda_1 y_1 + \dots + \lambda_n y_n$, λ_i Konstanten.

KAPITEL 2. DIFFERENZIALGLEICHUNGEN

2.2. LÖSUNGEN VON DIFFERENTIALGLEICHUNGEN IN TERMEN BEKANNTER FUNKTIONEN UND INTEGRALEN

d.h. y_1, \dots, y_n sind Basis des Lösungsraumes

Ab jetzt: f_0, \dots, f_{n-1} konstant d.h. $Ly = y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_0y$ mit Konstanten a_i

$$n = 1 :$$

$$y' + a_0y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -a_0y$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int -a_0 dx$$

$$\log |y| = -a_0x + c$$

$$y = c' \cdot e^{-a_0x}$$

$$\Leftrightarrow \text{Fundamentallösung } y_1 = e^{-a_0x}$$

Ansatz: $y = e^{\lambda x}$, λ konstant

$$De^{\lambda x} = \frac{d}{dx}(e^{\lambda x}) = \lambda \cdot e^{\lambda x}$$

$$D^k e^{\lambda x} = \lambda^k \cdot e^{\lambda x}$$

$$\Leftrightarrow Le^{\lambda x} = (\underbrace{\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0}_{\text{charakteristisches Polynom von } L := \text{ch}_L(\lambda)})e^{\lambda x}$$

$\Leftrightarrow e^{\lambda x}$ ist Lösung von $Ly = 0$ g.d., w. λ eine Nullstelle von $\text{ch}_L(\lambda)$ ist.

Fakt:

Falls $\text{ch}_L(\lambda)$ nur einfache Nullstellen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ hat, sind $e^{\lambda_1 x}, \dots, e^{\lambda_n x}$ Fundamentallösungen von $Ly = 0$

KAPITEL 2. DIFFERENZIALGLEICHUNGEN

2.2. LÖSUNGEN VON DIFFERENTIALGLEICHUNGEN IN TERMEN BEKANNTER FUNKTIONEN UND INTEGRALEN

Bsp.:

$$\begin{aligned}Ly &= y'' + 6y' + 8y = 0 \\ \Leftrightarrow \text{ch}_L(\lambda) &= \lambda^2 + 6\lambda + 8 = (\lambda + 4)(\lambda + 2) = 0 \\ \Leftrightarrow \lambda &= -2, -4 \\ \text{allgemeine Lösung: } &a \cdot e^{-2x} + b \cdot e^{-4x} \text{ für Konstanten } a, b\end{aligned}$$

Bsp.:

$$\begin{aligned}y'' + 9y &= 0 \\ \text{ch}_L(\lambda) &= \lambda^2 + 9 = 0 \\ \Leftrightarrow \lambda &= \pm 3i \\ \text{allgemeine Lösung: } &a \cdot e^{3ix} + b \cdot e^{-3ix}; a, b \in \mathbb{C} \text{ konstant} \\ \text{allgemeine reelle Lösungen:} \\ &a(\cos 3x + i \sin 3x) + b(\cos 3x - i \sin 3x) \\ &= \underbrace{(a+b)}_c \cos 3x + \underbrace{(a-b)i}_{d} \sin 3x \\ \text{allgemeine Lösung: } &c \cdot \cos 3x + d \cdot \sin 3x \\ \text{komplexe Lösung: } &c, d \in \mathbb{C} \\ \text{reelle Lösung: } &c, d \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

KAPITEL 2. DIFFERENZIALGLEICHUNGEN

2.2. LÖSUNGEN VON DIFFERENTIALGLEICHUNGEN IN TERMEN BEKANNTER FUNKTIONEN UND INTEGRALEN

Bsp.:

$$\begin{aligned}
 y'' - 2y' + 2y &= 0 \\
 \text{ch}_L(\lambda) &= \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0 = (\lambda - 1 - i)(\lambda - 1 + i) = 0 \\
 \iff \lambda &= 1 \pm i \\
 \rightsquigarrow \text{Fundamentallösungen:} \\
 e^{(1\pm i)x} &= e^x \cdot e^{\pm ix} = e^x(\cos x \pm i \sin x) \\
 \text{Äquivalente Fundamentallösungen: } &e^x \cos x, e^x \sin x
 \end{aligned}$$

Bsp.:

$$\begin{aligned}
 y^{(4)} + 2y'' - 8y' + 5y &= 0 \\
 \text{ch}_L(\lambda) &= \lambda^4 + 2\lambda^2 - 8\lambda + 5 \\
 &= (\underbrace{\lambda - 1}_\text{doppelte Nullstelle})^2 (\underbrace{\lambda^2 + 2\lambda + 5}_{\text{Nullstelle } -1 \pm 2i}) \\
 &= 0 \\
 \rightsquigarrow 3 \text{ linear unabhängige Lösungen: } &e^x, e^{(-1\pm 2i)x}
 \end{aligned}$$

Vergleiche: $y'' = 0$ hat $\text{ch}_L(\lambda) = \lambda^2$
Fundamentallösungen: $\underbrace{1}_\text{zusätzl. Lösung}, \underbrace{x}$

Aber xe^x ist eine weitere Lösung, und die allgemeine Lösung lautet

$$ae^x + bxe^x + ce^{(-1+2i)x} + de^{(-1-2i)x}$$

Allgemein: Jede Nullstelle λ con ch_L der Multiplizität $k \geq 1$ liefert Fundamentallösungen $e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, \dots, x^{k-1}e^{\lambda x}$.
Wieso: Schreibe $y = z \cdot e^{\lambda x}, z = z(x)$

KAPITEL 2. DIFFERENZIALGLEICHUNGEN

2.2. LÖSUNGEN VON DIFFERENTIALGLEICHUNGEN IN TERMEN BEKANNTER FUNKTIONEN UND INTEGRALEN

$$Ly = L(z \cdot e^{\lambda x})$$

$$D(z \cdot e^{\lambda x}) = \frac{dz}{dx} \cdot e^{\lambda x} + \lambda z \cdot e^{\lambda x} = \left(\frac{dz}{dx} + \lambda z \right) \cdot e^{\lambda x} = ((D + \lambda)(z)) \cdot e^{\lambda x}$$

$$\implies D^k(z \cdot e^{\lambda x}) = ((D + \lambda)^k(z)) \cdot e^{\lambda x}$$

\implies Ist $L = D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \dots + a_0$ so gilt $L(z \cdot e^{\lambda x}) = 0$

$$\iff (\underbrace{(D + \lambda)^n + a_{n-1}(D + \lambda)^{n-1} + \dots + a_0}_{L'})z = 0$$

$$\text{ch}_{L'} = \text{ch}_L(\lambda' + \lambda)$$

Also ist λ k -fache Nullstelle con $\text{ch}_L \iff \lambda' = 0$ k -fache Nullstelle con $\text{ch}_L \iff L' = D^n + \dots + *D^k \implies z = 1, x, \dots, x^{k-1}$ sind Lösungen!

Bsp.:

$$y^{(4)} + 2y'' + y = 0$$

$$\text{ch}_L(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = (\lambda^2 + 1)^2 = (\lambda - i)^2(\lambda + i)^2 = 0$$

doppelte Nullstelle $\pm i$

\rightsquigarrow allgemeine Lösungen: lineare Kombinationen von

$$e^{ix}, xe^{ix}, e^{-ix}, xe^{-ix}$$

allgemeine reelle Lösungen: lineare Kombinationen von

$$\cos x, \sin x, x \cos x, x \sin x$$

KAPITEL 2. DIFFERENZIALGLEICHUNGEN

2.2. LÖSUNGEN VON DIFFERENTIALGLEICHUNGEN IN TERMEN BEKANNTER FUNKTIONEN UND INTEGRALEN

Bsp.: gedämpfter harmonischer Oszillator:

$$Ly = m \cdot \ddot{y} + b \cdot \dot{y} + f \cdot y$$

$$m, f > 0, b \geq 0$$

$$\text{Eigenwerte: } \lambda = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4fm}}{2m}$$

$$b = 0 : \lambda = \pm \frac{\sqrt{4fm}}{2m} \cdot i = vi$$

↔ Fundamentallösungen: $\cos vt, \sin vt$

$0 < b < \sqrt{4fm}$: kleine Reibung:

$$\lambda = -\mu \pm iv, v \neq 0, \mu > 0 \implies e^{-\mu t} \cdot \cos vt, e^{-\mu t} \sin vt$$

$$b = \sqrt{4fm} : \lambda = \frac{-b}{2m} \text{ doppelte Nullstelle } e^{\lambda b}, b \cdot e^{\lambda b}$$

$$b > \sqrt{4fm} : e^{\lambda_1 b}, e^{\lambda_2 b} \text{ für } \lambda_1 > \lambda_2$$

Bsp.: Randwertproblem:

Hat die DGL $y'' = y$ eine Lösung mit $y(0) = y(1) = 1$? charakteristische Gleichung: $\lambda^2 - 1 = 0$

Eigenwerte ± 1

allgemeine Lösung $ae^x + be^{-x}$

Einsetzen:

$$a + b = 1$$

$$ae + be^{-1} = 1$$

Antwort:

$$y = \frac{e^x + e^{1-x}}{e + 1}$$

KAPITEL 2. DIFFERENZIALGLEICHUNGEN

2.2. LÖSUNGEN VON DIFFERENTIALGLEICHUNGEN IN TERMEN BEKANNTER FUNKTIONEN UND INTEGRALEN

Bem.:

Asymptotisches Verhalten für $x \rightarrow \infty$ oder $x \rightarrow -\infty$ ($\stackrel{\wedge}{=}$ Randbedingung bei $\pm\infty$)

$x^j e^{\lambda x} \rightarrow g.d.$, w. $\Re(\lambda) < 0$ ist, denn $|e^{\lambda x}| = e^{\Re(\lambda)x}$

$x^j e^{\lambda x}$ für $x \rightarrow 0$ beschränkt $\Leftrightarrow \Re(\lambda) < 0 \vee (\Re(\lambda) = 0 \wedge j = 0)$

Entsprechend: eine Linearkombination solchen Funktionen geht gegen 0 (bzw. bleibt beschränkt) g.d., w. jeder Summand es tut.

Inhomogener Fall

Fakt:

Ist $g(x) = a \cdot e^{\lambda x}$; a, λ konstant und λ kein Eigenwert von L , dann existiert eine partikuläre Lösung von $Ly = g$ mit $y = b \cdot e^{\lambda x}$; b konstant.

Denn:

$$L(be^{\lambda x}) = bL(e^{\lambda x}) = b \underbrace{\text{ch}_L(\lambda)}_{\neq 0} e^{\lambda x}$$

und

$$b := \frac{a}{\text{ch}_L(\lambda)}$$

Fakt:

Entsprechend Linearkombinationen: Sind $Ly_k = g_k(x)$ für $k = 1, \dots, m$, dann ist $L(y_1 + \dots + y_m) = g_1(x) + \dots + g_m(x)$

KAPITEL 2. DIFFERENZIALGLEICHUNGEN

2.2. LÖSUNGEN VON DIFFERENTIALGLEICHUNGEN IN TERMEN BEKANNTER FUNKTIONEN UND INTEGRALEN

Bsp.:

Bestimme alle Lösungen der DGL

$$y^{(4)} + 2y'' - 8y' + 5y = e^{-x}$$

die für $x \rightarrow \infty$ beschränkt bleiben.

Lösung:

$$\begin{aligned} \text{ch}_L(\lambda) &= \lambda^4 + 2\lambda^2 - 8\lambda + 5 = 0 \\ &= (\lambda - 1)(\lambda^3 + \lambda^2 + 3\lambda - 5) \\ &= (\lambda - 1)^2(\lambda^2 + 2\lambda + 5) \end{aligned}$$

$\lambda = +1$ mit Multiplizität 2

$\lambda = -1 \pm 2i$ mit Multiplizität 1

$\lambda = -1$ ist kein EW!

Ansatz: partikuläre Lösung

$$y = be^{-x}; Ly = e^{-x}$$

$$\text{Ausrechnen } \rightsquigarrow b = \frac{1}{16}$$

allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung

$$\frac{1}{16}e^{-x} + (\alpha + \beta x)e^x + \gamma e^{(-1+2i)x} + \delta e^{(-1-2i)x}$$

Fakt:

Ist λ eine Nullstelle von ch_L der Multiplizität $m \geq 1$, dann hat $Ly = ae^{\lambda x}$ eine partikuläre Lösung der Gestalt $y = bx^m e^{\lambda x}$, b konstant.

KAPITEL 2. DIFFERENZIALGLEICHUNGEN

2.2. LÖSUNGEN VON DIFFERENTIALGLEICHUNGEN IN TERMEN BEKANNTER FUNKTIONEN UND INTEGRALEN

Fakt:

Ist λ eine Nullstelle der Ordnung m von ch_L , und $P(x)$ ein Polynom von Grad l , so hat $Ly = P(x)e^{\lambda x}$ eine partikuläre Lösung der Form $y = Q(x)e^{\lambda x}$

Bsp.:

$$y^{(5)} + y = xe^x$$

$$\text{ch}_L(\lambda) = \lambda^5 + 1$$

$\lambda = 1$ ist keine Nullstelle

Ansatz für partikuläre Lösung:

$$y = (a + bx)e^x = ae^x + bxe^x$$

$$y^{(5)} = ae^x + bxe^x + 5be^x$$

$$\rightsquigarrow \underbrace{y^{(5)} + y}_{=xe^x} = (\underbrace{a + a + 5b}_0)e^x + (\underbrace{b + b}_1)xe^x$$

$$\rightsquigarrow b = \frac{1}{2}; 2a + 5b = 0 \implies a = -\frac{5}{2}b = -\frac{5}{4}$$

\rightsquigarrow partikuläre Lösung:

$$y = \left(-\frac{5}{4} + \frac{1}{2}x\right)e^x$$

Fakt: Variante: falls alle Koeffizienten reell::

Ist $\lambda = \mu + iv; \mu, v \in \mathbb{R}; v \neq 0$, Nullstelle der Ordnung m , so hat $Ly = P_1(x) \cdot e^{\mu x} \cdot \cos vx + P_2(x) \cdot e^{\mu x} \cdot \sin vx$ mit reellen Polynomen P_1, P_2 eine partikuläre Lösung der Gestalt $y = Q_1(x) \cdot e^{\mu x} \cdot \cos vx + Q_2(x) \cdot e^{\mu x} \cdot \sin vx$ mit reellen Polynomen Q_1, Q_2 von Grad $\leq m + l$

KAPITEL 2. DIFFERENZIALGLEICHUNGEN

2.2. LÖSUNGEN VON DIFFERENTIALGLEICHUNGEN IN TERMEN BEKANNTER FUNKTIONEN UND INTEGRALEN

Bsp.: Angeregter harmonischer Oszillator:

$$\ddot{y} + \omega^2 y = \cos \lambda t; \omega, \lambda \in \mathbb{R}$$

$\text{ch}_L(T) = T^2 + \omega^2$ hat Nullstellen $\pm i\omega$

Fall 1: $\lambda \pm i\omega \leftrightarrow i\lambda$ keine Nullstelle von $\text{ch}_L(T)$

\Leftrightarrow Ansatz: $y_p(t) = a \cos \lambda t + b \sin \lambda t - \omega^2$

Einsetzen: $\ddot{y}_p = -a\lambda^2 \cos \lambda t - b\lambda^2 \sin \lambda t$

$$\begin{aligned} \cos \lambda t &= \ddot{y}_p + \omega^2 y_p \\ &= a(\omega^2 - \lambda^2) \cos \lambda t + b(\underbrace{\omega^2 - \lambda^2}_{\neq 0}) \sin \lambda t \end{aligned}$$

$= \dots$

$$\Leftrightarrow b = 0, a = \frac{1}{\omega^2 - \lambda^2}$$

$$y_p = \frac{\cos \lambda t}{\omega^2 - \lambda^2}$$

Fall 2: $\lambda = \pm \omega$

Ansatz: $a t \cos \lambda t + b t \sin \lambda t$

\vdots

$$\Rightarrow y_p(t) = \frac{t \sin \lambda t}{2\lambda}$$

allgemeine Lösung:

$$y_p + c \cos \omega t + d \sin \omega t$$

2.2.6 Systeme von linearen Differentialgleichungen erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten

y_1, \dots, y_m Funktionen von x

$$\frac{dy_1}{dx} = F_1(x, y_1, \dots, y_m) = a_{11}y_1 + \dots + a_{1m}y_m + g_1(x)$$

\vdots

KAPITEL 2. DIFFERENZIALGLEICHUNGEN

2.2. LÖSUNGEN VON DIFFERENTIALGLEICHUNGEN IN TERMEN BEKANNTER FUNKTIONEN UND INTEGRALEN

$$\frac{dy_n}{dx} = F_1(x, y_1 \dots, y_m) = a_{n1}y_1 + \dots + a_{nm}y_m + g_n(x)$$

Betrachte ein System von lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten.

$$y' = Ay + g$$

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, g = \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix}$$

$g = 0$: Ansatz: $y = e^{\lambda x} \cdot v$, v konstanter Vektor

$$\underbrace{y'}_{Ay} = \underbrace{\lambda e^{\lambda x} \cdot v}_{e^{\lambda x} \cdot Av} \Leftrightarrow Av = \lambda v$$

$\Leftrightarrow v$ ist Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$

Für $\text{ch}_A(\lambda) = \det(\lambda Id_n - A) = 0$ charakteristische Gleichung

Falls alle Nullstellen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ Multiplizität 1 haben, zum Eigenvektor $v_1, \dots, v_n \rightsquigarrow e^{\lambda_1 x} v_1, \dots, e^{\lambda_n x} v_n$ ist Basis des Lösungsraums

Genauso wenn \mathbb{C}^n eine Basis aus Eigenvektoren hat.

Im allgemeinen existiert eine Basis aus Funktionen der Form

$$e^{\lambda x} \cdot (\text{Polynom in } x \text{ mit Koeffizienten in } \mathbb{C}^n)$$

Für $g(x) = \text{Linearkombination von } x^j e^{\lambda x}$ für irgendwelche j, λ existiert eine Lösung als Linearkombination von $x^j e^{\lambda x}$ für dieselben λ aber beliebige j

KAPITEL 2. DIFFERENZIALGLEICHUNGEN

2.2. LÖSUNGEN VON DIFFERENTIALGLEICHUNGEN IN TERMEN BEKANNTER FUNKTIONEN UND INTEGRALEN

Bsp.:

$$y'_1 = -y_1 + 3y_2$$

$$y'_2 = 2y_1 - 2y_2$$

$$y_1(0) = 5$$

$$y_2(0) = 0$$

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}; A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{ch}_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda + 1 & -3 \\ -2 & \lambda + 2 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda + 1)(\lambda + 2) - (-2)(-3) \\ &= \lambda^2 + 3\lambda - 4 \\ &= (\lambda - 1)(\lambda + 4) \end{aligned}$$

$$\text{EV : } \lambda = 1 : \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = -4 : \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \text{allgemeine Lösungen } y(x) = ae^x \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + be^{-4x} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$y(0) = \begin{pmatrix} 3a - b \\ 2a + b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} \quad a = 1$$

$$b = -2$$

$$\text{Lösung: } y(x) = \begin{pmatrix} 3e^x + 2e^{-4x} \\ 2e^x - 2e^{-4x} \end{pmatrix}$$

KAPITEL 2. DIFFERENZIALGLEICHUNGEN

2.2. LÖSUNGEN VON DIFFERENTIALGLEICHUNGEN IN TERMEN BEKANNTER FUNKTIONEN UND INTEGRALEN

Bsp.: Zwei Körper Problem:

n Körper der Massen m_i ($1 \leq i \leq n$) im \mathbb{R}^3 im Ort $z_i \in \mathbb{R}^3$.

Newton'scher Gravitationsgesetz:

Zwischen m_i und m_j wirkt die Kraft

$$\frac{Gm_i m_j}{|z_i - z_j|^2}$$

→ Kraftvektor

$$\frac{Gm_i m_j}{|z_i - z_j|^3} (z_j - z_i)$$

Totalkraft auf m_i

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{Gm_i m_j}{|z_i - z_j|^3} (z_j - z_i) = m_i \cdot \ddot{z}_i$$

System von $3n$ gekoppelten nichtlinearen Differentialgleichungen 2^{ter} Ordnung.

Ab jetzt: $n = 2$

12 Parameter

$$\begin{aligned} z_0 &:= \frac{m_1 \cdot z_1 + m_2 \cdot z_2}{m_1 + m_2} \\ \implies \ddot{z}_0 &= \frac{1}{m_1 + m_2} (m_1 \ddot{z}_1 + m_2 \ddot{z}_2) \\ &= \frac{1}{m_1 + m_2} \left(\frac{Gm_1 m_2}{|z_2 - z_1|^3} (z_2 - z_1) + \frac{Gm_1 m_2}{|z_1 - z_2|^3} (z_1 - z_2) \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\implies z_0(t) = z_0(0) + \dot{z}_0(0) \cdot t$$

Ersetze z_i durch $z_i - z_0 \implies$ oBdA $m_1 z_1 + m_2 z_2 = 0$

Zur Vereinfachung setze $z := m_1 z_1 = -m_2 z_2$

$$\implies z_2 - z_1 = -\frac{z}{m_2} - \frac{z}{m_1} = -\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) z$$

$$\implies \ddot{z} = m_1 \cdot \ddot{z}_1$$

$$= \frac{Gm_1 m_2}{|z_2 - z_1|^3} (z_2 - z_1)$$

$$\text{Michał Sudwoj Stand: 17. November } \frac{-Gm_1 m_2}{\left|\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right|^3 \cdot |z|^3} \cdot \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) \cdot z$$

$$\ddot{z} = -\frac{Gm_1^3 m_2^3}{(m_1 + m_2)^2} \cdot \frac{z}{|z|^3}$$

2.3 Differentialrechnung in mehreren Variablen

$\mathbb{R}^n \ni U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^m$

Bsp.:

$$f(x, y) = x^2 \cdot \cos y$$

Fixiere x und betrachte die Ableitung nach y : $\frac{\partial f}{\partial y}$

Fixiere y und betrachte die Ableitung nach x : $\frac{\partial f}{\partial x}$

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$

Def.: partielle Differenzierbarkeit:

f heisst partiell differenzierbar in $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ falls für alle $1 \leq i \leq n$ die partielle Ableitung

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i + h \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right) - f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right)}{h}$$

existiert.

Def.: Richtungsableitung:
 Sei $e \in \mathbb{R}^n$ ein Einheitsvektor.
 Die **Richtungsableitung** von f in $x \in U$ in Richtung e ist

$$(D_e f)(x) := \left(\frac{d}{dt} f(x + te) \right) \Big|_{t=0}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + te) - f(x)}{t}$$

Also:

$$e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \leftarrow i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow D_{e_i} f = \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

D.h.:

$$f(x + te) = f(x) + (D_e f)(x) \cdot t + o(t)$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in U, e = \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} \text{ Einheitsvektor ; } f : U \rightarrow \mathbb{R}$$

f partiell differenzierbar

$$\Leftrightarrow \forall i : f \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \leftarrow i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \cdot h \right) = f(x) + \frac{\partial f}{\partial x_i} + o(h)$$

f in Richtung e differenzierbar

$$\Leftrightarrow f \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} \cdot t \right) = f(x) + D_e f(x) \cdot t + o(t)$$

f (total) differenzierbar

$$\Leftrightarrow f \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} \right) = f(x) + (A_1 h_1 + \dots + A_n h_n) + o(|h|);$$

$$h = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$$

KAPITEL 2. DIFFERENZIALGLEICHUNGEN

2.3. DIFFERENTIALRECHNUNG IN MEHREREN VARIABLEN

Dabei heisst $(A_1, \dots, A_n) = \text{grad } f = \nabla f$ ("nabla") der **Gradient** von f in x oder die (totale) Ableitung von f in x ist f total differenzierbar, dann ist

$$\begin{aligned} f(x + te) &= f(x) + (A_1 te_1 + \dots + A_n te_n) + o(|te|) \\ &= f(x) + (A_1 e_1 + \dots + A_n e_n)t + o(t) \end{aligned}$$

Also ist f in jede Richtung e differenzierbar, und $D_e f = (\text{grad } f) \underbrace{\cdot}_\text{Matrixprodukt} e$

Bem.:

total differenziebar \Rightarrow in jede Richtung differenzierbar \Rightarrow partiell differenzierbar

Bsp.:

$$f \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} := \begin{cases} \frac{uv}{u^2+v^2} & \text{falls } \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ 0 & \text{falls } \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

In jede Richtung differenzierbar in $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$f \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} - f \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{uv}{u^2 - v^2} = 0 \text{ falls } u = 0 \vee v = 0$$

$$\Rightarrow f \text{ partiell differenzierbar mit } \frac{\partial f}{\partial u} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial v} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$e = \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix} \text{ Einheitsvektor}$$

$$f \begin{pmatrix} ct \\ st \end{pmatrix} - f \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{ct \cdot st}{(ct)^2 + (st)^2} = cs \neq 0$$

$$\Rightarrow D_e f \text{ für } e \neq \begin{pmatrix} \pm 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \pm 1 \end{pmatrix}$$

existiert nicht und f nicht stetig.

KAPITEL 2. DIFFERENZIALGLEICHUNGEN

2.3. DIFFERENTIALRECHNUNG IN MEHREREN VARIABLEN

Bsp.:

$$f \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} := \begin{cases} \frac{u^2 v}{u^2 + v^2} & \text{falls } \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ 0 & \text{falls } \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}$ existieren überall

$$f \begin{pmatrix} ct \\ st \end{pmatrix} - f \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{(ct)^2 \cdot (st)}{(ct)^2 + (st)^2} = c^2 st$$

$\Leftrightarrow f$ in Richtung $e = \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}$ differenzierbar mit $D_e f = c^2 s$

Da $c^2 s$ nicht linear in $\begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}$ ist,

kann f nicht total differenzierbar sein

Fakt:

Die Grundrechenarten

$$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{matrix} x + y \\ x \cdot y \\ \frac{x}{y} \end{matrix}$$

sind differenzierbar wo definiert.

