Analysis I

Prof. Richard Pink

HS 2010

Michal Sudwoj

9. Mai 2011

Inhaltsverzeichnis

INHALTSVERZEICHNIS

Teil I

Vorlesungsnotizen

Kapitel 1

Grundlagen

1.1 Mengen

Bsp.:

$\{1,2,3\} = \{3,1,2\} = \{1,1,2,3,2\}$ 3 Elemente

Seien $x, y, z \in \mathbb{R}$. $\{x, y, z\}$ 1-3 Elemente, eg. $x = y = z$

$\{\} = \varnothing$

Bsp.:

Für jede natürliche Zahl n gilt $n^2 > n$

Bew.:

Sei A die Menge aller natürlichen Zahlen mit $n^2 \leq n$.
Wenn $A \neq \varnothing$, dann enthält A einen kleinsten Element.
...

$$\forall x \in \varnothing : x > x$$

$A \times \ = \{(a,b)|a \in A, b \in B\}$
(a,b) Paar = List mit 2 Elemente

$$\{a,b\} = \{b,a\}$$
$$(a,b) \neq (b,a) \Leftarrow a \neq b$$

- Paar
- Tripel
- Quardupel
- Quitupel
- n-Tupel

$A_1 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, \ldots, a_n)|a_i \in A_i\}$ "kartesische Produkt"
$\mathbb{R}^n$

$\cup$	Vereinigung
$\cap$	Durchschnitt
$\in$	Element
$\subset$	Inklusion (Teilmenge oder gleich)
$\setminus$	Differenzmenge

$$A \setminus B = \{a \in A | a \notin B\}$$

$$\mathbb{Z}^{\geq 0} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$
$$\mathbb{N} = \{(0,)1, 2, 3, \dots\}$$

1.2 Logik

1.2.1 Junktoren

$\wedge$	und
$\vee$	oder
$\neg$	nicht
$\Longrightarrow$	impliziert
$\Longleftrightarrow$	äquivalent

1.2.2 Quantoren

$\forall$	für alle
$\exists$	es existiert
$\exists!$	es existiert genau ein

Bsp.:

$$\forall x \in \mathbb{R} : x > x \implies 2 = 0$$
$$\forall x \in \mathbb{R} : x > x \implies 2 = 2$$
$$\forall x, y \in \mathbb{R} : x > y \implies x^3 > y^3$$

Jede braune Henne legt braune Eier.
Jede rosa Henne legt rosa Eier.

$$2 > 2 \implies 2 = 2$$

"$A \implies B$" "Wenn A, dann B." **nicht:** "Es gilt A und daher auch B."

A	B	$A \implies B$
gilt	gilt	gilt
gilt	gilt nicht	gilt nicht
gilt nicht	gilt	gilt
gilt nicht	gilt nicht	gilt

$$(A \implies B) \iff (\neg A \vee B)$$
$$(A \iff B) \iff ((A \implies B) \wedge (B \implies A))$$

1.3 Polarkoordinaten

1.3.1 Ebene Polarkoordinaten

$$x = r\cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$\varphi'' ='' \arg((x,y))$ "Argument" wohlbestimmt bis auf $2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

Konvention: $\varphi \leftarrow]-\pi,\pi[$

$$\varphi = \begin{cases} \arccos\frac{x}{r} & y > 0 \\ -\arccos\frac{x}{r} & y < 0 \end{cases}$$

$$\varphi = \begin{cases} \arcsin\frac{y}{r} & x > 0 \\ \pi - \arcsin\frac{y}{r} & x < 0 \end{cases}$$

Bsp.:

Spirale

$r =$ monotone Funktion von φ

$r = a\varphi, a > 0. \varphi \geq 0$	Spirale mit konstantem Abstand
$r = ae^{b\varphi}, a, b > 0, \varphi \in \mathbb{R}$	logarithmische Spirale

1.3.2 Zylinderkoordinaten

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi \\ y &= \rho \sin \varphi \\ z &= z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi &= \arg((x, y)) \\ z &= z \end{aligned}$$

1.3.3 Kugelkoordinaten

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta \cos \varphi \\ y &= r \cos \theta \sin \varphi \\ z &= r \sin \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \varphi &= \arg((x, y)) \\ \theta &= \arcsin \frac{z}{r} \quad r \geq 0, \varphi \neq 2\pi m, n \in \mathbb{Z}, \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \end{aligned}$$

1.4 (vollständige) Induktion

Sei $A(n)$ eine Aussage, die von einer ganzen Zahl $n \geq 0$ abhängt.
Falls: (a) $A(0)$ gilt (Induktionsverankerung)
und: (b) $\forall n : \underbrace{A(n)}_{\text{Induktionsannahme}} \implies A(n+1)$ (Induktionschritt)
Dann gilt: $\forall n \in \mathbb{Z}^{\geq 0} : A(n)$

Für alle $n \geq 1$ und alle $x_1, \dots, x_n \in]0,1[$ gilt $\prod_{k=1}^{n}(1-x_n) > 1 - \sum_{k=1}^{n} x_k$

Bem.: Erinnerung:

$$a, b \in \mathbb{Z}$$

$$\sum_{k=a}^{b} x_k = \begin{cases} 0 & a > b \\ x_a + x_{a+1} + \ldots + x_b & a \leq b \end{cases}$$

$$\prod_{k=a}^{b} = \begin{cases} 1 & a > b \\ x_a \cdot x_{a+1} \cdots x_b & a \leq b \end{cases}$$

$$a \leq b \leq c$$

$$\sum_{k=a}^{c} x_k = \sum_{k=a}^{b} x_k + \sum_{k=b+1}^{c} x_k$$

$$\prod_{k=a}^{c} x_k = \prod_{k=a}^{b} x_k + \prod_{k=b+1}^{c} x_k$$

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \prod_{i=1}^{k} \frac{n-i+1}{i} \qquad n \geq k \geq 0$$

Kapitel 2

Funktionen

Funktionsterm = Formel

Bsp.:

$$f(x) = \frac{1}{x+1}$$
$$g(x) = 0$$
$$f(x) - f(x) \stackrel{?}{=} g(x)$$

Definitionsbereich?

$[a, b) = [a, b[$ halboffenes Intervall

Def.: Funktion

Eine Funktion $f : A \to B$ besteht aus:
Definitionsbereich A,
Zielbereich B, und
einer Zuordnung eines $f(x) \in B$ für jedes $x \in A$

$\mapsto$ wird abgebildet auf

$\{\} = \varnothing$

Bem.:
Zielbereich B nicht mit Bildmenge verwechseln!

Bsp.:
$$f : [0, \infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto 0$$

Bsp.:
$$f : \varnothing \to \mathbb{R}, x \mapsto 0 \qquad B = \varnothing$$

2.1 Beschreibung von Funktionen

durch ihren Graphen

Def.: Graph
$$\operatorname{graph}(f) := \{(a, f(a)) | a \in A\} \supset A \times B$$

Def.: Kreuzmenge

$$A \times B := \{(a,b)|a \in A, b \in B\}$$

Fallunterscheidung

Bsp.: $\operatorname{sgn} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

Bsp.:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x+1}$$

Fakt:

f ist durch $A, B, \operatorname{graph}(f)$ eindeutig bestimmt, denn
$f(a)$ = das einzige $b \in B$ mit $(a,b) \in \operatorname{graph}(f)$
$\implies (a,b) = (a', f(a'))|a \in A$
$\implies a = a',\ b = f(a') = f(a)$

Bem.:

Eine Teilmenge $\Gamma \subset A \times B$ ist der Graph einer Funktion $A \to B$ g.d., w. für jeden $a \in A$ ein eindeutiges $b \in B$ existiert mit $(a, b) \in \Gamma$

$$\forall a \in A \, \exists! \, b \in B : (a, b) \in \Gamma$$

2.1.1 Arten, eine Funktion anzugeben

- Formel
- Graph
- Wertetabelle
- Differentialgleichung
- Fallunterscheidung
- implizit
- Funktionalgleichung (Eigenschaften)

Def.: Polynomfunktion

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

Def.: Gebrochenrationalefunktion

$$f(x) = \frac{\sum_{i=0}^{n} a_i x^i}{\sum_{k=0}^{m} b_k x^k}$$

Def.: Potenzfunktion

$$n \in \mathbb{Z}^{\geq 0}: \quad f(x) = x^n$$
$$n = 0: \quad f(x) = x^0 := 1 \quad |x \in \mathbb{R}$$

$0^0 = 1$

Def.: Wurzelfunktion

$$f(x) = x^{\frac{1}{m}}$$

Def.: rationale Potenzfunktion

$$f(x) = x^{\frac{n}{m}}$$

Def.: allgemeine Potenzfunktion

$$f(x) = x^a \qquad |x > 0, a \in \mathbb{R}$$

Def.: algebraische Funktion

zusammengesetzt aus rationalen Funktionen und deren Umkehrfunktionen.

Def.: elementare Funktion
zusammengesetzt aus algebraischen Funktionen, exponential Funktion, trigonometrischen Funktion und deren Umkehrfunktionen.

weitere Funktionen: Bezel, Gamma

Implizite Funktionen

Bsp.:

$$x^2 + y^2 = 1$$
$$f : [-1, 1] \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{1 - x^2}$$
$$g : [-1, 1] \to \mathbb{R}, x \mapsto -\sqrt{1 - x^2}$$

Prinzip:
Gegeben eine Teilmenge $C \subset \mathbb{R}^2$.
Wähle eine Teilmenge $C' \subset C$, sodass $C' = \mathrm{graph}(f)$ für $f : I \to \mathbb{R}, I \subset \mathbb{R}, I$ Intervall

Bsp.:

$$C : x^3 + y^3 = 3xy$$

GRAPH
Funktionen:

$$f_1 : [0, \infty[\to] - \infty, 0]$$
$$f_2 : [0, a] \to [0, a]$$

$$f_3 :]-\infty, a] \to [0, \infty[$$

nicht verwechseln mit

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^3 + y^3 - 3xy$$
$$\hookrightarrow g(x, f(x)) = 0$$
$$\hookrightarrow g(h(y), y) = 0$$

Funktionalgleichung

Bsp.:

$$e^{x+y} = e^x \cdot e^y$$
$$\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$$

Fakt:
Die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist die einzige stetige Funktion mit $\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$ und $\exp(1) = e$

Bsp.:

$$(n + 1)! = n! \cdot (n + 1)$$

Differentialgleichungen

Gleichung zwischen $x, f(x), f'(x), \dots$
Anfangswerte, um die Funktion zu bestimmen

2.2 Eigenschaften von Funktionen

Def.: Injektivität
Eine Funktion $f : X \to Y$ heisst **injektiv**, wenn

$$\forall x, x' \in X : f(x) = f(x') \implies x = x'$$

Def.: Surjektivität
Eine Funktion $f : X \to Y$ heisst **surjektiv**, wenn

$$\forall y \in Y \exists s \in X : f(x) = y$$

Def.: Bijektivität
Eine Funktion $f : X \to Y$ heisst bijektiv, wenn sie sowohl injektiv als auch surjektiv ist, dh.

$$\forall y \in Y \exists! x \in X : f(x) = y$$

Definitionsbereich	von f:	$\mathrm{dom}(f)$	(domain)
Zielbereich	von f:	$\mathrm{range}(f)$	
Bildmenge	von f:	$\mathrm{image}(f)$	$= \{f(x) \mid x \in X\} \subset Y$

Bem.:
f sujektiv $\iff \mathrm{image}(f) = \mathrm{range}(f)$

Def.: Umkehrfunktion
Ist f bijektiv, so heisst die Funktion $f^{-1} : Y \to X, y \mapsto$ (das einzige $x \in X$ mit $f(x) = y$) die **Umkehrfunktion** von f.

Bem.:

$$\forall x \in X : f^{-1}(f(x)) = x$$
$$\forall y\, inY : f(f^{-1}(y)) = y$$

Bem.:

$$\mathrm{graph}(f^{-1}) = \{(y, f^{-1}(y))|y \in Y\} = \{(f(x), x)|x \in X\}$$
$\implies$ Spiegelung an der $x = y$ Diagonale

a.)	$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$	$,x \mapsto \sin x$	nicht injektiv,	nicht surjektiv
b.)	$\mathbb{R} \to [-1,1]$	$,x \mapsto \sin x$	nicht injektiv,	surjektiv
c.)	$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \to \mathbb{R}$	$,x \mapsto \sin x$	injektiv,	nicht surjektiv
d.)	$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \to [-1,1]$	$,x \mapsto \sin x$	injektiv,	surjektiv
				$\Longrightarrow$ bijektiv

Def.: arcsin

Umkehrfunktion von $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \to [-1,1], x \mapsto \sin x$ ist $\arcsin : [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$
analog ist $\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$ die Umkehrfunktion von $[0,\pi] \to [-1,1], x \mapsto \cos x$

Bsp.:

$$[0,\infty[\to [0,\infty[, x \mapsto x^n \qquad | n \in \mathbb{R}^{>0} \qquad \text{bijektiv}$$

Umkehrfunktion:

$$[0,\infty[\to [0,\infty[, y \mapsto y^{\frac{1}{n}} \qquad \text{Wurzelfunktion}$$

Def.: gerade

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heisst **gerade**, falls

$$\forall x \in \mathbb{R} : f(-x) = f(x)$$

y-Achse Symmetrie

Def.: ungerade

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heisst **ungerade**, falls

$$\forall x \in \mathbb{R} : f(-x) = -f(x)$$

Ursprung Symmetrie

Bsp.:

$f(x) = 1, x^2, x^4, \ldots, \cos x$ sind gerade
$f(x) = x, x^3, x^5, \ldots, \sin x, \tan x$ sind ungerade

Bem.:

Jede Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist die Summe einer geraden und einer ungeraden Funktion, nämlich:

$$\underbrace{\frac{f(x)+f(-x)}{2}}_{\text{gerade}} + \underbrace{\frac{f(x)-f(-x)}{2}}_{\text{ungerade}}$$

Def.: monoton

Sei $I \in \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heisst

monoton wachsend ,wenn

$$\forall x, x' \in I : x < x' \implies f(x) \leq f(x')$$

streng monoton wachsend ,wenn

$$\forall x, x' \in I : x < x' \implies f(x) < f(x')$$

monoton fallend ,wenn

$$\forall x, x' \in I : x < x' \implies f(x) \geq f(x')$$

streng monoton fallend ,wenn

$$\forall x, x' \in I : x < x' \implies f(x) > f(x')$$

Bsp.:

$[0, \infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto x^n \quad |n > 0$ ist streng monoton wachsend

$\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ ist nicht monoton

$\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} x^3 & , x \geq 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases}$ ist monoton wachsend

Bem.:

f ist streng monoton $\implies$ injektiv

Bsp.:

Seien $x, x' \in [0, \infty[, x < x' \implies x' > 0 \wedge x \geq 0$

$$x'^n - x^n = \underbrace{(x' - x)}_{>0}\underbrace{(\underbrace{x'^{n-1}}_{>0} + \underbrace{x'^{n-2} \cdot x}_{>0} + \ldots + \underbrace{x^{n-1}}_{>0})}_{>0}$$

$$x'^n - x^n > 0$$

$$x'^n > x^n$$

2.3 Spezielle Definitions- und Zielbereiche, Bedeutung von Funktionen

Def.: Folge

Eine Funktion

$$\mathbb{Z}^{\geq 0} \to Y$$

$$\mathbb{Z}^{\geq 1} \to Y$$

heisst **Folge in Y**.

Bsp.:

$$\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1} = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right)$$

Varianten:

Def.: Aufzählung

Eine bijektive Funktion:
$\mathbb{Z}^{\geq 1} \to Y$: ist abzählbar unendlich
oder
$\{1, 2, 3, \dots, n\} \to Y$: Y hat Kardinalität n
heisst **Aufzählung** Y.

Bem.:

Vorsicht:
$\mathbb{R}$ ist unendlich, aber nicht abzählbar.
$\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ sind abzählbar unendlich

reelle Funktionen: $X \to Y$ für $X, Y \subset \mathbb{R}$.
mögliche Bedeutung:

Raum: Linienkoordinaten, Zeit, physikalische Grössen
Funktionen mehrerer Variablen:
$X \subset \mathbb{R}^n, Y \subset \mathbb{R}; X \to Y$

Bsp.:

$$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto 0$$

Bedeutung:

- Höhe über Meeresspiegel
- Noten in Analysis als Funktion von Arbeitsaufwand und Talent
- Volumen eines von a, b abhängigen Körpers
- Beschreibung einer Fläche als $\mathrm{graph}(f)$

$(n = 2)$ Visualisierung durch Höhenlinien
$\{(x, y) | f(x, y) = h\}$ für festes h.

Bsp.:

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto xy$$

GRAPH

$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) | x_i \in \mathbb{R}\}$
mögliche Bedeutungen:

- Ortsvektor
- Richtungsvektor

$\mathbb{R} \supset I \to \mathbb{R}^n, t \mapsto (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ $\quad I$ Intervall
parametrisierte Kurve in $\mathbb{R}^n$ gibt eine Bildmenge (kein Graph!)

