Körper

Körper-Axiome

Ein Körper ist eine Menge K zusammen mit zwei binären Operationen $+$ und $\cdot$ sowie zwei ausgezeichneten Elementen 0 und 1, so dass folgendes gilt:

$\forall x\ \forall y:$	$x + y = y + x$	Kommutativität der Addition
$\forall x\ \forall y\ \forall z:$	$x + (y + z) = (x + y) + z$	Assoziativität der Addition
$\forall x:$	$0 + x = x$	Neutrales Element der Addition
$\forall x\ \exists x':$	$x + x' = 0$	Inverses Element der Addition
$\forall x\ \forall y:$	$x \cdot y = y \cdot x$	Kommutativität der Multiplikation
$\forall x\ \forall y\ \forall z:$	$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$	Assoziativität der Multiplikation
$\forall x:$	$1 \cdot x = x$	Neutrales Element der Multiplikation
$\forall x \neq 0\ \exists x':$	$x \cdot x' = 1$	Inverses Element der Multiplikation
$\forall x\ \forall y\ \forall z:$	$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$	Distributivität
	$1 \neq 0$	Nichttrivialität

Das inverse Element der Addition zu x ist eindeutig bestimmt und wird auch mit $-x$ bezeichnet. Für $x + (-y)$ schreibt man auch $x - y$.

Das inverse Element der Multiplikation zu $x \neq 0$ ist eindeutig bestimmt und wird auch mit $\frac{1}{x}$ bezeichnet. Für $x \cdot \frac{1}{y}$ schreibt man auch $\frac{x}{y}$.

Beispiele von Körpern
Die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen
Die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen
Die Menge $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen
Die Menge $\mathbb{F}_2$ der binären Zahlen

Binäre Zahlen: $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ mit den folgenden Operationen:

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1