Fakt:

f total differenzierbar $\implies f$ stetig

KAPITEL 2. DIFFERENZIALGLEICHUNGEN

2.3. DIFFERENTIALRECHNUNG IN MEHREREN VARIABLEN

Fakt:

Richtungsdifferenzierbarkeit $\not\Rightarrow$ Stetigkeit

Def.: stetig differenzierbar:

f heisst **stetig differenzierbar**, oder C^1 falls f differenzierbar und $\nabla f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig ist. Dabei ist

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right)$$

Fakt:

f ist $C^1 \iff f$ partiell differenzierbar und $\forall i : \frac{\partial f}{\partial x_i}$ stetig.

Fakt:

Die Grundrechenarten sind C^1 .

KAPITEL 2. DIFFERENZIALGLEICHUNGEN

2.3. DIFFERENTIALRECHNUNG IN MEHREREN VARIABLEN

Bsp.:

$$\begin{aligned}f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto x + y \\ f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right) &= f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) + (1, 1) \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + 0 \\ (x + a) + (y + b) &= x + y + 1a + ab\end{aligned}$$

Bsp.:

$$\begin{aligned}g : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto x \cdot y \\ g\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right) &= g\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) + (y, x) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + o\left(\left|\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right|\right) \\ (x + a) \cdot (y + b) &= xy + ya + xb + ab\end{aligned}$$

Satz:

Sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, und sei $g = \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix} : I \rightarrow U$; $I \subset \mathbb{R}$ Intervall, differenzierbar; Dann ist $f \circ g : I \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto f(g(t))$ differenzierbar und

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}f(g(t)) &= (\nabla f)(g(t)) \cdot g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(g(t)) \cdot g'_1(t) + \cdots \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial x_n}(g(t)) \cdot g'_n(t) \end{aligned}$$

Bew.:

$$\begin{aligned} g(t+h) &= g(t) + g'(t)k + o(|k|) \\ g'(t) &= \begin{pmatrix} g'_1(t) \\ \vdots \\ g'_n(t) \end{pmatrix} \\ f(g(t+k)) &= f(g(t) + g'(t)k + o(|k|)) \\ &= f(g(t)) \\ &\quad + \nabla f(g(t)) \cdot (g'(t)k + o(|k|)) \\ &\quad + \underbrace{o(|g'(t)k + o(|k|)|)}_{=o(|k|)} \\ &= f(g(t)) \\ &\quad + \underbrace{(\nabla f)(g(t)) \cdot g'(t) \cdot k}_{\frac{d}{dt}f(g(t))} \\ &\quad + o(|k|) \end{aligned}$$

KAPITEL 2. DIFFERENZIALGLEICHUNGEN

2.3. DIFFERENTIALRECHNUNG IN MEHREREN VARIABLEN

Bsp.:

$$\begin{aligned} h : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\mapsto \frac{x}{y} \text{ für } y \neq 0 \\ \frac{\partial h}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{1}{y} \right) = \frac{1}{y} \\ \frac{\partial h}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(x \frac{1}{y} \right) = \frac{-x}{y^2} \\ \implies h &\in C^1 \text{ mit } \nabla h = \left(\frac{1}{y}, \frac{-x}{y^2} \right) \end{aligned}$$

Folge:

Jede aus differenzierbaren Funktionen und Grundrechenarten zusammengesetzte Funktion ist differenzierbar. Analog C^1 .

Bsp.:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto x_1 \cdot x_2 \implies \nabla f = (x_2, x_1) \\ g_1, g_2 : I &\rightarrow \mathbb{R} \Leftrightarrow g := \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} \text{ differenzierbar} \\ \implies t &\mapsto g_1(t) \cdot g_2(t) \text{ ist differenzierbar mit Ableitung:} \\ (g_2, g_1) \cdot \begin{pmatrix} g'_1 \\ g'_2 \end{pmatrix} &= g_2 \cdot g'_1 + g_1 \cdot g'_2 \end{aligned}$$

KAPITEL 2. DIFFERENZIALGLEICHUNGEN

2.3. DIFFERENTIALRECHNUNG IN MEHREREN VARIABLEN

Bsp.:

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^2 + y^2$$

$$\nabla f = (2x, 2y)$$

$$g(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \implies g'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

$$\frac{d}{dt}(f(g(t))) = (2 \cos t, 2 \sin t) \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} = 0$$

$$f(g(t)) = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$$

Bsp.1:

Berechne näherungsweise

$$\alpha := \sqrt{3.03^2 + 3.95^2} = \left| \begin{pmatrix} 3.03 \\ 3.95 \end{pmatrix} \right|$$

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ differenzierbar für } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\nabla f = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$$

$$f \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

$$\nabla f \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right)$$

$$f \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.03 \\ -0.05 \end{pmatrix} \right)$$

$$= f \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \nabla f \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.03 \\ -0.05 \end{pmatrix} + \text{klein}$$

$$= 5 + \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right) \cdot \begin{pmatrix} 0.03 \\ -0.05 \end{pmatrix} + \text{klein}$$

$$= 4.978 + \text{klein}$$

wirklicher Wert $\alpha = 4.7829 \dots$

Bsp.2:

Im Punkt P_0 knickt der Bergweg ab nach SO steigt er mit +25% an, nach S fällt er mit -20% ab. In welche Richtung geht er am steilsten bergauf, und wie steil?

Annahme: Höhenfunktion differenzierbar; oBdA $P_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$H \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = Ax + By + o\left(\left| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right|\right)$$

$$\frac{1}{4} = D_{e_{SO}} H \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (A, B) \cdot e_{SO} = \frac{1}{\sqrt{2}}(A - B)$$

$$-\frac{1}{5} = D_{e_S} H \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (A, B) \cdot e_S = -B$$

$$\Rightarrow B = \frac{1}{5}, A = \frac{1}{5} + \frac{\sqrt{2}}{4}$$

Gesucht ϕ mit $(A, B) \cdot \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix}$ maximal für

$$\begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \dots$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix} \right\rangle$$

... $\phi \approx 19.86^\circ$

Steigung = 59%

Bsp.3:

Bestimme die Tangentialebene an $\text{graph}(f)$ für $f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{xy}$ im Punkt

$$P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\nabla = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \left(\frac{-1}{x^2 y}, \frac{-1}{x y^2} \right)$$

$$\begin{aligned} f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= f \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix} \right) + o \left(\left| \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix} \right| \right) \\ &= \frac{1}{2} + \left(\frac{-1}{2}, \frac{-1}{4} \right) \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix} + o(\dots) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{4}(y-2) + \dots \\ &= \frac{3}{2} - \frac{x}{2} - \frac{y}{4} + o \left(\left| \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix} \right| \right) \end{aligned}$$

Copy from
Simon

Satz:

Sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, mit $\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0$ überall. Sei U "x₁-einfach",

d.h. für alle $x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$: ist $\{x_1 \in \mathbb{R} \mid \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in U\}$ leer oder ein Intervall.

Dann ist $f \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ von x_1 unabhängig, d.h.

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in V : \phi \begin{pmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} < x_1 < \Phi \begin{pmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\}$$

für $V \subset \mathbb{R}^{n-1}$ offen und Funktionen $\phi, \Phi : V \rightarrow \mathbb{R}$

Analog: x_i -einfach ; $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$ für jeden $1 \leq i \leq n$

KAPITEL 2. DIFFERENZIALGLEICHUNGEN

2.3. DIFFERENTIALRECHNUNG IN MEHREREN VARIABLEN

Bem.:

$U \subset \mathbb{R}^n$ heisst **konvex**, wenn

$$\forall x, y \in U \forall \lambda \in [0, 1] : \lambda x + (1 - \lambda)y \in U$$

Bem.:

U konvex $\implies U$ x_i -einfach für jeden i

Bsp.:

$$U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) | x \leq 0\}$$

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{cases} 0 & \text{falls } x_1 \geq 0 \\ x_1^2 \cdot \operatorname{sgn} x_2 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}; f \text{ sogar total differenzierbar}$$

KAPITEL 2. DIFFERENZIALGLEICHUNGEN

2.3. DIFFERENTIALRECHNUNG IN MEHREREN VARIABLEN

Fakt:

Sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^2$ stetig mit $\frac{\partial f}{\partial c}$ stetig. Dann ist

$$G \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \int_a^b f(x, c) dx$$

differenzierbar mit

$$\nabla G = \left(f(a, c), f(b, c), \int_a^b \frac{\partial f}{\partial c}(x, c) dx \right)$$

wo definiert. Insbesondere:

$$\frac{\partial}{\partial c} \left(\int_a^b f(x, c) dx \right) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial c}(x, c) dx$$

Folge:

Sei f wie oben, und $a(t), b(t)$ differenzierbar; dann ist

$$F(t) := \int_{a(t)}^{b(t)} f(x, t) dx$$

differenzierbar mit

$$\frac{dF}{dt} = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx + f(b(t), t) \cdot b'(t) - f(a(t), t) \cdot a'(t)$$

Denn: Kettenregel für

$$F(t) = G \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \\ t \end{pmatrix}$$

sagt: F differenzierbar mit

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dt} &= \frac{\partial G}{\partial a} \cdot a'(t) + \frac{\partial G}{\partial b} \cdot b'(t) + \frac{\partial G}{\partial c} \Big|_{c=t} \cdot \frac{d}{dt}(t) \\ &= -f(a(t), t) \cdot a'(t) + f(b(t), t) \cdot b'(t) + \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f}{\partial c}(x, c) dx \end{aligned}$$

Bsp.4:

Berechne

$$\int_0^1 \frac{x^\alpha - 1}{\log x} dx =: F(x)$$

Bem.:

Bei $x = 1$ ist

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^\alpha - 1}{\log x} &\stackrel{\text{BH}}{=} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\alpha x^{\alpha-1}}{\frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \alpha x^\alpha \\ &= \alpha\end{aligned}$$

$\alpha \geq 0 \implies$ Integrand hat stetige Fortsetzung mit $0 \mapsto 0 \implies$ existiert.

$-1 \leq \alpha < 0$ uneigentliches Integral existiert mit Majorantenkriterium $\left| \frac{x^\alpha - 1}{\log x} \right| \leq x^\alpha$ für $x > 0$ klein.

\implies Integral existiert für $\alpha > -1$

$$\begin{aligned}F'(\alpha) &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{x^\alpha - 1}{\log x} \right) dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^\alpha \log \alpha}{\log x} dx \\ &= \int_0^1 x^\alpha dx \\ &= \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{\alpha+1} \\ \implies F(\alpha) &= \int \frac{1}{\alpha+1} d\alpha = \log(\alpha+1) + c\end{aligned}$$

$$\text{Aber } F(0) = \int_0^1 \frac{x^\alpha - 1}{\log x} dx = \int_0^1 0 dx = 0$$

$$\implies 0 = F(0) = \log(0+1) + c = c$$

KAPITEL 2. DIFFERENZIALGLEICHUNGEN

2.3. DIFFERENTIALRECHNUNG IN MEHREREN VARIABLEN

Too long

KAPITEL 2. DIFFERENZIALGLEICHUNGEN

2.3. DIFFERENTIALRECHNUNG IN MEHREREN VARIABLEN

Bsp.5:

Berechne

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$$

Wegen $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ kein Problem bei 0.
Ansatz:

$$I(t) := \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} \cdot e^{-xt} dx$$

Für $t > 0$ existiert $I(t)$ nach Majorantenkriterium.

$$\begin{aligned} I'(t) &= \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\sin x}{x} \cdot e^{-xt} \right) dx \\ &= \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} \cdot (-x)e^{-xt} dx \\ &= \int_0^\infty \underbrace{-\sin x}_{\uparrow} \underbrace{e^{-xt}}_{\downarrow} dx \\ &= \cos x e^{-xt} \Big|_0^\infty - \int_0^\infty \cos x(-t)e^{-xt} dx \\ &= -1 + t \int_0^\infty \underbrace{\cos x}_{\uparrow} \underbrace{e^{-xt}}_{\downarrow} dx \\ &= -1 + t \left(\sin x e^{-xt} \Big|_0^\infty - \int_0^\infty \sin x(-t)e^{-xt} dx \right) \\ &= -1 + t \left(0 + t \int_0^\infty \sin x e^{-xt} dx \right) \\ &= -1 - t^2 \int_0^\infty 0^\infty(-\sin x)e^{-xt} dx \\ &= -1 - t^2 I(t) \\ \implies I(t) &= \frac{-1}{1+t^2} \\ \implies I(t) &= \int \frac{-1}{1+t^2} dt = -\arctan t + c \\ \implies \lim_{t \rightarrow \infty} I(t) &= c - \lim_{t \rightarrow \infty} \arctan t = c - \frac{\pi}{2} \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} e^{-xt} dx &= \int_0^\infty \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin x}{x} e^{-xt} \right) dx \\ &= \begin{cases} 0 & x > 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Too long

Höhere AbleitungenSei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen; $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ **Def.: m -fach differenzierbar:** f heisst **m -fach differenzierbar** für $m \geq 1$ wenn f differenzierbar ist und für jedes $1 \leq i \leq m$ $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ $(m-1)$ -fach differenzierbar ist.**Def.: m -fach stetig differenzierbar:** f heisst **m -fach stetig differenzierbar** für $m \geq 1$ wenn f differenzierbar ist und für jedes $1 \leq i \leq m$ $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ $(m-1)$ -fach stetig differenzierbar ist.Bezeichnung: C^m

Konkret: $\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$

Abkürzung: $f_{x_i} := \frac{\partial f}{\partial x_i}$

$f_{x_i x_j} = (f_{x_i})_{x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$

Satz:

Ist $f \in C^m$, so sind alle bis zur m^{ter} partiell Ableitung von der Reihenfolge unabhängig.

Beweisidee:

$f\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right)$. Zu zeigen: $f_{xy} = f_{yx}$

$$\begin{aligned} f_{xy} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \\ &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x} \left(\begin{matrix} x \\ y+k \end{matrix} \right) - \frac{\partial f}{\partial x} \left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right)}{k} \\ &= \lim_{k \rightarrow 0} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f\left(\begin{matrix} x+h \\ y+k \end{matrix} \right) - f\left(\begin{matrix} x \\ y+k \end{matrix} \right)}{h} - \frac{f\left(\begin{matrix} x+h \\ y \end{matrix} \right) - f\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right)}{h}}{k} \\ f_{yx} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y} \left(\begin{matrix} x+h \\ y \end{matrix} \right) - \frac{\partial f}{\partial y} \left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\frac{f\left(\begin{matrix} x+h \\ y+k \end{matrix} \right) - f\left(\begin{matrix} x+h \\ y \end{matrix} \right)}{k} - \frac{f\left(\begin{matrix} x \\ y+k \end{matrix} \right) - f\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right)}{k}}{h} \end{aligned}$$

Also nur $\frac{n(n+1)}{2}$ versiedene 2^{te} Ableitungen.

Bsp.:

$$r = r \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$$

beliebig oft stetig differenzierbar ausserhalb $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} (x_1^2 + \cdots + x_n^2) =$$

$$\frac{1}{2r} \cdot 2x_i = \frac{x_i}{r}$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{x_i}{r} \right) = \frac{\frac{\partial x_i}{\partial x_j} r - x_i \frac{\partial r}{\partial x_j}}{r^2}$$

$$i \neq j \implies \dots = -\frac{x_i}{r^2} \cdot \frac{x_j}{r} = \frac{-x_i x_j}{r^3}$$

$$i = j \implies \dots = \frac{r - x_i \frac{x_i}{r}}{r^2} = \frac{r^2 - x_i^2}{r^3}$$

Taylor-Entwicklung

Erinnerung: $f(x)$ C^m -Funktion

$$\begin{aligned} \implies f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \\ &\quad + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 \\ &\quad + \cdots \\ &\quad + \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x - x_0)^m \\ &\quad + o(|x - x_0|^m) \end{aligned}$$

KAPITEL 2. DIFFERENZIALGLEICHUNGEN

2.3. DIFFERENTIALRECHNUNG IN MEHREREN VARIABLEN

Jetzt $f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ C^m -Funktion

m -tes Taylorpolynom von f an der Stelle $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
 f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \sum_{i=0}^m \frac{\frac{\partial^i f}{\partial x_i} \begin{pmatrix} x_0 \\ y \end{pmatrix}}{i!} (x - x_0)^i + o(|x - x_0|^m) \\
 &= \sum_{i=0}^m \left(\sum_{j=0}^{m-i} \frac{\frac{\partial^j}{\partial x_j} \left(\frac{\partial^i f}{\partial y_i} \right) \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}}{j!} (y - y_0)^j + o(|y - y_0|^{m-i}) \right) \frac{(x - x_0)^i}{i!} \\
 &\quad + o(|x - x_0|^m) \\
 &= \sum_{\substack{i,j \geq 0 \\ i+j \leq m}} \frac{\frac{\partial^j \partial^i f}{\partial y^j \partial x_i} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}}{j!} \cdot \frac{(y - y_0)^j}{j!} \cdot \frac{(x - x_0)^i}{i!} \\
 &\quad + \underbrace{\sum_{i=0}^m o\left(\frac{|y - y_0|^{m-i} \cdot |x - x_0|^i}{i!}\right)}_{o\left(\left|\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}\right|\right)} + o(|x - x_0|^m)
 \end{aligned}$$

Copy from
Simon

Bem.:
Kann auch Taylorpolynom einsetzen

Bsp.:

Gib den Taylorpolynom vom Grad 3 von $\cos x \cdot e^{x+y}$ bei $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}\cos x \cdot e^{x+y} &= \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) \\ &\quad \cdot \left(1 + (x+y) + \frac{(x+y)^2}{2} + \frac{(x+y)^3}{6} + o((x+y)^3)\right) \\ &= 1 + (x+y) + \frac{(x+y)^2}{2} + \frac{(x+y)^3}{6} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{2}(x+y) + o\left(\left|\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right|^3\right) \\ &= 1 + (x+y) + \frac{2xy + y^2}{2} + \frac{(x+y)(-2x^2 + 2xy + y^2)}{6} + o\left(\left|\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right|^3\right)\end{aligned}$$

Overfull

Analog: n VariablenFall $m = 2$

$$\nabla f = (f_x, f_y)$$

$$\nabla^2 f := \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

KAPITEL 2. DIFFERENZIALGLEICHUNGEN

2.3. DIFFERENTIALRECHNUNG IN MEHREREN VARIABLEN

$$\begin{aligned}
f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= f \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + f_x \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \cdot (x - x_0) \\
&\quad + f_y \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \cdot (y - y_0) \\
&\quad + f_{xx} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \frac{(x - x_0)^2}{2} \\
&\quad + f_{xy} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} (x - x_0)(y - y_0) \\
&\quad + f_{yy} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \frac{(y - y_0)^2}{2} \\
&\quad + o \left(\left| \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \right| \right) \\
&= f \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + (\nabla f \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}) \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \\
&\quad + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}^T \cdot (\nabla^2 f \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}) \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \\
&\quad + o \left(\left| \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \right| \right)
\end{aligned}$$

Fall $m = 2 ; n$ beliebig

$$\begin{aligned}
\nabla f &= (f_{x_1}, \dots, f_{x_n}) \\
\nabla^2 f &= \begin{pmatrix} f_{x_1 x_1} & \dots & f_{x_1 x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x_n x_1} & \dots & f_{x_n x_n} \end{pmatrix} \text{ Hesse-Matrix}
\end{aligned}$$

Für $f C^2$ -Funktion ist

$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{\nabla f(x_0)}_{\substack{\text{Zeilen-} \\ \text{Spalte-}}} \cdot \underbrace{(x - x_0)}_{\text{vektor}} + \frac{1}{2} \cdot (x - x_0) \cdot \nabla^2 f(x_0) \cdot (x - x_0) + o(|x - x_0|^2)$$

Def.: kritischer Punkt:

Ein Punkt x_0 mit $\nabla f(x_0) = (0, \dots, 0)$ heißt **kritischer Punkt** von f .
Äquivalent: Tangentialebene an $\text{graph}(f)$ ist horizontal.

KAPITEL 2. DIFFERENZIALGLEICHUNGEN

2.3. DIFFERENTIALRECHNUNG IN MEHREREN VARIABLEN

Fakt:

Jede lokale Extremastelle ist kritischer Punkt.

Def: entartet:

Ein kritischer Punkt x_0 von f heisst nicht entartet wenn $\det \nabla^2 f(x_0) \neq 0$ ist.

Satz:

Ein nicht entarterter kritischer Punkt x_0 von f ist ein:
lokales Maximum falls $\nabla^2 f(x_0)$ negativ definit ist.
lokales Minimum falls $\nabla^2 f(x_0)$ positiv definit ist.
Sattelpunkt falls $\nabla^2 f(x_0)$ indefinit ist.

$$x_0 \text{ kritischer Punkt} \iff f(x) = f(x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^T \nabla^2 f(x_0)(x - x_0) + o(|x - x_0|^2)$$

Bsp.:Untersuche die kritischen Punkte der Funktion auf \mathbb{R}^2

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \cos(x+2y) + \cos(2x+3y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\sin(x+2y) - 2\sin(2x+3y) =$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2\sin(x+2y) - 3\sin(2x+3y) =$$

$$\sin(x+2y) = 0$$

$$\sin(2x+3y) = 0$$

$$x+2y \in \pi\mathbb{Z} \quad (\cdot 2)$$

$$2x+3y \in \pi\mathbb{Z} \quad ((-1))$$

$$2(x+2y) - (2x+3y) = y \in \pi\mathbb{Z} \implies x \in \pi\mathbb{Z}$$

$$\text{Weil } f\left(\begin{pmatrix} x+2\pi k \\ y+2\pi l \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right),$$

genügt es, die kritischen Punkte $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pi \\ \pi \end{pmatrix}$

$$f_{xx} = -\cos(x+2y) - 4\cos(2x+3y)$$

$$f_{xy} = -2\cos(x+2y) - 6\cos(2x+3y)$$

$$f_{yy} = -4\cos(x+2y) - 9\cos(2x+3y)$$

kritischer Punkt	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ \pi \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \pi \\ \pi \end{pmatrix}$
$\nabla^2 f \begin{pmatrix} -5 & -8 \\ -8 & -13 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 13 \end{pmatrix}$	
$\det(\nabla^2 f)$	1	-1	-1	1

Antwort:

$$\text{lokale Max. } \begin{pmatrix} 2\pi k \\ 2\pi l \end{pmatrix}$$

$$\text{lokale Min. } \begin{pmatrix} \pi + 2\pi k \\ \pi + 2\pi l \end{pmatrix} \quad k, l \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Sattelpunkte } \begin{pmatrix} \pi + 2\pi k \\ 2\pi l \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2\pi k \\ \pi + 2\pi l \end{pmatrix}$$

KAPITEL 2. DIFFERENZIALGLEICHUNGEN

2.3. DIFFERENTIALRECHNUNG IN MEHREREN VARIABLEN

Bsp.: ausgeartete kritische Punkte:

a)

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^2 + y^3$$
$$\nabla^2 f \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ semidefinit}$$

b)

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^2 + y^4$$
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ isoliertes lokales Minimum}$$

c)

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^2 - y^4$$

d)

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^3 + y^3$$

Bsp.:

Zwei Partikel befinden sich in $[0, 1]$ an den Stellen $0 < x < y < 1$ mit den Abstossungskräften BILD
Wo ist die Gleichgewichtslage und ist sie stabil?

Potentielle Energie: $V = -\log x - 2 \log(y-x) - \log(1-y)$

$$\begin{cases} V_x = -\frac{1}{x} + \frac{2}{y-x} = 0 \\ V_y = -\frac{2}{y-x} + \frac{1}{1-y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{4} \\ y = \frac{3}{4} \end{cases}$$

stabil, falls V isoliertes Minimum

$$V_{xx} = \frac{1}{x^2} + \frac{2}{(y-x)^2}$$

$$V_{xy} = -\frac{2}{(y-x)^2}$$

$$V_{yy} = \frac{2}{(y-x)^2} + \frac{1}{(1-y)^2}$$

$$\nabla^2 f \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 & -8 \\ -824 & 8 \end{pmatrix} = 8 \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Wegen $3 > 0$ und $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 8 > 0$ ist diese Matrix positiv definit

\Rightarrow isoliertes lokales Minimum

\Rightarrow stabil

BILD

Globale Extrema

Erinnerung: Ist $B \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so nimmt f ein globales Maximum und ein globales Minimum an. Methode:

- Teile B auf in endlich viele Teile, die durch offene Teilmengen von \mathbb{R}^m für $0 \leq m \leq n$ parametrisiert werden.
- Finde alle lokalen Extrema auf allen Teilen mit Differentialrechnung.
- Vergleiche Funktionswerte an allen so erhaltenen Kandidaten.

KAPITEL 2. DIFFERENZIALGLEICHUNGEN

2.3. DIFFERENTIALRECHNUNG IN MEHREREN VARIABLEN

Bsp.:

Bestimme die globalen Extrema von

$$f \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = x^3 - 18x^2 + 81x + 12y^2 - 144y + 24xy$$

auf

$$B := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0, x + y \leq 10 \end{array} \right\}$$

Lösung:

f stetig, B kompakt $\implies \exists$ globales Min., globales Max.

$$7 \text{ Teile: } B^0 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} x > 0 \\ y > 0, x + y > 10 \end{array} \right\}$$

(a) f beliebig oft differenzierbar

$$f_x = 3x^2 - 36x + 81 + 24y \stackrel{!}{=} 0$$

$$f_y = 24y - 144 + 24x \stackrel{!}{=} 0$$

$$24(y + x - 6) = 0 \implies y = 6 - x$$

$$\begin{aligned} 0 = f_x &= 3(x^2 - 12x + 27 + 8(6 - x)) \\ &= 3(x^2 - 20x + 75) \\ &= 3(x - 5)(x - 15) \end{aligned}$$

$$\implies x = 5 \implies y = 1$$

$$x = 15 \implies y = -9 \text{ Nicht in } B!$$

$$\text{Einziger Kandidat: } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(b)

$$y = 0, 0 < x < 10$$

$$f \left(\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \right) = x^3 - 18x^2 + 81x$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} \left(\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \right) &= 3x^2 - 36x + 81 \\ &= 3(x^2 - 12x + 27) \\ &= 3(x - 3)(x - 9) \end{aligned}$$

$$\text{Kandidaten: } \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x = 0, 0 < y < 1$$

$$\text{Kandidaten: } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Too long

Fix table

Bsp.:

Säge aus einem Baumstamm von Radius R einen rechteckigen Balken mit maximalem Widerstandsmoment $W = \frac{b \cdot h^2}{6}$ ($b \geq h$)
 Lösung:

$$\begin{aligned} 4R^2 &= h^2 + b^2 \implies h^2 = 4R^2 - b^2 \\ \implies W &= \frac{b}{6}(4R^2 - b^2) = \frac{4}{6}R^2b - \frac{b^3}{6} \\ 0 &\leq h, b \leq 2R \end{aligned}$$

kritische Punkte

$$\begin{aligned} \frac{dW}{db} &= \frac{4}{6}R^2 - \frac{b^2}{2} = 0 \iff b^2 = \frac{4R^2}{3} \iff b = \frac{2R}{\sqrt{3}} \\ \implies h^2 &= 4R \cdot \frac{2}{3} \implies h = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}2R \\ b = 0, 2R &\implies W = 0 \\ \implies \text{Maximum bei } b &= \frac{2R}{\sqrt{3}}, h = \sqrt{2}b \end{aligned}$$

Extrema mit Nebenbedingungen

Seien $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}, U \subset \mathbb{R}^n$ offen.