Bsp.: Schraubenlinie

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \varphi \mapsto \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ \frac{h}{2\pi}\varphi \end{pmatrix}$$

$h, r > 0$

$$\text{Bildmenge } = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 | x = r\cos\left(\frac{2\pi z}{h}\right), y = r\sin\left(\frac{2\pi z}{h}\right) \right\}$$

$f : \mathbb{R}^2 \supset X \to \mathbb{R}^3$
Parametriesierung einer Fläche im $\mathbb{R}^3$.

Bsp.:

$$\mathbb{R} \times [0, r] \to \mathbb{R}^3, (\varphi, \rho) \mapsto \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi \\ \rho\sin\varphi \\ \frac{h}{2\pi}\varphi \end{pmatrix}$$

$h > 0$ fest

Bsp.: Kugeloberfläche mit Radius $r > 0$
Kugelkoordinaten

$$[0, 2\pi] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}^3, (\varphi, \theta) \mapsto \begin{pmatrix} r\cos\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta\sin\varphi \\ r\sin\theta \end{pmatrix}$$

Bedeutung einer Funktion $\mathbb{R}^n \supset X \to \mathbb{R}^n$
Umparametriesierung eines Bereichs

Bsp.: Kreisscheibe $\subset \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq r^2$

$$[-1,1] \times [-1,1] \ni (x,y) \mapsto (rx\sqrt{1-y^2}, ry)$$

$$[-1,1] \times [-1,1] \ni (x,y) \mapsto r \cdot (x,y) \cdot \begin{cases} 0 & (x,y) = (0,0) \\ \frac{\max(|x|,|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{sonst} \end{cases}$$

Bsp.: linearer Koordinatenwechsel

Richtungsvektoren: $\mathbb{R}^2 \supset X \to \mathbb{R}^2$
Vektorfeld: jedem Punkt in X wird ein Richtungsvektoe zugeordnet.

Bsp.: Geschwindigkeitsvektoe einer fliessender Flüssigkeit $\to$ Differentialgleichung

2.4 Stetigkeit

$$f : X \to Y$$

$X \subset \mathbb{R}^m, Y \subset \mathbb{R}^n, x \mapsto f(x), x' \mapsto f(x')$
Abstand von $x, x' \in \mathbb{R}^m$ ist $|x - x'| := \sqrt{(x_1 - x_1')^2 + \ldots + (x_n - x_n')^2}$
x, x' "nahe" $\iff$ $|x - x'|$ "klein" $\iff$ $|x - x'| < \delta$
$f(x), f(x')$ "nahe" $\iff$ $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$

Def.: Stetigkeit

(a) f ist stetig in $x_0 \in X$ falls gilt:
$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in X : |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x')| < \varepsilon$

(b) f ist stetig, falls f stetig in jedem $x_0 \in X$ ist.

Fakt:

Jede Polynomfunktion ist stetig.
$\mathbb{R} \supset X \to Y$ ist stetig in x_0 g.d., w. $f|x \wedge [x_0, \infty[$ und $f|x \wedge]-\infty, x_0]$ stetig in x_0 sind.

Grundeigenschaften

(a)
$f : X \to Y$ stetig
$g : Y \to Y$ stetig
$\implies$ die zusammengesetzte Funktion $g \circ f : X \to Z, x \mapsto g(f(x))$ ist stetig.

Bew.:

Sei $x_0 \in X$, sei $\varepsilon > 0$
g stetig in $f(x_0) \rightsquigarrow \exists \delta > 0 : \forall z \in Y :$
$|y - f(x_0)| < \delta \implies |g(y) - g(f(x_0))| < \varepsilon$
f stetig in $x_0 \implies \gamma > 0 : \forall x \in X$
$|x - x_0| < \gamma \implies |f(x) - f(x_0)| < \delta$
Zusammen:
$|x - x_0| < \gamma \implies |g(f(x)) - g(f(x_0))| < \varepsilon$
d.h. $g \circ f$ stetig in x_0 ■

(b)
$f = (f_1, \ldots, f_n)$
$f_1, \ldots, f_n : X \to \mathbb{R}$
↳ f stetig $\iff$ jedes f_i stetig
(c)
Die Grundrechenarten sind stetig.

Bew.:
$+ : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x + y$
Sei $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Sei $\varepsilon > 0$. Setze $\delta := \frac{\varepsilon}{2}$
Dann gilt für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}
&|(x, y) - (x_0, y_0)| < \delta \\
&\implies |x - x_0| < \delta \wedge |y - y_0| < \delta \\
&\implies |(x - x_0) + (y - y_0)| \leq |x - x_0| + |y - y_0| < 2\delta = \varepsilon \\
&\implies |(x + y) - (x_0 + y_0)| < \varepsilon
\end{aligned}$$

analog –

Bew.:

$\cdot : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x \cdot y$

Sei $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2, \varepsilon > 0$

$$|x| = |(x - x_0) + x_0| \leq |x - x_0| + |x_0| < \delta + |x|$$

$$\delta = \frac{\min\{\varepsilon, 1\}}{1 + |x_0| + |y_0|} \implies \delta \leq 1$$

$$\begin{aligned} |x \cdot y - x_0 \cdot y_0| &= |x \cdot (y - y_0) + (x - x_0) \cdot y_0| \\ &\leq |x \cdot (y - y_0)| + |(x - x_0) \cdot y_0| \\ &= |x| \cdot |(y - y_0)| + |(x - x_0)| \cdot |y_0| \\ &\leq |x| \cdot \delta + |y_0| \cdot \delta \\ &< ((\delta + |x_0|) + |y_0|) \cdot \delta \\ &= (\delta + |x_0| + |y_0|) \cdot \delta \\ &\leq (1 + |x_0| + |y_0|) \cdot \delta \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

Dann gilt $\forall (x, y)\ in \mathbb{R}^2 \ : \ |(x, y) - (x_0, y_0)| < \delta \implies |x \cdot y - x_0 \cdot y_0| < \varepsilon$

analog :

(d)

Folge:

jede Rationale Funktion ist stetig, wo definiert.

(e)

f: Intervall $\to$ Intervall bijektiv, stetig $\implies f^{-1}$ stetig

Bsp.:
Für $n \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$: $[0,\infty[\to[0,\infty[, x \mapsto x^n$
ist $[0,\infty[\to[0,\infty[, y \mapsto \sqrt[n]{y}$

Bsp.:
$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, x = (x_1,\dots,x_n) \mapsto |x| := \sqrt{x_1^2+\dots+x_n^2}$ ist stetig

Bsp.:

$$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, (x_1,\dots,x_n) \mapsto \max\{x_1,\dots,x_n\} \text{ ist stetig}$$

$$\underline{n=2:}\max\{x_1,x_2\} = \begin{cases} x_1 & \text{falls } x_1 \geq x_2 \\ x_2 & \text{falls } x_1 \leq x_2 \end{cases}$$

Unstetige Beispiele

Bsp.:

$$\operatorname{sgn}: \mathbb{R}\to\mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } x>0 \\ 0 & \text{falls } x=0 \\ -1 & \text{falls } x<0 \end{cases}$$

ist stetig ausserhalb von 0 aber unstetig in 0.

Bsp.:

$\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \lfloor x \rfloor :=$ die grösste Zahl $\leq x$
unstetig in jedem $x_0 \in \mathbb{Z}$
Die Funktion ist in jedem Punkt rechtseitig stetig.

Def.: rechts-/linksseitige Stetigkeit

$f : X \to Y$ mit $X \subset \mathbb{R}$ heisst im $x_0 \in X$ **rechtsseitig stetig**, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in X : x > x_0 \wedge |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

$f : X \to Y$ mit $X \subset \mathbb{R}$ heisst im $x_0 \in X$ **linksseitig stetig**, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in X : x < x_0 \wedge |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

f ist in x_0 stetig $\iff$ f ist in x_0 rechts- und linksseitigstetig

2.5 Grundeigenschaften von $\mathbb{R}$

#I#I\GenericWarning (hyperref) Package hyperref Warning: Token not allowed in a PDF string (Unicode):removing `math shift'#I#I\GenericWarning (hyperref) Package hyperref Warning: Token not allowed in a PDF string (Unicode):removing `math shift'#I#I\GenericWarning (hyperref) Package hyperref Warning: Token not allowed in a PDF string (Unicode):removing `\<def>-command'#I#I\GenericWarning (hyperref) Package hyperref Warning: Token not allowed in a PDF string (Unicode):removing `\sl@PackageName'#I#I\GenericV (hyperref) Package hyperref Warning: Token not allowed in a PDF string (Unicode):removing `\sl@UnexpandedMessage'#l#l\GenericWarning (hyperref) Package hyperref Warning: Token not allowed in a PDF string (Unicode):removing `\<let>-command'#l#l\GenericWarning (hyperref) Package hyperref Warning: Token not allowed in a PDF string (Unicode):removing `\string'#l#l\GenericWarning (hyperref) Package hyperref Warning: Token not allowed in a PDF string (Unicode):removing `\<def>-command'#l#l\GenericWarning (hyperref) Package hyperref Warning: Token not allowed in a PDF string (Unicode):removing `\sl@Tempa'#l#l\GenericWarning (hyperref) Package hyperref Warning: Token not allowed in a PDF string (Unicode):removing `\global'#l#l\GenericWarning (hyperref) Package hyperref Warning: Token not allowed in a PDF string (Unicode):removing `\sl@Message'#l#l\GenericWarning (hyperref) Package hyperref Warning: Token not allowed in a PDF string (Unicode):removing `math shift'#l#l\GenericWarning (hyperref) Package hyperref Warning: Token not allowed in a PDF string (Unicode):removing `math shift'

Jede nichtleere endliche Teilmenge $S \subset \mathbb{R}$ hat ein eindeutiges Maximum $\max(S)$.

falls nichtleer nicht endlich:	entweder	$\forall a \in \mathbb{R} \exists x \in S : x > a$
	oder:	$\exists a \in \mathbb{R} \forall x \in S : x \leq a$

(a ist obere Schranke)
Dann gibt es eine eindeutige kleinste obere Schranke.

Def.: Supremum

Supremum $S \subset \mathbb{R} : \sup(S) :=$
$$\begin{cases} \infty & \text{falls } S \text{ keine obere Schranke hat} \\ \text{kleinste obere Schranke} & \text{falls } S \neq \emptyset \text{ und es existiert eine obere Schranke} \\ -\infty & \text{falls } S = \emptyset \end{cases}$$

2.5.1 Supremum und Infimum

- Betrachte $X \subset \mathbb{R}$
- Eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ mit $\forall x \in X : x \leq a$ heisst **eine obere Schranke** von X.
- Falls so ein a existiert, heisst X nach oben beschränkt.
- Falls so ein a in X selbst existiert, so ist sie eindeutig, nämlich den Maximum $\max(X)$.
- Eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ mit $\forall x \in X : x \geq a$ heisst **eine untere Schranke** von X.
- Falls so ein a existiert, heisst X **nach unten beschränkt**.
- Falls so ein a in X selbst existiert, so ist sie eindeutig, nämlich den Minimum $\min(X)$.
- Ist X nichtleer und nach oben beschränkt, so besitzt es eine eindeutige kleinste obere Schranke, gennant **Supremum** $\sup(\mathbf{X})$. (d.h. $\sup(X) = \min\{a \in \mathbb{R} | a \text{ ist obere Schrank von } X\}$
- $\sup(\varnothing) \coloneqq -\infty$
- $\sup(X) \coloneqq +\infty$ falls X nicht nach oben beschränkt ist.
- Wenn $\max(X)$ existiert, so ist $\max(X) = \sup(X)$.
- Ist X nichtleer und nach unten beschränkt, so besitzt es eine eindeutige grösste untere Schranke, gennant **Infimum** $\inf(\mathbf{X})$. (d.h. $\inf(X) = \max\{a \in \mathbb{R} | a \text{ ist untere Schrank von } X\}$
- $\inf(\varnothing) \coloneqq +\infty$
- $\inf(X) \coloneqq -\infty$ falls X nicht nach oben beschränkt ist.
- Wenn $\min(X)$ existiert, so ist $\min(X) = \inf(X)$.

$$\max[0,1] = 1 = \sup[0,1] = \sup]0,1[$$
$\max]0,1[$ existiert nicht!

Charakteririerung von $\sup X$
#I#I\GenericWarning (hyperref) Package hyperref Warning: Token not allowed in a PDF string (Unicode):removing `math shift'#I#I\GenericWarning (hyperref) Package hyperref Warning: Token not allowed in a PDF string (Unicode):removing `\mathop'#I#I\GenericWarning (hyperref) Package hyperref Warning: Token not allowed in a PDF string (Unicode):removing `\mathgroup'#I#I\GenericWarning (hyperref) Package hyperref Warning: Token not allowed in a PDF string (Unicode):removing `\symoperators'#I#I\GenericWarning (hyperref) Package hyperref Warning: Token not allowed in a PDF string (Unicode):removing `\nmlimits@'#I#I\GenericWarning (hyperref) Package hyperref Warning: Token not allowed in a PDF string (Unicode):removing `math shift'

Eine $a \in \mathbb{R}$ mit:

$$\forall x \in X : x \leq a,$$
$$\forall \varepsilon > 0 : \exists x \in X : x > a - \varepsilon$$

Eigenschaften

- $X \subset X' \subset \mathbb{R} \rightsquigarrow \sup X \leq \sup X'$ (dabei $-\infty < x < +\infty$ für jedes $x \in \mathbb{R}$)
- $c, b \in \mathbb{R}; X, Y \subset \mathbb{R}$
  - $X + b := \{x + b | x \in X\}$
    - $\sup(X + b) = \sup(X) + b$
  - $c\dot{X} := \{c \cdot x | x \in X\}$
    - $\sup(c \cdot X) = c \cdot \sup(X)$ falls $c > 0$

    * $\sup(c \cdot X) = c \cdot \inf(X)$ falls $c < 0$

- $X + Y := \{x + y | x \in X, y \in Y\}$
    * $\sup(X + Y) = \sup(X) + \sup(Y)$ falls $X, Y \neq \varnothing$
        · $a := \sup(X), b := \sup(Y)$. Dann
          $\forall x \in X \forall y \in Y : (x \leq a \wedge y \leq b) \implies x + y \leq a + b$ und
          $\forall \varepsilon > 0 : ((\exists x \in X : x > a - \varepsilon) \wedge (\exists y \in Y : y > b - \varepsilon)) \implies x + y > a + b - 2\varepsilon$

Bsp.:

$$x = \xi_r \dots \xi_2 \xi_1 \xi_0 . \eta_1 \eta_2 \eta_3 \dots > 0$$
$$x_n = \xi_r \dots \xi_0 . \eta_1 \dots \eta_n | x = \sup\{x_0, x_1, \dots\}$$

Bsp.:
$\pi = 3.14159\dots$
Umfang eines regelmässiges n-Ecks U_n eingeschrieben in ein Kreis mit Radius 1
$2\pi = \sup\{U_n | n \geq 2\}$

Satz:
Für $a > 0$ existiert genau eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{>0}$, mit $f\left(\frac{m}{n}\right) = \sqrt[n]{a^m}$ für alle $m, n \in \mathbb{Z}, n > 0$.
Bezeichnung: $a^x := f(x)$
Denn:

Für $0 < a < 1$ setze $a^x := \left(\frac{1}{a}\right)^{-x}$).
Für $a = 1$ setze a^x.
Sei also $a > 1$.
Dann ist die Abbildung $\mathbb{Q} \to \mathbb{R}, \xi \mapsto a^\xi$ streng monoton wachsend.
Setze $f(x) := \sup\{a^\xi | \xi \in \mathbb{Q}, \xi \leq x\}$ nichtleer, nach oben beschränkt durch a^η für $\eta \in \mathbb{Q}, \eta \geq x$.
Falls $x \in \mathbb{Q}$, ist $\sup = \max = a^x$
f stetig in $x_0 \in \mathbb{R}$?
Sei $\delta \in \mathbb{Q}, \delta > 0$, wähle

$$
\begin{aligned}
&\xi \in \mathbb{Q} : x_0 - 2\delta < \xi < x_0 - \delta \\
&\rightsquigarrow x_0 + \delta < \xi + 3\delta \\
&\rightsquigarrow \forall x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \delta \\
&\implies x \in]x - \delta, x_0 + \delta[\\
&\implies \xi < x < \xi + 3\delta \\
&\implies a^\xi < a^x < a^{\xi+3\delta} \\
&\implies |a^x - a^{x_0}| < a^{\xi-3\delta} = a^\xi \cdot (a^{3\delta})
\end{aligned}
$$

Zu $\varepsilon > 0$ nimm $\delta \in \mathbb{Q}, \delta > 0$ und ξ so, dass $a^\xi \cdot (a^{3\delta} - 1) < \varepsilon$.
Eindeutigkeit: .... nei machemer nöd :P
Eigenschaften:

$$
\begin{aligned}
&a^{x+y} = a^x \cdot a^y \\
&(a^x)^y = a^{xy} \\
&(ab)^x = a^x \cdot b^x
\end{aligned}
$$

Die Funktion $\mathbb{R}^{>0} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{>0}, (a, x) \mapsto a^x$ ist stetig.

