Vorlesung Analysis II für D-ITET im FS 2011

Zusammenfassung Vektoranalysis im $\mathbb{R}^3$

Alle Abbildungen seien so oft wie nötig stetig differenzierbar.

Notation:

Ortsvektor	Skalarfeld	Vektorfeld	Nabla
$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$	$f(x)$	$K(x) = \begin{pmatrix} K_1(x) \\ K_2(x) \\ K_3(x) \end{pmatrix}$	$\nabla = \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{pmatrix}$ mit $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$

Differentialoperatoren: (alles in Spaltenvektoren)

Gradient	$\operatorname{grad} f := \nabla f = \begin{pmatrix} \partial_1 f \\ \partial_2 f \\ \partial_3 f \end{pmatrix}$	Richtung und Betrag des grössten Anstiegs von f
Rotation	$\operatorname{rot} K := \nabla \times K = \begin{pmatrix} \partial_2 K_3 - \partial_3 K_2 \\ \partial_3 K_1 - \partial_1 K_3 \\ \partial_1 K_2 - \partial_2 K_1 \end{pmatrix}$	lokale Zirkulationsrate von K
Divergenz	$\operatorname{div} K := \nabla \cdot K = \partial_1 K_1 + \partial_2 K_2 + \partial_3 K_3$	lokale Produktionsrate von K
Laplace	$\Delta f := \operatorname{div} \operatorname{grad} f = \partial_1^2 f + \partial_2^2 f + \partial_3^2 f$	lokale Diffusionsrate von f

Lokale Eigenschaften:

(Skalarfeld) $\xrightarrow{\text{grad}}$ (Vektorfeld) $\xrightarrow{\text{rot}}$ (Vektorfeld) $\xrightarrow{\text{div}}$ (Skalarfeld)				
$\operatorname{rot} \operatorname{grad} f = 0$				$\operatorname{div} \operatorname{rot} K = 0$
$\operatorname{grad} f = 0$	$\iff$	f lokal konstant		
$\operatorname{rot} K = 0$	$\iff$	K zirkulationsfrei	$\iff$	lokal $\exists f$ mit $\operatorname{grad} f = K$
$\operatorname{div} K = 0$	$\iff$	K divergenzfrei	$\iff$	lokal $\exists L$ mit $\operatorname{rot} L = K$
$\Delta f = 0$	$\iff$	f harmonisch		

Globale Eigenschaften:

Die folgenden Eigenschaften eines Vektorfelds K sind äquivalent:
• K besitzt ein Potential, das heisst, ein Skalarfeld f mit $\operatorname{grad} f = K$.
• Das Integral von K über jeden Weg hängt nur von Anfangs- und Endpunkt ab.
• Das Integral von K über jeden geschlossenen Weg ist Null.
• K heisst konservativ.

Weg- oder Kurvenintegral: (von der Parametrisierung unabhängig)

Ein Weg oder eine Kurve ist das Bild einer Parametrisierung $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^3$, $t \mapsto \gamma(t)$.		
Die Bildkurve C wird in Richtung des wachsenden t orientiert.		
Der Weg heisst Feldlinie von K, falls gilt $\gamma'(t) = K(\gamma(t))$.		
skalares Kurvenintegral	$\displaystyle\int_C f(x)\lvert dx\rvert \ := \ \int_a^b f(\gamma(x))\,\lvert\gamma'(t)\rvert\,dt$	Für $f \equiv 1$ erhält man die Kurvenlänge
vektorielles Kurvenintegral	$\displaystyle\int_C K(x)\cdot dx \ := \ \int_a^b K(\gamma(x))\cdot\gamma'(t)\,dt$	Arbeit oder Zirkulation von K entlang C

Flächenintegral: (von der Parametrisierung unabhängig)

Eine Fläche ist das Bild einer Parametrisierung $\varphi\colon B \to \mathbb{R}^3$, $\binom{u}{v} \mapsto \varphi\binom{u}{v}$ für $B \subset \mathbb{R}^2$.		
Die Bildfläche F wird durch den Einheitsnormalenvektor $n := \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{\lvert\varphi_u \times \varphi_v\rvert}$ orientiert.		
Die Randkurve ∂F wird so orientiert, dass ein Beobachter, der sie mit dem Kopf in Richtung n entlang geht, die Fläche stets zu seiner linken Seite hat.		
Die Oberfläche eines Körpers im $\mathbb{R}^3$ wird stets nach aussen orientiert.		
skalares Flächenintegral	$\displaystyle\int_F f(x)\lvert d\omega\rvert \ := \ \int_B f\bigl(\varphi\tbinom{u}{v}\bigr)\,\lvert\varphi_u \times \varphi_v\rvert\,du\,dv$	Für $f \equiv 1$ erhält man den Flächeninhalt
vektorielles Flächenintegral	$\displaystyle\int_F K(x)\cdot d\omega := \int_B K\bigl(\varphi\tbinom{u}{v}\bigr)\cdot(\varphi_u \times \varphi_v)\,du\,dv$	Fluss von K durch F in Richtung n

Integralsätze: (alle Spezialfälle eines einzigen grossen Satzes im $\mathbb{R}^n$)

Hauptsatz für Kurvenintegrale	$\displaystyle\int_C \operatorname{grad} f(x)\cdot dx \ = \ f(q) - f(p)$	C Weg von p nach q
Satz von Stokes (im $\mathbb{R}^2$: von Green)	$\displaystyle\int_{\partial F} K\cdot dx \ = \ \int_F \operatorname{rot} K\cdot d\omega$	F orientierte Fläche mit orientiertem Rand ∂F
Satz von Gauss = Divergenzsatz	$\displaystyle\int_{\partial B} K\cdot d\omega \ = \ \int_B \operatorname{div} K\,d\mu(x)$	B dreidimensional mit nach aussen orientiertem Rand ∂B