Gesucht: lokale Extrema von f auf $B := \{x \in U \mid g(x) = 0\}$

Satz:

Sind f, g differenzierbar und $x_0 \in B$ ein lokales Extremum von f auf B , so sind $\nabla f(x_0)$ und $\nabla g(x_0)$ linear abhängig.

Beweisidee:

Wenn nicht, existiert ein Richtungsvektor e mit $\nabla f(x_0) \cdot e \neq 0 = \nabla g(x_0) \cdot e$
 → entlang einer Kurve in Richtung e hat f kein lokales Extremum

Def.: Bedingt kritischer Punkt:

Bedingt kritische Punkte von f bezüglich g sind solche mit $g(x_0) = 0$ und

- (a) $\nabla g(x_0) = 0$ (Singularität von B) oder
- (b) $\nabla f(x_0)$ ist Vielfaches von $\nabla g(x_0)$

Bsp.:

$$g \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \cdot y, \nabla g \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (0 \quad 0)$$

KAPITEL 2. DIFFERENZIALGLEICHUNGEN

2.3. DIFFERENTIALRECHNUNG IN MEHREREN VARIABLEN

Bsp.:

Bestimme das Minimum von

$$f\left(\begin{array}{c} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{array}\right) = x_1 \cdots x_n$$

auf

$$B = \left\{ \left(\begin{array}{c} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{array} \right) \in \mathbb{R}^n \mid \text{alle } x_i > 0, x_1 + \cdots + x_n = S \right\}$$

Lösung:

B kompakt (da alle $0 \leq x_i \leq S$ sind)

f stetig \Rightarrow Max. existiert

$$B' := B \cap U \text{ für } U := \left\{ \left(\begin{array}{c} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{array} \right) \mid \text{alle } x_i > 0 \right\}$$

Auf $B \setminus B'$ ist mindestens ein $x_i = 0$, also

$$f\left(\begin{array}{c} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{array}\right) = 0$$

lokale Max. auf B' :

$$g\left(\begin{array}{c} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{array}\right) := x_1 + \cdots + x_n - S$$

$$\begin{aligned} \nabla f\left(\begin{array}{c} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{array}\right) &= (x_2 \cdots x_n \quad x_1 x_3 \cdots x_n \quad \cdots \quad x_1 \cdots x_{n-1}) \\ &= \left(\frac{x_1 \cdots x_n}{x_1} \quad \cdots \quad \frac{x_1 \cdots x_n}{x_n} \right) \end{aligned}$$

$$\nabla g\left(\begin{array}{c} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{array}\right) = (1 \quad \cdots \quad 1)$$

Bedingt kritischer Punkt

$$\Leftrightarrow \text{alle } \left(\frac{x_1 \cdots x_n}{x_1} \quad \cdots \quad \frac{x_1 \cdots x_n}{x_n} \right) \text{ gleich}$$

$$\Leftrightarrow x_1 = \cdots = x_n \Leftrightarrow x_1 = \cdots = x_n = \frac{S}{n}$$

$$\Rightarrow f\left(\begin{array}{c} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{array}\right) = \left(\frac{S}{n} \right)^n > 0$$

Michał Sudwoj

68

CC BY-SA

Stand: 17. November 2011

$$\Rightarrow \text{eindeutiger Maximum an } \left(\begin{array}{c} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \frac{S}{n} \\ \vdots \\ \frac{S}{n} \end{array} \right)$$

KAPITEL 2. DIFFERENZIALGLEICHUNGEN

2.3. DIFFERENTIALRECHNUNG IN MEHREREN VARIABLEN

Too long

Lagrange-Ansatz

Betrachte die Funktion

$$L : \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ \lambda \end{pmatrix} \mapsto f \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} - \lambda \cdot g \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\nabla f = (\nabla f - \lambda \nabla g, g)$$

link

Also: Bedingt kritische Punkte vom Typ (b) sind genau die kritischen Punkte von L

KAPITEL 2. DIFFERENZIALGLEICHUNGEN

2.3. DIFFERENTIALRECHNUNG IN MEHREREN VARIABLEN

Bsp.:

Bestimme die Extrema von $f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \sqrt{3x+3y+2z}$ auf der Einheitssphäre

$$B := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1 \right\}$$

Lösung:

$$g \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x^2 + y^2 + z^2 - 1$$

B kompakt, f stetig $\implies \exists$ Extrema

$$\nabla g \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (2x \quad 2y \quad 2z) \text{ ist überall } \neq (0 \quad 0 \quad 0) \text{ auf } B$$

Also ist jede Extremalstelle ein bedingt kritischer Punkt von Typ (b)

$$L \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ \lambda \end{pmatrix} = \sqrt{3x+3y+2z} - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$$

kritische Punkte von L

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \sqrt{3} - \lambda 2x = 0 \implies x = -\frac{\sqrt{3}}{2\lambda} \quad (\lambda \neq 0)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 3 - \lambda 2y = 0 \implies y = \frac{3}{2\lambda}$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} = 2 - \lambda 2z = 0 \implies z = \frac{1}{\lambda}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = -(x^2 + y^2 + z^2 - 1) = 0$$

$$\implies 1 = x^2 + y^2 + z^2 = \frac{3}{4\lambda^2} + \frac{9}{4\lambda^2} + \frac{4}{4\lambda^2} = \frac{16}{4\lambda^2} = \left(\frac{2}{\lambda}\right)^2$$

$$\implies \frac{2}{\lambda} = \pm 1$$

$$\implies \lambda = \pm 2$$

Michał Sudow
Stand: 17. November 2011

$$\frac{\partial f}{\partial x} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

70

CC BY-SA

$$\text{Dort ist } f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \pm 4$$

KAPITEL 2. DIFFERENZIALGLEICHUNGEN

2.3. DIFFERENTIALRECHNUNG IN MEHREREN VARIABLEN

Too long

link (b)

Extrema mit mehreren NB

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f, g_1, \dots, g_m : U \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar.

Fakt:

Jedes lokale Extremum von f auf $B := \{x \in U \mid g_1(x) = \dots = g_m(x) = 0\}$ ist ein bedingt kritischer Punkt, d.h. einer mit $\nabla f(x_0), \nabla g_1(x_0), \dots, \nabla g_m(x_0)$ linear abhängig. D.h.:

- (a) $\nabla g_1, \dots, \nabla g_m$ linear abhängig, oder
- (b) ∇f ist Linearkombination von $\nabla g_1, \dots, \nabla g_m$

Lagrange:

$$L := f - \lambda_1 g_1 - \lambda_2 g_2 - \dots - \lambda_m g_m$$
$$\nabla L = (\nabla f - \lambda_1 \nabla g_1 - \dots - \lambda_m \nabla g_m, -g_1, \dots, -g_m)$$

link

→ Typ (b) \iff kritische Punkte von L

KAPITEL 2. DIFFERENZIALGLEICHUNGEN

2.3. DIFFERENTIALRECHNUNG IN MEHREREN VARIABLEN

Bsp.:

Bestimme das Maximum von

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x$$

auf

$$B := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{array}{l} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ 5x + 4y + 3z = 0 \end{array} \right\}$$

Ansatz:

$$L = x - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1) - \mu(5x + 4y + 3z)$$

$$L_x = 1 - 2\lambda x - 5\mu$$

$$L_y = -2\lambda y - 4\mu$$

$$L_z = -2\lambda z - 3\mu$$

$$L_\lambda = -(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$$

$$L_\mu = -(5x + 4y + 3z)$$

$$L_x = L_y = L_z = 0 :$$

$$\begin{aligned} 2\lambda x + 5\mu &= 1 \\ 2\lambda y + 4\mu &= 0 \\ 3\lambda z + 3\mu &= 0 \end{aligned} \implies 6\lambda y - 8\lambda z = 0, \lambda \neq 0 \implies 6y = 8z$$

$$\implies \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \pm \frac{\sqrt{2}}{10} \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\implies f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mp \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Typ (a):

$$\nabla g_1 = (2x, 2y, 2z)$$

$$\nabla g_2 = (5, 4, 3)$$

Antwort:

$$\text{Max. } = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ bei } \frac{\sqrt{2}}{10} \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Too long

link (a)

2.4 Implizite Funktionen

Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^1 -Funktion und $L := \{(x, y) \in U \mid f(x, y) = 0\}$. L heißt regulär in (x_0, y_0) , falls $\nabla f(x_0, y_0) \neq (0, 0)$. Sonst singulär

$$\underbrace{f(x, y)}_{=0} = \underbrace{f(x_0, y_0)}_{=0} + \nabla f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0) + o\left(\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow (x, y) \in L$$

\Rightarrow Tangente an L in (x_0, y_0) hat die Gleichung $\nabla f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0) = 0$ falls (x_0, y_0) regulär in L . Diese ist vertikal $\Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$

Satz:

Seien U, f, L wie oben und $(x_0, y_0) \in L$ ein Punkt mit $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$. Dann existieren offene Intervalle I, J mit $(x_0, y_0) \in I \times J \subset U$, sowie eine Funktion $\phi : I \rightarrow J$ so dass $L \cap (I \times J) = \left\{ \left(\begin{array}{c} x \\ \phi(x) \end{array} \right) \mid x \in I \right\} = \text{graph}(\phi)$ und ϕ ist C^1 mit Ableitung

$$\phi'(x) = -\frac{f_x(x, \phi(x))}{f_y(x, \phi(x))} \quad \text{für alle } x \in I$$

Dabei ist $f_y(x, \phi(x)) \neq 0$ für alle $x \in I$.
Ist f C^m , so auch ϕ

Übung: Berechne ϕ''

Bem.:
maximales I ?

Bsp.6:

$$f\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right) := x^3 + y^3 - 3xy \text{ für } \left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right) \in \mathbb{R}^2$$

$$f_x = 3x^2 - 3y$$

$$f_y = 3y^2 - 3x$$

$$f_y = f = 0 \iff x = y^2 \wedge y^6 + y^3 - 3y^3 = 0$$

$$\iff y^3(y^3 - 2) = 0$$

$$\iff y = 0 \vee y = \sqrt[3]{2}$$

$$\iff x = 0 \vee x = \sqrt[3]{4}$$

Bem.:
 L ist Niveaulinie von f

Bem.: Singuläre Punkte von L :

f Sattelpunkt

$$f\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right) = x^3 - y^2 = 0 \iff y = \pm x^{\frac{3}{2}}$$

Bsp.7:

$$f\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right) = (1 + x + y) \cdot e^{x^2+y^2} - 1 \text{ auf } \mathbb{R}^2$$

$$f_x = e^{x^2+y^2} + (1 + x + y) \cdot 2x \cdot e^{x^2+y^2} = (1 + 2x + 2x^2 + 2xy) \cdot e^{x^2+y^2}$$

$$f_y = (1 + 2y + 2y^2 + 2xy) \cdot e^{x^2+y^2}$$

$$f_y = 0 \iff 1 + 2y + 2y^2 + 2xy = 0$$

$$f_y = e^{x^2+y^2} + 2y \underbrace{(1 + x + y) \cdot e^{x^2+y^2}}_{=f+1}$$

$$f = 0 \implies f_y = e^{x^2+y^2} + 2y$$

$$= 1 + x^2 + y^2 + \frac{(x^2 + y^2)^2}{2} + \dots + 2y$$

$$= \underbrace{(1 + y)^2 + x^2 + \frac{(x^2 + y^2)^2}{2}}_{>0} + (\text{Rest } \geq 0)$$

Also ist $f_y > 0$ auf $L = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = 0 \right\}$

Analog $f_x > 0$

$$\implies \text{Satz überall anwendbar und } \phi'(x) = -\frac{f_x\left(\begin{matrix} x \\ \phi(x) \end{matrix}\right)}{f_y\left(\begin{matrix} x \\ \phi(x) \end{matrix}\right)} < 0$$

$$\implies \phi \text{ streng monoton fallend}$$

Overfull

Bsp.8:

Sei $x \mapsto g(x)$ eine C^1 -Funktion einer Variable mit $g'(x_0) \neq 0$. Dann gilt für $f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := g(x) - y$

$$\text{graph}(g) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

und

$$f_x \begin{pmatrix} x_0 \\ g(x_0) \end{pmatrix} = g'(x_0) \neq 0$$

\rightsquigarrow in einer Umgebung existiert eine Funktion $y \mapsto \phi(y)$ mit $\text{graph}(\phi) = \left\{ \begin{pmatrix} \phi(y) \\ y \end{pmatrix} \middle| y \in I \right\}$, d.h. $\phi(g(x)) = x$ und $g(\phi(y)) = y$

2.4.1 Allgemeine Dimension**Satz:**

Sei $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen, sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^m -Funktion, $m \geq 1$, sei $L := \{x \in U \mid f(x) = 0\}$ und $x_0 \in L$ mit $\frac{\partial f}{\partial x_{n+1}}(x_0) \neq 0$. Dann existieren $V \subset \mathbb{R}^n$ offen und $J \subset \mathbb{R}$ offener Intervall und eine C^m -Funktion $\phi : V \rightarrow J$ so dass $x_0 \in V \times J \subset U$ so dass

$$\text{graph}(\phi) = L \cap (V \times J)$$

ist.

Ausserdem ist für alle $x \in V$ mit alle $1 \leq i \leq n$:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i} \begin{pmatrix} x \\ \phi(x) \end{pmatrix}}{\frac{\partial f}{\partial x_{n+1}} \begin{pmatrix} x \\ \phi(x) \end{pmatrix}}$$

Bem.:

Für $x_0 \in L$ regulär, d.h. mit $\nabla f(x_0) \neq 0$ ist der Tangentialraum von L im Punkt x_0 gegeben durch

$$\begin{aligned}\nabla f(x_0) \cdot (x - x_0) &= 0 \\ &= \langle \nabla f(x_0)^T, x - x_0 \rangle = 0\end{aligned}$$

Bsp.:

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x^2 + y^2 + z^2 - 1$$

Nullstellmenge = L = Einheitssphäre

$$\nabla f = (2x, 2y, 2z)$$

reguläre auf L

Bsp.:Zweite Ableitung: $f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} C^2$ $\phi(x)$ mit $f \begin{pmatrix} x \\ \phi(x) \end{pmatrix} = 0$ und $f_y \neq 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x} \begin{pmatrix} x \\ \phi(x) \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\frac{dx}{dx}}_{=1} + \frac{\partial f}{\partial y} \begin{pmatrix} x \\ \phi(x) \end{pmatrix} \cdot \frac{d\phi}{dx}(x) = 0$$

$$\implies \phi'(x) = -\frac{f_x}{f_y} \begin{pmatrix} x \\ \phi(x) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \implies & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \begin{pmatrix} x \\ \phi(x) \end{pmatrix} \cdot \frac{dx}{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \begin{pmatrix} x \\ \phi(x) \end{pmatrix} \cdot \frac{d\phi}{dx} \\ & + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \begin{pmatrix} x \\ \phi(x) \end{pmatrix} \cdot \frac{dx}{dx} \right. \\ & \left. + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cdot \frac{d\phi}{dx} \right) \cdot \frac{d\phi}{dx} \\ & + \frac{\partial f}{\partial y} \begin{pmatrix} x \\ \phi(x) \end{pmatrix} \cdot \frac{d^2 \phi}{dx^2} \\ & = 0 \end{aligned}$$

$$\implies f_{xx} + f_{xy}\phi' + (f_{yx} + f_{yy}\phi')\phi' + f_y\phi'' = 0$$

$$\implies f_{xx} + 2f_{xy}\phi' + f_{yy}\phi'^2 + f_y\phi'' = 0$$

$$\implies f_{xx} - 2f_{xy}\frac{f_x}{f_y} + f_{yy}\frac{f_x^2}{f_y^2} + f_y\phi'' = 0$$

$$\implies \phi'' = -\frac{f_{xx}}{f_y} + 2\frac{f_{xy}f_x}{f_y^2} - \frac{f_{yy}f_x^2}{f_y^3} \begin{pmatrix} x \\ \phi(x) \end{pmatrix}$$

2.5 Funktionalmatrix

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen; $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix} : U \rightarrow \mathbb{R}^m$.

f heisst diefferenzierbar bzw. C^l falls jedes f_i es ist.
Differenzierbar:

$$\forall x_0 \in U : \forall i : f_i(x) = f_i(x_0) + \underbrace{\nabla f_i(x_0)}_{\text{Zeilenvektor}} \cdot \underbrace{(x - x_0)}_{\text{Spaltenvektor}} + o(|x - x_0|)$$

Also f differenzierbar $\Leftrightarrow \forall x_0 :$

$$f(x) = f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot (x - x_0) + o(|x - x_0|)$$

Dabei

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

"nabla f " die **Funktionalmatrix von f**

Bem.: Vorsicht:

Nicht verwechseln mit

$$P : U \rightarrow \mathbb{R} \quad C^2\text{-Funktion}$$

$\implies \nabla^2 P$ symmetrische $n \times n$ -Matrix "Hesse"-Matrix

Dann ist $(\nabla P)^T : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine C^0 -Funktion, und deren Funktionalmatrix $\nabla^2 P$ ist.

Def.: Potential:

Ist $f = (\nabla P)^T$ für $P : U \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar, so heisst P ein **Potential** von f

2.5.1 Kettenregel

Seien

$$\underbrace{\mathbb{R}^n \ni}_{\exists x} \underbrace{U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} W}_{\exists y} \underbrace{\mathbb{R}^l}$$

offene Teilmengen und f, g differenzierbar. Die vorige Kettenregel besagt:

$$\frac{\partial}{\partial x_k}(g_i(f(x))) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial g_i}{\partial y_j}(f(x)) \cdot \frac{\partial f_j}{\partial x_k}$$

Fakt:

In der obigen Situation ist $g \circ f : U \rightarrow W$ differenzierbar mit $\nabla(g \circ f)(x) = (\nabla g)(f(x)) \cdot \nabla f(x)$ oder kurz

$$\nabla(g \circ f) = \nabla g \cdot \nabla f$$

Bsp.:

$$\begin{aligned}
 f \begin{pmatrix} r \\ \phi \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} r \cos \phi \\ r \sin \phi \end{pmatrix} \\
 g \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \sqrt{x^2 + y^2} \\ \arg(x + iy) \end{pmatrix} \\
 \nabla f &= \begin{pmatrix} \cos \phi & -r \sin \phi \\ \sin \phi & r \cos \phi \end{pmatrix} \\
 \nabla g &= \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{-x}{x^2+y^2} \end{pmatrix} \\
 \nabla g \left(f \begin{pmatrix} r \\ \phi \end{pmatrix} \right) \cdot \nabla f \begin{pmatrix} r \\ \phi \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{x}{r^2} & \frac{y}{r^2} \\ \frac{-y}{r^2} & \frac{-x}{r^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \phi & -r \sin \phi \\ \sin \phi & r \cos \phi \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 \nabla(g \circ f) \begin{pmatrix} r \\ \phi \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 g \circ f \begin{pmatrix} r \\ \phi \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} r \\ \phi \end{pmatrix} \\
 \text{Analog } \nabla f \cdot \nabla g &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Erklärung: Umkehrfunktionen!

Allgemein: $Id : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, x \mapsto x$ hat

$$\nabla(Id) = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ 0 & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} = \text{Einheits } n \times n\text{-Matrix}$$

Also: Sind

$$\underbrace{\mathbb{R}^n}_{U} \xrightarrow{f} \underbrace{\mathbb{R}^m}_{V} \xrightarrow{g} \underbrace{\mathbb{R}^n}_{U}$$

$\exists x \qquad \exists y$

zueinander invers, differenzierbar, dann ist ∇f invertierbare Matrix und

$$(\nabla g)(f(x)) = (\nabla f)^{-1}; \text{ d.h.: } \nabla g(y) = (\nabla f(g(y)))^{-1}$$

Erinnerung:

Der **Rang** einer Matrix ist die maximale Anzahl linear unabhängiger Spalte (äquivalent: Zeilen). Eine $m \times n$ hat Rang $\leq \min\{m, n\}$

Def.: regulär:

$f : \mathbb{R}^n \ni U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^m$ heißt **regulär**, falls $\text{rang } \nabla f = \min\{m, n\}$ überall.

Spezialfälle

$n = 1$: f regulär $\iff \nabla f \neq 0$

$m = 1$: f regulär $\iff \nabla f \neq 0$

$n = m$: f regulär $\iff \nabla f$ invertierbar

Def.: regulär:

$f : U \rightarrow V$ **regulär** in $x_0 \left(\begin{matrix} U \subset \mathbb{R}^n \\ V \subset \mathbb{R}^m \end{matrix} \right) \iff \text{Rang } \nabla f(x_0) \text{ maximal.}$

Speziell:

$n = 1$: f ist Parametrisierung einer Kurve regulär $\iff \nabla f \neq 0 \implies$ Kurve glatt.
Tangente in x_0 hat Parametrisierung $x \mapsto f(x_0) + \nabla f(x_0)(x - x_0)$

$m = 1$: regulär falls die **Niveaufläche** $\{x \in U \mid f(x) = f(x_0)\}$ glatt in x_0 ist.

Bsp.:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \end{pmatrix} \implies \text{Bild}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| x^3 = y^2 \right\}$$

regulär nur für $t \neq 0$

Bsp.:

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = xy$$

Bsp.:

$$S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u \cdot \cos v \\ u \cdot \sin v \\ \frac{v}{2\pi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\implies u = \pm \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$v = 2\pi z$$

$$x \cdot \sin 2\pi z = y \cos 2\pi z$$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \cos v & -u \sin v \\ \sin v & u \cos v \\ 0 & \frac{1}{2\pi} \end{pmatrix}$$

\implies Spalten linear unabhängig

\implies Rang = 2

$\implies S$ überall regulär

$n = m$: f regulär in $x_0 \iff \nabla f(x_0)$ invertierbar $\iff \det \nabla f(x_0) \neq 0$

Def.: Funktionaldeterminante:

$\det \nabla f(x_0)$ heißt **Funktionaldeterminante** oder **Jacobideterminante**.

Die affine lineare Abbildung

$$f(x) = f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot (x - x_0)$$

approximiert f nahe x_0

Allgemein: $n = m \implies$ Ein achsenparalleler Quader mit Volumen v hat als Bild einen Parallelepiped vom Volumen $|\det \nabla f(x_0)| \cdot v$. Die Abbildung f bildet also kleine Quader mit Ecke x_0 näherungsweise auf kleine Parallelepide ab, wobei das Volumen näherungsweise mit $|\det \nabla f(x_0)|$ multipliziert wird. Und $\det \nabla f(x_0) > 0$ falls f orientierungserhaltend, $\det \nabla f(x_0) < 0$ falls f orientierungsvertauschend.

Bsp.:

$$n = m = 1$$

$$|\det \nabla f(x_0)| = |f'(x_0)| = \text{Streckungsfaktor.}$$

Vorzeichen: monoton wachsend/fallend

Bsp.:

$$n = m = 2 : \begin{pmatrix} r \\ \phi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r \cos \phi \\ r \sin \phi \end{pmatrix}$$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \cos \phi & -r \sin \phi \\ \sin \phi & r \cos \phi \end{pmatrix}$$

$$\det \nabla f = r$$

Allgemein $n = m$:

$\nabla f(x_0)$ invertierbar \iff lineare Abbildung $x \mapsto f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot (x - x_0)$ bijektiv

Satz: Satz über inverse Funktionen:

Sind $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \rightarrow V$ eine C^m -Funktion, $m \geq 1$, regulär in x_0 ; dann existieren offene Teilmengen $U' \subset U, V' \subset V$ mit $x_0 \in U'$ so dass f eine bijektive C^m -Funktion $g : U' \rightarrow V'$ induziert. Und dann ist $\nabla g(f(x_0)) = (\nabla f(x_0))^{-1}$

Bedeutung: (nicht linearer) Koordinatenwechsel oder Umparametrisierung.

Kapitel 3

Mehrdimensionale Integration

Fakt:

Jede kompakte Teilmenge A von \mathbb{R}^n hat ein Volumen $\mu(A)$ mit den Eigenschaften:

- $\mu(A) \in \mathbb{R}^{\geq 0}$
- $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$
- $\mu(A)$ falls $\dim(A) < n$ ist
- $\mu(A \times B) = \mu(A) \cdot \mu(B)$ für $A \subset \mathbb{R}^n, B \subset \mathbb{R}^l$ kompakt ; $A \times B = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mid a \in A, b \in B \right\}$
- μ ist invariant unter Translationen, Drehungen, Spiegelungen

Sei jetzt $B \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und f eine Funktion auf B . Eine **Zerlegung** \mathcal{Z} von B besteht aus kompakten Teilmengen B_1, \dots, B_r mit $B = \bigcup_{i=1}^r B_i$ und $\mu(B_i \cap B_j) = 0$ für alle $1 \leq i < j \leq r$ sowie Basispunkten $z_i \in B_i$. Die zugehörige **Riemann-Summe** ist

$$S_f(\mathcal{Z}) := \sum_{i=1}^r f(z_i) \cdot \mu(B_i)$$

Die **Feinheit** von \mathcal{Z} ist

$$\delta(\mathcal{Z}) := \max\{\delta(B_i) \mid 1 \leq i \leq r\}$$

wobei $\delta(B_i)$ der Durchmesser von B_i ist, wobei der Durchmesser

$$\delta(B) := \max\{|x - y| : x, y \in B\}$$

Def.: Riemann-Integral:

Das **Riemann-Integral von f über B** ist

$$\lim_{\delta(\mathcal{Z}) \rightarrow 0} S_f(\mathcal{Z}) =: \int_B f(x) \mu(x)$$

falls es existiert.