Satz: Zwischenwertsatz

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann minnt f jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.

$$\left(\text{d.h.} \quad \begin{array}{lcl} f(a) \leq f(b) & \Longrightarrow & [f(a), f(b)] \subset \operatorname{image}(f) \\ \text{sonst} & & [f(b), f(a)] \subset \operatorname{image}(f) \end{array}\right)$$

Bew.:

Sei $f(a) \leq f(b)$; sonst ersetze f durch $-f$.
Sei $f(a) \leq y \leq f(b)$.
Setze $g : [a, b] \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) - y$
$\implies g$ stetig, $g(a) \leq 0 \leq g(b)$.
Gesucht: Nullstelle von g.
Halbierungsprinzip:

$$a_0 := a$$

$$b_0 := b$$

falls $\operatorname{sgn}\left(g\left(\frac{a_0+b_0}{2}\right)\right) = \operatorname{sgn}(g(a_0))$ setze

$$a_1 := \frac{a_0+b_0}{2}$$

$$b_1 := b_0$$

sonst

$$a_1 := a_0$$

$$b_1 := \frac{a_0+b_0}{2}$$

usw.

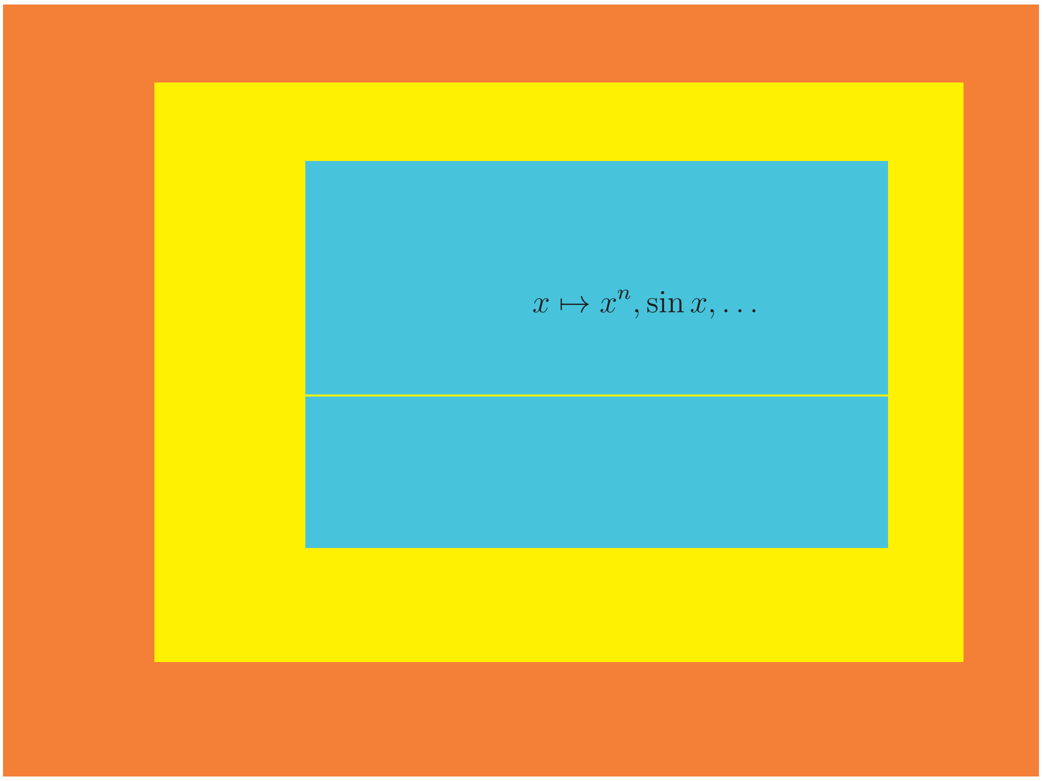
$$b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n}$$

$$a_0 \leq a_1 \leq \dots$$

$$b_0 \geq b_1 \geq \dots$$

$x := \sup\{a_0, a_1, \dots\} = \inf\{b_0, b_1, \dots\}$ tut's!

S.122
Folge: Ist $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton os induziert f eine bijektive Abbildung $I \to f(I)$.



Bsp.:

$a > 1 \rightsquigarrow \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{>0}, x \mapsto a^x$ ist stetig und streng monoton wachsend. Denn:

Für $x < x'$ ist $a^x - a^{x'} = \underbrace{a^x}_{>0} \cdot (\underbrace{a^{x-x'}}_{>0} - 1)$

Für $y = \frac{m}{n} > 0$ ist $a^y = \sqrt[n]{a^m} > 1$

Umkehrfunktion:

$$\mathbb{R}^{>0} \to \mathbb{R}, y \mapsto \log_a y$$

$\mathbb{R}$ ist ein angeordneter Körper

$$a < b \iff b - a = c^2 \text{ für ein } c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$
$$a \leq b \iff b - a = c^2 \text{ für ein } c \in \mathbb{R}$$

$a > 0$	positiv
$a \geq 0$	nichtnegativ
$a < 0$	negativ
$a \leq 0$	nichtpositiv

Dezimalentwickelung

Jede reelle Zahl ist
$x = \pm\xi_n\xi_{n-1}\ldots\xi_0.\eta_1\eta_2\eta_3\ldots$
mit $n \in \mathbb{Z}^{\geq 0}, \xi_i, \eta_i \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$
$x = \pm\left(\sum_{i=0}^{n}\xi_i \cdot 10^i + \sum_{j=1}^{\infty}\eta_i \cdot 10^-i\right)$
Diese Darstellung ist eindeutig bis auf
$\ldots\ldots.\eta_i 9999\ldots = \ldots\ldots.(\eta_i + 1)$
x ist rational $\iff$ Nachkommastellen werden schliesslich periodisch.

Vektoren

$\mathbb{R}^n = \{(x_1,\ldots,x_n)|\text{alle } x_i \in \mathbb{R}\}$
$|x| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$ Betrag / euklidische Norm von x

Satz: Dreiecksungleichung
$$|x+y| \leq |x| + |y|$$

Def.: Norm
Eine **Norm** auf $\mathbb{R}^n$ ist eine Funktion $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, x \mapsto ||x||$ sodass:

1. $\forall x \in \mathbb{R}^n : ||x|| \geq 0$ und $||x|| = 0$ g.d., w. $x = 0$
2. $\forall x \in \mathbb{R}^n \forall\lambda \in \mathbb{R} : ||\lambda \cdot x|| = |\lambda| \cdot ||x||$

3. $\forall x, y \in \mathbb{R}^n : ||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$

Bsp.:

$\|\|\cdot\|\| = \|\cdot\|$	Standard-euklidische Norm
$\|\|x\|\|_1 := \|x_1\| + \ldots + \|x_n\|$	"Taxifahrernorm" (Weg entlang Quadrate)
$\|\|x\|\|_\infty := \max\{\|x_1\|, \ldots, \|x_n\|\}$	Maximumumsnorm

Fakt:

$$||x||_\infty \leq |x| \leq ||x|_1 \leq n \cdot ||x||_\infty$$

Folge: In der Definition von Stetigkeit und $\lim$ und $\sum$ kann man eine beliebige Norm auf $\mathbb{R}^n$ nehmen anstatt $|\cdot|$

Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$

#I#I\GenericWarning (hyperref) Package hyperref Warning: Token not allowed in a PDF string (Unicode):removing `math shift'#I#I\GenericWarning (hyperref) Package hyperref Warning: Token not allowed in a PDF string (Unicode):removing `math shift'#I#I\GenericWarning (hyperref) Package hyperref Warning: Token not allowed in a PDF string (Unicode):removing `\<def>-command'#I#I\GenericWarning (hyperref) Package hyperref Warning: Token not allowed in a PDF string (Unicode):removing `\sl@PackageName'#I#I\GenericW (hyperref) Package hyperref Warning: Token not allowed in a PDF string (Unicode):removing `\sl@UnexpandedMessage'#I#I\GenericWarning (hyperref) Package hyperref Warning: Token not allowed in a PDF string (Unicode):removing `\<let>-command'#I#I\GenericWarning (hyperref) Package hyperref Warning: Token not allowed in a PDF string (Unicode):removing

`\string'#I#I\GenericWarning (hyperref) Package hyperref Warning: Token not allowed in a PDF string (Unicode):removing `\<def>-command'#I#I\GenericWarning (hyperref) Package hyperref Warning: Token not allowed in a PDF string (Unicode):removing `\sl@Tempa'#I#I\GenericWarning (hyperref) Package hyperref Warning: Token not allowed in a PDF string (Unicode):removing `\global'#I#I\GenericWarning (hyperref) Package hyperref Warning: Token not allowed in a PDF string (Unicode):removing `\sl@Message'#I#I\GenericWarning (hyperref) Package hyperref Warning: Token not allowed in a PDF string (Unicode):removing `math shift'#I#I\GenericWarning (hyperref) Package hyperref Warning: Token not allowed in a PDF string (Unicode):removing `math shift'

$$\langle x, y\rangle \coloneqq x_1y_1 + \ldots + x_ny_n$$
$$\langle x, x\rangle = |x|^2$$

Kapitel 3

Grenzwerte

Ziel: Verhalten einer Funktion am Rand ihren Definitionsbereichs.

Def.: offener Ball

Zu $x_0 \in \mathbb{R}$ und $r > 0$ sei

$$B_r(x_0) := \{x \in \mathbb{R}^n | |x - x_0| < r\}$$

den **offenen Ball** mit Radius r um x_0. (ohne Rand)

Betrachte eine Telmenge $X \subset \mathbb{R}^n$.

Def.: Innere

$X^\circ := \{x_0 \in X | \exists r > 0 : B_r(x_0) \subset X\}$ heisst das **Innere von $\mathbf{X}$** oder die **Menge der inneren Punkte von $\mathbf{X}$**.

Def.: offen

X heisst **offen**, falls $X = X^\circ$ ist.

Def.: Abschluss

$\overline{X} := \{y \in \mathbb{R}^n | \forall r > 0 : B_r(y) \cap X \neq \varnothing\}$ heisst der **Abschluss von $\mathbf{X}$**.

Def.: abgeschlossen

X ist **abgeschlossen**, wenn $X = \overline{X}$ ist.

Def.: Rand

$\partial X := \overline{X} \setminus X^\circ$ heisst der **Rand von $\mathbf{X}$**.

Def.: dicht

Eine Teilmenge $Y \subset X$ mit $X \subset \overline{Y}$ heisst **dicht im $\mathbf{X}$**.

Bem.:

- $X^\circ \subset X \subset \overline{X}$
- Jeder "offener Intervall" $]a,b[\subset \mathbb{R}$ ist offen.
- Der offene Ball $B_r(x_0)$ ist offen.
- X° ist offen.
- Jede durch endlich viele strikte Ungleichunen in stetigen Funktionen definierte Menge ist offen.
- Jeder "abgeschlosser Intervall" ist abgeschlossen.
- Jede "abgeschlossene Kugel" $\{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| \leq r\}$ ist abgeschlossen.
- $\overline{X}$ ist abgeschlossen.
- $f_i, g_i : \mathbb{R}^n \to -r$ stetig für $i = 1, \dots r \implies \{x \in \mathbb{R}^n | f_1(x) \leq g_1(x), \dots, f_r(x) \leq g_r(x)\}$ ist abgeschlossen.

Bsp.:

Graph einer stetigen Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y = f(x)\}$ ist abgeschlossen.

Bem.:

$\emptyset, \mathbb{R}^n$ sind sowohl offen als auch abgeschlossen.
$]a,b]$ ist abgeschlossen falls $a = -\infty$, sonst nicht abgeschlossen (nie offen).

Bsp.:

$$\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$
$$\mathbb{Q}^\circ = \varnothing$$
$$\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$$

Bem.:
$\partial B_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n | |x - x_0| = r\}$ heisst **Sphäre**

Def.: Grenzwert
Sei $f : X \to \mathbb{R}^n$ eine Funktion, $X \subset \mathbb{R}^m$ und $x_0 \in \mathbb{R}^m$ mit $x \in \overline{X \setminus \{x_0\}}$
f hat bei x_0 den **Grenzwert** $y_0 \in \mathbb{R}^n$ falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in X : 0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - y_0| < \varepsilon$$

Dann schreibt man:

$$f(x) \to y_0 \text{ für } x \to x_0$$
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0 \qquad \text{limes}$$

Bem.:
Der Grenzwert ist eindeutig bestimmt, falls er existiert.

Fakt:
Für $x_0 \in X$ ist f stetig in x_0 g.d., w. $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x)$ ist.

Bsp.:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$\lim_{x\to 0} f(x)$ existiert nicht!

Bsp.:

$$\delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0} \delta(x) = 0 \neq 1 = f(x)$$

Bsp.:

$$f(t) := \frac{t^3 - 3t^2 - 3t + 10}{t^2 - 5t + 6}$$ rationale Funktion ; $\mathbb{R} \setminus \{2,3\} \to \mathbb{R}$

$$= \frac{(t-2) \cdot (t^2 - t - 5)}{(t-2) \cdot (t-3)}$$

$$= \frac{t^2 - t - 5}{t - 3}$$

$\rightsquigarrow$ f hat eine stetige Fortsetzung $\mathbb{R} \setminus \{3\} \to \mathbb{R}$

Bsp.:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Geometrische Beweisidee::

BILD1

Varianten:

Bsp.:

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} \frac{|x-2|}{x^2-4} & x \neq \pm 2 \\ 0 & x = -2 \\ \frac{1}{4} & x = 2 \end{cases}$$

F stetig in $x_0 \neq \pm 2$

F rechtsseitig stetig in $x_0 < 2$, $\lim\limits_{x \to 2-} F(x) = \dfrac{1}{4} \neq F(x_0)$

$$\lim_{x \to -2+} F(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to -2-} F(x) = +\infty$$

$\lim\limits_{x \to -2} F(x)$ existiert auch nicht als uneigentlicher Grenzwert

$$\lim_{x \to \infty} F(x) = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$$

Def.: Einseitige Grenzwerte

$$\lim_{x \searrow x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0+} f(x) = y_0$$

$$\iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in X : 0 < x - x_0 < \delta \implies |f(x) - y_0| < \varepsilon$$

$$\lim_{x \nearrow x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0+} f(x) = y_0$$

$$\iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in X : 0 < x_0 - x < \delta \implies |f(x) - y_0| < \varepsilon$$

Bem.:

f rechtsstetig in $x_0 \iff \lim_{x\to x_0+} f(x) = f(x_0)$
f linksstetig in $x_0 \iff \lim_{x\to x_0-} f(x) = f(x_0)$

Def.: uneigentlicher Grenzwert

$f(x) > N$ "nahe" ∞
$|f(x) - y_0| < \varepsilon$ "nahe" y_0

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty, \text{ falls } \forall N > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in X : 0 < |x - x_0| < \delta \implies f(x) > N$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty, \text{ falls } \forall N > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in X : 0 < |x - x_0| < \delta \implies f(x) < -N$$

Analog: einseitge Grenzwerte

Def.:

$|x - x_0| < \delta$ "nahe" x_0
$x > M$ "nahe" ∞

Sei $X \subset \mathbb{R}$ nach oben unbeschränkt.
Dann gilt:

$$\lim_{x\to\infty} = y_0 \in \mathbb{R}^m, \text{ falls}$$
$$\forall \varepsilon > 0 \exists M : \forall x \in X : x > M \implies |f(x) - y_0| < \varepsilon$$

Analog:
Sei X nach unten unbeschränkt.
Dann gilt:

$$\lim_{x\to -\infty} = y_0 \in \mathbb{R}^m, \text{ falls}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists M : \forall x \in X : x < -M \implies |f(x) - y_0| < \varepsilon$$

Kombination:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} &= \infty \text{ falls } \forall N \exists M \forall x \in X : x > & M &\implies f(x) > & N\\
\lim_{x\to\infty} &= -\infty \text{ falls } \forall N \exists M \forall x \in X : x > & M &\implies f(x) < & -N\\
\lim_{x\to-\infty} &= \infty \text{ falls } \forall N \exists M \forall x \in X : x < & -M &\implies f(x) > & N\\
\lim_{x\to-\infty} &= -\infty \text{ falls } \forall N \exists M \forall x \in X : x < & -M &\implies f(x) < & -N
\end{aligned}$$

Bsp.:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \text{ nicht definiert}$$
$$n > 0 \rightsquigarrow \lim_{x\to\infty} x^n = \infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} \infty & \text{falls } n \text{ gerade} \\ -\infty & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Rechnen mit Grenzwerten

Seien $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ und $\lim_{x\to a} f(x) = b \in Y$.

- Ist $b \in Y$ und g stetig in b, dann existiert $\lim_{x\to a} g(f(x)) = g(\lim_{x\to a} f(x)) = g(b)$.

Zu $\varepsilon > 0$ existiert $\delta > 0$ mit: $\forall y \in Y : |y-b| < \delta \implies |g(y)-g(b)| < \varepsilon$
Zu diesem δ existiert $\gamma > 0$ mit: $\forall x \in X : 0 < |x-a| < \gamma \implies |f(x)-b| < \delta$
$\implies |g(f(x)-g(b)| < \varepsilon$

- Ist $b \notin Y$ und $\lim_{y\to b} g(y) = c$, so gilt $\lim_{x\to a} g(f(x)) = c$.

Bem.:
Dabei dürfen a, b, c auch $\pm\infty$ sein.

Bsp.:

a) $$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+5x+7}{2x^2-3x-5} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{5}{x}+\frac{7}{x^2}}{2-\frac{3}{x}-\frac{5}{x^2}} = \lim_{t\to 0+} \frac{1+5t+7t^2}{2-3t-5t^2} = \frac{1+5\cdot 0+7\cdot 0^2}{2-3\cdot 0-5\cdot 0^2} = \frac{1}{2}$$ Da die Funktion stetig ist.

b) $\lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}} = \lim_{t\to 0+} e^t = e^0 = 1$ Da $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$ und $\frac{1}{x} > 0$

c) $\lim_{x\to 0+} e^{\frac{1}{x}} = \lim_{t\to\infty} e^t = \infty$ Da $\lim_{x\to 0+} \frac{1}{x} = \infty$

d) $\lim_{x\to 0-} e^{\frac{1}{x}} = \lim_{t\to -\infty} e^t = \lim_{s\to\infty} \frac{1}{e^s} = \lim_{u\to\infty} \frac{1}{u} = 0$

Da $\lim_{x\to 0-} \frac{1}{x} = -\infty \quad t = -s \quad e^t = e^{-s} = \frac{1}{e^s} \quad \lim_{s\to e^s} = \infty \quad u = e^s$

Fakt:

Für jede vektorwertige Funktion $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ gilt:

$$\lim_{x \to a} f(x) = b = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \iff \forall i : \lim_{x \to a} f_i(x) = b_i$$

Bsp.:

$$\lim_{x \to 0+} \frac{\sin x}{\sqrt{5x^2 + x^4}} = \lim_{x \to 0+} \frac{\sin x}{|x|} \cdot \frac{1}{\sqrt{5 + x^2}} = \lim_{x \to 0+} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \to 0+} \frac{1}{\sqrt{5 + x^2}}$$
$$= 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Def.: Majorantenkriterium

Ist $\lim_{x \to a} g(x) = 0$ und $|f(x)| \leq |g(x)|$ für alle x nahe a, so gilt $\lim_{x \to a} f(x) = 0$.

Def.: Minorantenkriterium

Ist $\lim_{x \to a} g(x) = \infty$ und $f(x) > g(x)$ für alle x nahe a, so gilt $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$.
Analog $-\infty$

Bsp.:

$e^x \geq x$ für alle $x \geq 0$ und $\lim\limits_{x\to\infty} = \infty \implies \lim\limits_{x\to\infty} e^x = \infty$

Bsp.:

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$ Da $|\sin x| \leq 1$ $\left|\frac{\sin x}{x}\right| \leq \left|\frac{1}{x}\right|$ $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$

Bsp.:

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{2+\sin\frac{1}{x}} = \infty$ $\frac{x}{2+\sin\frac{1}{x}}$ $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{3} = \infty$

Bsp.:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$$
$$\left|\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}\right| \leq |y^2|$$
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} y^2 = \lim_{y\to 0} y^2 = 0$$

3.1 Asymptoten

Def.: Asymptote

a) Sei $X \subset \mathbb{R}$ nach oben unbeschränkt und seien $f, g : X \to \mathbb{R}$. Wir nennen f, g **zueinander asymptotisch** für $x \to \infty$, falls gilt:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) - g(x) = 0$$

b) Ist $g(x) = px + q$ eine lineare Funktion, asymptotisch zu f, dann heisst die Gerade $\mathrm{graph}(g)$ **Asymptote von f für** $\mathbf{x} \to \infty$

Analog $x \to -\infty$
Bestimmung
Die Asymptote ist eindeutig, falls sie existiert.

(Wären $g(x) = px + q$
$g'(x) = p'x + q'$ beide Asymptoten für $x \to \infty$
$\implies \lim_{x\to\infty} g(x) - g'(x) = 0 - 0 = 0$
$g(x) - g'(x) = [f(x) - g'(x)] - [f(x) - g(x)]$
$\lim_{x\to\infty} (p - p')x + (q - q') = 0$

Bsp.:

$$f(t) = \frac{t^2 - t - 5}{t - 3} = t + 2 + \frac{1}{t - 3} \quad \text{Polynomdivision}$$

$\Longrightarrow$ Asymptote $g(t) = t + 2$. $\quad [\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{t-3} = 0$

Bsp.:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sqrt{x(x+a)} \text{ für } x \to +\infty \\
&= x\sqrt{1 + \frac{a}{x}}
\end{aligned}
$$

Ansatz: $g(x) = x + q$

Ziel: $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x(x+a)} - (x+q)$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{x(x+a)} - (x+q))(\sqrt{x(x+a)} - (x+q))}{(\sqrt{x(x+a)} - (x+q))} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{x(x+a) - (x+q)^2}{x(\sqrt{1+\frac{a}{x}} + 1 + \frac{q}{x})} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{(a-2q)x - q^2}{x(\sqrt{1+\frac{a}{x}} + 1 + \frac{q}{x})} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{(a-2q) - \frac{q^2}{x}}{(\sqrt{1+\frac{a}{x}} + 1 + \frac{q}{x})} \\
&= \frac{a-2q}{2}
\end{aligned}
$$

Asymptote $x + \frac{a}{2}$

Anwendung:

Def.: beschränkt

Eine Teilmenge $X \subset \mathbb{R}^n$ heisst **beschränkt**,wenn die Menge $\{|x| : x \in X\}$ nach oben beschränkt ist. Äquivalent: Es existiert $r > 0$ mit $X \subset B_r(0)$.
Eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}^n$ heisst beschränkt wenn

$$\text{image}(f) \iff \exists r > 0 : \forall x \in X : |f(x)| \leq r$$

Bem.:

$X \subset \mathbb{R}^n$, $f : X \to \mathbb{R}^n$, f stetig in $x_0 \in X$. Dann $\exists r > 0$ sodass die Einschränkung von f auf $X \cap \overline{B_r(x_0)}$ beschränkt ist.

Bew.:

Für $\varepsilon := 1$ existiert $\delta > 0 : \forall x \in X : |x - x_0| < \delta$
$\implies |f(x) - f(x_0)| < 1$
$r := \frac{\delta}{2}$ tut's für alle $x \in X \cap B_r(x_0)$ ist
$|f(x)| \leq |f(x) - f(x_0)| + |f(x_0)| \leq 1 + |f(x_0)|$ ■

Def.: kompakt

X heisst **kompakt** falls es abgeschlossen und beschränkt ist.

Bsp.:

$\overline{B_r(x_0)}$ ist kompakt.

$[a, b] \subset \mathbb{R}$

Satz:

$f : X \to \mathbb{R}^n$ stetig, $X \subset \mathbb{R}^n$ kompakt $\implies$ f beschränkt.

Folge: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, sodass $\lim_{x\to+\infty} f(x) \in \mathbb{R} \ni \lim_{x\to-\infty} f(x)$ existieren. Dann ist f beschränkt.

Bsp.:

$$f(x) := \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

$$\frac{x^2+5x}{x^2+1}$$

Kapitel 4

Folgen & Reihen

4.1 Folgen

$$a \in \mathbb{Z}^{\geq 0}, \mathbb{Z}^{\geq 1} \to \mathbb{R}^n, k \to a_k$$

Wende Grenzwertbegriff an auf

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \begin{cases} \text{existiert in } \mathbb{R}^n & \text{konvergente Folge} \\ +\infty \text{ oder } -\infty & \text{divergiert gegen } \pm\infty \\ \text{existiert nicht} & \text{divergiert} \end{cases}$$

Satz:

Jede monotone beschränkte Folge ist konvergent nämlich

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \sup\{a_k | k \geq 0\}$$

Sei $f : X \to \mathbb{R}^n, X \subset R^m$ und $x_0 \in X$.
Dann ist f stetig in x_0 g.d., w. für jede Folge (x_k) in X mit $\lim_{k\to\infty} = x_0$ gilt $\lim_{k\to\infty} f(x_k) = f(x_0)$

Bsp.:

Sei $a \geq 1, x_0 := a$, für $k \geq 0 : x_{k+1} := \frac{1}{2}(x_k + \frac{a}{x_k}$ eine rekursiv definierte Folge.

Bem.:

$x_0 > 0$ und $\forall k \geq 0 : x_k > 0 \implies x_{k+1} > 0 \rightsquigarrow$ wohldefiniert.

Beh. (x_k) monoton fallend, d.h. $x_{k+1} \leq x_k \leftrightsquigarrow \frac{1}{2}\left(x_k + \frac{a}{x_k}\right) \leq x_k \leftrightsquigarrow \frac{a}{x_k} \leq x_k \iff a \leq x_k^2$

$$a^2 \geq x_0^2 = a^2 \leq a$$

$$a^2 \geq x_k^2 \geq a, \text{ so ist } x_{k+1}^2 = \left(\frac{1}{2}\left(x_k + \frac{a}{x_k}\right)\right)^2 \geq \sqrt{x_k \frac{a}{x_k}}^2 = a$$

Induktion $\implies \forall k : x_k^2 \leq a$

$\forall k : x_{k+1} \leq x_k \geq \sqrt{a}$

Also ist (x_k) monoton fallend, nach unten beschränkt durch $\sqrt{a}$

$$\implies x := \lim_{k\to\infty} x_k \geq \sqrt{a}$$

$$\implies x = \lim_{k\to\infty} x_{k+1} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2}\left(x_k + \frac{a}{x_k}\right) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$$
$$\implies x = \sqrt{a}$$

4.2 Summen

$$\sum_{i=p}^{q} a_i = \begin{cases} a_p + \ldots + a_q & \text{falls } p \leq q \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

4.2.1 Grundregeln

$$\sum_{i=p}^{q}(a_i + b_i) = \sum_{i=p}^{q} a_i + \sum_{i=p}^{q} b_i$$
$$\sum_{i=p}^{q} c \cdot a_i = c \cdot \sum_{i=p}^{q} a_i = \sum_{i=p}^{q} a_i \cdot a_i = \left(\sum_{i=p}^{q} a_i\right) \cdot c$$
$$\sum_{i=p}^{r} a_i = \sum_{i=p}^{q} a_i + \sum_{i=q+1}^{r} a_i = \sum_{i=p}^{q-1} a_i + \sum_{i=q}^{r} a_i \quad \text{für } p \leq q \leq r$$
$$\sum_{i=p}^{q} a_i = \sum_{j=p+k}^{q+k} a_{j-k} \quad j = i + k, i = j - k$$
$$\sum_{i=p}^{q} a_i = \sum_{j=k-q}^{k-p} a_{k-j}$$

Anwendung

$$
\begin{aligned}
\left(\sum_{i=p}^{q} a_i\right)^2 &= \left(\sum_{i=p}^{q} a_i\right) \cdot \left(\sum_{i=p}^{q} a_i\right) \\
&= \sum_{j=p}^{q} \sum_{i=p}^{q} a_i a_j \\
&= \sum_{j=p}^{q} \left(\sum_{i=p}^{j-1} a_i a_j + a_j^2 + \sum_{i=j+1}^{q} a_i a_j\right) \\
&= \sum_{j=p}^{q} a_j^2 + \sum_{j=p}^{q} \sum_{i=p}^{j-1} a_i a_j + \sum_{i=p}^{q} \sum_{j=i+1}^{q} a_i a_j \\
&= \sum_{i=p}^{q} a_i^2 + \sum_{j=p}^{q} \sum_{i=p}^{j-1} a_i a_j + \sum_{i=p}^{q} \sum_{j=i+1}^{q} a_i a_j \\
&= \sum_{p \le i \le q} a_i^2 + 2 \cdot \sum_{p \le i \le j \le q} a_i a_j
\end{aligned}
$$

Bsp.: Geometrische Summe

Für $x \neq 1$ und $n \in \mathbb{Z}$ ist $\sum_{i=0}^{n} \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$

Denn: $(x-1) \cdot \sum_{i=0}^{q} x^i = \sum_{i=0}^{q} (x^{i+1} - x^i) = x^{n+1} - 1$

Bsp.: Teleskopsumme

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=p}^{q} (a_i - a_{i-1}) &= (a_p - a_{p-1}) + (a_{p+1} - a_p) + \ldots + (a_q - a_{q-1}) \\
&= \sum_{i=p}^{q} a_i - \sum_{i=p}^{q} a_{i-1} \\
&= \sum_{i=p}^{q} a_i - \sum_{j=p-1}^{q-1} a_j
\end{aligned}
$$

4.3 Reihen

$\sum_{k=0}^{n} x_k := x_0 + x_1 + \ldots + x_n$ Summe
$\sum_{k=0}^{\infty} x_k'' := x_0 + x_1 + \ldots''$ Reihe

Def.: Reihe

Ein Ausdruck

$$\sum_{k=0}^{\infty} x_k$$

heisst (unendliche) **Reihe**

Def.: Partialsumme

Für $n \geq 0$ heisst

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} x_k$$

die **$\mathbf{n}$-te Partialsumme**.

$$s_0 = x_0; s_{n+1} = s_n + x_{n+1}$$

Die Reihe heisst konvergent bzw. divergent, falls die Folge (s_n) es ist.

Def.: Wert

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} x_k := \lim_{n\to\infty} s_n$$

heisst der **Wert** der Reihe.
Auch wenn $\lim_{n\to\infty} s_n = \pm\infty$ ist: "uneigentlicher Grenzwert".

Bem.:

(x_k) konvergiert $\not\Longleftarrow$ $\sum_{k=0}^{\infty}$ $\Longrightarrow$ (x_k) konvergiert gegen 0
[Da $x_k = s_k - s_{k-1}$]

Bsp.:

$$q \in \mathbb{R} \rightsquigarrow \sum_{k=0}^{\infty} q^k$$

Beh. Konvergent g.d., w. $|q| < 1$, und dann ist $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$

Bew.:

konvergent $\Longrightarrow$ $\lim_{k\to\infty} = 0$ $\Longrightarrow$ $|q| < 1$

$$s_k = \sum_{l=0}^{k} q^l = \frac{q^{k+1}-1}{q-1} = \frac{1}{1-q} + \frac{q^{k+1}}{q-1} \quad \blacksquare$$

Bsp.: Harmonische Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty \quad \text{"divergiert gegen } \infty\text{"}$$

Bew.:

$$s_{2^n-1} = \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{k=2^{l-1}}^{2^l-1} \frac{1}{k} \right) \geq \sum_{l=1}^{m} \left(2^{l-1} \frac{1}{2^l} \right)$$
$$= \sum_{l=1}^{m} \frac{1}{2} = \frac{m}{2}$$

$$1 \leq k \leq 2^m \implies 2^{l-1} \leq k < 2^l \text{ für ein } 1 \leq l \leq m$$

Da $\frac{1}{k} > 0$ ist, ist (s_k) streng monoton wachsend $\implies s_k \to$ für $k \to \infty$

Bsp.:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} = \infty \text{ für } s \in]0, 1]$$

Minorantenkriterium

Bsp.:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} \text{ konvergiert für } s > 1$$

Bew.:

Wegen $\frac{1}{k^s} > 0$ ist (s_k) streng monoton wachsend.
Genügt zu zeigen (s_k) ist nach oben beschränkt.

$$\begin{aligned}
s_{2^m-1} &= \sum_{l=1}^{m} \left(\sum_{k=2^{l-1}}^{2^l-1} \frac{1}{k^s} \right) \\
&\leq \sum_{l=1}^{m} \left(2^{l-1} \cdot \frac{1}{2^{(l-1)\cdot s}} \right) \\
&= \sum_{l=1}^{m} 2^{(l-1)(1-s)} \\
&= \sum_{n=0}^{m-1} \left(2^{1-s}\right)^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} \left(2^{1-s}\right)^n \\
&= \frac{1}{1-2^{1-s}} < \infty \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

$$k \geq 2^{l-1} \implies \frac{n}{k^s} \leq \frac{1}{(2^{l-1})^s}$$

Bsp.:

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \log k} = \infty$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \log^2 k} < \infty$$

Bem.:

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$$

heisst die Riemannsche Zetafunktion

Bem.:

Sind alle $a_k \geq 0$ so ist s_k monoton wachsend und daher $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ existiert in $\mathbb{R}$ oder $= \infty$

Def.: alternierende Reihe

Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k c_k$ mit $c_0 \geq c_1 \geq \ldots$ und $\lim_{k\to\infty}$ heisst **alternierende Reihe**.

Satz:

Jede alternierende Reihe konvergiert.