Satz:

Ist f stetig auf $B \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, so existiert das Integral.

3.1 Grundeigenschaften

(a)

$$\int_{A \cup B} f(z) \mu(z) = \int_A + \int_B - \int_{A \cap B}$$

(b)

$$\int_B f(z) \mu(z) = 0 \text{ falls } \mu(B) = 0$$

(c)

$$\int_B 1 \cdot \mu(z) = \mu(B)$$

(d)

$$\int_B (f(z) + g(z)) \mu(z) = \int_B f(z) \mu(z) + \int_B g(z) \mu(z)$$

(e)

$$\int_B \lambda f(z) \mu(z) = \lambda \int_B f(z) \mu(z) \quad \lambda \text{const.}$$

(f)

$$\forall z \in B : f(z) \leq g(z) \implies \int_B f(z) \mu(z) \leq \int_B g(z) \mu(z)$$

(g)

$$\left| \int_B f(z) \mu(z) \right| \leq \int_B |f(z)| \mu(z)$$

(h) Ist $f(z) \leq g(z)$ für alle $x \in B$ für stetige $f, g : B \rightarrow \mathbb{R}$, so ist

$$\begin{aligned} & \int_B (g(x) - f(x)) \underbrace{\mu(x)}_{n\text{-dimensionales Volumen}} \\ &= \underbrace{\mu \left(\left\{ \begin{pmatrix} x \\ x_{n+1} \end{pmatrix} \middle| x \in B, f(x) \leq x_{n+1} \leq g(x) \right\} \right)}_{n+1\text{-dimensionales Volumen } C} \end{aligned}$$

Satz: Fubini:

Vor. wie oben, $h : C \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} & \int_C h \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{pmatrix} \mu \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{pmatrix} \\ &= \int_B \left(\int_f^g \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} h \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{pmatrix} dx_{n+1} \right) \mu \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Analog mit einem x_i anstelle x_{n+1}

Bsp.1:

$$a, b \geq 1$$

$$\begin{aligned} \int_{[1,a] \times [1,b]} \frac{1}{(x+y)^2} \mu \left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right) &\stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_1^b \left(\int_1^a \frac{1}{(x+y)^2} dx \right) dy \\ &= \int_1^b \left(\frac{-1}{x+y} \Big|_1^a \right) dy \\ &= \int_1^b \left(\frac{1}{1+y} - \frac{1}{a+y} \right) dy \\ &= (\log(1+y) - \log(a+y)) \Big|_1^b \\ &= \log(1+b) - \log(a+b) \\ &\quad - \log(2) + \log(a+1) \\ &= \log \frac{(1+a)(1+b)}{2(a+b)} \end{aligned}$$

Bsp.2:

$$\begin{aligned}
 W &= \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]^3 \\
 \int_W \cos(x+y+z) \mu \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \int_{\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]^2} \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x+y+z) dz \right) \mu \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
 &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x+y+z) dz \right) dy \right) dx \\
 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x+y+z) dz &= \sin(x+y+z) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= \sin(x+y-\frac{\pi}{2}) - \sin(x+y+\frac{\pi}{2}) \\
 &= \cos(x+y) - (-\cos(x+y)) \\
 &= 2 \cos(x+y) \\
 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2 \cos(x+y) dy &= 4 \cos(x) \\
 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4 \cos(x) dx &= 8
 \end{aligned}$$

Bsp.3:Sei B der Bereich

$$\begin{aligned}
 B &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} 0 \leq x \leq 4 \\ -\sqrt{x} \leq y \leq \sqrt{4-x} \end{array} \right\} \\
 B &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} -2 \leq y \leq 2 \\ y^2 \leq x \leq 4 \end{array} \right\} \\
 \int_B xy^2 \mu \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \int_0^4 \left(\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} xy^2 dy \right) dx \\
 &= \int_0^4 \left(\frac{xy^3}{3} \Big|_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} \right) dx \\
 &= \int_0^4 \left(\frac{x}{3} 2x^{\frac{3}{2}} \right) dx \\
 &= \int_0^4 \frac{2}{3} x^{\frac{5}{2}} dx \\
 &= \frac{2}{3} x^{\frac{7}{2}} \frac{2}{7} \Big|_0^4 \\
 &= \frac{512}{21} \\
 \int_B xy^2 \mu \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \int_{-2}^2 \left(\int_{y^2}^4 xy^2 dx \right) dy \\
 &= \int_{-2}^2 \left(\frac{x^2 y^2}{2} \Big|_{x=y^2}^{x=4} \right) dy \\
 &= \int_{-2}^2 \left(8y^2 - \frac{y^6}{2} \right) dy = \left(\frac{8}{3} y^3 - \frac{y^7}{14} \right) \Big|_{y=-2}^{y=2} \\
 &\vdots \\
 &= \frac{512}{21}
 \end{aligned}$$

Bsp.4:

$$\int_0^2 \left(\int_{y^3}^{4\sqrt{2y}} f(x, y) dx \right) dy$$

$$y^3 \leq 4\sqrt{2y} \text{ für } 0 \leq y \leq 2 \iff y^6 \leq 16 \cdot 2y$$

$$\iff y^5 \leq 32$$

$$\iff y \leq \sqrt[5]{32} = 2\sqrt[5]{2}$$

Also mit $B = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} 0 \leq y \leq 2 \\ y^3 \leq x \leq 4\sqrt{2y} \end{array} \right\}$

ist das Integral $\int_B f(x, y) \mu \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} 0 \leq x \leq 8 \\ \frac{x^2}{32} \leq y \leq \sqrt[3]{x} \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \int_0^8 \left(\int_{\frac{x}{32}}^{\sqrt[3]{x}} f(x, y) dy \right) dx$$

Bsp.5:
Vertausche Integrationsreihenfolge in

$$\int_{-1}^2 \left(\int_{-x}^{2-x^2} f(x, y) dy \right) dx$$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} -1 \leq x \leq 2 \\ -x \leq y \leq 2 - x^2 \end{array} \right\}$$

$$B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} 1 \leq y \leq 2 \\ -\sqrt{2-y} \leq x \leq \sqrt{2-y} \end{array} \right\}$$

$$B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} -2 \leq y \leq 1 \\ -y \leq x \leq \sqrt{2-y} \end{array} \right\}$$

$$B = B_1 \cup B_2$$

$$\mu(B_1 \cap B_2) = 0$$

Antwort:

$$\int_1^2 \left(\int_{-\sqrt{2-y}}^{\sqrt{2-y}} f(x, y) dx \right) dy + \int_{-2}^1 \left(\int_{-y}^{\sqrt{2-y}} f(x, y) dx \right) dy$$
Substitution

$$\phi : \mathbb{R}^n \supset \tilde{B} \rightarrow B \subset \mathbb{R}^n, \tilde{x} \mapsto x$$

Betrachte kompakte $B, \tilde{B} \subset \mathbb{R}^n$ und : $\tilde{B} \rightarrow B, \tilde{x} \mapsto x$ surjektive Abbildung, injektiv ausserhalb einer Teilmenge $C \subset \tilde{B}$ mit $\mu(C) = 0$

Annahme: ϕ C^1 -Funktion

Satz:

Dann ist

$$\int_B f(x) \mu(x) = \int_{\tilde{B}} f(\phi(\tilde{x})) \cdot |\nabla \phi(\tilde{x})| \cdot \mu(\tilde{x})$$

Beweisidee:

$$\text{Linke Seite} = \lim_{\delta(\mathcal{Z}) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^r \underbrace{f(z_i)}_{f(\phi(\tilde{z}_i))} \underbrace{\mu(B_i)}_{\mu(\phi(\tilde{B}_i))}$$

$$\text{Setze } \tilde{B}_i := \phi^{-1}(B_i)$$

$$\implies B_i = \phi(\tilde{B}_i)$$

$$\text{Wähle } \tilde{z}_i \in \tilde{B}_i \text{ mit } \phi(\tilde{z}_i) = z_i$$

$$= \lim_{\delta(\mathcal{Z}) \rightarrow 0} \underbrace{\sum_{i=1}^r (f(\phi(\tilde{z}_i)) \cdot |\nabla \phi(\tilde{z}_i)|) \cdot \mu(\tilde{B}_i)}_{\substack{\text{Riemannsumme von } f(\phi(\tilde{x})) |\nabla \phi(\tilde{x})| \\ \text{bezüglich der Zerlegung } \tilde{\mathcal{Z}} = (\tilde{B}_i, \tilde{z}_i)_{i=1 \dots r}}}$$

$$= \lim_{\delta(\mathcal{Z}) \rightarrow 0} S_{f \circ \phi \cdot |\nabla \phi|}(\tilde{\mathcal{Z}})$$

= Rechte Seite

Bem.:

$n = 1 :$

$$\int_{\phi(\tilde{a})}^{\phi(\tilde{b})} f(x) dx = \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} f(\phi(\tilde{x})) \phi'(\tilde{x}) d\tilde{x}$$

$$\phi : [\tilde{a}, \tilde{b}] \rightarrow [a, b]$$

äquivalent:

$$\underbrace{\int_a^b f(x) dx}_{= \int_{[a,b]} f(x) \mu(x)} = \underbrace{\int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} f(\phi(\tilde{x})) \cdot |\phi'(\tilde{x})| d\tilde{x}}_{= \int_{[\tilde{a},\tilde{b}]} \dots}$$

Bsp.: lineare Substitution:

$\phi : \widetilde{B} \rightarrow B, x \mapsto Ax + b$ für $b \in \mathbb{R}^n$ und für eine $n \times n$ -Matrix A mit $\det(A) \neq 0$

$$\implies \nabla \phi = A$$

$$\implies \int_{\phi(\widetilde{B})} f(x) \mu(x) = \int_{\widetilde{B}} f(A\tilde{x} + b) \cdot \underbrace{|\det A|}_{\text{const.}} \cdot \mu(\tilde{x})$$

Insbesondere: $|\det A| = 1$ für Translationen, Drehungen, Spiegelungen.

Bsp.: Polarkoordinaten:

kompakt $[0, \infty[\times [-\pi, \pi] \supset \tilde{B} \rightarrow B \subset \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}\psi : \begin{pmatrix} r \\ \phi \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} r \cos \phi \\ r \sin \phi \end{pmatrix} \\ \implies |\nabla \psi| &= r \\ \implies \int_B f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mu \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \int_{\tilde{B}} f \begin{pmatrix} r \cos \phi \\ r \sin \phi \end{pmatrix} \cdot r \cdot \mu \begin{pmatrix} r \\ \phi \end{pmatrix} \\ \text{d.h. } \int_B f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} dx dy &= \int_{\tilde{B}} f \begin{pmatrix} r \cos \phi \\ r \sin \phi \end{pmatrix} \cdot r dr d\phi\end{aligned}$$

Bsp.: Kreisfläche:

$$\begin{aligned}B &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| x^2 + y^2 \leq R^2 \right\} \\ \tilde{B} &= [0, R] \times [-\pi, \pi] \\ \implies \mu(B) &= \int_B 1 dx dy \\ &= \int_{[0, R] \times [-\pi, \pi]} r dr d\phi \\ &= \int_0^R r dr \cdot \int_{-\pi}^{\pi} d\phi \\ &= \frac{r^2}{2} \Big|_0^R \cdot 2\pi \\ &= \pi R^2\end{aligned}$$

Analog: Zylinderkoordinaten

Bsp.: Kugelkoordinaten:

$$[0, \infty[\times [-\pi, \pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

bijektiv ausserhalb des Randes mit $\mu = 0$

$$\begin{aligned}\psi : \begin{pmatrix} r \\ \phi \\ \theta \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} r \cos \theta \cos \phi \\ r \cos \theta \sin \phi \\ r \sin \theta \end{pmatrix} \\ |\nabla \psi| &= r^2 \cos \theta \\ \Rightarrow \int f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} dx dy dz &= \int f \begin{pmatrix} r \cos \theta \cos \phi \\ r \cos \theta \sin \phi \\ r \sin \theta \end{pmatrix} \cdot r^2 \cos \theta dr d\theta d\phi\end{aligned}$$

Bsp.: Volumen der Kugel mit Radius R :

$$\begin{aligned}\widetilde{B} &= [0, R] \times [-\pi, \pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ \implies \mu(B) &= \int_B 1 \, dx \, dy \, dz \\ &= \int_{r=0}^R \int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\phi=-\pi}^{\pi} r^2 \cos \theta \, dr \, d\theta \, d\phi \\ &= \int_0^R r^2 \, dr \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \, d\theta \cdot \int_{-\pi}^{\pi} d\phi \\ &= \frac{r^3}{3} \Big|_0^R \cdot \sin \theta \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cdot \phi \Big|_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{R^3}{3} \cdot 2 \cdot 2\pi \\ &= \frac{4\pi R^3}{3}\end{aligned}$$

Bsp.:

$$\begin{aligned}
 B &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2 \right\} \\
 C &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : x^4 + y^4 + z^4 + u^4 \leq R^2 \right\} \\
 &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in B \text{ und } |u| \leq \sqrt{R^2 - x^2 - y^2 - z^2} \right\} \\
 \mu(C) &= \int_C 1 \mu \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} \\
 &\stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_B \left(\int_{-\sqrt{R^2 - x^2 - y^2 - z^2}}^{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2 - z^2}} 1 \, du \right) \mu \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} \\
 &= \int_B 2 \sqrt{R^2 - x^2 - y^2 - z^2} \mu \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} \\
 &= \int_0^R \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\pi}^{\pi} 2 \sqrt{R^2 - r^2} \cdot r^2 \cos \theta \, dr \, d\theta \, d\phi \\
 &= \underbrace{\int_0^R 2 \sqrt{R^2 - r^2} r^2 \, dr}_{*} \cdot \underbrace{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \, d\theta}_{2} \cdot \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} 1 \, d\phi}_{2\pi}
 \end{aligned}$$

$$r = R \cdot \sin t$$

$$dr = R \cdot \cos t \, dt$$

$$r = 0 \iff t = 0$$

$$r = R \iff t = \frac{\pi}{2}$$

$$* = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sqrt{R^2 - R^2 \sin^2 t} \cdot R^2 \sin^2 t R \cos t \, dt$$

$$= 2R^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos^2 t \, dt$$

$$= \frac{R^4}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - \cos 4t}{2} \, dt$$

$$= \frac{R^4}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin 4t \Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

Too long

Anwendungen: Masse (/Ladung), Schwerpunkt, etc.

Masse Punktmassen m_i im Punkten $x_i \in \mathbb{R}^n \implies$ Gesamtmasse $\sum m_i$
 kontinuierliche Variante: Massenverteilung $m : B \rightarrow \mathbb{R}$
 \implies Gesamtmasse $m(B) = \int_B m(x)\mu(x)$
 Ist $m(x) = m$ konstant, dann ist $m(B) = m \cdot \mu(B)$

Schwerpunkt \implies Gesamtschwerpunkt S

$$S = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}$$

analog:

$$\begin{aligned} & \text{vektorwertiger Integral} = \\ & \underbrace{\begin{pmatrix} \int_B m(x)x_1\mu(x) \\ \vdots \\ \int_B m(x)x_n\mu(x) \end{pmatrix}}_{x=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}} \\ & S = \frac{\int_B m(x) \cdot \overline{x} \mu(x)}{\int_B m(x)\mu(x)} \end{aligned}$$

Spezialfall: Rotationskörper

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} a \leq z \leq b \\ x^2 + y^2 \leq r(z)^2 \end{array} \right\}$$

für $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$

$$\int_B f \left(\sqrt{x^2 + y^2} \right) \mu \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \int_a^b \left(\iint_{\sqrt{x^2+y^2} \leq r(z)} f \left(\sqrt{x^2 + y^2} \right) dx dz \right) dz$$

ebene Polarkoordinaten:

$$\begin{aligned}
 & x = \rho \cos \phi \Big| dx dy = \rho d\rho d\phi \\
 & y = \rho \sin \phi \\
 &= \int_a^b \left(\int_{\rho=0}^{\rho=2\pi} \left(\int_{\phi=0}^{2\pi} f\left(\frac{\rho}{z}\right) \underbrace{\rho d\phi}_{2\pi f\left(\frac{\rho}{z}\right)\rho} \right) d\rho \right) dz \\
 &= \int_a^b \left(\int_0^{r(z)} f\left(\frac{\rho}{z}\right) \cdot 2\pi\rho d\rho \right) dz \\
 & \text{Wegen } \int_0^{r(z)} 2\pi\rho d\rho = \pi\rho^2 \Big|_0^{r(z)} = \pi r(z)^2 \text{ folgt} \\
 & \int_B f(z) \mu \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \int_a^b f(z) \pi r(z)^2 dz \\
 & \text{Insbesondere: } f(z) = 1 \implies \text{Volumen} \\
 & \mu(B) = \int_a^b \pi r(z)^2 dz
 \end{aligned}$$

Bsp.: Kegel:

$$\begin{aligned}
 [a, b] &\rightarrow [0, h] \\
 r(z) &= \frac{R}{h}(h - z) \\
 \implies \mu(B) &= \int_0^h \pi \left[\frac{R}{h}(h - z) \right]^2 dz \\
 &= \pi \frac{R^2}{h^2} \frac{(z - h)^3}{3} \Big|_0^h \\
 &= \pi \frac{R^2}{h^2} \left(0 - \frac{(-h)^3}{3} \right) \\
 &= \frac{\pi R^3 h}{3}
 \end{aligned}$$

Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, $m : B \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$ Massenverteilung auf B .

$$\begin{aligned}
 \text{Gesamtmasse } &\int_B m(x)\mu(x) \\
 \text{Schwerpunkt (falls Nenner } &\neq 0) \frac{\int_B m(x) \cdot x\mu(x)}{\int_B m(x)\mu(x)}
 \end{aligned}$$

Bsp.: Hohlkreisscheibe:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} x^2 + y^2 \leq R^2 \\ x \geq 0 \end{array} \right\}$$

$$m \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1$$

$$\int_B \mu \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{\pi}{2} \cdot R^2$$

$$\int_B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} dx dy = \int_0^R \left(\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{+\sqrt{R^2-x^2}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} dy \right) dx$$

$$\int_B x dx dy = \int_0^R \left(\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{+\sqrt{R^2-x^2}} x dy \right) dx$$

$$= \int_0^R x \cdot 2\sqrt{R^2 - x^2} dx$$

= ...

$$= \frac{2}{3} R^3$$

$$\int_B y dx dy = \int_0^R \left(\underbrace{\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{+\sqrt{R^2-x^2}} y dy}_{= \frac{y^2}{2} \Big|_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{+\sqrt{R^2-x^2}} = 0} \right) dx = 0$$

$$\implies \text{Schwerpunkt} = \frac{\begin{pmatrix} \frac{2}{3} R^3 \\ 0 \end{pmatrix}}{\frac{\pi}{2} R^2} = \begin{pmatrix} \frac{4R}{3\pi} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Trägheitsmoment von B bzgl. Achse in Richtung eines Einheitsvektors; $B \subset \mathbb{R}^3$
 Punktmasse m im P mit Abstand ρ zur Achse hat Betrag $m \cdot \rho^2$; $\rho = |e \times P|$

$$\Theta_e(B) = \int_B m(B) \cdot |e \times P|^2 \mu(P)$$

Speziell: z -Achse

$$\begin{aligned}\implies e &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \implies \Theta_e(B) &= \int_B m \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot (x^2 + y^2) \mu \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Bsp.: Kugel:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2 \right\}$$

$m = 1$ konstant

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} -R \leq z \leq R \\ \sqrt{x^2 + y^2} \leq \sqrt{R^2 - z^2} \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned} \text{Masse: } \int_B \mu \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \int_{-R}^R \pi(R^2 - z^2) dz \\ &= \pi \left(R^2 z - \frac{z^3}{3} \right) \Big|_{-R}^R \\ &= \pi \left(R^3 - \frac{R^3}{3} + R^3 - \frac{R^3}{3} \right) \\ &= \frac{4\pi}{3} R^3 \end{aligned}$$

Schwerpunkt:

$$\begin{aligned} \int_B \mu \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \int_B z \mu \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \int_{-R}^R z \pi(R^2 - z^2) dz = 0 \\ \xrightarrow{\text{Variablenwechsel}} \int_B x \mu \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \int_B y \mu \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \int_B z \mu \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \\ \implies \text{Schwerpunkt} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \end{aligned}$$

Trägheitsmoment

$$\begin{aligned} \Theta_e(B) &\stackrel{\text{Symmetrie}}{=} \Theta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}(B) \\ &= \int_B (x^2 + y^2) \mu \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= \int_{-R}^R \left(\int_0^{\sqrt{R^2 - z^2}} \underbrace{\rho^2 \cdot 2\pi\rho}_{2\pi\rho^3} d\rho \right) dz$$

Michał Sudwoj

$$\text{Stand: 17. November 2011} \quad = \int_{-R}^R \left(\frac{2\pi}{4} \rho^4 \Big|_0^{\sqrt{R^2 - z^2}} \right) dz$$

$$= \int_{-R}^R \frac{\pi}{2} \cdot (R^2 - z^2)^2 dz$$



KAPITEL 3. MEHRDIMENSIONALE INTEGRATION

3.1. GRUNDEIGENSCHAFTEN

Too long

Bsp.: homogene Kugel mit Radius R :

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2 \right\} \text{ Massenverteilung } M$$

$$\text{Masse } m \quad P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}; a > R$$

$$\Rightarrow \text{Betrag der Gravitation } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ auf } P = \frac{GmM}{\left| P - \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right|^2}$$

$$\text{Vektor } \frac{GmM}{\left| P - \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right|^3} \left[P - \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right]$$

\Rightarrow Gesamtkraft auf P :

$$\int_B \frac{GmM \cdot \left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - P \right]}{\left| \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - P \right|^3} \mu \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\text{Symmetrie } \Rightarrow = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ * \end{pmatrix} \text{ mit}$$

$$* = \int_B \frac{GmM(z-a)}{\left| \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - P \right|^3}$$

$$\left| \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - P \right| = \sqrt{x^2 + y^2 + (z-a)^2}$$

$$= \int \frac{GmM(z-a)}{(x^2 + y^2 + (z-a)^2)^{\frac{3}{2}}} \mu \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$= \int_{-R}^R \left(\int_0^{\sqrt{R^2-z^2}} \frac{GmM(z-a)}{(\rho_0^2 + (z-a)^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \mu \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

KAPITEL 3. MEHRDIMENSIONALE INTEGRATION

3.1. GRUNDEIGENSCHAFTEN

Too long

Check with
Simon

Bsp.: Gravitation einer Kugelschale:

$$0 \leq R_1 \leq R_2$$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid R_1^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq R_2^2 \right\}$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}; 0 < a < R_1, \text{ oder } a > R_2$$

konstante Dichte m , Masse M

G Newtonsche Gravitationskonstante

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in B \text{ übt auf } P \text{ die Kraft } GmM \cdot \frac{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z-a \end{pmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} x \\ y \\ z-a \end{pmatrix} \right|^3}$$

$$\Rightarrow \text{Gesamtkraft} = \int_B GmM \frac{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z-a \end{pmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} x \\ y \\ z-a \end{pmatrix} \right|^3} \mu \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Kugelkoordinaten
= $GmM \cdot$

$$\int_{R_1}^{R_2} \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2\pi} \frac{\begin{pmatrix} r \cos \theta \cos \phi \\ r \cos \theta \sin \phi \\ r \sin \theta - a \end{pmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} r \cos \theta \cos \phi \\ r \cos \theta \sin \phi \\ r \sin \theta - a \end{pmatrix} \right|^3} r^2 \cos \theta d\phi \right) d\theta \right) dr$$

$$\left| \begin{pmatrix} r \cos \theta \cos \phi \\ r \cos \theta \sin \phi \\ r \sin \theta - a \end{pmatrix} \right| = \sqrt{r^2 \cos^2 \theta + (r \sin \theta - a)^2}$$

$$= \sqrt{r^2 - 2ra \sin \theta + a^2}$$

$$\text{Inneres Integral} = * = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} r \cos \theta \cos \phi \\ r \cos \theta \sin \phi \\ r \sin \theta - a \end{pmatrix} d\phi$$

Michał Sudwoj
Wegen $\int_0^{2\pi} \cos \phi d\phi = \int_0^{2\pi} \sin \phi d\phi = 0$ ist das

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$$



z -Komponente

$$= GmM \cdot \int_{R_1}^{R_2} \left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\pi(r \sin \theta - a)r^2 \cos \theta d\theta}{\left| \begin{pmatrix} r \cos \theta \cos \phi \\ r \cos \theta \sin \phi \\ r \sin \theta - a \end{pmatrix} \right|^3} \right) dr$$

Too long

Uneigentilches Integral**Def.: Uneigentliches Integral:**Ist f auf B stetig aber B nicht kompakt, so definieren wir

$$\int_B f(x) \mu(x) := \lim_{B' \subset B \text{ kompakt}} \int_{B'} f(x) \mu(x)$$

falls der lim existiert, d.h. falls gilt

$$\int_B f(x) \mu(x) = A$$

mit

$$\forall \varepsilon > 0 \exists B_0 \subset B \text{ kompakt} : \forall B' \subset B \text{ kompakt} : B_0 \subset B'$$

$$\Rightarrow \left| \int_{B'} f(x) \mu(x) - A \right| < \varepsilon$$

Bem.:Ist $f \geq 0$ auf B (oder $f \leq 0$ auf B) so existiert das Integral oder es ist ∞ , und man kann es immer mit Fubini berechnen**Bem.:**Im allgemeinen berechne über die Punkte mit $f \geq 0$ bzw. $f \leq 0$ separat.
⇒ Uneigentilches Integral ist **nicht** definiert falls dies $\infty - \infty$ ergibt.