Bew.:

$s_{2l} = s_{2(l-1)} + (-1)^{2l-1} \cdot c_{2l-1} + (-1)^{2l} c_{2l} \leq s_{2(l-1)}$

Analog: $s_{2l+1} \leq s_{2l-1}$

$|s_{2l} - s_{2l-1}| = c_{2l} \to 0$ für $l \to \infty$

Bsp.: Alternierende harmonische Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{1}{k} = \ln 2$$

Umordnung von Reihen

Def.: absolute Konvergenz

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ heisst absolut konvergent, falls $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergiert.

Bsp.:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k}$$

ist konvergent, aber nicht absolut konvergent.

Satz:

Jede absolut konvergente Reihe ist konvergent, und bleibt absolut konvergent mit demselben Grenzwert unter beliebigen Umordnung.

Bem.:

Ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ nicht absolut konvergent, so existiert eine Umordnung, die divergiert.

Beweisidee::

Sei $\varepsilon > 0$
Dann $\exists k_0 : \sum_{k=k_0}^{\infty} a_k \leq \varepsilon$
Sei (b_k) eine Umordnung von (a_k).
Dann existiert k_1 so, dass alle a_k für $k < k_0$ unter den b_k für $k < k_1$ auftauchen.
Für $m \geq k_1 : \sum_{k=0}^{m} b_k = \sum_{k=0}^{k_0-1} a_k +$

$$\underbrace{(\text{Summe von endlich vielen } a_k \text{ für } k \geq k_0)}_{=(\text{Summe gewisser } |a_k| \text{ für } k \geq k_0) < \varepsilon}$$

Satz: majorisierte Konvergenz

Ist $\sum_{k=k_0}^{\infty} b_k$ konvergent und gilt

$$\forall k \geq k_0 : |a_k| \leq b_k$$

so ist $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent.
Denn:

$$\sum_{k=0}^{m} a_k \leq \sum_{k=0}^{m} b_k \leq \sum_{k=0}^{\infty} b_k \quad \blacksquare$$

Sind $c, q \in \mathbb{R}, q < 1$ und $\forall k \geq k_0 : |a_k| \leq c \cdot q^k$
so ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ abs .konv.
Denn: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \leq c' + \sum_{k=0}^{\infty} c \cdot q^k = c' + c \cdot \sum_{k=0}^{\infty} q^k = c' + c \cdot \frac{1}{1-q} < \infty$

Bsp.:
Sind $c, s \in \mathbb{R}$ mit $s > 1$, und $\forall k \geq k_0 : |a_k| \leq \frac{c}{k^s}$
Dann ist $\sum a_k$ absolut konvergent.

Bsp.:
$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ konvergiert absolut da

$$\left|\frac{1}{k(k+1)}\right| \leq \frac{1}{k^s}$$

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k+1}^{m} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{1} - \frac{1}{m+1}$$

$$\text{Also } \sum_{k=1}^{\infty} a_k = 1$$

Rechenregeln

Falls die rechte Seite konvergiert, tut's auch die linke und es gilt "=".

- $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k = \sum_{k=k_0}^{k_1-1} a_k + \sum_{k=k_1}^{\infty} a_k \quad$ für $k_0 \leq k_1$

- $\sum_{k=k_0}^{\infty}(a_k + b_k) = \sum_{k=k_0}^{\infty} a_k + \sum_{k=k_0}^{\infty} b_k$
- $\sum_{k=k_0}^{\infty} c \cdot a_k = c \cdot \sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$
- Wenn $\forall k : a_k \leq \sum_{k=k_0}^{\infty} b_k$ dann gilt $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=k_0}^{\infty} b_k$
- $\sum_{k=k_0}^{\infty} \sum_{l=l_0}^{\infty} a_{k,l} \stackrel{?}{=} \sum_{l=l_0}^{\infty} \sum_{k=k_0}^{\infty} a_{k,l}$
  Mehrfache-Reihen heissen absolut konvergent, falls $\sum_{k=k_0}^{\infty} \sum_{=l_0}^{\infty} |a_{k,l}| < \infty$. Dann darf man beliebig umordnen, zB. wie oben.

Bsp.:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + l^2} \qquad \text{konvergiert absolut}$$

$$\uparrow \text{ konvergent, da } \frac{1}{k^2 + l^2} \leq \frac{1}{l^4} \text{ und Majorantekriterium}$$

Speziell

$$\left(\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k\right) \cdot \left(\sum_{l=l_0}^{\infty} b_k\right) = \sum_{k=k_0}^{\infty} \sum_{l=l_0}^{\infty} a_k \cdot b_l$$

Bsp.:

Eine Reihe def Form

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a \cdot e^{\imath k x}$$

oder

$$\sum_{k=k_0} a_k \cdot \cos kx + \sum_{k=k_0}^{\infty} b_k \cdot \sin kx$$

heisst Fourierreihe.

Kapitel 5

Komplexe Zahlen

Satz: Fundamentalsatz der Algebra

Jedes Polynom $P(z) = c_0 + c_1 z + \ldots + c_n z^n$ mit $c_0, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$ und $c_n \neq 0$ und $n \geq 1$ hat mindestens eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.

Fakt:

ζ ist Nullstelle von $P(z) \iff P(z) = (z - \zeta) \cdot Q(z)$ für ein Polynom $Q(z)$ von Grad $n - 1$.

Satz: Fundamentalsatz der Algebra 2

Jedes Polynom $P(z) \neq 0$ mit Koeffizienten in $\mathbb{C}$ lässt sich als Produkt von linearfaktoren schreiben:

$$P(z) = (z - \zeta_1) \ldots (z - \zeta_n) \cdot c \text{ mit } \zeta_1, \ldots, \zeta_n, c \in \mathbb{C}; c \neq 0$$

Bem.:

Hat $P(z)$ Koeffizienten in $\mathbb{R}$ und ist ζ eine Nullstelle von P, dann ist auch $\overline{\zeta} \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von P. Denn:

$$P(\overline{\zeta}) = c_0 + c_1\overline{\zeta} + \ldots + c_n\overline{\zeta}^n = \overline{c_0 + c_1\zeta + \ldots + c_n\zeta} = \overline{P(\zeta)} = \overline{0} = 0$$

Folge:
Die Nullstelle eines reellen Polynoms sind reele oder Paare komplexer konjugierter komplexer nichtreeler Zahlen.

Bsp.:

$$z^4 - 2$$
$$\pm\sqrt[4]{2} \text{ oder } \pm\sqrt[4]{2}\imath$$

$$(z-\zeta)(z-\overline{\zeta}) = z^2 - (\zeta + \overline{\zeta})z + \zeta\overline{\zeta} = z^2 - 2\Re(\zeta)\cdot z + |\zeta|^2$$

hat Koeffizienten in $\mathbb{R}$
Folge:
Jedes Polynom mit reellen Koeffizienten ist Produkt von linearefaktoren und Faktoren von Grad 2, mit reellen Koeffizienten.

Bsp.:

$$z^4 + 3z^2 - 6z + 10 = (z^2 - 2z + 2)(z^2 + 2z + 5)$$

hat Nullstelle $1+\imath$ $\qquad (z+1)^2+4=(z+1-2\imath)(z+1-2\imath)$
$\implies$ auch $1-\imath$

$$(z-(\imath+1))(z-(1-\imath))=(z-1)^2-\imath^2=z^2-2z+2$$

$\implies$ alle Nullstellen: $1\pm\imath, -1\pm 2\imath$

Fibonacci-Zahlen

$$\begin{aligned}
&a_0 := 1\\
&a_1 := 1\\
&a_{n+2} := a_n + a_{n+1} \text{ für } n \geq 2\\
&1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots\\
&a_n = * \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + * \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\\
&\text{Asymptotisch: } a_n = * \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + (\text{klein})
\end{aligned}$$

Variante:

$$\begin{aligned}
&a_0 := 0\\
&a_1 := 1\\
&a_{n+2} := 2a_{n+1} - 3a_n\\
&0, 1, 2, 1, -4, -11, -10, 13, \ldots
\end{aligned}$$

Ansatz:

$$\begin{aligned}
&a_n = \alpha u^n + \beta v^n\\
&\alpha u^{n+2} + \beta v^{n+2} = 2(\alpha u^{n+1} + \beta v^{n+1} - 3(\alpha u^n + \beta v^n)\\
&\quad \alpha(u^{n+2} - 2u^{n+1} + 3u^n) + \beta(v^{n+2} - 2v^{n+1} + 3v^n)\\
&= \alpha u^n(u^2 - 2u + 3) + \beta v^n(v^2 - 2v + 3) \qquad\qquad u, v = 1 \pm \sqrt{2}\imath\\
&= 0\\
&\alpha = \frac{1}{2\imath\sqrt{2}}(1+\imath\sqrt{2})^n - \frac{1}{2\imath\sqrt{2}}(1-\imath\sqrt{2})^n = \Im\left(\frac{(1+\imath\sqrt{2})^n}{\sqrt{2}}\right)\\
&\left|1+\imath\sqrt{2}\right| = \sqrt{3}
\end{aligned}$$

Kapitel 6

Potenzreihen

Def.: Potenzreihe

Ein Ausdruck der Form

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot z^k$$

heisst Potenzreihe.
(reele P.R.: $a_k, z \in \mathbb{R}$; komplexe P.R.: $a_k, z \in \mathbb{C}$)

Fakt:

Auf der Menge U aller z, wo die Reihe konvergiert, ist dadurch eine Funktion definiert.
Ist $z \in U$ und $|z'| < |z|$, so ist $z' \in U$ und die Reihe konvergiert absolut in z'.

Bew.:

$z \in U \implies \lim_{k\to\infty} a_k z^k = 0$

Insbesondere $\exists c > 0 \forall k \geq 0 : \left|a_k z^k\right| \leq c$

$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k z^k| = \sum_{k=0}^{\infty} \left| a_k z^k \left(\frac{z'}{z}\right)^k \right| = \leq \sum_{k=0}^{\infty} c \cdot \left|\frac{z'}{z}\right|^k < \infty$

Majorantenkriterium

$\implies$ Entweder absolute konvergenz auf $\mathbb{R}$ oder $U = [-a, a]$ für $a < \infty$ und wir haben

konvergenz auf $]-a, a[$

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot z^k, a_k \in \mathbb{C}$$

Fakt:

Falls $f(\zeta)$ konvergiert für $\zeta \in \mathbb{C}$ dann konvergiert $f(\zeta')$ absolut für jedes $\zeta' \in \mathbb{C}$ mit $|\zeta'| < |\zeta|$.
Folge: Konvergenzbereich von $f := \{\zeta \in \mathbb{C} | f(\zeta)$ konvergiert $\}$
Mit $\rho := \sup\{|\zeta| : f(\zeta)$ konv. $\}$ gilt:
$f(\zeta)$ divergiert für $|\zeta| > \rho$
$f(\zeta)$ irgendetwas für $|\zeta| = \rho$

$f(\zeta)$ konvergiert absolut für $|\zeta| < \rho$
$\implies$ Konvergenzbereich ist eine Kreisscheibe mit oder ohne oder mit einem Teil des Randes.
Spezialfall $\rho = \infty$ absolute Konvergenz auf $\mathbb{C}$

Bem.:
$\rho \geq 0$ immer

Spezialfall: $\rho = 0$: Konvergenz nur in $z = 0$

Def.: Konvergenzradius
ρ heisst **Konvergenzrtadius** von f.

6.0.1 Bestimmung des Konvergenzradiuses

Quotientenkriterium

Falls der Grenzwert $\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|$ existiert oder $= \infty$, so ist er gleich ρ
Idee:
Sei $\alpha := \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|$ und $\zeta \in \mathbb{C}$ mit $|\zeta| < \alpha$.
Wähle $\alpha' \in \left]|\zeta|, \alpha\right[$ und k_0 mit $\forall k \leq k_0 : |fraca_k a_{k+1}| > \alpha'$

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}\left|a_k\cdot\zeta^k\right| &= \sum_{k=0}^{\infty}|a_k|\cdot\left|\zeta^k\right| \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}|a_k|\cdot\alpha'^k\cdot\left(\frac{|\zeta|}{a'}\right)^k \\ &\leq \sum_{k=0}^{k_0-1}(\text{etwas}) + \sum_{k=k_0}^{\infty} c\cdot q^k \quad \text{konvergent.}\end{aligned}$$

$$\alpha' \cdot |a_{k+1}| \leq |a_k|$$
$$\alpha' \cdot |a_{k+2}| \leq |a_{k+1}|$$
$$\implies \forall k \geq k_0 : \alpha'^{k-k_0} |a_k| \leq |a_{k_0}|$$
$$\alpha'^k \cdot |a_k| \leq \alpha'^{k_0} \cdot |a_{k_0}| =: c$$

Double superscript

Bsp.:

$a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{a^k}$ hat Konv. Radius:

$$a_k = \frac{1}{a^k} \implies \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{\frac{1}{a^k}}{\frac{1}{a^{k+1}}}\right| = \lim_{k\to\infty} |a| = |a|$$

Bsp.:

$$\alpha \in \mathbb{R}, \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^\alpha} : a_k = \frac{1}{k^\alpha} \to \lim_{k\to\infty} \left|\frac{\frac{1}{k^\alpha}}{\frac{1}{(k+1)^\alpha}}\right| = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{k+1}{k}\right)^\alpha$$
$$= \lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^\alpha$$
$$= 1$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0$$
$$\lim_{y\to 0} (1+y)^\alpha = (1+0)^\alpha = 1$$

$\implies$ Konvergenzradius 1

$\alpha = 0 \implies$ Divergent für alle $\zeta \in \mathbb{C}$ mit $|\zeta| = 1$

$\alpha > 1 \implies$ absolut konvergent für alle $\zeta \in \mathbb{C}$ mit $|\zeta| = 1$

$$0 \leq \alpha \leq 1 \implies \begin{array}{l} \text{Divergenz für alle } \zeta = 1 \\ \text{Konvergenz für } \zeta = -1 \end{array}$$

Bsp.:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \text{ hat Konvergenzradius } \infty.$$

$$a_k = \frac{1}{k!}, \lim_{k\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{k!}}{\frac{1}{(k+1)!}} \right| = \lim_{k\to\infty} (k+1) = \infty$$

Bsp.:

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^k \cdot z^k$$

$$\begin{aligned} a_k = k^k, \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| &= \lim_{k\to\infty} \frac{k^k}{(k+1)^{k+1}} \\ &= \lim_{k\to\infty} \underbrace{\left(\frac{k}{k+1} \right)^k}_{\leq 1} \cdot \underbrace{\frac{1}{k+1}}_{\to 0} \\ &= 0 \quad \text{Majorantenkriterium} \end{aligned}$$

Bsp.:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\sin k) \cdot z^k$$

$a_k = \sin k; \lim_{k\to\infty} \left|\frac{\sin k}{\sin(k+1)}\right|$ existiert nicht
$|\zeta| < 1 \implies$ konvergenz bei $\zeta : \left|(\sin k) \cdot z^k\right| \leq |z|^k$
Da $\sin k \to 0$ bei $k \to \infty$, ist $\rho = 1$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sin \frac{k\pi}{2} \cdot z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \begin{matrix} 0 & \text{falls } k \text{ gerade} \\ 1 & \text{falls } k = 1 + 4l | l \in \mathbb{Z} \\ -1 & \text{falls } k = 3 + 4l \end{matrix} \right\} \cdot z^k$$

$$\frac{\sin \frac{k\pi}{2}}{\sin \frac{(k+1)\pi}{2}}$$

$$k = 2m + 1$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} (-1) \cdot z^{2m+1} = \left(\sum_{m=0}^{\infty} (-1) \cdot (z^2)^m \right) \cdot z \quad \text{Reihe in } z^2 = y$$

$$= z \cdot \left(\sum_{m=0}^{\infty} (-1) \cdot y^m \right) \begin{cases} \text{konvergiert für} & |y| < 1 \\ \text{divergiert} & |y| > 1 \end{cases}$$

$\implies$ hat Konv. Radius 1

Würzelkriterium

$\alpha := \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}}$ existiert,
dann ist $\alpha = \rho$

Für $k \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$ und $\alpha \in \mathbb{C}$ sei

$$\binom{\alpha}{k} := \begin{cases} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!} & k \geq 1 \\ 1 & k = 0 \end{cases}$$

6.0.2 Binomialkoeffizient

Für $\alpha \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$ ist $\binom{\alpha}{k}$ = Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer Menge mit α Elementen.

Def.: Binomische Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} \cdot z^k$$

Konvergenzradius falls $\alpha \notin \mathbb{Z}^{\geq 0}$

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \lim_{k\to\infty} \frac{\left| \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!} \right|}{\left| \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k)}{(k-1)!} \right|} = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{k+1}{\alpha-k} \right| = 1$$

Für $\alpha, x \in \mathbb{R}$, $|x| < 1$, gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} \cdot x^k = (1+x)^\alpha$$

Spezialfall: $\alpha = n \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$, $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$
Reihe bricht ab,
$(1+z)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot z^k$ und Konvergenzradius ∞
Spezialfall $\alpha = -n, n \in \mathbb{Z}^{>0}$

$$\frac{1}{(1+z)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-n}{k} \cdot z^k$$

$$\binom{-n}{k} = \frac{(-n)(-n-1)\dots(-n-k+1)}{k!}$$

$$= (-1)^k \cdot \frac{(n+k-1)(n+k-2)\dots(n+1)n}{k!}$$

$$\frac{1}{(1-z)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} \cdot z^k$$

$n = 1$

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k$$

$n = 2$

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \cdot z^k$$

Spezialfall: $\alpha = \frac{1}{2}$

$$\rightsquigarrow \sqrt{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{k} \cdot z^k = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \dots$$

Fakt:
Jede Potenzreihe definiert in Inneren ihres Konvergenzradiuses eine stetige Funktion.

6.0.3 Rechnen mit Potenzreihen

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-z}\cdot\frac{1}{1-z} &= \frac{1}{(1-z)^2}\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\cdot z^k \text{ für } |z|<1\\
&= \left(\sum_{k=0}^{\infty} z^k\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty} z^l\right)\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} z^{k+l}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left|\{(k,l),k,l\in\mathbb{Z}^{\geq 0},k+l=n\}\right|\cdot z^n\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\cdot z^k
\end{aligned}$$

Produkt

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\cdot z^k\right)\left(\sum_{kl0}^{\infty} b_k\cdot z^l\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{l=0}^{n} a_k b_{n-k}\right)z^k \quad l=n-k$$

falls beide Reihen konvergieren.
Analog: Summe, Differenz, Quotient, Komposition, Umkehrfunktion sind wieder Potenzreihen.

6.0.4 Exponentialfunktion

$$\exp(z):=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}$$

Konvergenzradius $= \infty \rightsquigarrow$ stetige Funktion $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$

Additionstheorem

Für $z, w \in \mathbb{C}$ gilt

$$\exp(z+w) = \exp(z) \cdot \exp(w)$$

Bew.:

$$\begin{aligned}
\exp(z+w) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+w)^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} z^k \cdot w^{n-k} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k \cdot w^{n-k}}{k!\,(n-k)!} \\
&= \sum_{k,l \geq 0} \frac{z^k w^l}{k!\,l!} \\
&= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \right) \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{w^l}{l!} \right) \\
&= \exp(z) \cdot \exp(w) \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Insbesondere gilt für alle $z \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{Z}$, $\exp(nz) = \exp(z)^n$

$$\begin{aligned}
&n \geq 1 : \exp(z + \ldots + z) \\
&n = 0 : \exp(0z) = 1 = \exp(z)^0 \\
&n < 0 : 1 = \exp(0) = \exp(nz - nz) = \exp(nz) \cdot \exp(-nz)
\end{aligned}$$

Def.: Eulersche Zahl

$$e = \exp(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

Satz:

Für $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\exp(x) = e^x$$

Bew.:

$\xi = \frac{m}{n}; m, n \in \mathbb{Z}^{>0}$ ist

$\exp(\xi) > 0$

$\exp(\xi)^n = \exp(n\xi) = \exp(m) = \exp(1)^m = e^m$

$\Longrightarrow \exp(\xi) = \underset{+}{\sqrt[n]{e^m}} = e^{\frac{n}{m}} = e^{\xi}$

$\Longrightarrow \exp(-\xi) = \frac{1}{\exp(\xi)} = \frac{1}{e^{\xi}} = e^{-\xi}$

$\overset{?}{=} \exp \xi = e^{\xi}$ für alle ξ aus $\mathbb{Q}$.

Da beide Seiten stetig

$\Longrightarrow \exp(x) = e^x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ■

Bem.: Abkürzung

Für $z \in \mathbb{C}$

$$e^z := \exp(z)$$

Eigenschaften

a) $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{>0}$ ist bijektiv, stetig und streng monoton wachsend.

b) Für jedes $q \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^q} = \infty$$
$$\lim_{x\to\infty} x^q \cdot e^{-x} = 0$$

Denn:

$$\frac{e^x}{x^q} = \frac{1}{x^q} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \geq \frac{1}{x^q} \frac{x^{q+1}}{(q+1)!} \frac{1}{(q+1)!} \to \text{ für } x \to \infty \implies \frac{e^x}{x^q} \to \infty$$

und

$$\lim_{x\to\infty} x^q \cdot e^{-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^q \cdot e^{-x}} = 0$$

Erinnerung: $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{>0}$ bijektiv, streng monoton wachsend.

6.0.5 Logarithmus

Def.: natürliche Logarithmus

Dir Umkehrfunktion der obigen ist der **natürliche Logarithmus** $\log : \mathbb{R}^{>0} \to \mathbb{R}$.
bijektiv, streng monoton wachsend

Historisch:

$\log_{10}$	$=$	lg	
$\log_2$	$=$	lb	binärlog.
$\log_e$	$=$	ln log	natürlicherlog.

Rechenregeln

$$
\begin{aligned}
&e^{\log y} = y \text{ für } y > 0, y \in \mathbb{R} \\
&\log e^x = x \text{ für } x \in \mathbb{R} \\
&\log(xy) = \log x + \log y \\
&\log \frac{1}{x} = -\log x \\
&\log x^y = y \log x \\
&a^x = e^{x \log a} = \exp(\log a \cdot x) \\
&\qquad y = a^x \\
&\iff x = \log_a y \\
&\iff y = e^{\log_a x} \\
&\iff (\log a) \cdot x = \log y \rightsquigarrow \log_a y = \frac{\log y}{\log a}
\end{aligned}
$$

	$+$	:	$O(n)$	
Komplexität:	$\cdot$	:	$O(n^2)$	Schulemethode
	$\cdot$	:	$O(n \cdot \log n)$	Optimiert

Grenzwerte

$$
\begin{aligned}
&\lim_{t \to \infty} \log t = \infty \\
&\lim_{t \to 0+} \log t = -\infty
\end{aligned}
$$

Für jedes $\alpha > 0$ gilt:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\log t}{t^\alpha} = 0$$
$$\lim_{t\to 0+} t^\alpha \log t = 0$$

Denn:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\log t}{e^{\alpha \log t}} = \lim_{s\to\infty} \frac{s}{e^{\alpha s}} = \lim_{u\to\infty} \frac{\frac{u}{\alpha}}{e^u} = 0$$
$$\lim_{t\to 0+} t^\alpha \log t = \lim_{s\to\infty} \frac{-\log s}{s^\alpha} = 0$$

Fakt:

$$\lim_{z\to 0} \frac{e^z - 1}{z} = 1 \quad z \in \mathbb{C}$$

Bew.:

$$\frac{e^z - 1}{z} = \frac{\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}\right) - 1}{z} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{k-1}}{k!} \to \sum_{k=0}^{\infty} \frac{0^{k-1}}{k!} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} \qquad x \in \mathbb{R}$$

Bew.:

$$y = \log(1+x)$$
$$\rightsquigarrow e^y = 1 + x$$
$$e^y - 1 = x$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{e^y - 1} = 1$$

Fakt:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \exp(n) \qquad x \in \mathbb{R}$$

Bew.:

$$x \neq 0 \implies \lim_{n\to\infty} \frac{x}{n} = 0$$

aber $\frac{x}{n} \neq 0$

$$\implies \lim_{n\to\infty} \frac{n \log\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}{n\frac{x}{n}} = 1$$

$$\implies \lim_{n\to\infty} \frac{\log\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}{x} = 1$$

$$\implies \lim_{n\to\infty} \log\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = x$$

stetigkeit von $\exp \implies \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$ ∎

Insbesondere

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

6.0.6 Potenzreihenentwickelung

$$1 + y = e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$$

$$y = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots$$

Ansatz: $x = y + ay^2 + by^3 + \dots$

$$
\begin{aligned}
y &= (y + ay^2 + by^3) + \frac{1}{2}(y + ay^2 + by^3)^2 + \frac{1}{6}(y + ay^2 + by^3)^3 + \dots \\
&= y + y^2 \underbrace{\left(a + \frac{1}{2}\right)}_{a=\frac{1}{2}} + y^3 \underbrace{\left(b + \frac{1}{2}2a + \frac{1}{6}\right)}_{\substack{b+a+\frac{1}{6}=0 \\ b=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}=\frac{1}{3}}} + O(x^4)
\end{aligned}
$$

$$
\log(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + \dots
$$

Fakt:

$$
\log(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} y^k}{k} \qquad \text{falls } |y| < 1
$$

Erinnerung:

$$
\exp(\imath t) = \cos t + \imath \sin t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\imath t)^k}{k!} = \sum_{\substack{k=0 \\ \text{gerade}}}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{k}{2}} t^k}{k!} + \sum_{\substack{k=1 \\ \text{ungerade}}}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{k-1}{2}} t^k}{k!}
$$

$$
\Longrightarrow \quad \cos t = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l t^{2l}}{(2l)!} = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} \mp \dots
$$

$$
\Longrightarrow \quad \sin t = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l t^{2l+1}}{(2l+1)!} = t - \frac{t^3}{6} + \frac{t^5}{120} \mp \dots
$$

Bem.:

Durch

$$\sin t = \frac{e^{\imath t} - e^{-\imath t}}{2\imath}$$

und

$$\cos t = \frac{e^{\imath t} + e^{-\imath t}}{2}$$

oder der entsprechenden Potenzreihenentwickelung definieren $\sin$ und $\cos$ auch Funktionen $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

Bem.:
π ist die kleinste reele Zahl > 0 mit $\sin \pi = 0$

Bem.:

$$e^{x+\imath y} = e^x e^{\imath y} = e^x(\cos y + \imath \sin y) \quad x, y \in \mathbb{R}$$
$$e^{z+2\pi\imath k} = e^z \quad \text{für } z \in \mathbb{C}, k \in \mathbb{Z}$$
$$\mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto e^z :$$
$$\text{Bild } = \mathbb{C} \setminus \{0\}$$
$$e^z = e^w \iff w = z + 2\pi\imath k \quad \text{für ein } k \in \mathbb{Z}$$

Satz: Pythagoras

$$\cos^2 t + \sin^2 t = 1$$

Bew.:

$$\left(\frac{e^{\imath t}+e^{-\imath t}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^{\imath t}-e^{-\imath t}}{2\imath}\right)^2$$
$$= \frac{e^{2\imath t}+2+e^{-2\imath t}}{4} + \frac{e^{2\imath t}-2+e^{-2\imath t}}{-4} = 1$$

Analog:

$$\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t$$
$$\sin 2t = 2\cos t \sin t$$

6.1 Hyperbolische Funktionen

$$\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2} = 1 + \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} + \dots$$
$$\sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2} = t + \frac{t^3}{6} + \frac{t^5}{120} + \dots$$
$$\cosh(\imath t) = \cos(t) \iff \cosh(t) = \cos(\imath t)$$
$$\sinh(\imath t) = \imath \sin(t) \iff \sinh(t) = \frac{\sin(\imath t)}{\imath} = -\imath \sin(\imath t)$$

6.1.1 Umkehrfunktionen

$$x = \cosh t = \frac{e^t + e^{-i}}{2} \quad t \geq 0$$

$$
\begin{aligned}
e^t 2x &= (e^t + e^{-t})e^t \\
0 &= e^{2t} - 2xe^t + 1 \\
e^t &= \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 - 4}}{2} = x \pm \sqrt{x^2 - 1} \quad \text{nur +, da } x \geq 1 \\
t &= \log(x + \sqrt{x^2 - 1}) = \operatorname{arcosh}(t)
\end{aligned}
$$

Bem.:

$$
\begin{aligned}
\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} &= \frac{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} \mp \dots}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \mp \dots} \\
&= x \frac{1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} \mp \dots}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \mp \dots} \\
&= x(a + bx^2 + cx^4 + \dots) \quad \text{Ansatz} \\
1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} &= \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)(a + bx^2 + cx^4 + \dots) \\
&= a + \left(b - \frac{a}{2}\right)x^2 + \left(c - \frac{b}{2} + \frac{a}{24}\right)x^4 + \dots
\end{aligned}
$$

$$
\Longrightarrow \quad
\begin{aligned}
1 &= a & a &= 1 \\
-\tfrac{1}{6} &= b - \tfrac{a}{2} & b &= \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{6} = \tfrac{1}{3} \\
\tfrac{1}{120} &= c - \tfrac{b}{2} + \tfrac{a}{24} & c &= \tfrac{2}{15}
\end{aligned}
$$

$$
\Longrightarrow \quad \tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \dots
$$

6.2 "Klein-o" und "Gross-O" Notation

Betrachte $g(x)$ für $x \to x_0$

Def.: Gross O

$O(g(x))$ bezeichnet irgendeine Funktion f mit $\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|$ beschränkt für $x \to x_0$

Def.: Klein o

$o(g(x))$ bezeichnet irgendeine Funktion f mit $|fracf(x)g(x)| \to 0$ für $x \to x_0$

Bsp.:

$f(x) = O(1)$ für $x \to x_0$ bedeutet $f(x)$ beschränkt für $x \to x_0$

$\implies \frac{1}{x^n} = O(1) = o(1)$ für $x \to x_0, n > 0$

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= O(1) \\ g(x) &= O(1) \end{aligned}\right\} f(x) = h(x) \quad \textbf{BLÖDSINN}$$

Bsp.:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \quad \text{Konvergenzradius } \rho > 0$$

$$\implies \left(f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right) = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k$$
$$= \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_{k+n+1} x^k\right)}_{\substack{\implies \text{hat Konvergenzradius } \rho \\ \text{stetige Funktion nahe } x=0 \\ \text{geht gegen } a_{n+1} \text{ für } x\to 0 \\ \implies \text{beschränkt nahe } x=0}} x^{n+1}$$

$$\implies f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + O(x^{n+1}) \quad \text{für } x \to 0$$

Bsp.:
$x^n = o(e^x)$ für jedes n für $x \to \infty$

Bsp.:
e^x ist nicht $O(x^n)$ für $x \to \infty$

Bem.:
f ist stetig in $x_0 \iff f(x) = f(x_0) + o(1)$ für $x \to x_0$

Erinnerung:
$f(x) = O(g(x))$ falls $\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|$ beschränkt.

$f(x) = o(g(x))$ falls $\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \to 0$

Rechenregeln

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = O(g(x)) \\ g(x) = O(h(x)) \end{array}\right\} f(x) = O(h(x))$$

$$\log(x) = O(x), x \to x_0$$

$$\left.\begin{array}{l} f_1(x) = O(g(x)) \\ g_2(x) = O(g(x)) \end{array}\right\} f_1(x) + f_2(x) = O(g(x))$$

Analog $o(\cdot)$

Kapitel 7

Differenzierbarkeit

$f : X \to Y, X, Y, \subset \mathbb{R}, x_0 \in X$

f stetig in $x_0 \iff f(x) = f(x_0) + o(1)$ für $x \to x_0$

f ist differenzierbar in x_0 mit Ableitung $f'(x_0)$

$$\iff$$

$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{f'(x_0)}_{\text{Steigung der Tangente}} \cdot (x - x_0) + o(x - x_0)$$

Äquivalent: $\left| \dfrac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} \right| \to 0$

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| - f'(x_0) \to 0$$

Äquivalent: $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

Leibniz: $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

Def.: differenzierbar

f ist differenzierbar, falls differenzierbar in jedem $x_0 \in X$. Dann ist $f' : X \to \mathbb{R}, x_0 \mapsto f'(x_0)$ eine neue Funktion genannt Ableitung.

Bem.:
differenzierbar $\Longrightarrow$ stetig
differenzierbar $\not\Longleftarrow$ stetig

Interpretiation:
x Raumkoordinate $\rightsquigarrow$ f' Tangente / Veränderungsrate
$f(t)$ = Ort, t = Zeit $\Longrightarrow$ $f'(t)$ = Geschwindigkeit, $f''(t)$ = Beschleunigung

Def.: differenzierbar
f heisst zweimal differenzierbar, falls f differenzierbar ist und f' differenzierbar ist.
Analog: f ist n-fach differenzierbar
f ist beliebig oft differnezierbar

Notation:
Newton: $f, f', f''', f^{IV}, f^{V}, f^{(n)}$
Leibniz: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y), \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)(y)$

Bsp.:

$\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto |x|$ ist differenzierbar für $x \neq 0$

$$\text{Ableitung} = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

$\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^n, n \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$ ist differenzierbar mit Ableitung nx^{n-1}

$$\lim_{x \to x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} (x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \ldots x_0^{n-1}) = nx_0^{n-1}$$

$x = x_0 + h; h \to 0$

$$x^n = (x_0 + h)^n = x_0^n + nx_0^{n-1}h + \underbrace{\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} x_0^{n-k} h^k}_{O(h^2)=o(h)}$$

Satz:

Jede Potenzriehe $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ mit Konvergenzradius $\rho > 0$ ist für $x \in]-\rho, \rho[$ differenzierbar mit Ableitung $f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k k x^{k-1}$ mit demselben Konvergenzradius ρ.
Folge: Dann ist f beliebig oft differenzierbar.