Bsp.:Für welches $s \in \mathbb{R}$ existiert

$$\begin{aligned}
\int_{[1,\infty] \times [1,\infty]} \frac{1}{(x+y)^s} dx dy &= \int_1^\infty \left(\underbrace{\int_1^\infty \frac{dx}{(x+y)^s}}_{=\infty \text{ falls } s \leq 1} \right) dy \\
&\stackrel{s>1}{=} \int_1^\infty \left(\frac{(x+y)^{1-s}}{1-s} \Big|_1^\infty \right) dy \\
&= \int_1^\infty \left(-\frac{(1+y)^{1-s}}{1-s} \right) dy \\
&\stackrel{z=1+y}{=} \frac{1}{s-1} \underbrace{\int_2^\infty z^{1-s} dz}_{=\infty \text{ falls } 1-s \geq -1 \Leftrightarrow s \leq 2} \\
&\stackrel{s>2}{=} \frac{1}{s-1} \left. \frac{z^{2-s}}{2-s} \right|_0^\infty \\
&= \frac{1}{s-1} \left(-\frac{2^{2-s}}{2-s} \right) \\
&= \begin{cases} \infty & s \leq 2 \\ \frac{2^{2-s}}{(s-1)(2-s)} & s > 2 \end{cases}
\end{aligned}$$

Bsp.:

Berechne

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$$

Lösung: $I > 0$

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dx dy \\ &\stackrel{\text{Polarkoordinaten}}{=} \int_{r=0}^{\infty} \int_{\phi=0}^{2\pi} e^{-r^2} r d\phi dr \\ &= \int_0^{\infty} 2\pi e^{-r^2} r dr \\ &= -\pi e^{-r^2} \Big|_0^{\infty} \\ &= 0 - (-\pi e^0) = \pi \end{aligned}$$

Antwort:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

3.1.1 Linienintegral

$$\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n, t \mapsto \phi(t) C^1$$

Parametrisierung einer Kurve $C = \phi([a, b])$

$$\left| \frac{d\phi}{dt} \right| = \text{lokaler Streckungsfaktor bei } t$$

$$\phi(t+h) = \phi(t) + h \cdot \phi'(t) + o(h) \iff |\phi(t+h) - \phi(t)| = h \cdot |\phi'(t) - o(1)|$$

Def.: Linienintegral:

$$\int_C f(x) dx := \int_a^b f(\phi(t)) \cdot |\phi'(t)| dt$$

Bem.:

Analog zur Substitutionsformel

Def.: Linienintegral:

$$I = [a, b] \xrightarrow{\varphi} x \in \mathbb{R}^n$$

bijektiv ausser in endlich vielen Punkten und C^1

$$f : C \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\int_C f(x) |dx| := \int_a^b f(\varphi(t)) \cdot |\varphi'(t)| dt$$

Das existiert, falls f stückweise stetig ist.

Wegen:

$$\varphi(t+h) = \varphi(t) + \varphi'(t) \cdot h + o(h)$$

ist $|\varphi'(t)|$ der lokale Streckungsfaktor.

Fakt:

Das Linienintegral ist von der Parametrisierung unabhängig, d.h. hängt nur von C, f ab.

Fix

Bsp.: Kurvenlänge:

$$(\text{Länge von } C) = \int_C 1 \cdot |\mathrm{d}x| = \int_a^b |\varphi'(t)| \, dt$$

Speziell: $C = \text{graph}(\psi)$ für $\psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ \Leftrightarrow Parametrisierung $\varphi :$

$$[a, b] \xrightarrow{2}, t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ \psi(t) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \varphi'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \psi'(t) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{Länge von } C \text{ ist } \int_a^b \sqrt{1 + \psi'(t)^2} \, dt$$

Bsp.: Länge einer Parabel:

$$\begin{aligned}
 \psi : [-1, 1] &\rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto t^2 \\
 \text{Länge} &= \int_{-1}^1 \sqrt{1 + 4t^2} dt \\
 &= \left| 2t = \sinh s \right| \\
 &= \dots \\
 &= \left(\sqrt{1 + 4t^2} \cdot \frac{t}{2} + \frac{\operatorname{arsinh} 2t}{4} \right) \Big|_{-1}^1 \\
 &= \sqrt{5} + \frac{\operatorname{arsinh} 2}{2} \\
 &= \sqrt{5} + \frac{\log(2 + \sqrt{5})}{2}
 \end{aligned}$$

Flächenintegral

Def.: Flächenintegral:

$$R^2 \supset \underbrace{B}_{\exists(u)} \xrightarrow{\varphi} F \subset \mathbb{R}^2$$

B kompakt, φ C^1 -Funktion, bijektiv ausserhalb Teilmenge mit $\mu = 0$

$$\int_F f(x) \delta(x) := \int_B f \left(\varphi \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right) \left| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right| \mu \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Parallelogramm aufgespannt von $\frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial v}$

Fakt:Das hängt nur von F und f ab.

Spezialfall:

$$F = \text{graph } \psi, \psi : B \rightarrow \mathbb{R} C^1$$

$$\Leftrightarrow \text{Parametrisierung: } \varphi \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \psi \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right| &= \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \psi_u \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \psi_v \end{pmatrix} \right| \\ &= \left| \begin{pmatrix} \psi_u \\ -\psi_v \\ 1 \end{pmatrix} \right| \\ &= \sqrt{1 + \psi_u^2 + \psi_v^2} \end{aligned}$$

 \implies Flächeninhalt von graph ψ

$$\int_B \sqrt{1 + \psi_u^2 + \psi_v^2} \, du \, dv$$

Bsp.:

$$\begin{aligned}
 \psi \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} &= u^2 - v^2 \\
 B &= \left\{ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mid u^2 + v^2 \leq R^2 \right\} \\
 \sqrt{1 + \psi_u^2 + \psi_v^2} &= \sqrt{1 + (2u)^2 + (-2v)^2} = \sqrt{1 + 4(u^2 + v^2)} \\
 \implies \text{Flächeninhalt} &= \int_{u^2+v^2 \leq R^2} \sqrt{1 + 4(u^2 + v^2)} \, du \, dv \\
 &= \int_0^R \int_0^{2\pi} \sqrt{4r^2} r \, d\varphi \, dr \\
 &= \int_0^R \sqrt{1 + 4r^2} 2\pi r \, dr \\
 &= \frac{2\pi(1 + 4r^2)^{\frac{3}{2}}}{12} \Big|_0^R \\
 &= \frac{\pi}{6} \cdot ((1 + 4R^2)^{\frac{3}{2}} - 1)
 \end{aligned}$$

Bsp.: Rotationsfläche:

$$g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0} F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| \begin{array}{l} a \leq z \leq b \\ x^2 + y^2 = g(z)^2 \end{array} \right\}$$

Parametrisierung:

$$\begin{aligned} \varphi : B = [a, b] \times [0, 2\pi] &\xrightarrow{\varphi} F \subset \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} z \\ \theta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a(z) \cos \theta \\ b(z) \sin \theta \\ z \end{pmatrix} \\ \left| \frac{\partial \varphi}{\partial z} \times \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right| &= \left| \begin{pmatrix} g'(z) \cos \theta \\ g(z) \sin \theta \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -g(z) \sin \theta \\ +g(z) \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} \right| \\ &= \left| \begin{pmatrix} -g(z) \cos \theta \\ -g(z) \sin \theta \\ g(z) \cdot g'(z) \end{pmatrix} \right| \\ &= g(z) \cdot \sqrt{1 + g'(z)} \end{aligned}$$

Flächeninhalt von F

$$\begin{aligned} &= \int_{z=a}^b \left(\int_{\theta=0}^{2\pi} g(z) \sqrt{1 + g'(z)} d\theta \right) dz \\ &= 2\pi \int_a^b g(z) \sqrt{1 + g'(z)} dz \end{aligned}$$

Bsp.: Oberfläche einer Kugel mit Radius R :

$$\begin{aligned}[a, b] &= [-R, R] \\ g(z) &= \sqrt{R^2 - z^2} \\ \implies 2\pi \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - z^2} &\sqrt{1 + \left(\frac{-2z}{2\sqrt{R^2 - z^2}}\right)^2} dz \\ &= 2\pi \int_{-R}^R \sqrt{(R^2 - z^2) + (-z)^2} dz \\ &= 2\pi \int_{-R}^R R dz \\ &= 2\pi \cdot R \cdot 2R \\ &= 4\pi R^2\end{aligned}$$

Kapitel 4

Vektorfelder

$$U \subset \mathbb{R}^n$$

$f : U \rightarrow \mathbb{R}$ Skalarfeld

$K : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ Vektorfeld (Strömung, Kraft, Gradient $(\nabla f)^T$)

Bsp.: konstantes Vektorfeld:

Bsp.1: Punktmasse:

$$K(x) = c \cdot \frac{-x}{|x|^3}$$

Bsp.2: Homogene Kugel mit Radius R :

↔ Gravitationsfeld

$$K(x) = \begin{cases} c \cdot \frac{-x}{|x|^3} & \text{für } |x| \geq R \\ -c \cdot \frac{-x}{|x|^3} & \text{für } |x| \leq R \end{cases}$$

Bsp.3:

$$K(x) = -c \cdot \frac{x}{|x|^3}, c > 0$$

(Gravitationsfeld einer Punktmasse)

Bsp.4:

$\omega \neq 0$ Vektor in \mathbb{R}^3

$$K(x) = \omega \times x$$

Konstante Drehung um die Achse ω

Bsp.5:

$$K(x) = \frac{\omega \times x}{|\omega \times x|^2}$$

4.1 Feldlinien

Def.: Feldlinie:

Eine C^1 -Abbildung $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ mit

$$\gamma'(t) = K(\gamma(t))$$

heisst **Feldlinie** von K .

Bedeutung falls K das Geschwindigkeitsfeld eines strömmenden Mediums: Weg eines einzelnen Teilchens

Bsp.: 2:

$$\gamma(t) = -\sqrt[3]{3ct} \cdot \frac{x_0}{|x_0|}$$

Bsp.: 3,4:

Kreislinien senkrecht zu ω

Bem.:

K lokal Lipschitzstetig \Rightarrow für jeden Startwert $\gamma(0) = x_0 \in U$ existiert eine Maximallösung.

\Rightarrow Jeder Punkt liegt auf einer eindeutigen Feldlinien

Bsp.6:

$$K \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x-y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{pmatrix}$$

auf

$$\mathbb{R}^2 \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

allgemeine Lösung:

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} (t+c) \cdot \cos(\varphi_0 + \log(t+c)) \\ (t+c) \cdot \sin(\varphi_0 + \log(t+c)) \end{pmatrix}$$

logarithmische Spirale

4.2 Potentiale

Def.: Potential:

Ist $K(x) = (\nabla f)^T$ für eine C^1 -Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ (d.h. ein Skalarfeld f), so heisst f ein **Potential** von K .

Bem.:

Ist K ein Kraftfeld, so kann f als zugehörige potentielle Energie verstanden werden.

Bem.:

Feldlinien

Bsp.: 2:

$$K(x) = -c \cdot \frac{x}{|x|^3} = \nabla \left(\frac{c}{|x|} \right)^T$$

Bsp.: 3,4:

Existiert kein Potential!

4.2.1 Explizite Berechnung eines Potentials

im \mathbb{R}^2 ; $K \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$ stetig, definiert auf $I \times I'$

\Leftrightarrow DGL:

$$P \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x}$$

$$Q \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial y}$$

Methode: Wähle Stammfunktion $f_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \int P \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} dx$

\Leftrightarrow allgemeine Lösung der ersten DGL ist $f = f_1 + g_1(y)$

Einsetzen in zweite DGL

$$Q = \frac{\partial f_1}{\partial y} + g'(y) \Leftrightarrow g = \int \left(Q - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dy$$

Das funktioniert genau dann, wenn $Q - \frac{\partial f_1}{\partial y}$ von x unabhängig ist.

Bsp.:

$$K \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 + xy^2 \\ x^2y - y^5 \end{pmatrix}$$

Ansatz: $\frac{\partial f}{\partial x} = x^3 + xy \iff f = \int (x^2 + xy^2) dx + g(y)$

$$\iff f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2y^2}{2} + g'(y)$$

und $\frac{\partial f}{\partial y} = x^2y - y^5 = x^2y - g'(y)$

$$\iff g'(y) = \cancel{x^2y} - \cancel{x^2y} - y^5$$
$$\iff g'(y) = -\frac{y^6}{6} + c$$

$$\text{Existiert } f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2y^2}{2} - \frac{y^6}{6} + c$$

Analog in \mathbb{R}^3 **Bsp.:**Für welche Konstanten a, b, c hat

$$K = \begin{pmatrix} 2xy + yz \\ x^2 + xz + z \\ axy + by + cz \end{pmatrix}$$

ein Potential. Lösung:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 2xy + yz \iff f = \int (2xy + yz) dx + g\left(\begin{matrix} y \\ z \end{matrix}\right) \\ f &= x^2y + xyz + g\left(\begin{matrix} y \\ z \end{matrix}\right) \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \cancel{x^2} + \cancel{xyz} + z = \cancel{x^2} + \cancel{xyz} + \frac{\partial g}{\partial y} \\ &\iff \frac{\partial g}{\partial y} = z \\ &\iff g\left(\begin{matrix} y \\ z \end{matrix}\right) = yz + h(z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial z} &= axy + by + cz = xy + y + \frac{dh}{dz} \\ &\iff \frac{dh}{dz} = (a - 1)xy + (b - 1)y + cz \end{aligned}$$

Hat eine Lösung $h(z)$ (von x, y unabhängig) g.d.w. $a = 1$ und $b = 1$

$$h(z) = c \frac{z^2}{2} + d$$

Antwort: K hat ein Potential g.d.w. $a = b = 1$, und dann

$$f = x^2 + xyz + yz + c \frac{z^2}{2} + d$$

Bem.:

Analog wenn U konvex ist.

Bem.: Allgemein:

↔ Entscheiden ob lokal ein Potential existiert.

Satz:

Ein C^1 -Vektorfeld $\mathbf{K} = \begin{pmatrix} K_1 \\ \vdots \\ K_n \end{pmatrix}$ hat lokal ein Potential g.d.w.

$$\forall i \forall j : \frac{\partial K_i}{\partial x_j} = \frac{\partial K_j}{\partial x_i}$$

Bew.:

Ist $\mathbf{K} = (\nabla f)^T$, so ist

$$\frac{\partial K_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \cdot \partial x_i} \quad (\text{d.h. } \nabla \mathbf{K} = \nabla^2 f)$$

$\mathbf{K} C^1 \implies f C^2 \implies \nabla^2$ symmetrisch.

umgekehrt: Sei $n = 2$. Auf $I \times I' \subset U$ gelte

$$\frac{\partial K_1}{\partial x_2} = \frac{\partial K_2}{\partial x_1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = K_1 \iff f \left(\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix} \right) = \underbrace{\int K_1 \left(\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix} \right) dx_1}_{=f_1 \left(\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix} \right)} + g(x_2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = K_2 \left(\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix} \right) = \frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \frac{dg}{dx_2} \iff$$

$$\frac{dg}{dx_2} = K_2 - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}$$

$$= K_2 - \int \frac{\partial K_1}{\partial x_2} dx_1$$

$$= K_2 - \int \frac{\partial K_1}{\partial x_1} dx_1$$

$$= \text{const.}(x_2) \quad \checkmark$$

Bsp.: 3:

$$\begin{aligned} \text{mit } \omega &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \implies K &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \frac{\partial K_1}{\partial x_2} &= -1 \neq 1 = \frac{\partial K_2}{\partial x_1} \end{aligned}$$

\implies Existiert kein Potential

Bsp.: 4:

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{x_1^2 + x_2^2} \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \frac{\partial K_1}{\partial x_2} &= \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{-x_2}{x_1^2 + x_2^2} \right) = \frac{-1(x_1^2 + x_2^2) - (-x_2)2x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} = \frac{-x_1^2 + x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \\ \frac{\partial K_2}{\partial x_1} &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} \right) = \dots = -\frac{-x_1^2 + x_2^2}{(x_1^2 - x_2^2)^2} \\ \text{Also gilt } \frac{\partial K_1}{\partial x_2} &= \frac{\partial K_2}{\partial x_1} \end{aligned}$$

und lokal existiert ein Potential. Nämlich:

$$f(x) = \arg(x_1 + ix_2) + c = \begin{cases} c + \arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right) & x_1 \neq 0 \\ c' - \arctan\left(\frac{x_1}{x_2}\right) & x_2 \neq 0 \end{cases}$$

Aber die kann man nicht zu einem globalen Potential auf \mathbb{R}^3 (z -Achse) zusammensetzen!

Def.: Linienintegral:

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ C^1 ein Weg von $\gamma(a)$ nach $\gamma(b)$. Sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, Skalarfeld; $K : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig, Vektorfeld.

$$\int_{\gamma} f(x) |dx| := \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot |\gamma'(t)| dt$$

Hängt nur ab von Bild von γ , ohne Orientierung.

$$\int_{\gamma} K(x) \cdot |dx| := \int_a^b K(\gamma(t)) \cdot |\gamma'(t)| dt$$

Hängt nur ab von Bild von γ , ohne Orientierung.

$$\int_{\gamma} f(x) dx := \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$

Hängt nur ab von Bild von γ , mit Orientierung (Vorzeichenwechsel).

$$\int_{\gamma} \langle K(x), dx \rangle = \int_{\gamma} K(x) \cdot dx := \int_a^b \langle K(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt$$

Hängt nur ab von Bild von γ , mit Orientierung (Vorzeichenwechsel).

Bew.: Invarianz:

Sei $[a', b'] \xrightarrow{\psi} [a, b] \xrightarrow{\gamma} U$ bijektiv, C^1 , orientierung erhaltend:

$$\begin{aligned} \int_a^b \langle K(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt &= \int_{a'}^{b'} \langle K(\gamma(\psi(s))), \gamma'(\psi(s)) \rangle \psi'(s) ds \\ &= \int_{a'}^{b'} \langle K((\gamma \circ \psi)(s)), (\gamma \circ \psi)'(s) \rangle ds \end{aligned}$$

Falls ψ Orientierung umkehrt, ist

$$\begin{aligned} \int_a^b \langle K(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt &= \int_{b'}^{a'} \langle K(\gamma(\psi(s))), \gamma'(\psi(s)) \rangle \psi'(s) ds \\ &= - \int_{a'}^{b'} \langle K(\gamma(\psi(s))), \gamma'(\psi(s)) \rangle \psi'(s) ds \end{aligned}$$

Too long

Satz:Sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ C^1 und γ ein C^1 -Weg von P nach Q . Dann gilt:

$$\int_{\gamma} \nabla f(x) \cdot dx = f(Q) - f(P)$$

Bew.:

$$\begin{aligned} \text{Linke Seite} &= \int_a^b [(\nabla f)(\gamma t) \cdot \gamma'(t)] dt \\ &= \int_a^b (f \circ \gamma)'(t) dt \\ &\stackrel{\text{Hauptsatz}}{=} (f \circ \gamma)(b) - (f \circ \gamma)(a) \\ &= \text{Rechte Seite} \end{aligned}$$

Also: vektorielle Linienintegral eines Gradientenvektorfelds ist die Differenz der Potenzreihe an den Endpunkten.

Satz:

Für K ein stetiges Vektorfeld auf U sind äquivalent:

- (a) K besitzt ein Potential
- (b) Das Linienintegral von K über jeden Weg hängt nur von Anfangs- und Endpunkt ab
- (c) Das Linienintegral von K über jeden geschlossenen Weg ist Null

Def.: konservativ:

Dann heisst K **konservativ**.

Bew.:

(a) \Rightarrow (b): $K = \nabla f$ direkte Folge aus Satz

(c) \Rightarrow (b): $\int_{\gamma} - \int_{\delta} = \int_{\gamma} + \int_{\delta'} = \int_{\epsilon}$ ϵ = zusammengestzter Weg

(b) \Rightarrow (c): γ geschlossen $\Rightarrow \int_{\gamma} = \int_{\text{konstanter Weg}} = 0$

(b) \Rightarrow (a): Wähle $P_0 \in U$ und setze $f(P) := \int_{\gamma} K(x) \cdot dx$ für irgendein Weg von P_0 nach P . Nach (b) ist dies wohldefiniert. Dann ist $\frac{\partial f}{\partial x_i}(P) = \dots f(P + he_i) =$

$$\left(\int_{\gamma} + \int \begin{array}{l} \text{Strecke} \\ \text{von } P \\ \text{nach } P+he_i \end{array} K(x) dx \right) (e_i \text{ iter Einheitsvektor}). \text{ Zwei-}$$

ter Term = $\int_0^h K(P+te_i) \cdot e_i dt$. Dessen Ableitung nach h für $h = 0$ ist $K(P+te_i) \cdot e_i|_{t=0} = K(P) \cdot e_i = K_i(P)$. Also ist $\nabla f = K$. Da K stetig, folgt $f C^1$

Bsp.: 3:

$$K_3(x) = \omega \cdot x = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Linienintegral entlang einer Feldlinie:

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= \begin{pmatrix} r \cos t \\ r \sin t \\ 0 \end{pmatrix} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \int_{\gamma} K_3(x) dx &= \int_0^{2\pi} K_3 \begin{pmatrix} r \cos t \\ r \sin t \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -r \sin t \\ r \cos t \\ 0 \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{pmatrix} r \cos t \\ r \sin t \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -r \sin t \\ r \cos t \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle dt \\ &= \int_0^{2\pi} r^2 dt \\ &= 2\pi r^2 \end{aligned}$$

Bsp.: 4:

$$K_4(x) = \frac{\omega \times x}{|\omega \cdot x|^2} = \frac{1}{x_1^2 + x_2^2} \begin{pmatrix} -x^2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\int_{\gamma} K_4(x) dx = \frac{1}{r^2} \int_{\gamma} K_3(x) dx = 2\pi$$

\implies Beide haben kein globales Potential. Sei $\gamma'(t) := \begin{pmatrix} a + r \cos t \\ r \sin t \\ 0 \end{pmatrix}$ für

$a > r$. Übung: Dann ist $\int_{\gamma'} K_3 \neq 0, \int_{\gamma'} K_4 = 0$

4.3 Satz von Green in \mathbb{R}^2

Def.: Randkurve:

Für $B \subset \mathbb{R}^2$ kompakt mit stückweise C^1 -Rand bezeichnet ∂B die **Randkurve** (Kollektion endlich vieler Wege) mit derjenigen Orientierung für die B in Blickrichtung jeweils links liegt.

Def.: Rotation:

Für ein C^1 -Vektorfeld $K = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} : B \rightarrow \mathbb{R}^2$ ist

$$\text{rot } K \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$$

Ist γ eine eindliche "Summe" (**Kette**) von Wegen $\gamma_1, \dots, \gamma_m : [a_i, b_i] \rightarrow \mathbb{R}^n$ dann definieren wir

$$\int_{\gamma} = \int_{\gamma_1} + \dots + \int_{\gamma_m}$$

Satz: Satz von Green:

Sei $B \subset \mathbb{R}^2$ kompakt mit stückweise C^1 -Rand ∂B und K ein C^1 -Vektorfeld auf B . Dann:

$$\int_{\partial B} K \cdot dx = \int_B (\operatorname{rot} K) \cdot \mu(B)$$

Bew.: für B Rechteck:

$$\begin{aligned}
 K &= \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} \\
 \gamma_1 &: [a, b] \rightarrow B, t \mapsto (t, c)^T \\
 \gamma_2 &: [c, d] \rightarrow B, t \mapsto (b, t)^T \\
 \gamma_3 &: [a, b] \rightarrow B, t \mapsto (t, d)^T \\
 \gamma_4 &: [a, b] \rightarrow B, t \mapsto (a, t)^T \\
 \partial B &= \gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3 - \gamma_4 \\
 \implies \int_{\partial B} K \, d\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} - \int_{\gamma_3} - \int_{\gamma_4} \\
 \int_{\gamma_1} \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} \cdot d\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \\
 \stackrel{\text{def.}}{=} \int_a^b \left\langle \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ c \end{pmatrix}, d\begin{pmatrix} t \\ c \end{pmatrix} \right\rangle & \\
 &= \int_a^b \left\langle \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle dt \\
 &= \int_a^b P \begin{pmatrix} t \\ c \end{pmatrix} dt \\
 &= \int_a^b P \begin{pmatrix} t \\ c \end{pmatrix} + \int_c^d Q \begin{pmatrix} b \\ t \end{pmatrix} dt - \int_a^b P \begin{pmatrix} t \\ d \end{pmatrix} dt - \int_c^d Q \begin{pmatrix} a \\ t \end{pmatrix} dt \\
 &= \int_a^b \left(P \begin{pmatrix} t \\ c \end{pmatrix} - P \begin{pmatrix} t \\ d \end{pmatrix} \right) dt + \int_c^d \left(Q \begin{pmatrix} b \\ t \end{pmatrix} - Q \begin{pmatrix} a \\ t \end{pmatrix} \right) dt \\
 &= - \int_a^b \left(P \begin{pmatrix} x \\ d \end{pmatrix} - P \begin{pmatrix} x \\ c \end{pmatrix} \right) dx + \int_c^d \left(Q \begin{pmatrix} b \\ y \end{pmatrix} - Q \begin{pmatrix} a \\ y \end{pmatrix} \right) dy \\
 &= - \int_a^b \left(\int_c^d \frac{\partial P}{\partial y} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} dy \right) dx + \int_c^d \left(\int_a^b \frac{\partial Q}{\partial x} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} dx \right) dy \\
 &= \int_B \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mu \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Too long

4.3.1 Anwendung

Zu gegebenem Skalarfeld $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ suche K Vektorfeld mit $\operatorname{rot} K = f$

$$\rightarrow \int_B f(x) \mu(x) = \int_{\partial B} K \cdot dx$$

Speziell:

$$K \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -y \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{y}{2} \\ \frac{x^2}{2} \end{pmatrix}$$

haben alle $\operatorname{rot} K = 1$. Also:

$$\begin{aligned} \mu(B) &= \int_{\partial B} \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} \cdot d \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \int_{\partial B} x dy \\ \mu(B) &= \int_{\partial B} x dy = - \int_{\partial B} y dx = \int_{\partial B} \frac{x dy - y dx}{2} \end{aligned}$$

Bsp.: Fläche einer Zykloide:

$$\begin{aligned}
 \gamma : [0, 2\pi] &\rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto \begin{pmatrix} r \cdot (t - \sin t) \\ r \cdot (1 - \cos t) \end{pmatrix} \\
 \delta : [0, 2\pi r] &\rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} \\
 \partial B &= \delta - \gamma \\
 \implies \mu(B) &= - \int_{\partial B} y \, dx = - \int_{\delta} + \int_{\gamma} y \, dx \\
 \int_{\delta} y \, dx &= \int_0^{2\pi r} 0 \cdot dx = 0 \\
 \int_{\gamma} y \, dx &= \int_0^{2\pi} r \cdot (1 - \cos t) \, dr(t - \sin t) \\
 &= \int_0^{2\pi} r(1 - \cos t)r(1 - \cos t) \, dt \\
 &= r^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t) \, dt \\
 &= r^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos t + \frac{1 + \cos 2t}{2} \right) \, dt \\
 &= r^2 \left(\frac{3}{2}t - 2\sin t + \frac{\sin 2t}{4} \right) \Big|_{t=0}^{t=2\pi} \\
 &= r^2 \frac{3}{2}2\pi = 3\pi r^2
 \end{aligned}$$

Polarplanimeter von Amsler

$$\begin{aligned}
 \mu(B) &= \int_{\partial B} \frac{x \, dy - y \, dx}{2} \\
 &= \begin{vmatrix} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{vmatrix} \\
 &= \int_{\partial B} \frac{r \cos \varphi \cdot (\cancel{dr \cdot \sin \varphi} + r \cos \varphi d\varphi) - r \sin \varphi \cdot (\cancel{dr \cdot \cos \varphi} - r \sin \varphi d\varphi)}{2} \\
 &= \int_{\partial B} \frac{r^2 \cos \varphi \cos \varphi + r^2 \cos \varphi (-\sin \varphi)}{2} \, d\varphi \\
 &= \int_{\partial B} \frac{r^2}{2} \, d\varphi
 \end{aligned}$$

Bild BILD

$$m^2 = r^2 + l^2 - 2rl \cos \psi$$

$$\Rightarrow \mu(B) = \int_{\partial B} \frac{m^2 - l^2 + 2rl \cos \psi}{2} d\varphi = \underbrace{\int_{\partial B} \frac{m^2 - l^2}{2} d\varphi}_{=0} + \int_{\partial B} rl \cos \varphi d\varphi$$

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = r \cdot e^{i\varphi}$$

Kontaktpunkt des Rads: $\rho = re^{i\varphi} - e^{i(\varphi-\psi)}w$

Gemessen wird:

$$\int_{\partial B} \Im \left(\frac{d\rho}{e^{i(\varphi+\psi)}} \right) = \dots = \frac{\mu(B)}{l}$$

Zu $K = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$ Vektorfeld auf $B \subset \mathbb{R}^2$ setze $\tilde{K} = \begin{pmatrix} \tilde{P} \\ \tilde{Q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -Q \\ P \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \int_{\partial B} \underbrace{\tilde{K}}_{\begin{array}{l} = \tilde{P} dx + \tilde{Q} dy \\ = P dy - Q dx \\ = K \cdot \begin{pmatrix} dy \\ -dx \end{pmatrix} \end{array}} d \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\stackrel{\text{Green}}{=} \int_B \underbrace{\operatorname{rot} \tilde{K}}_{\begin{array}{l} = \tilde{Q}_x - \tilde{P}_y \\ = P_x + Q_y \end{array}} \mu \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \int_B \operatorname{div} K \mu \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Def.: Divergenz:

$$\operatorname{div} \begin{pmatrix} K_1 \\ \vdots \\ K_n \end{pmatrix} = K_{1,x_1} + \dots + K_{n,x_n}$$

Bedeutung: lokale Produktionsrate von K

$$\begin{aligned}
 \int_{\gamma} K \cdot \begin{pmatrix} dy \\ -dx \end{pmatrix} &= \int_a^b K(\gamma(t)) \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} y'(t) \\ -x'(t) \end{pmatrix}}_{\substack{\text{Normalvektor nach rechts} \\ \text{Einheitsvektor } n}} dt \\
 &\quad \underbrace{\frac{1}{|\gamma'(t)|} \cdot \begin{pmatrix} y'(t) \\ -x'(t) \end{pmatrix}}_{\substack{\text{Normalvektor nach rechts} \\ \text{Einheitsvektor } n}} \cdot |\gamma'(t)| dt \\
 &= \int_0^b \langle K(\gamma(t)), n(\gamma(t)) \rangle \cdot |\gamma'(t)| dt \\
 &= \int_{\gamma} K \cdot n |dx|
 \end{aligned}$$

Def.:

$$\int_{\gamma} K \cdot n \cdot |dx| := \int_a^b K(\gamma(t)) \cdot n(\gamma(t)) \cdot |\gamma'(t)| dt$$

wobei n der in Blickrichtung rechts orientierte Normalen-Einheitsvektor auf γ ist.

Bedeutung: Fluss von K durch γ

Satz: Satz von Gauss = Divergenzsatz in \mathbb{R}^2 :

Voraussetzung wie in Satz von Green

$$\int_{\partial B} K \cdot n \cdot |dz| = \int_B \operatorname{div} K \cdot \mu(z)$$

Bsp.:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq r^2 \right\}$$

$$K \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

$$\nabla K = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$\div K = a + d \implies$ konstante Produktionsrate

$$\int_B \div K \mu \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \int_B (a + d) \mu \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (a + d) \pi r^2$$

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} r \cos t \\ r \sin t \end{pmatrix}, t \in [0, 2\pi]$$

$$n \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$n(\gamma(t)) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \int_B K \cdot n \cdot |\mathrm{d}x| &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} a \cdot r \cdot \cos t + b \cdot r \cdot \sin t \\ c \cdot r \cdot \cos t + d \cdot r \cdot \sin t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} r \, dt \\ &= r^2 \int_0^{2\pi} (a \cos^2 t + (b + c) \cos t \sin t + d \sin^2 t) \, dt \\ &= r^2 \int_0^{2\pi} \left(a \cdot \frac{1 + \cos 2t}{2} + (b + c) \frac{\sin 2t}{2} + d \frac{1 - \cos 2t}{2} \right) \, dt \\ &= r^2 \left[a \left(\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} \right) + (b + c) \cdot \frac{-\cos 2t}{4} + d \left(\frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4} \right) \right]_{t=0}^{t=2\pi} \\ &= r^2(a + d) \cdot \pi \end{aligned}$$

Overfull

Satz: Divergenzsatz im \mathbb{R}^3 :
Sei $B \subset \mathbb{R}^2$, $F \subset \mathbb{R}^3$, $\varphi : B \rightarrow F$ eine reguläre Parametrisierung eines Flächenstücks F

$$n := \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{|\varphi_u \times \varphi_v|} \quad \text{Normaleneinheitsvektor}$$

$\implies \varphi$ verleiht F eine "Orientierung", d.h. eine konsistente Wahl eines Normaleneinheitsvektors in jeden Punkt.

Erinnerung:

$$\int_F f(x) |d\omega| = \int_B f\left(\varphi\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right) \cdot \underbrace{|\varphi_u \times \varphi_v|}_{\text{skalares Flächenelement}} \cdot \mu\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Def.:

$$\begin{aligned} \int_F K \cdot n \cdot |d\omega| &:= \int_B K\left(\varphi\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right) \cdot n\left(\varphi\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right) \cdot |\varphi_u \times \varphi_v| \mu\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \\ &= \int_B \underbrace{\left\langle K\left(\varphi\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right), (\varphi_u \times \varphi_v) \right\rangle}_{\text{vektorielles Flächenelement}} \mu\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dies hängt nur von F mit der Orientierung ab. Wechselt das Vorzeichen unter Orientierungsumkehr.

Sei jetzt $B \subset \mathbb{R}^3$ kompakt mit stückweise C^1 parametrisierten Rand ∂B

Satz: Satz von Gauss = Divergenzsatz:

$$\int_{\partial B} \mathbf{K} \cdot \mathbf{n} \cdot |\mathrm{d}\omega| = \int_B \nabla \cdot \mathbf{K} \mu(x)$$

\mathbf{K} ein C^1 -Vektorfeld auf B

Bsp.:

BILD

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1 \right\}$$

$$K = \begin{pmatrix} 2x - yz \\ xz + 3y \\ xy - z \end{pmatrix}$$

$$\div K = 2 + 3 - 1 = 4$$

$$\text{Rechte Seite} = \int_B 4\mu \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 4\mu(B) = \dots = 4\pi \cdot \frac{1}{3}$$

$$\partial B = F_1 + F_2 \text{ mit } F_1 = \text{Mantel}$$

$$F_1 : \varphi : [0, 1] \times [0, 2\pi] \rightarrow F_1$$

$$\begin{pmatrix} r \\ t \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r \cos t \\ r \sin t \\ r \end{pmatrix}$$

$$\varphi_r \times \varphi_t = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r \sin t \\ r \cos t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos t \\ -r \sin t \\ r \end{pmatrix}$$

\implies Falsche Orientierung!

$$n = \frac{1}{\text{Betrag}} \begin{pmatrix} r \cos t \\ r \sin t \\ -r \end{pmatrix}$$

$$\int_{F_1} K \cdot n \cdot |d\omega| = \int_{r=0}^1 \int_{t=0}^{2\pi} K \left(\varphi \begin{pmatrix} r \\ t \end{pmatrix} \right) \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} r \cos t \\ r \sin t \\ -r \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} x \\ y \\ -z \end{pmatrix}} dt dr = (*)$$

$$K \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \dots = 2x^2 + 3y^2 + z^2 - xyz$$

$$(*) = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(r^2 \cdot \left(\frac{7}{2} - \frac{\cos 2t}{2} \right) - r^3 \frac{\sin 2t}{2} \right) dt dr$$

$$= \frac{7\pi r^3}{3} \Big|_0^1$$

Too long

Bild

Bsp.:

$$\begin{aligned}
 K(x) &:= c \cdot \frac{x}{|x|^3} \\
 F_R &= \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| = R\} \\
 n(x) &= \frac{x}{|x|} \\
 \int_{F_R} \left\langle c \cdot \frac{x}{|x|^3}, \frac{x}{|x|} \right\rangle |\mathrm{d}\omega| &= \frac{c}{R^2} \cdot \underbrace{\int_{F_R} |\mathrm{d}\omega|}_{=4\pi R^2} = 4\pi c \\
 c \frac{|x|^2}{|x|^4} &= \frac{c}{R^2}
 \end{aligned}$$

Wieso von R unabhängig? Wende Gauss an auf

$$B = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid R_1 \leq |x| \leq R_2\}$$

für $0 < R_1 < R_2$:

$$\Rightarrow \int_{\partial B} = \int_{F_{R_2}} - \int_{F_{R_1}} = 0$$

Wegen $\nabla \cdot K = 0$ ist

$$\int_B \nabla \cdot K \, d\mu = 0$$

Bem.: Vorsicht:

Gauss ist hier nicht anwendbar auf

$$B = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| \leq R\}$$

da K in 0 eine Singularität hat.

4.4 Stokes

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Green } \mathbb{R}^2 \supset B & \xrightarrow{\varphi} & F \subset \mathbb{R}^3 \text{ Stokes} \\
 K : F \rightarrow \mathbb{R}^3 C^1\text{-Vektorfeld} \\
 \implies \int_F \operatorname{rot} K \cdot n \cdot |\mathrm{d}\omega| \stackrel{\text{def.}}{=} \int_B \left\langle \operatorname{rot} K \left(\varphi \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right), \varphi_u \times \varphi_v \right\rangle \mu \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}
 \end{array}$$

Die Orientierung von F liefert eine eindeutige Orientierung der Randkurve ∂F . Sei $\partial B = \gamma_1 + \dots + \gamma_n$ mit $\gamma_i : [a_i, b_i] \rightarrow \partial B$ C^1 -Parametrisierung. $\implies \partial F = (\varphi \circ \gamma_1) + \dots + (\varphi \circ \gamma_n)$

$$\begin{aligned}
 \int_{\partial F} K \cdot \mathrm{d}x &\stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{i=1}^n \int_{a_i}^{b_i} \left\langle K(\varphi(\gamma_i(t))), \underbrace{(\varphi \circ \gamma_i)'(t)}_{=\nabla \varphi(\gamma_i(t)) \cdot \gamma_i'(t)} \right\rangle \mathrm{d}t \\
 &= \sum_{i=1}^n \int_{a_i}^{b_i} \underbrace{\left\langle K(\varphi(\gamma_i(t))), \nabla \varphi(\gamma_i(t)) \cdot \gamma_i'(t) \right\rangle}_{K(\varphi(\gamma_i(t)))^T \cdot \nabla \varphi(\gamma_i(t)) \cdot \gamma_i'(t)} \mathrm{d}t \\
 &= \sum_{i=1}^n \int_{a_i}^{b_i} \left\langle (K(\varphi(\gamma_i(t)))^T \cdot \nabla \varphi(\gamma_i(t)))^T, \gamma_i'(t) \right\rangle \mathrm{d}t \\
 &= \int_{\partial B} ((K \circ \varphi)^T \cdot \nabla \varphi)^T \cdot \mathrm{d}x \\
 &\stackrel{\text{Green}}{=} \int_B \underbrace{\operatorname{rot}(((K \circ \varphi)^T \cdot \nabla \varphi)^T)}_{\stackrel{\text{Beh.}}{=} \langle (\operatorname{rot} K) \circ \varphi, \varphi_u \times \varphi_v \rangle (*)} \mu(x) \\
 &= \int_B \langle (\operatorname{rot} K) \circ \varphi, \varphi_u \times \varphi_v \rangle \mu \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \\
 &\stackrel{\text{def.}}{=} \int_F (\operatorname{rot} K) \cdot n |\mathrm{d}\omega|
 \end{aligned}$$

$$K = \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{pmatrix}$$

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
(*) &= \text{rot} \left(\left((K_1 \circ \varphi, K_2 \circ \varphi, K_3 \circ \varphi) \begin{pmatrix} \varphi_{1u} & \varphi_{1v} \\ \varphi_{2u} & \varphi_{2v} \\ \varphi_{3u} & \varphi_{3v} \end{pmatrix}^T \right)^T \right) \\
&= \text{rot} \left((K_1 \circ \varphi) \cdot \varphi_{1u} + (K_2 \circ \varphi) \cdot \varphi_{2u} + (K_3 \circ \varphi) \cdot \varphi_{3u} \right. \\
&\quad \left. (K_1 \circ \varphi) \cdot \varphi_{1v} + (K_2 \circ \varphi) \cdot \varphi_{2v} + (K_3 \circ \varphi) \cdot \varphi_{3v} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial u} \left(\sum_{i=1}^3 (K_i \circ \varphi) \varphi_{iv} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left(\sum_{i=1}^3 (K_i \circ \varphi) \varphi_{iu} \right) \\
&= \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial}{\partial u} (K_i \circ \varphi) \cdot \varphi_{iv} + \cancel{(K_i \circ \varphi) \cdot \varphi_{ivu}} - \frac{\partial}{\partial v} (K_i \circ \varphi) \cdot \varphi_{iu} - \cancel{(K_i \circ \varphi) \cdot \varphi_{iuv}} \right) \\
&= \sum_{i=1}^3 \left(\left(\sum_{j=1}^3 (K_{ix_j} \circ \varphi) \cdot \varphi_{ju} \right) \cdot \varphi_{iv} - \left(\sum_{j=1}^3 (K_{ix_j} \circ \varphi) \cdot \varphi_{ju} \right) \cdot \varphi_{iu} \right) \\
&= \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^3 (K_{ix_j} \circ \varphi) \cdot \underbrace{(\varphi_{ju} \cdot \varphi_{iv} - \varphi_{ju} \cdot \varphi_{iu})}_{=0 \text{ für } i=j} \\
&= \sum_{1 \leq i < j \leq 3} (K_{ix_j} \circ \varphi - K_{jx_i} \circ \varphi) (\varphi_{ju} \cdot \varphi_{iv} - \varphi_{ju} \varphi_{iu}) \\
&= \left\langle \overbrace{\begin{pmatrix} K_{3x_2} - K_{2x_3} \\ K_{1x_3} - K_{3x_1} \\ K_{2x_1} - K_{1x_2} \end{pmatrix}}^{\text{rot } K} \circ \varphi, \varphi_u \times \varphi_v \right\rangle
\end{aligned}$$

Def.:

$$\text{rot } K = \nabla \times K = \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{pmatrix}$$

 $\text{im } \mathbb{R}^3$

Satz: Satz von Stokes:

$F \subset \mathbb{R}^3$ ein C^1 -Flächenstück, orientiert; ∂F Randkurve mit induzierten Orientierung; K C^1 -Vektorfeld auf F

$$\Rightarrow \int_{\partial F} K \cdot dx = \int_F \operatorname{rot} K \cdot n |d\omega|$$

Bedeutung von $\operatorname{rot} K$

$\operatorname{rot} K$ lokale Zirkulationsrate

$\int_\gamma \operatorname{rot} K \cdot dx$: Zirkulation entlang γ

$(\operatorname{rot} K) \cdot n$: lokale Zirkulationsrate in der zu n senkrechten Ebene.

Bem.:

$\operatorname{rot} K = 0 \iff K$ hat lokal ein Potential.

Bsp.:

$$\begin{aligned} K(x) &= \omega \times x \\ \omega &= \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \text{konstant} \\ \text{rot } K &= \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \omega_2 x_3 - \omega_3 x_2 \\ \omega_3 x_1 - \omega_1 x_3 \\ \omega_1 x_2 - \omega_2 x_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \omega_1 - (-\omega_1) \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2\omega_1 \\ 2\omega_2 \\ 2\omega_3 \end{pmatrix} \\ &= 2\omega \end{aligned}$$

Bsp.:

$$K = \text{konstant} \implies \text{rot } K = 0$$

Bsp.:

$$K(x) = \frac{\omega \times x}{|\omega \times x|^2}$$

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\implies \text{rot } K = 0$$

$$\int_{\gamma} K \, dx = 2\pi$$

$$\gamma \rightsquigarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

Ist F ein Flächenstück im $\mathbb{R}^3 \setminus \{x = y = 0\}$ mit $\partial F = \gamma' - \gamma$

$$\int_{\gamma'} K(x) \, dx - \int_{\gamma} K(x) \, dx = \int_{\partial F} K(x) \, dx$$

$$\stackrel{\text{Stokes}}{=} \int_F \underbrace{\text{rot } K}_{=0} \cdot n \, |d\omega|$$

$$= 0$$

$$\implies \int_{\gamma'} K(x) \, dx = 2\pi$$

Sei $\omega = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Für jeden geschlossenen Weg γ' in $\mathbb{R}^3 \setminus \{x = y = 0\}$ ist

$$\int_{\gamma} \frac{\omega \times x}{|\omega \times x|^2} \cdot dx = 2\pi \cdot \left(\text{Windungszahl von } \gamma' \text{ um } \mathbb{R} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

4.5 Anwendungen

4.5.1 Hydrostatik

Bild

BILD

Druck $p = p_0 - \gamma z$ für $p_0, \gamma > 0$ konstant.
Gesamtkraft auf B

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} A := \int_{\partial B} (p_0 - \gamma z) \cdot (-n) |d\omega|$$

Für $u \in \mathbb{R}^3$ folgt

$$\begin{aligned} \langle u, A \rangle &= \int_{\partial B} \langle -u \cdot (p_0 - \gamma z), +n \rangle |d\omega| \\ &\stackrel{\text{Gauss}}{=} \int_B \div(\underbrace{-u(p_0 - \gamma z)}_{\begin{pmatrix} u_1(p_0 - \gamma z) \\ u_2(p_0 - \gamma z) \\ u_3(p_0 - \gamma z) \end{pmatrix}}) \mu(v) \\ &= u_3 \gamma \mu(B) \\ \implies A &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma \cdot \mu(B) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

\implies Auftrieb auf $B = \gamma \cdot \mu(B)$ in Richtung \uparrow proportional zu $\mu(B)$
Archimedische Gesetz

4.5.2 Hydrodynamik

fliessendes Medium

$$U \subset \mathbb{R}^3$$

$\rho(x, t)$ = Dichte in $x \in U$ zur Zeit t . $v(x, t)$ = Geschwindigkeit. Sei $B \subset U$ kompakt als Test.

$$\begin{aligned} m_B(t) &:= \text{Masse in } B \text{ zur Zeit } t : \int_B \rho(x, t) \mu(x) \\ \text{Fluss durch } B \text{ zur Zeit } t &= \int_{\partial B} \rho(x, t) \cdot v(x, t) \cdot n |d\omega| \stackrel{\text{Gauss}}{=} \int_B \div(\rho v) \mu(x) \\ \implies \frac{d}{dt} m_B(t) &= \int_B \frac{\partial \rho}{\partial t} \mu(x) \\ \text{Massenerhaltung} \implies \int_B \frac{\partial \rho}{\partial t} \mu(x) &= - \int_B \div(\rho v) \mu(x) \\ \implies \int_B \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \div(\rho v) \right) \mu(x) &= 0 \\ \implies \frac{\partial \rho}{\partial t} &= - \div(\rho v) \end{aligned}$$

Spezialfall 1: Stationäre Strömung

$$\begin{aligned}\implies \frac{\partial \rho}{\partial t} &= \frac{\partial v}{\partial t} = 0 \\ \implies \div(\rho v) &= 0\end{aligned}$$

Spezialfall 2: inkompressibles Medium, d.h.:

$$\begin{aligned}\rho(x, t) &= \rho_0 \text{ konstant} \\ \implies \div(\rho v) &= \rho_0 \div v\end{aligned}$$

Falls auch stationär

$$\begin{aligned}\implies \div v &= 0 \\ \sum \frac{\partial v_i}{\partial x_i} &= 0\end{aligned}$$

4.5.3 Wärmeleitung

Sei $u(x, t)$ die Temperatur im Punkt x zur Zeit t .

Temperaturgradient $\operatorname{grad} u(x, t)$ (nur bezüglich $x \in U \subset \mathbb{R}^3$)

lokale Wärmeflussrate $-k \cdot \operatorname{grad} u$ mit $k > 0$ Wärmeleitzahl konstant.