Bsp.:

$$(e^x)' = \left(\sum_{k \geq 0} \frac{x^k}{k!} \right)' = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{kx^{k-1}}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{x^l}{l!}$$

$$\Bigg(\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k}}_{\rho=1}\Bigg)' = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{kx^{k-1}}{k} = \sum_{l=0}^{\infty}x^l = \frac{1}{1-x}$$

Bsp.:

$$\begin{aligned}
&(\log x)' = \frac{1}{x}\\
&y = \log x \iff x = e^y\\
&\implies \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = (e^y)' = e^y = x\\
&\implies \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^{-1} = x^{-1}
\end{aligned}$$

Bsp.:

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^a) = ax^{a-1}\\
&x > 0, a \in \mathbb{R}\\
&x^a = (e^{\log x})^a = e^{a\log x}\\
&y = a\log x
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
z &= e^y \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(e^{a\log x}) = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} &= \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = e^y \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(a\log x) \\
&= e^{a\log x} \cdot a \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\log x) = x^a \cdot a \cdot \frac{1}{x} = ax^{a-1}
\end{aligned}
$$

Bsp.:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(a^x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(e^{x\log a}) = e^{x\log a} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x\log a) = \log a \cdot a^x$$

Satz: Mittelwertsatz (MWS)

Ist f auf $[a,b]$ stetig und auf $]a,b[$ differenzierbar, so existiert $t \in]a,b[$ mit $f'(t) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Bew.:

Betrachte $g : [a, b] \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}x$

Dann ist g stetig, auf $]a, b[$ differenzierbar, $g(b) = g(a)$

MWS für g besagt: $\exists t \in]a, b[$: $g'(t) = 0$

Satz: Satz von Rolle

Bew.:

g konstant $\Longrightarrow$ klar! jedes t tut's.

Sonst: falls $\exists t \in [a,b] : g(t) > g(a)$ $\Longrightarrow m = \max\{g(t)|t \in [a,b]\} > g(a)$ da

$[a, b]$ kompakt und g stetig. Sei $t \in [a, b]$ mit $g(t) = m$ $\implies t \in]a, b[$ g ist in t differenzierbar. $g'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{\overbrace{g(t+h) - g(t)}^{\leq 0}}{\underbrace{h}_{>0 \text{ oder } <0}}$

Dann $0 = g'(t) = f'(t) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ ✓

Folge:

Ist $f : I \to \mathbb{R}, I \subset \mathbb{R}, I$ Intervall, differenzierbar und $|f'(t)| \leq M$ für alle $t_1, t_2 \in I$: $|f(t_2) - f_1(t_1)| \leq M \cdot |t_2 - t_1|$

Bew.:

oBdA $t_1 < t_2$. ZWS für $f|[t_1, t_2] \to \exists t_in]t_1, t_2[$: $\left|\frac{f(t_1)-f(t_2)}{t_1-t_2}\right| = |f'(t)| \leq M$

Folge:

$(M = 0)$ f differenzierbar auf I mit $f' = 0$ überall $\implies f$ konstant.

Folge:

Sind $f, g : I \to \mathbb{R}, I$ Intervall, differenzierbar und $f'(t) = g'(t)$ für alle $t \in I$, dann ist $g(t) = f(t) + c$ für eine Konstante c.

Bsp.:

$$f(x) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} :]-1,1[\to \mathbb{R} \text{ differenzierbar}$$
$$f'(x) = \frac{1}{1-x}$$
$$g(x) := -\log(1-x) :]-1,1[\to \mathbb{R} \text{ differenzierbar}$$
$$g'(x) = \frac{1}{1-x} = f'(x)$$
$$\implies f(x) = c - \log(1-x) \text{ für alle } x \in]-1,1[$$
$$0 = f(0) = c - \log(1-0) = c$$

Fazit:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} = -\log 1 - x \text{ für alle } |x| < 1$$
$$\implies \log(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$$

Bsp.:

$$f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \text{ für } |x| < 1$$

$$\begin{aligned}
&g(x) := \arctan(x)\\
&g'(x) = \frac{1}{1+x^2}\\
&f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty}(-x^2)^k = \frac{1}{1-(-x^2)} = \frac{1}{1+x^2}\\
&\implies f(x) = \arctan(x) + c\\
&0 = f'(0) = \arctan(0) + c = c
\end{aligned}$$

Fazit:

$$\arctan x = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

Satz:

note = Variante des MWS Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, auf $]a, b[$ differenzierbar, $a < b$. Sei $g'(t) \neq 0$ für alle $t \in]a, b[$ mit

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(t)}{g'(t)}$$

Analog für $x \to a+$
Analog für $x \to c, c \in]a, b[$

Bem.:

MWS für $g \implies g(b) \neq g(a)$

Satz: Regel von Bernoulli-de l'Hôpital

Seien $f, g :]a, b[\to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $g'(t) \neq 0$ überall und seien $\lim_{x\to b-} f(x) = \lim_{x\to b-} g(x) = 0$ (oder beide ∞)
Dann gilt

$$\lim_{x\to b-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to b-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

falls die R.S. existiert oder $= \pm\infty$ ist.

Bew.:

$b < \infty, \lim_{x\to b-} f(x) = \lim_{x\to b-} g(x) = 0$
$\rightsquigarrow$ f, g haben stetige Fortsetzung auf $]a, b[$
Für jedes $x \in]a, b[$ anwende MWS auf $[x, b]$
$\rightsquigarrow$ existiert $t \in]x, b[$ mit

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(b) - f(x)}{g(b) - g(x)} = \frac{f'(x)}{g'(t)}$$

Für $x \to b-$ gilt auch $t \to b-$ und ...✓
Für $b = \infty$ sei oBdA $a > 0$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{f(t)}{g(t)} = \lim_{s\to 0+} \frac{f\left(\frac{1}{s}\right)}{g\left(\frac{1}{s}\right)} = \lim_{s\to 0+} \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} f\left(\frac{1}{s}\right)}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} g\left(\frac{1}{s}\right)}$$
$$= \lim_{s\to 0+} \frac{f'\left(\frac{1}{s}\right)\frac{1}{s^2}}{g'\left(\frac{1}{s}\right)\frac{1}{s^2}} = \lim_{t\to\infty} \frac{f'(t)}{g'(t)}$$

$$\lim_{s\to 0+} f\left(\frac{1}{s}\right) = \lim_{t\to\infty} f(t) = 0$$

$$\lim_{s\to 0+} g\left(\frac{1}{s}\right) = \lim_{g\to\infty} f(t) = 0$$

Fall $\lim_{x\to b-} f(x) = \lim_{x\to b-} g(x) = \infty$ weggelassen.

Bsp.1:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1} = \cos 0 = 1$$

Bsp.2:

$$a, b > 0$$
$$b \neq 1$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x - 1}{b^x - 1} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{(\log a)a^x}{(\log b)b^x} = \lim_{x\to 0}\frac{(\log a)a^0}{(\log b)b^0} = \frac{\log a}{\log b}$$

Bsp.3:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(\log x)^2}{x} \overset{H}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{2(\log x)\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to\infty}\frac{2\log x}{x} \overset{H}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{2\frac{1}{x}}{1} = 0$$

Bsp.4:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right) &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x\sin x}\\
&\overset{H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{1\sin x + x\cos x}\\
&\overset{H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{\cos x + 1\cos x + x(-\sin x)}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2\cos x - x\sin x} = \frac{-\sin 0}{2\cos 0 - 0\sin 0}\\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Bsp.5:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\log\cos x}{1-\sqrt{1-x^2}} &\overset{H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos x}(-\sin x)}{-\frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x)} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x^2}}{-\cos x}\frac{\sin x}{x} = \frac{\sqrt{1-0^2}}{-\cos 0}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = -1\cdot 1\\
&= -1
\end{aligned}$$

Errinnerung:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \quad \text{mit Konvergenzradius } \rho > 0$$

$$\implies f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k k x^{k-1} \quad \text{für } |x| < \rho$$

$$\implies f^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k k(k-1)\dots(k-n+1)x^{k-n}$$

$$\implies f^{(n)}(0) = (\text{Term für } k = n) = a_n n!$$

Folge: Für jedes $n \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$ ist

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

Folge: Die Koeffzienten einer Potenzreihe mit Konvergenzradius > 0 sind durch die dargestellte Funktiin eindeutig bestimmt.

Satz: Potenzreihen Identitätssatz

Folge:
Stellen zwei Potenzreihen für $|x| < \varepsilon$ dieselbe Funktion dar, so sind sie bereits gliedweise gleich.

7.0.1 Extrema

Sei $A \subset \mathbb{R}$ eine Teilmenge.
$\sup(A), \max(A)$, obere Schranke
$\inf(A), \min(A)$, untere Schranke

Def.: Extremalstelle
Sei $f : B \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

a) Eine obere Schranke, Maximimum, Supremum, untere Schranke, Minimum, Infimum von $f(B) = image(f)$ heisst auch ...von f. (global)

b) Ein $b \in B$ mit $f(b) = \max f$ heisst Maximalstelle von f.

Ein $b \in B$ mit $f(b) = \min f$ heisst Minimalstelle von f.
Beide solche b heissen **Extremalstellen** von f

Def.: Extremum

Extremum = Maximum oder Minimum

Satz:

Ist $B \subset \mathbb{R}^n$ kompakt (d.h. abgeschlossen und beschränkt), und $f : B \to \mathbb{R}$ stetig, dann existieren $\max f$ und $\min f$

Bsp.:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$$

$\max f = 1,$ einzige Maximalstelle ist $x = 0$

$\min f$ existiert nicht $\inf f = 0$

Def.: lokales Maximum

f hat in $b_0 \in B \subset \mathbb{R}^n$ ein lokales Maximum, wenn

$$\exists \delta > 0 : \forall b \in B : |b - b_0| < \delta \implies f(b) \leq f(b_0)$$

Def.: lokales Minimum

f hat in $b_0 \in B \subset \mathbb{R}^n$ ein lokales Minimum, wenn

$$\exists \delta > 0 : \forall b \in B : |b - b_0| < \delta \implies f(b) \geq f(b_0)$$

Fakt:

Jedes globale Maximum von f ist ein lokales Maximum von f (analog Min.,Extr.)

Def.: kritischer Punkt

Jetzt sei $B \subset \mathbb{R}$ und $f : B \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Eine $b_0' in B$ mit $f'(b_0) = 0$ heisst **kritischer Punkt** von f.

Proposition: Jede lokale Extremstelle von f in B° ist ein kritischer Punkt von f.

Bew.:

$$\exists \delta > 0 \forall b \in B : |b - b_0| < \delta \implies f(b) \leq f(b_0)$$

$$\frac{f(b) - f(b_0)}{b - b_0} \text{ ist } \begin{cases} \leq 0 & b > b_0 \\ \geq 0 & b < b_0 \end{cases} \text{ und } \to f'(b) \text{ für } b \to b_0$$

$$\implies f'(b) = 0 \quad \blacksquare$$

Folge:

Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf $]a, b[$ differenzierbar, so besitzt f ein Maximum un ein Minimum, und zwar auf der Teilunmenge
$\{a, b\} \cup \{\text{kritische Punkte von } f \text{ auf }]a, b[\}$

Bsp.1:

Bestimme die Extrema von $f : [-3, 3] \to \mathbb{R}, x \mapsto x^3 - 3x^2 + 2$
Lösung: f differenziebar
$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$
$\implies$ kritische Punkte $\{0, 2\} \subset] - 3, 3[$
Kandidaten $\{-3, 3, 0, 2\}$

x	-3	3	0	2
$f(x)$	-52	2	2	-2

Fazit:
f hat Min. -52 nur an $x = -3$
f hat Max. 2 genau an $x = 0, 3$

Bsp.2:

Bestimme die Extrema von $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto 2\sin t + \sin 2t$
Lösung: f differenzierbar.

$$f(t+2\pi) = f(t)$$
$$\implies f(\mathbb{R}) = f([0,2\pi])$$
f stetig $\implies \exists$ Max., Min.
$$f'(t) = 2\cos t + 2\cos 2t = 2\cos t + 2(\cos^2 t - \sin^2 t)$$
$$= 2\cos t + 2(2\cos^2 t - 1) = 4\cos^2 t + 2\cos t - 2 = 0$$
$$\cos t = \frac{-2 \pm \sqrt{4+4\cdot 8}}{2\cdot 4} = \frac{-2\pm 6}{8} = \left\{ \begin{matrix} \frac{1}{2} \\ -1 \end{matrix} \right\}$$
$$\iff t = \left\{ \begin{matrix} \pi \\ \frac{\pi}{3} \\ -\frac{\pi}{3} \end{matrix} \right\} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

t	π	$\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{3}$
$f(t)$	0	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$

Ergebnis:
Max $f = \frac{3\sqrt{3}}{2}$
Maximalstellen $\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$
Min $f = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$
Min. Stellen $= -\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

Bsp.3:
Bestimme den Abstand des Punkts $(a,0)$ von der Hyperbel $y^2 - x^2 = 1$

Bem.:

$d(P,Q) =$ Abstand von P zu Q
A Menge, $d(P,A) := \inf\{d(P,Q)|Q \in Q\}$

$d(P,Q = \sqrt{(x-a)^2+1+x^2}$ minimal
$\iff d(P,Q)^2 = (x-a)^2+1+x^2 = 2x^2-2ax+a^2+1$
Da quadratisch $\implies \exists!$ Minimum $\implies$ kritischer Punkt

$$x = \frac{a}{2}$$

$$\implies Q = (\frac{a}{2}, \sqrt{1+\frac{a^2}{4}})$$

$$\text{Abstand } = \sqrt{\frac{a^2}{4}+1}$$

Errinnerung:
$I \subset \mathbb{R}$ kompakter Intervall, $f: I \to \mathbb{R}$ stetig, $I = [a,b] \implies \exists \min f, \exists \max f$.

Satz:

$I \subset \mathbb{R}$ Intervall, $f: I \to \mathbb{R}$ stetig. $x_0 \in [a,b] \subset I$ so, dass für alle $x \in I \setminus [a,b] : f(x) \leq f(x_0)$. Dann ist das Maximum von $f|_{[a,b]}$ schon ein Maximum von f.

Bem.:

Falls $\forall x \in I \setminus [a,b] : f(x) < f(x_0)$, dann nimmt f ihr Max. nur auf $[a,b]$ an.

Analog: Minimum

Bsp.4:

Für welche $c \in \mathbb{R}$ besitzt $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x^2+c}{x^4+1}$ ein Minimum?
Lösung: f stetig
$\lim_{k\to\infty} f(x) = \lim_{k\to-\infty} f(x) = 0$ und für $|x| > \sqrt{|c|}$ ist $f(x) > 0$
Ist $c \leq 0$, folgt mit $x_0 = 0$, $[a,b] = [-\sqrt{|c|}, +\sqrt{|c|}]$, dann hat f ein Min.
Ist $c > 0$, so ist $f(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$
$\Longrightarrow \inf(f) = 0$, und $\min f$ existiert nicht.

7.0.2 Taylor-Approximation

Sei $f : X \to \mathbb{R}$ eine Funktion, und $x_0 \in X \subset \mathbb{R}$.
f stetig in $x_0 \iff f(x) = f(x_0) + o(1)$.
f differenzierbar in $x_0 \iff f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + o(x - x_0)$ für $x \to x_0$
Allgemein: Gesucht $P(x)$ Polynom von Grad $\leq n$, sodass $f(x) = P(x) + o((x - x_0)^n)$

Wie $P(x)$ finden?
#I#I\GenericWarning (hyperref) Package hyperref Warning: Token not allowed in a PDF string (Unicode):removing `math shift'#I#I\GenericWarning

(hyperref) Package hyperref Warning: Token not allowed in a PDF string (Unicode):removing `math shift'

$$
\begin{aligned}
&P(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \ldots + a_n(x - x_0)^n \\
&\implies P^{(k)}(x) = a_k k(k-1)\ldots 1(x - x_0)^0 + \ldots \\
&\text{für } 0 \leq k \leq n \implies P^{(k)}(x_0) = k!\, a_k \\
&\implies a_k = \frac{P^{(k)}(x_0)}{k!}
\end{aligned}
$$

Bem.:

$$f(x) - P(x) = (x - x_0)^n \cdot g(x)$$

mit $g(x) \to 0 = g(x_0)$ für $x \to_0 \implies$ Ist f n-fach differenzierbar, so ist $f^{(k)}(x_0) = P^{(k)}(x_0)$ für alle $k \leq n$.

Def.: Taylor Polynom

Ist f mindestens n-fach differenzierbar nahe x_0, so heisst

$$j_{x_0}^n f(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

das n-te **Taylor Polynom** von f an x_0
Durch

$$f(x) = j_{x_0}^n f(x) + R(x)$$

ist das n-te **Restglied** definiert.

Ab jetzt sei f beliebig oft differenzeirbar.

Satz: (Taylor)

Für jedes $x \in X$ exsitiert t zwischen x und x_0 so, dass

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

Folge:

$$R_n(x) = O((x - x_0)^{n+1})$$
$$R_n(x) = o((x - x_0)^n)$$

für $x \to x_0$

$$n = 0 : R_n(x) = f(x) - f(x_0) \stackrel{?}{=} f'(t) \cdot (x - x_0)$$

Das ist der MWS!