Sei $B \subset U$ kompakt. Medium homogen mit Dichte ρ konstant.

$$\begin{aligned}\text{Gesamtwärme in } B: w &= \int_B c u \rho \mu(x) \\ \frac{\partial w}{\partial t} &= \int_B \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \rho \mu(x)\end{aligned}$$

Fluss durch ∂B :

$$\begin{aligned}-\frac{\partial w}{\partial t} &= \int_{\partial B} (-k \cdot \operatorname{grad} u) \cdot n \, |d\omega| = -k \int_B (\div \operatorname{grad} u) \mu(x) \\ \implies \int_B c \rho \frac{\partial u}{\partial t} \mu(x) &= \int_B k \div \operatorname{grad} u \mu(x) \\ \implies c \rho \frac{\partial u}{\partial t} &= k \cdot \Delta u\end{aligned}$$

Def.: Laplace Operator:

$\Delta := \nabla \cdot \nabla$ Laplace Operator

$$= \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

Bedeutung: Diffusionsrate

Bem.: harmonisch:

stationärer Fall:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad \Delta u = 0$$

harmonisch

Wärmeleitung: $\frac{\partial u}{\partial t} = c \cdot \Delta u$

Wellengleichung: $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c \cdot \Delta u$

4.5.4 Laplace in \mathbb{R}^2

$$u \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = u \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix} = \tilde{u} \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix}$$

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Fakt:

In Polarkoordinaten ist dies

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}$$

Kreisförmige schwingende Membran; Radius $R > 0$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \cdot \Delta u \quad a > 0$$

Ansatz: Entwickle Lösung als Fourierreihe von φ . Suche Komponentenfunktionen periodisch in t :

$$\begin{aligned} u &= f(r) \cdot e^{\pm n i \varphi} \cdot e^{\alpha i t} \\ \implies \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= -\alpha^2 u \\ \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} &= -n^2 \cdot u \\ \implies -\frac{\alpha^2}{a^2} u &= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{n^2}{r^2} u \\ \implies \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \left(\frac{\alpha^2}{a^2} - \frac{n^2}{r^2} \right) \right] (u) &= 0 \\ \implies \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \left(\frac{\alpha^2}{a^2} - \frac{n^2}{r^2} \right) f &= 0 \end{aligned}$$

Das ist eine Besselsche DGL. Lösung regulär in 0 : $J_n \left(\frac{\alpha}{a} r \right)$

$$J_n(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4^k k! (k+n)!} s^{2k+n}$$

Randbedingung:

$$\begin{aligned} f(R) &= 0 \\ u &= J_n \left(\frac{\alpha}{a} R \right) \cdot e^{\pm n i \varphi} \cdot e^{\alpha i t} \\ \text{mit } J_n \left(\frac{\alpha}{a} R \right) &= 0 \\ \iff \alpha &= \frac{a}{R} \cdot (\text{Nullstelle von } J_n) \end{aligned}$$

Folge:
diskretes Frequenzspektrum

Teil II

Anhänge

Anhang A

Vorlesungsvorlagen

Das Lotka-Volterra Modell für das Predator-Prey Problem

```
> with(plots): with(DEtools):
```

Die Anzahl der Beutetiere $x(t)$ und die Anzahl der Raubtiere $y(t)$ sind gekoppelt durch die Lotka-Volterra Differentialgleichungen

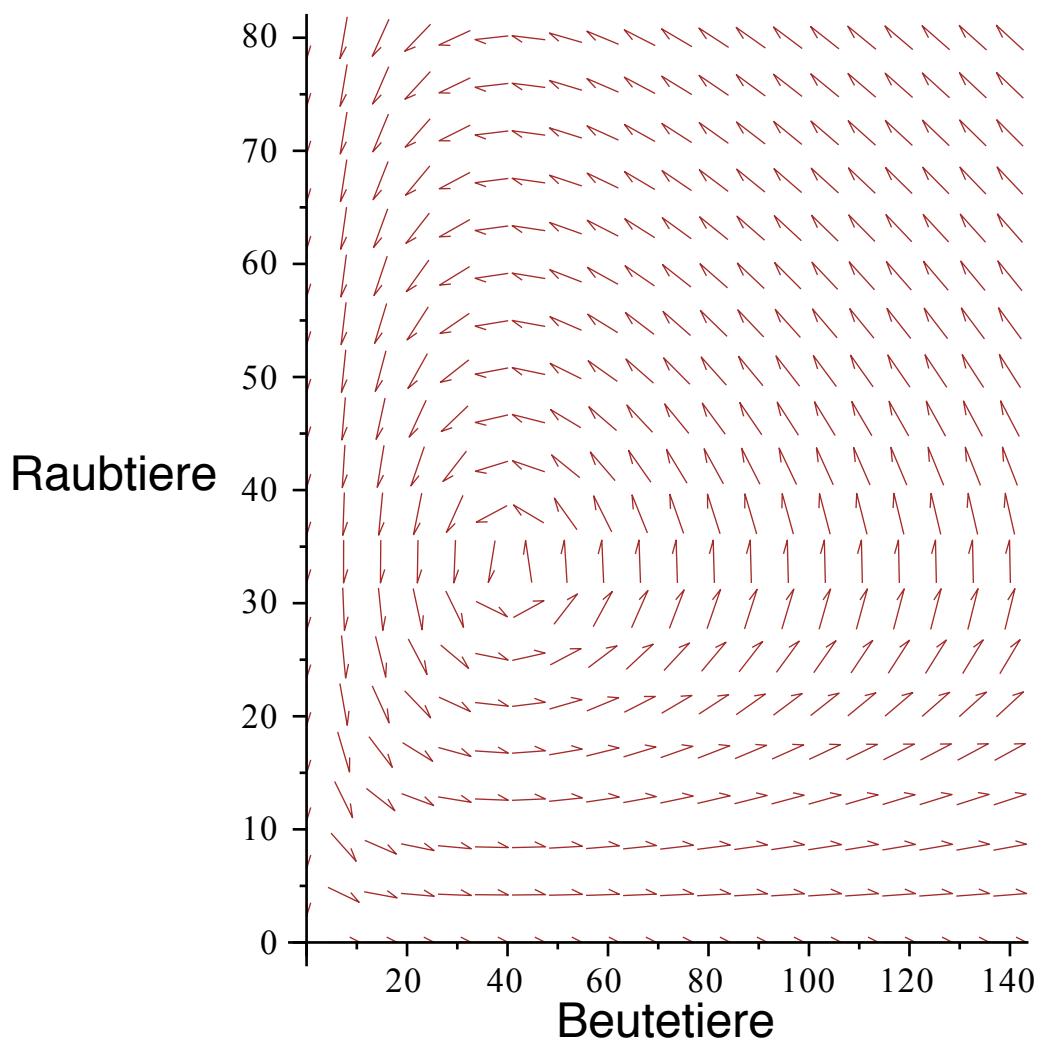
```
> unassign('a','b','c','d');
LV1 := diff(x(t),t) = (a-b*y(t))*x(t);
LV2 := diff(y(t),t) = (c*x(t)-d)*y(t);
LV1 :=  $\frac{d}{dt} x(t) = (a - b y(t)) x(t)$ 
LV2 :=  $\frac{d}{dt} y(t) = (c x(t) - d) y(t)$  (1)
```

Wir wählen Koeffizienten

```
> a:=1; b:=0.03; c:=0.01; d:=0.4;
a := 1
b := 0.03
c := 0.01
d := 0.4 (2)
```

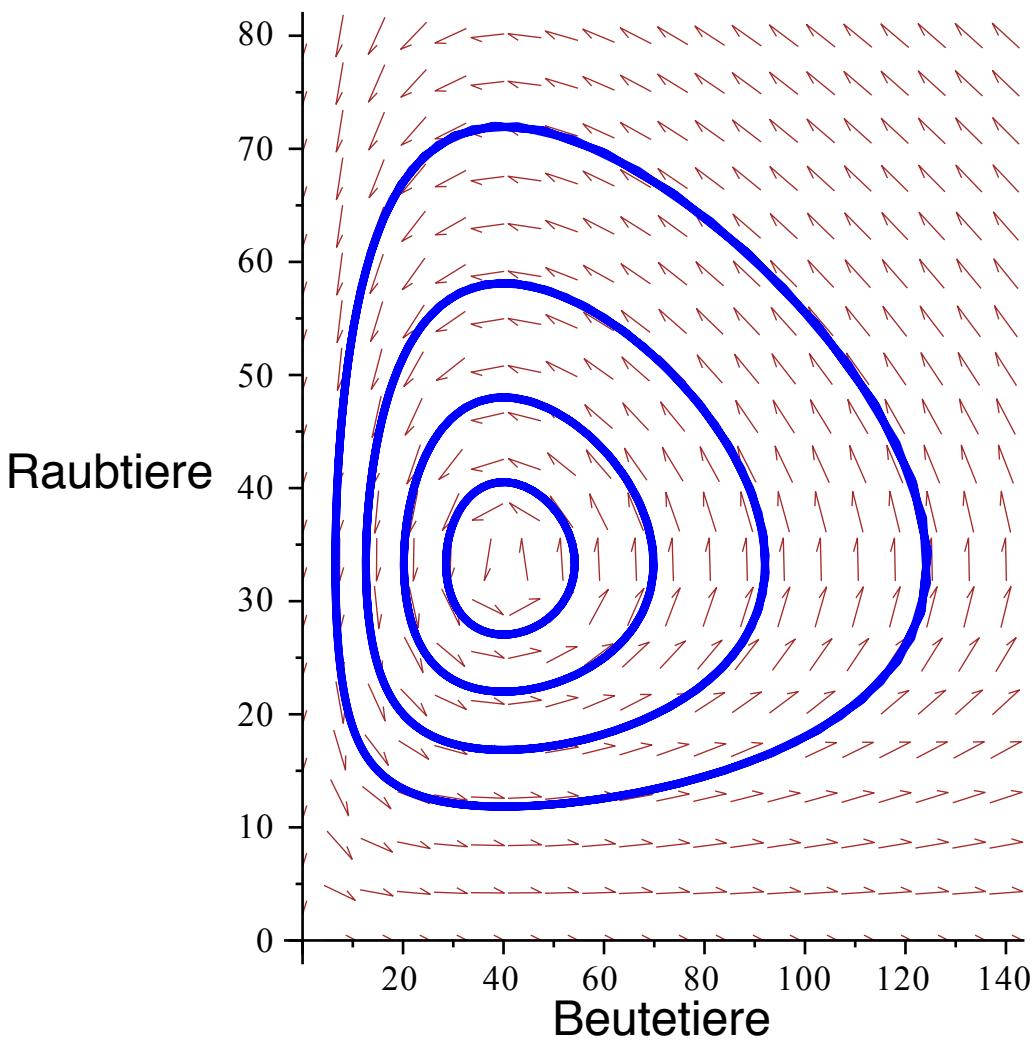
und zeichnen das zugehörige Vektorfeld:

```
> DEplot([LV1,LV2], [x,y], t=0..30, x=0..140, y=0..80,
    stepsize=0.2, obsrange=FALSE, color=brown, linecolor=blue,
    labels=["Beutetiere","Raubtiere"], labelfont=[Helvetica,14]);
```



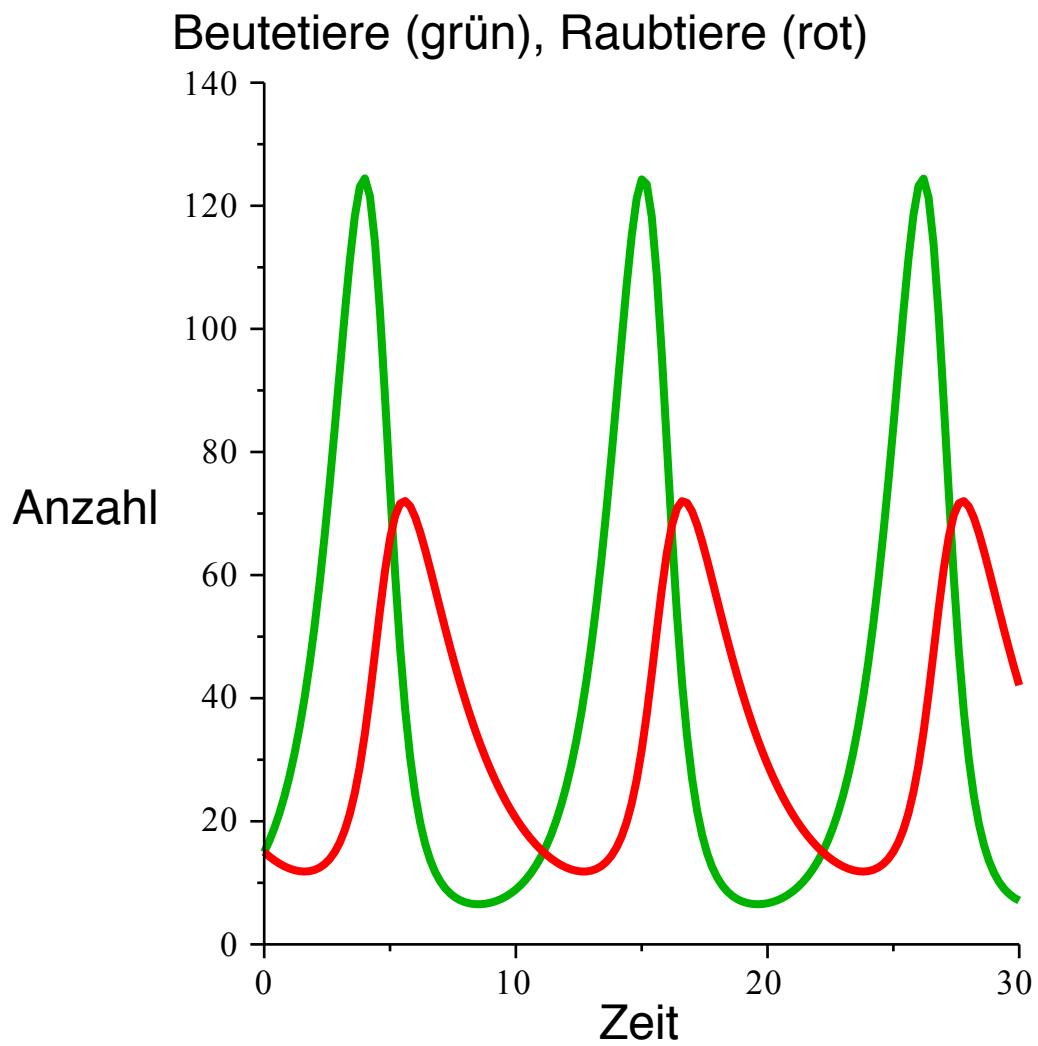
Hier ist das Vektorfeld kombiniert mit einigen Lösungskurven:

```
> DEplot([LV1,LV2], [x,y], t=0..30, x=0..140, y=0..80,
  [[x(0)=15,y(0)=15],[x(0)=20,y(0)=20],[x(0)=25,y(0)=25],[x(0)=
  30,y(0)=30]],
  stepsize=0.2, obsrange=FALSE, color=brown, linecolor=blue,
  labels=[ "Beutetiere", "Raubtiere"], labelfont=[Helvetica,14]);
```



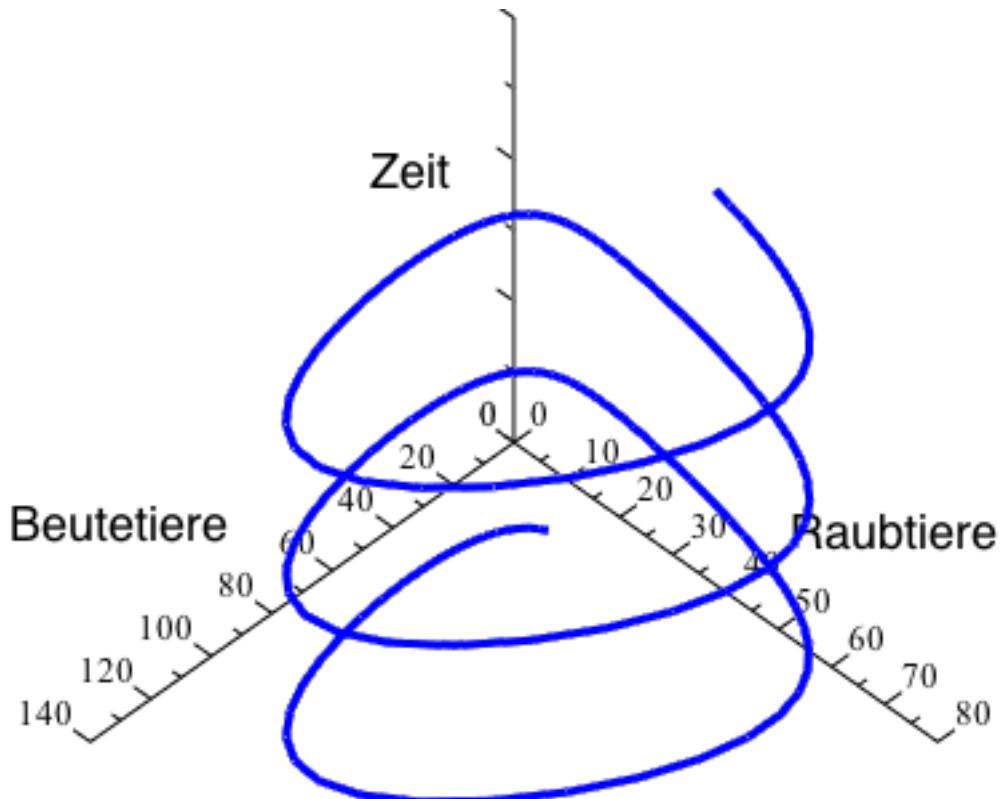
Hier ist der zeitliche Verlauf der beiden Populationen:

```
> preyplot := DEplot([LV1,LV2], [x,y], t=0..30, x=0..140, y=0..80,
  [[x(0)=15,y(0)=15]], stepsize=0.2, obsrange=FALSE,
  scene=[t,x], linecolor=COLOR(RGB,0,0.7,0));
preyplot := DEplot([LV1,LV2], [x,y], t=0..30, x=0..140, y=0..80,
  [[x(0)=15,y(0)=15]], stepsize=0.2, obsrange=FALSE,
  scene=[t,y], linecolor=red);
display([preyplot,predplot],
  labels=["Zeit","Anzahl"], labelfont=[Helvetica,14],
  title="Beutetiere (grün), Raubtiere (rot)", titlefont=
  [Helvetica,14]);
```



Ein 3-dimensionaler Plot der Kurve $(x(t),y(t),t)$ fasst die Gesamtinformation zusammen. Durch Anklicken und Ziehen mit der Maus kann der Blickwinkel gedreht werden.

```
> DEplot3d([LV1,LV2], [x,y], t=0..30, x=0..140, y=0..80,
           [[x(0)=15,y(0)=15]], stepsize=0.2, obsrange=FALSE,
           scene=[x,y,t], axes=normal, linecolor=blue,
           labels=["Beutetiere","Raubtiere","Zeit"], labelfont=
           [Helvetica,14]);
```

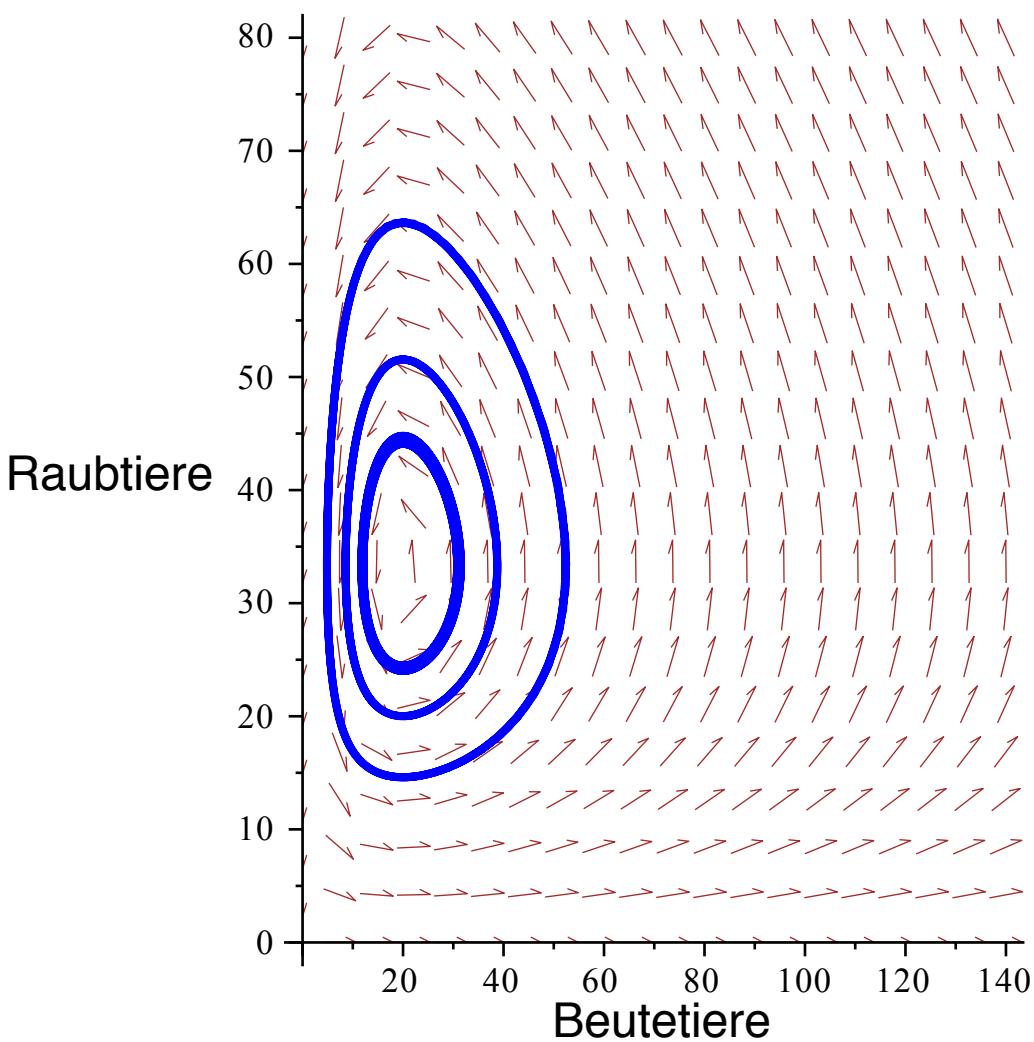


Mit dem nächsten Befehl ändern wir die Parameter und aktualisieren die Differentialgleichungen, um alles neu berechnen zu können. Experimentieren Sie auch mit anderen Werten! Dabei müssen Sie unter Umständen die Intervallgrenzen in den obigen Befehlen anpassen.

```
> a:=1; b:=0.03; c:=0.02; d:=0.4;
> LV1 := diff(x(t),t) = (a-b*y(t))*x(t):
> LV2 := diff(y(t),t) = (c*x(t)-d)*y(t):
      a := 1
      b := 0.03
      c := 0.02
      d := 0.4
(3)
```

Hier ist das Vektorfeld kombiniert mit einigen Lösungskurven:

```
> DEplot([LV1,LV2], [x,y], t=0..30, x=0..140, y=0..80,
      [[x(0)=15,y(0)=15],[x(0)=20,y(0)=20],[x(0)=25,y(0)=25],[x(0)=
      30,y(0)=30]],
      stepsize=0.2, obsrange=FALSE, color=brown, linecolor=blue,
      labels=[ "Beutetiere", "Raubtiere"], labelfont=[Helvetica,14]);
```



Als letztes addieren wir zur zweiten Gleichung eine negative Konstante, welche den Verlust an Raubtieren durch Jagen darstellt. Experimentieren Sie mit diesem und anderen Werten, z.B. mit $e:=2$. Kann es passieren, dass die Raubtiere aussterben? Kann es passieren, dass beide Arten aussterben?

```

> a:=1; b:=0.03; c:=0.01; d:=0.4; e:=1;
> LV1 := diff(x(t),t) = (a-b*y(t))*x(t):
> LV2 := diff(y(t),t) = (c*x(t)-d)*y(t)-e:
      a := 1
      b := 0.03
      c := 0.01
      d := 0.4
      e := 1

```

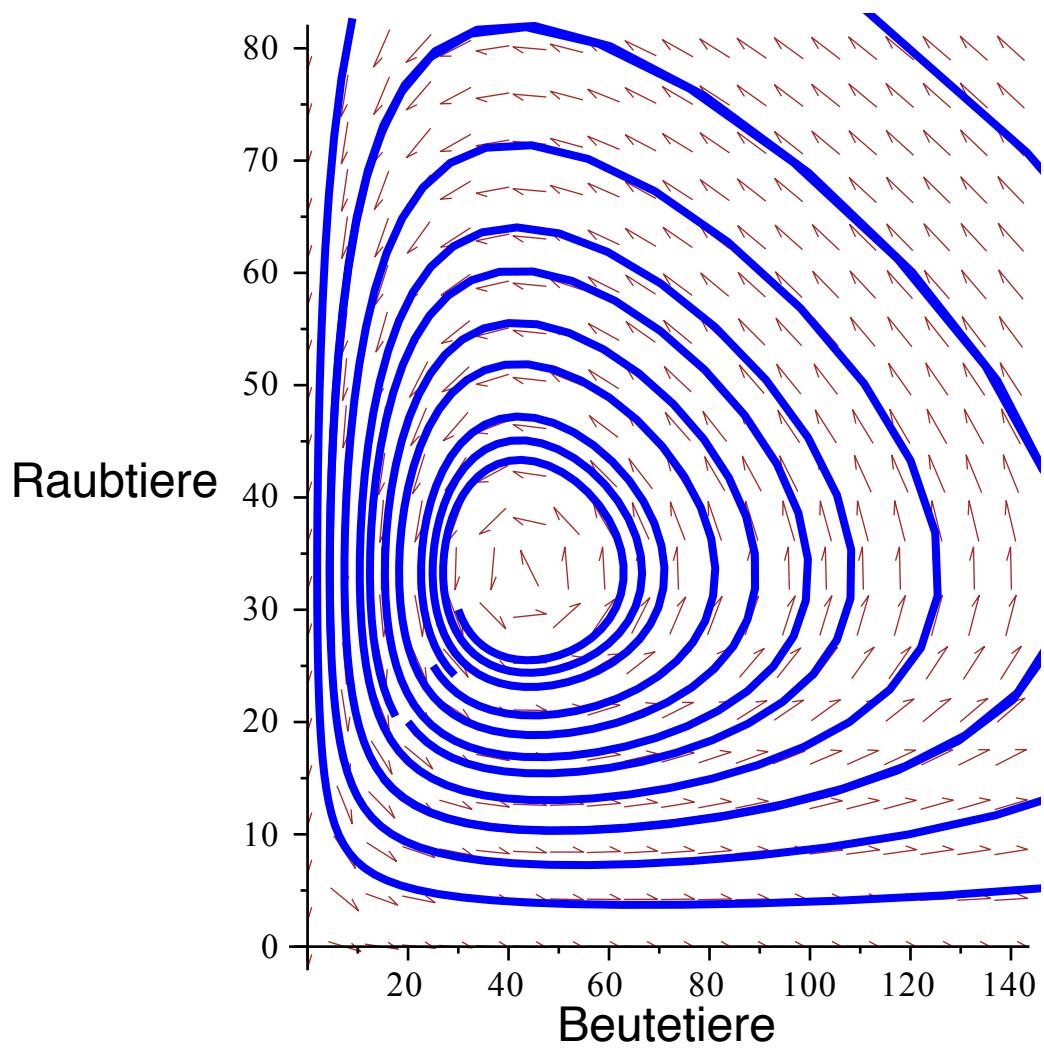
(4)

Hier ist das Vektorfeld kombiniert mit einigen Lösungskurven:

```

> DEplot([LV1,LV2], [x,y], t=0..30, x=0..140, y=0..80,
      [[x(0)=15,y(0)=15],[x(0)=20,y(0)=20],[x(0)=25,y(0)=25],[x(0)=
      30,y(0)=30]], stepsize=0.2, obsrange=FALSE, color=brown, linecolor=blue,
      labels=[ "Beutetiere", "Raubtiere"], labelfont=[Helvetica,14]);

```



Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Zu einer *homogenen linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten*

$$Ly = y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0$$

gehört das *charakteristische Polynom*

$$\text{ch}_L(\lambda) := \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0.$$

Seine Nullstellen heissen *Eigenwerte* der Gleichung oder des Differentialoperators L .

Zu jedem Eigenwert λ der Multiplizität $m \geq 1$ gehören die *Fundamentallösungen* $x^\ell e^{\lambda x}$ für $0 \leq \ell \leq m-1$. Die Linearkombination dieser Fundamentallösungen zu allen Eigenwerten, mit beliebigen konstanten Koeffizienten, ist die *allgemeine Lösung* von $Ly = 0$.

Hat L reelle Koeffizienten und möchte man reelle Fundamentallösungen, so muss man dies für nicht-reelle Eigenwerte modifizieren. Dann ordnet man jedem Paar komplex konjugierter Eigenwerte $\mu \pm i\nu \notin \mathbb{R}$ der Multiplizität $m \geq 1$ statt der obigen die reellen Fundamentallösungen $x^\ell e^{\mu x} \cos \nu x$ und $x^\ell e^{\mu x} \sin \nu x$ für $0 \leq \ell \leq m-1$ zu.

Haben alle Eigenwerte die Multiplizität 1, so vereinfacht sich die Situation. Dann gehört zu jedem Eigenwert λ die Fundamentallösung $e^{\lambda x}$, bzw. zu jedem Paar komplex konjugierter Eigenwerte $\mu \pm i\nu \notin \mathbb{R}$ die reellen Fundamentallösungen $e^{\mu x} \cos \nu x$ und $e^{\mu x} \sin \nu x$.

Für die *inhomogene lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten* $Ly = g(x)$ sucht man zuerst eine *partikuläre Lösung* y_p . Ihre *allgemeine Lösung* hat dann die Form $y_h + y_p$, wobei y_h die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung $Ly = 0$ ist.

Sind $y_{p,j}$ partikuläre Lösungen von $Ly = g_j(x)$ und c_j Konstanten für $1 \leq j \leq k$, so ist $c_1y_{p,1} + \dots + c_ky_{p,k}$ eine partikuläre Lösung von $Ly = c_1g_1(x) + \dots + c_kg_k(x)$. Für gewisse $g(x)$ findet man eine partikuläre Lösung durch Ansatz.

Ist λ kein Eigenwert von L , so hat die Gleichung $Ly = e^{\lambda x}$ eine partikuläre Lösung der Form $Be^{\lambda x}$. Die Konstante B bestimmt man durch Einsetzen und Koeffizientenvergleich.

Ist λ kein Eigenwert von L und $p(x)$ ein Polynom vom Grad r , so hat die Gleichung $Ly = p(x)e^{\lambda x}$ eine partikuläre Lösung der Form $q(x)e^{\lambda x}$ für ein Polynom $q(x)$ vom Grad r . Die Koeffizienten von $q(x)$ bestimmt man durch Einsetzen und Koeffizientenvergleich.

Ist λ ein Eigenwert der Multiplizität m und $p(x)$ ein Polynom vom Grad r , so hat die Gleichung $Ly = p(x)e^{\lambda x}$ eine partikuläre Lösung der Form $q(x)e^{\lambda x}$ für ein Polynom $q(x)$ vom Grad $r+m$.

Hat L reelle Koeffizienten und nicht die Eigenwerte $\mu \pm i\nu$, so hat die Gleichung $Ly = A_1e^{\mu x} \cos \nu x + A_2e^{\mu x} \sin \nu x$ eine partikuläre Lösung der Form $B_1e^{\mu x} \cos \nu x + B_2e^{\mu x} \sin \nu x$ für Konstanten B_1 und B_2 .

Hat L reelle Koeffizienten und Nullstellen $\mu \pm i\nu$ der Ordnung m , und sind $p_1(x)$ und $p_2(x)$ Polynome vom Grad $\leq r$, so hat die Gleichung $Ly = p_1(x)e^{\mu x} \cos \nu x + p_2(x)e^{\mu x} \sin \nu x$ eine partikuläre Lösung der Form $q_1(x)e^{\mu x} \cos \nu x + q_2(x)e^{\mu x} \sin \nu x$ für Polynome $q_1(x)$ und $q_2(x)$ vom Grad $\leq r+m$.

Für Anfangs-, Rand-, oder sonstige Nebenbedingungen stellt man zuerst die allgemeine Lösung auf und bestimmt dann deren Koeffizienten.

```

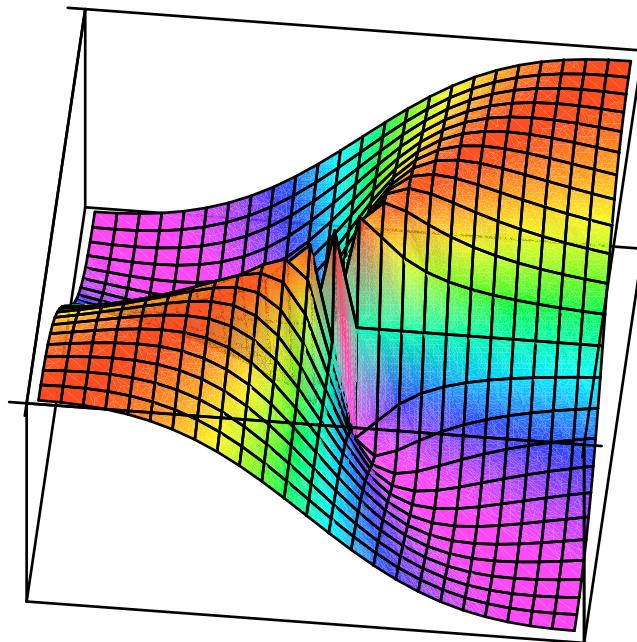
> plotit := proc()
> plot3d( [x,y,f], x=-1..1, y=-1..1, scaling=constrained,
> axes=boxed, tickmarks=[[[],[],[]], shading=zhue )
> end proc:

```

Unstetige aber partiell differenzierbare Funktion:

```
> f := x*y/(x^2+y^2); plotit();
```

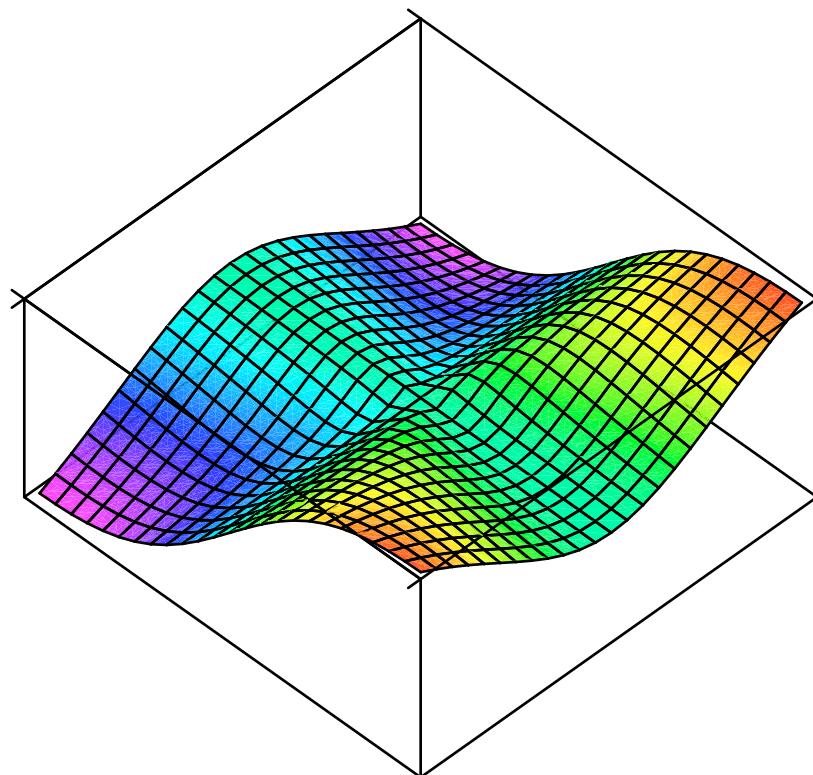
$$f := \frac{xy}{x^2+y^2}$$



Stetige und partiell, aber nicht total differenzierbare Funktion:

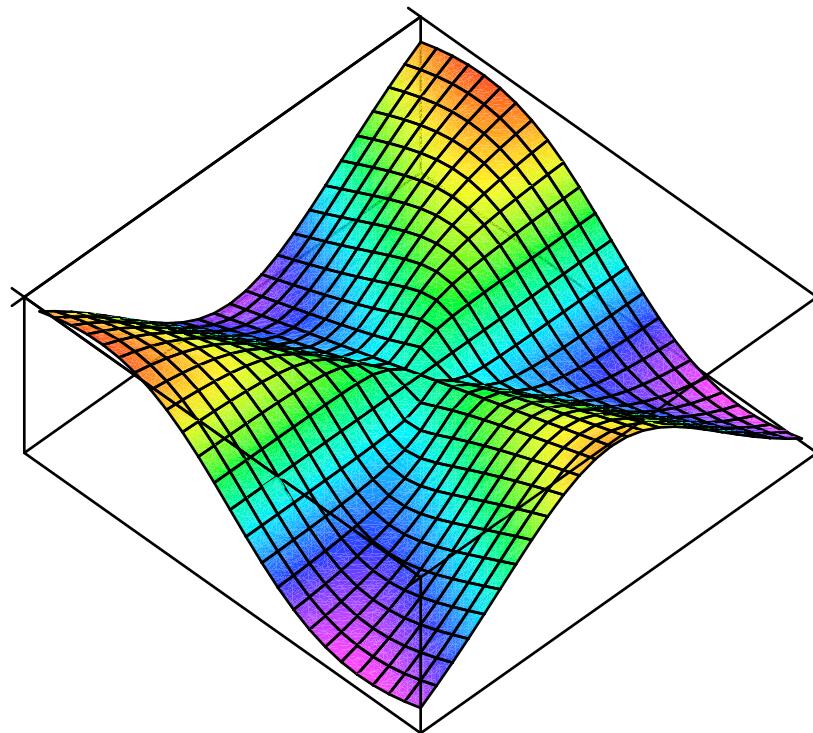
```
> f := x^2*y/(x^2+y^2); plot3d();
```

$$f := \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$$



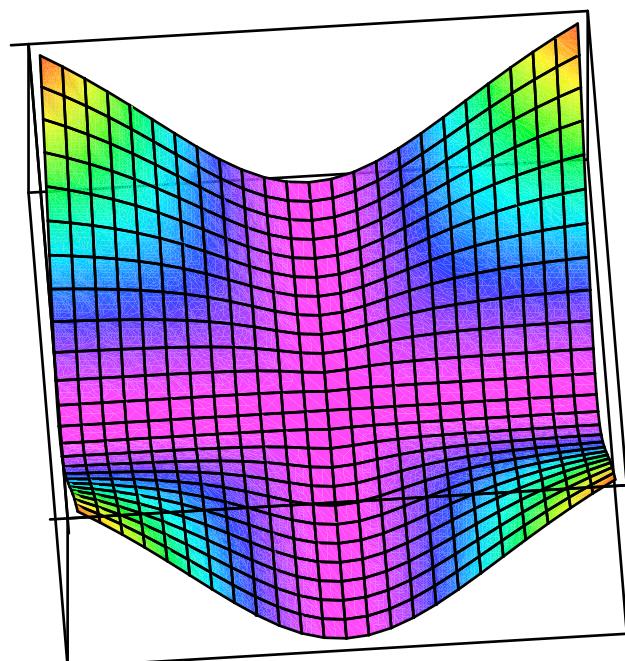
Stetige und partiell, aber nicht total differenzierbare Funktion:

```
> f := y*(y^2-3*x^2)/(3*(x^2+y^2)); plotit();  
f:=  $\frac{y(y^2-3x^2)}{3x^2+3y^2}$ 
```



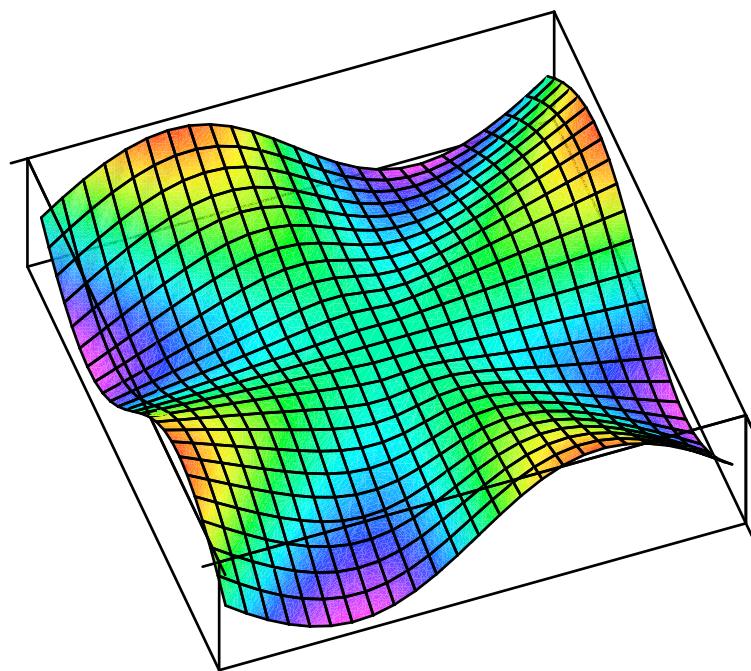
Total differenzierbare Funktion:

```
> f := 2*x^2*y^2/(x^2+y^2); plotit();  
f:=  $\frac{2x^2y^2}{x^2+y^2}$ 
```



Total differenzierbare Funktion:

```
> f := x*y*(x^2-y^2)/(x^2+y^2); plotit();  
f:=  $\frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$ 
```



```
[>
```

Dies ist ein Beispiel zu impliziten Funktionen. Wir betrachten die beliebig oft differenzierbare Funktion

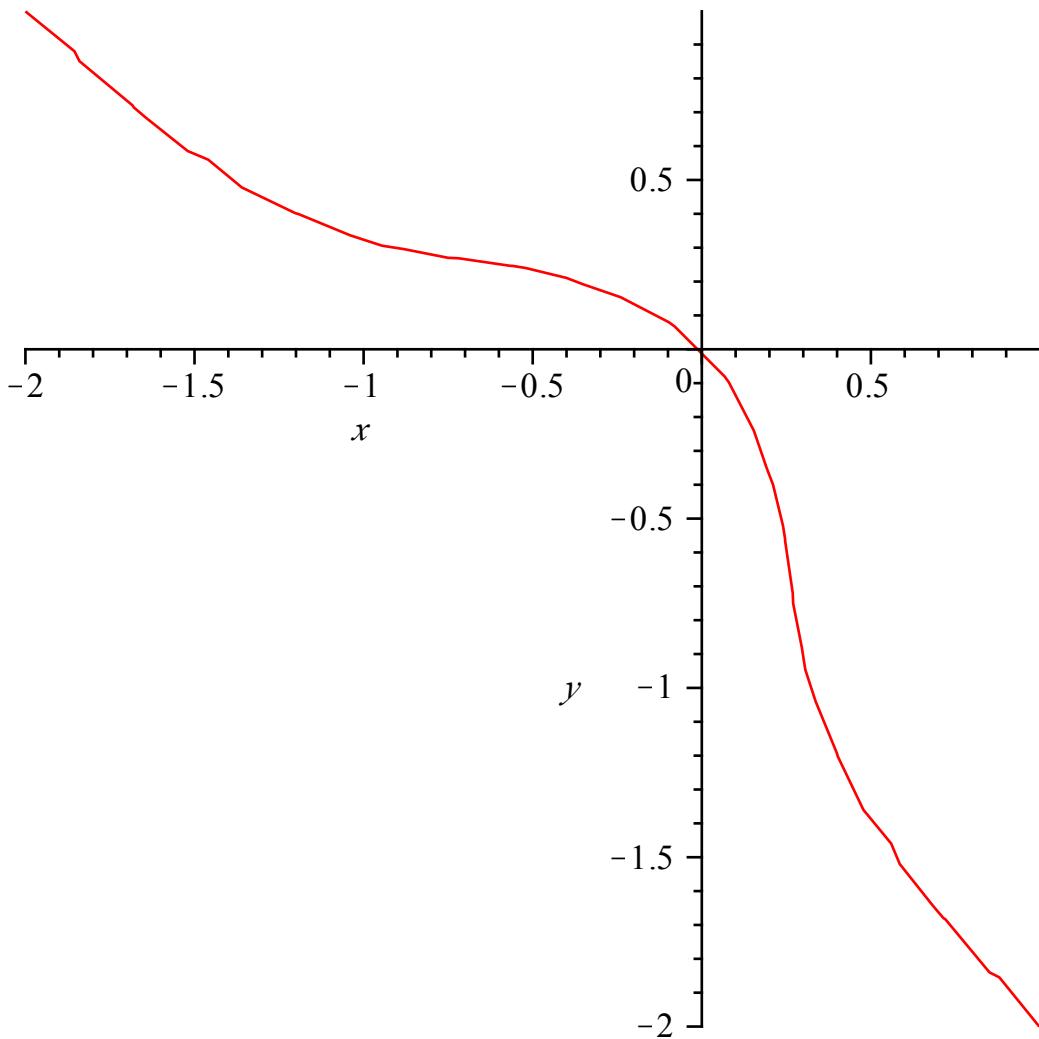
```
> f := (1+x+y)*exp(x^2+y^2)-1;
```

$$f := (1 + x + y) e^{x^2 + y^2} - 1 \quad (1)$$

und ihre Nullstellenmenge

```
> with(plots):
```

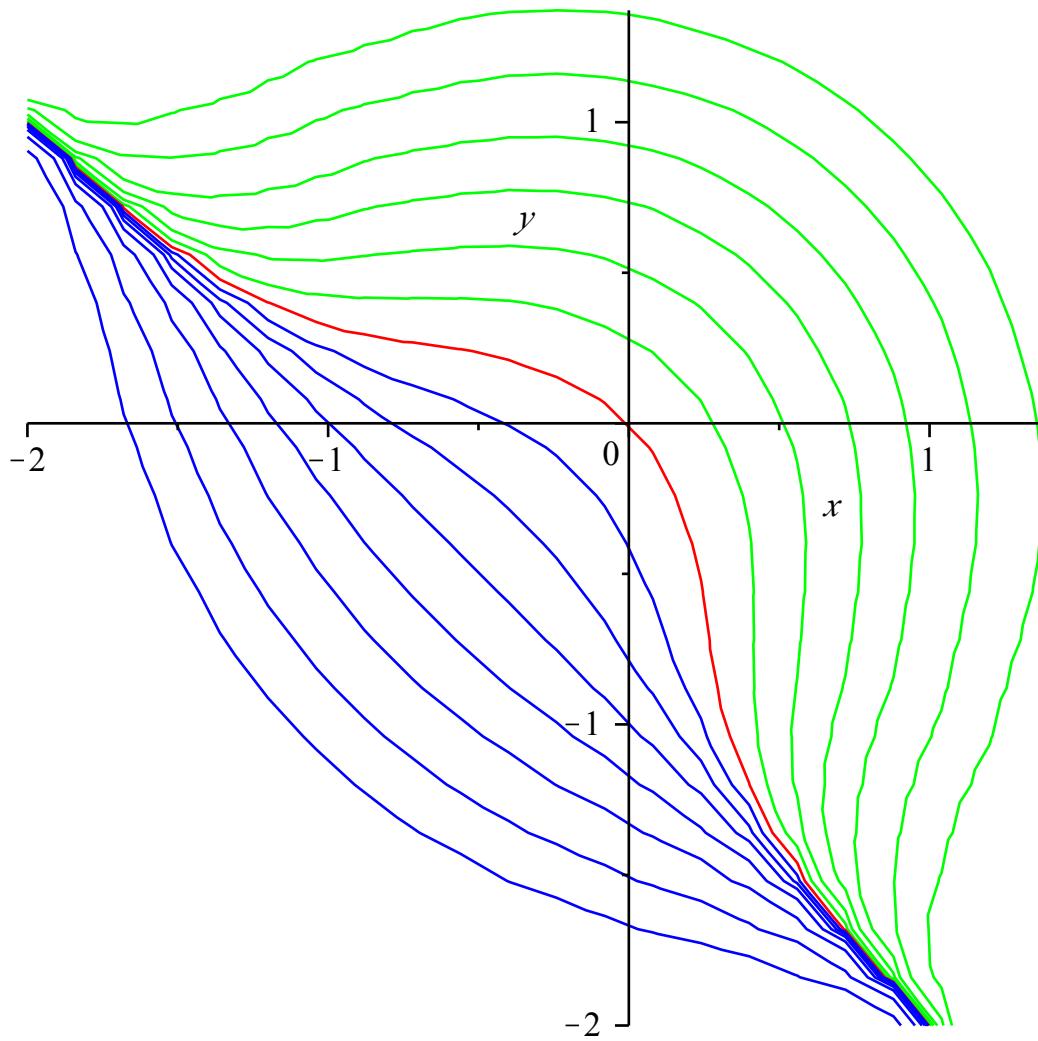
```
> implicitplot(f, x=-2..2, y=-2..2);
```



In der Vorlesung wurde gezeigt, dass diese Menge überall lokal der Graph einer streng monoton fallenden beliebig oft differenzierbaren Funktion ist. Man kann zeigen, dass sie schon global der Graph einer bijektiven Funktion ist.

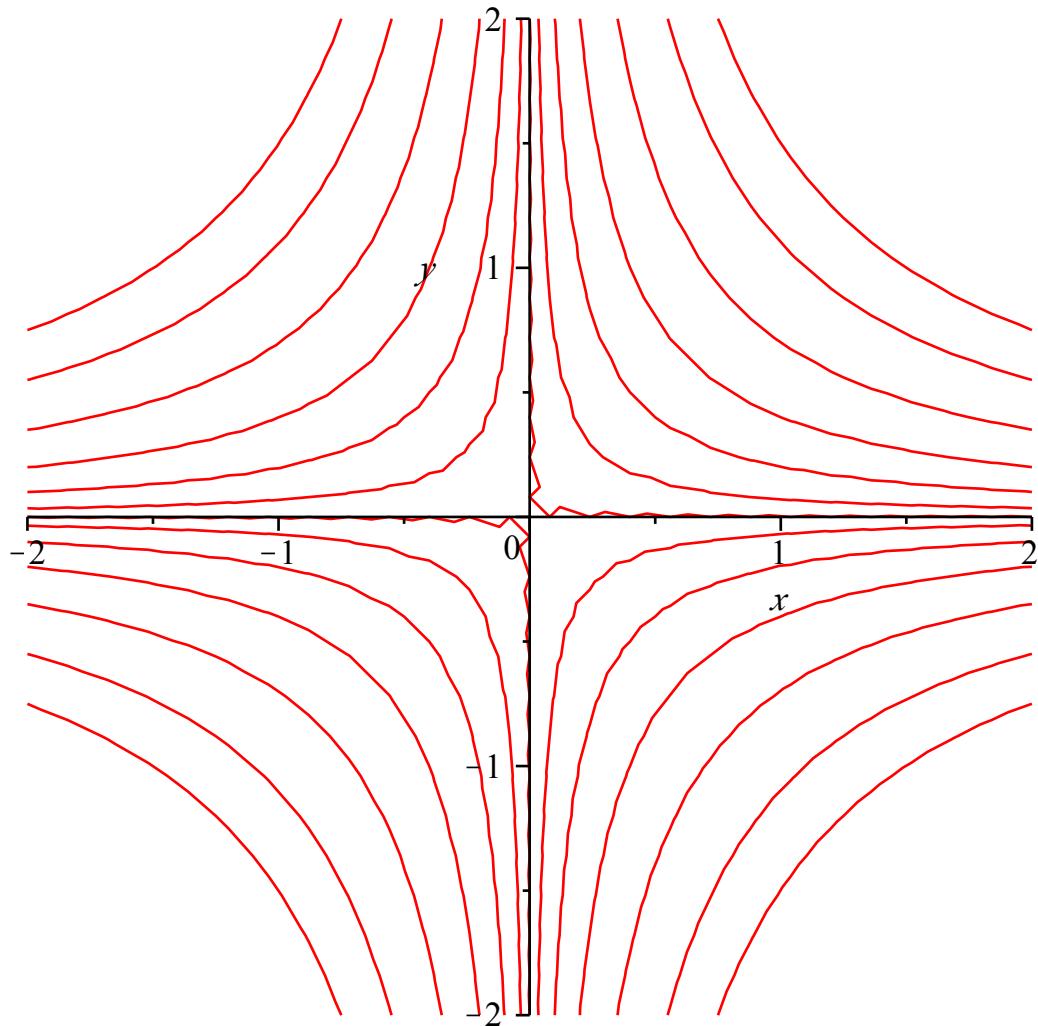
Die benachbarten Niveaulinien sehen so aus:

```
> implicitplot( [f-14,f-7,f-3.6,f-2,f-1,f-.4,f,f+.3,f+.6,f+1,f+1.7,
  f+3,f+6,f+12],  
  x=-2..2, y=-2..2, color=[green,green,green,green,  
  green,green,red,  
  blue,blue,blue,blue,blue,blue,blue]);
```



Zum Vergleich hier verschiedene Niveaulinien der Funktion $(x,y) \rightarrow xy$. Diese sind regulär ausser im Ursprung:

```
> implicitplot( [x*y-1.5, x*y-1.1, x*y-.7, x*y-.4, x*y-.2, x*y-.07, x*y,
      x*y+.07, x*y+.2, x*y+.4, x*y+.7, x*y+1.1, x*y+1.5],
      x=-2..2, y=-2..2);
```



Index

Fettgedrückte Seitenzahlen weisen auf Definitionen hin.

- Ableitung
 - Richtungs-~, **39**
- determinante
 - Funktional-~, **83**
 - Jacobi-~, **83**
- Differentialgleichung
 - Exsistenz-und Eindeutigkeits-satz, 10
 - gewöhnliche ~, **9**
- differenzierbar
 - m*-fach ~, **55**
 - partiel ~, **38**
 - stetig ~, **42**
 - m*-fach ~, **55**
- Divergenz, **137**
- entartet, **61**
- Feldlinie, **121**
- Fubini
 - Satz von ~, **87**
- Funktionaldeterminante, **83**
- Green
 - Satz von ~, **134**
- harmonisch, **151**
- Integral, **114**
 - Linien-~, **112**
 - Riemann-~, **86**
 - uneigentliches ~, **109**
- integral
 - Linien-~, **129**
- Jacobideterminante, **83**
- konservativ, **131**
- kritischer Punkt, **60**
 - bedingt ~, **67**
- Laplace Operator, **151**
- Linienintegral, **129**
- Lipschitz
 - ~ stetig, **7**
 - lokal ~, **7**
- Potential, **79, 122**
- Rand
 - ~-kurve, **133**
- Randkurve, **133**
- regulär, **82**
- Riemann
 - ~-Integral, **86**
- Rotation, **133**
- Satz
 - ~ von Fubini, **87**
 - ~ von Green, **134**
 - ~ von Stokes, **146**
- satz
 - Exsistenz-und Eindeutigkeits-, 10
- stetig
 - ~ differenzierbar, **42**
 - m*-fach ~, **55**
 - Lipschitz ~, **7**
 - lokal ~, **7**
- Stokes
 - Satz von ~, **146**

Todo list

Overfull	4
Too long	23
Copy from Simon	49
Too long	53
Too long	55
Copy from Simon	58
Overfull	59
BILD	64
Too long	66
Fix table	66
Too long	69
link	69
Too long	71
link (b)	71
link	71
Too long	73
link (a)	73
Overfull	75
Too long	99
Too long	105
Too long	107
Check with Simon	107
Too long	109
Fix	113
Too long	130
Too long	135
Bild	137
Overfull	139
Too long	143
Bild	143
Bild	148