Bsp.1:

Berechne $\sqrt[5]{1023}$ näherungsweise mittels Taylorapproximation von Grad 1 und schätze den Fehler ab. $\sqrt[5]{1024} = 4$. Sei $f(x) = x^{\frac{1}{5}}$ und $x_0 = 1024$

$$f'(x) = \frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}} \implies f(x_0) = 4, f'(x_0) = \frac{1}{5}4^{-4} = \frac{1}{5 \cdot 2^8}$$
$$f''(x) = \frac{1}{5}\frac{-4}{5}x^{-\frac{9}{5}}$$

Taylor $\implies f(1023) = 4 + \frac{1}{5 \cdot 2^8}(1023 - 1024) + R_1(t)$

$$R_1(t) = \frac{\frac{-4}{25}t^{\frac{-3}{5}}}{2}(1023 - 1024)^2 \quad \text{für } t \in [1023, 1024]$$

$$|R_1(t)| \leq \frac{4}{25}\frac{1}{2}(1023)^{-\frac{9}{5}} \leq \frac{1}{10 \cdot 2^18} < 10^{-6}$$

$\Longrightarrow \sqrt[5]{1023} = 3.99921875\ldots$

$\Longrightarrow$ Ergebnis bis auf 6 Nachkommastellen genau

Bsp.2:

Berechne $\log 1.2$ näherungsweise durch Taylor vom Grad 3.
Lösung: $x_0 = 1$

$$\begin{array}{l|l|l}
f(t) & \log(1+t) & t=0 \\
f'(t) & \frac{1}{1+t} & 1 \\
f''(t) & -\frac{1}{(1+t)^2} & -1 \\
f'''(t) & 2\frac{1}{(1+t)^3} & 2 \\
f^{IV} & -6\frac{1}{(1+t)^4} & -6
\end{array}$$

$$\log(1+t) = \sum_{k=0}^{3} \frac{f^{(k)}(t_0)}{k!}(t-t_0)^k + \frac{f^{(4)}(\tau)}{4!}(t-t_0)^4$$

$$t_0 = 0 \leq \tau \leq t = 0.2$$

$$= \underbrace{t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3}}_{0.2-0.02+0.002\overline{6}} + \underbrace{\frac{-6}{24} \cdot \frac{1}{(1+\tau)^4} t^4}_{\underbrace{-\frac{1}{4} \cdot 0.2^t}_{-0.0004} \cdot \text{(etwas } \in]0,1])}$$

mit | Fehler | ≤ 0.0004

$\Longrightarrow$ Ergebnis ist bis auf 3 Nachkommastellen richtig

Def.: Taylorreihe

Sei f beliebig oft differenzierbar in x_0.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

heisst die **Taylor-Reihe** von f in x_0. Ihre n-te Partialsumme ist $j_{x_0}^n f$. Sie ist eine Potenzreihe in $x - x_0$

Fakt:

Falls f als Potenzreihe in $x - x_0$ dargestellt werden kann, mit Konvergenzradius $\rho > 0$, dann hat auch die Taylorreihe Konvergenzradius $\rho > 0$ und stellt im Konvergenzbereich die Funktion f dar.

Bem.:

Die Taylorreihe könnte Konvergenzradius 0 haben.

Bem.:

Selbst wenn sie Konvergenzradius > 0 hat, stellt sie nicht notwendigerweise die Funktion f dar.

Bsp.:

Die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

ist beliebig oft differenzierbar. Ihre Taylorreihe bei x_0 ist identisch 0 und stellt in keiner Umgebung von 0 die Funktion f dar.

Bem.:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} 0(x - x_0)^k \quad \text{für } x, x_0 < 0$$

$x_0 > 0$:

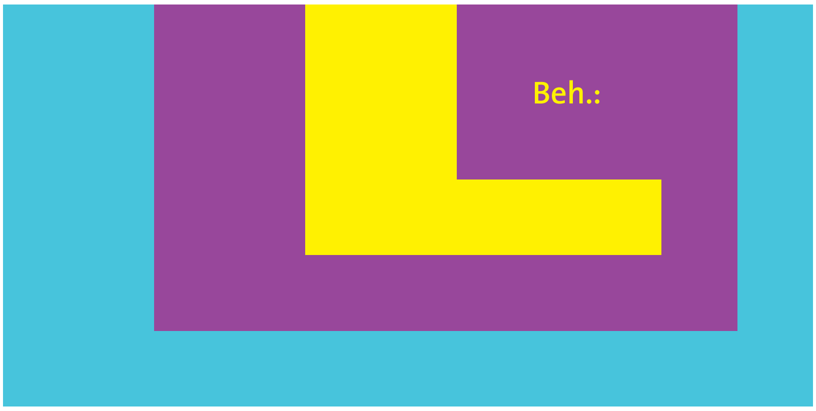
$$\left.\begin{array}{l} x = x_0 + t > 0 \\ x_0 > 0 \end{array}\right\} \to f(x) = e^{\frac{-1}{x_0+t}} = \exp\left(-\frac{1}{x_0 + t}\right)$$

$$= \exp\left(-\underbrace{\frac{1}{x_0}}_{\text{konst. Faktor}} \cdot \underbrace{\frac{1}{1 + \frac{t}{x_0}}}_{\text{geometrische Reihe für} |t| < x_0}\right)$$

$\implies f(x) =$ Potenzreihe in $x - x_0$ für $|x - x_0| < x_0$

Bem.:

Bew.:


Beh.:

Für jeden $n \geq 0$ existiert $f^{(n)}$ und ist

$$f^{(n)} = \begin{cases} \left(\text{Polynom in } \frac{1}{x}\right) \cdot e^{-\frac{1}{x}} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

$n = 0:$ klar

$n \rightharpoonup n + 1$

IA: $f^{(n)}(x) = \begin{cases} P_n\left(\frac{1}{x}\right) \cdot e^{-\frac{1}{x}} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$

zu Zeigen: $f^{(n+1)}(x)$ existiert und ist

$$f^{(n+1)}(x) = \begin{cases} P_{n+1}\left(\frac{1}{x}\right) \cdot e^{-\frac{1}{x}} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

$x < 0:$ klar!

$x > 0:$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(P_n\left(\frac{1}{x}\right) \cdot e^{-\frac{1}{x}}\right)$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(P_n\left(\frac{1}{x}\right)\right) \cdot e^{-\frac{1}{x}}$$

$$+P_n\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(e^{-\frac{1}{x}}\right)$$

$$= P_n'\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{-1}{x^2} \cdot e^{-\frac{1}{x}}$$

$$+P_n\left(\frac{1}{x}\right) \cdot e^{-\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2}$$

$$= \underbrace{\left(P_n\left(\frac{1}{x}\right) - P_n'\left(\frac{1}{x}\right)\right) \cdot \frac{1}{x^2}}_{P_{n+1}\left(\frac{1}{x}\right)} \cdot e^{-\frac{1}{x}} \quad \checkmark$$

Bsp.:

Bem.:

Bew.:

$$x_0 = 0:$$

$$\frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(x)}{x - 0}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{x} \cdot P_n\left(\frac{1}{x}\right) \cdot e^{-\frac{1}{x}} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

$\to 0$ für $x \to 0$

Für $x \to 0-$ ist das klar

Für $x \to 0+$: $\lim\limits_{x \to 0+} \frac{1}{x} \cdot P_n\left(\frac{1}{x}\right) \cdot e^{-\frac{1}{x}}$

$$= \lim_{t \to \infty} t P_n(t) e^{-t} = 0 \quad \checkmark$$

$\implies$ Taylorreihe bei 0

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = 0$$

7.1 Kurvendiskussion

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar.

Beh.:

f monoton wachsend (fallend) $\iff \forall t \in I : f'(t) \geq 0 \quad (\leq 0)$

Bew.:

Für $a < b; a, b \in I$:
MWS: $\exists t \in]a, b[$: $f(b - f(a) = f'(t) \cdot \underbrace{(b - a)}_{>0}$

Daraus folgt "$\Rightarrow$"
Für "$\Leftarrow$"

$$
\begin{aligned}
f'(t) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} \\
h > 0 &\implies f(t+h) - f(t) \geq 0 \\
&\implies \frac{f(t+h) - f(t)}{h} \geq 0 \\
h > 0 &\implies f(t+h) - f(t) \leq 0 \\
&\implies \frac{f(t+h) - f(t)}{h} \geq 0 \\
&\implies \lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} \geq 0 \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

Beh.:

f ist streng monoton wachsend $\iff$ $\forall t \in I : f'(t) \geq 0$ und f' hat auf keinem Teilintervall positiver Länge identisch 0 (und die Nullstellenmenge von f' enthält kein Intervall der Länge > 0)

Bew.:

"$\Rightarrow$"
streng monoton wachsend $\nearrow$ $\Longrightarrow$ monoton $\nearrow$ $\Longrightarrow$ $\forall t : f'(t) \geq 0$.
Wäre $f' = 0$ für $t \in]a, b[; a < b$ dann wäre nach MWS $f(b) - f(a) = \underbrace{f'(t)}_{=0} \cdot (b - a) = 0$

für ein solchen t \`
"$\Leftarrow$"
f ist monoton $\nearrow$
Sei $a, b \in I; a < b$ Falls $f(a) = f(b)$, dann ist $f|_{[a,b]}$ konstant und $f'|_{[a,b]} = 0$ ■

Bsp.:

$\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^3$

Bsp.:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$$
$$f'(x) = \frac{-2}{(1+x^2)^2}$$
$$\operatorname{sgn} f'(x) = \begin{cases} -1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x < 0 \end{cases}$$
$$\max f = 1 \text{ bei } x = 0$$
$$f(x) > 0$$
$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$$

Def.: konvex

f heisst (nach unten) **konvex**, falls $\operatorname{graph}(f)$ auf jedem Teilintervall $[a, b]$ unterhalb der Sekante liegt.
Für alle $a, b \in I; a < b; t \in [a, b]$:

$$\frac{f(b) - f(t)}{b - a} \geq \frac{f(t) - f(a)}{t - a}$$

Def.: konkav

f heisst **konkav** (nach oben konvex), falls $\operatorname{graph}(f)$ auf jedem Teilintervall $[a, b]$ oberhalb der Sekante liegt.

Beh.:

Für f zweimal differenzierbar, f'' stetig sind äquivalent:

- f ist konvex
- f' ist monoton wachsend
- $f'' \geq 0$
- $\operatorname{graph}(f)$ liegt oberhalb jeder Tangente

Bsp.: cont.

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$f'(x) = \frac{-2}{(1+x^2)^2} = -2 \cdot (1+x)^{-2}$$

$$f''(x) = -2(1+x^2)^{-2} - 2x(-2)(1+x^2)^{-3}2x = \frac{6(x^2-\frac{1}{3})}{(1+x^2)^{\frac{1}{3}}}$$

$$\operatorname{sgn} f''(x) = \begin{cases} 1 & |x| > \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & |x| = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -1 & |x| < \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

$$\implies f' \text{ ist streng monoton} \begin{cases} \text{wachsend} & |x| \geq \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \text{fallend} & |x| \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

$$f \begin{cases} \text{konvex} & |x| \geq \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \text{konkav} & |x| \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

Def.: Wendepunkt
Ein Punkt, in dem f von konkav zu konvex wechselt (oder umgekehrt), heisst **Wendepunkt**.

Bsp.:

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto |x|$$

konvex

Beh.:
Sei $f : I \to \mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar. Sei $x_0 \in I, n \geq 2$, mit $f'(x_0) = \dots f^{(n-1)}(x_0) = 0$, und $f^{(n)}(x_0) \neq 0$.
Ist n gerade und $f^{(n)} > 0$, so hat f in x_0 ein lokales Minimum.
Ist n gerade und $f^{(n)} < 0$, so hat f in x_0 ein lokales Maximum.
Ist n ungerade, so hat f in x_0 einen Sattelpunkt.

Wieso::

Taylor:

$$\begin{aligned} f(x) &= j^n_{x_0} f(x) + R_n f(x) \\ &= \left[f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \right] \\ &+ \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \\ &= f(x_0) + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \\ &\cdot \left[1 + \frac{f^{(n+1)}(x_0)(t)}{(n+1) f^{(n)}(x_0)}(x-x_0) \right] \\ &= f(x_0) + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x-x_0)^n [1 + O(x-x_0)] \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ Fallunterscheidung

7.1.1 Einschub: Partialbruchzerlegung

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$$

Ziel: Schreibe

$$\frac{e}{bd} = \frac{a}{b} + \frac{c}{d}$$

Das geht, ween b, d teilerfremd sind.

Polynome teilerfremd = keine gemeinsame Nullstelle

Fakt:

Jede rationale Funktion $\frac{f(x)}{g_1(x)\dots g_r(x)}$ mit $f, g_1, \dots, g_r$ Polynome ; $g_1, \dots, g_r$ paarweisse teilerfremd, lässt sich eindeutig schreiben als

$$h(x) + \frac{k_1(x)}{g_1(x)} + \dots + \frac{k_r(x)}{g_r(x)}$$

für Polynome $h, k_1, \dots k_r$; mit $\mathrm{grad}(k_i) < \mathrm{grad}(g_i)$ und $\mathrm{grad}(h) \leq \mathrm{grad}(f) - \mathrm{grad}(g_1) - \dots - \mathrm{grad}(g_r)$

Bsp.:

$$\frac{x^3}{1-x^2} = \frac{x^3}{(1-x)(1+x)} = c + dx + \frac{a}{1-x} + \frac{b}{1+x}$$

Multipliziere mit Nenner:

$$\begin{aligned} x^3 &= (c+dx)(1-x^2) + a(1+x) + b(1-x) \\ &= (c+a+b) + (d+a-b)x - cx^2 - dx^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\implies d &= -1 \\
c &= 0 \\
b &= -a \\
0 &= -1 + a + a \\
a &= \frac{1}{2} \\
b &= -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

7.1.2 Newton Verfahren

Erinnergung: binäre Suche, Länge des Intervalls nach n Schritten: $2^{-n}\cdot$ (Anfangslänge)
Idee:

$$\begin{aligned}
f'(x_n) &= \frac{f(x_n) - 0}{x_n - x_{n+1}} \\
x_n - x_{n+1} &= \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\
x_{n+1} &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad \text{Rekursionsschritt}
\end{aligned}$$

Probleme:
$f'(x_n) = 0$
$f'(x_n)$ sehr klein
x_{n+1} nicht mehr im Definitionsbereich
$\vdots \implies$ Muss nicht konvergieren!

Beh.:

Falls (x_n) gegen x konvergiert mit $x \in I$ und $f'(x) \neq 0$, dann ist $f(x) = 0$ ($f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar, I Intervall, f' stetig)

Bew.:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Im $\lim_{n\to\infty}$ liefert dies: $x = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$
$\implies f(x) = 0 \quad \blacksquare$

Ab jetzt sei f zweimal differenzierbar und f'' stetig

Beh.:

Sei $[a, b] \subset I$ mit $f(a) < 0 f(b)$ und f' und $f'' > 0$ auf $[a, b]$. Dann konvergiert das Newton-Verfahren mit den Startwert $x_0 = b$ gegen eine Nullstelle in $]a, b[$.

Bew.:

Sei $\xi \in]a, b[$ mit $f(\xi) = 0$

$$x_0 > x_1 > x_2 > \ldots > \xi$$

$\implies$ konvergiert und $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ ist Nullstelle. ■

- $f' < 0$ und $f'' < 0$, $(f(a) > 0 > f(b))$
  $\rightsquigarrow$ Anwenden auf $-f(x), x_0 = b$
- $f' < 0$ und $f'' > 0$, $(f(a) > 0 > f(b))$
  $\rightsquigarrow$ Anwenden auf $f(-x), x_0 = a$
- $f' > 0$ und $f'' < 0$
  $\rightsquigarrow$ Anwenden auf $-f(-x), x_0 = a$

Def.: Quadratische Konvergenz

Eine Folge (x_n) konvergiert quadratisch gegen ξ wenn sie gegen ξ konvergiert und

$$\exists n_0 \exists C \forall n \geq n_0 : |x_{n+1} - \xi| \leq C \cdot |x_n - \xi|^2$$

Beh.:

Falls (x_n) gegen ξ konvergiert und $f'(\xi) \neq 0$ ist, dann ist die konvergenz quadratisch.

Bew.:

Nach Konstruktion ist

$$
\begin{aligned}
&0 = f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) \\
&0 = f(\xi) \\
&\quad = f(x_n) + f'(x_n) \cdot (\xi - x_n) + \frac{f''(t)}{2}(\xi - x_n)^2 \\
&x_n < t < n
\end{aligned}
$$

Differenz:

$$
\begin{aligned}
0 &= \underbrace{f'(x_n)}_{\neq o \forall n \geq n_0} (\xi - x_{n+1}) + \frac{f''(t)}{2}(\xi - x_n)^2 \\
\xi - x_{n+1} &= -\frac{f''(t)}{2f'(x_n)}(\xi - x)^2 \\
|\xi - x_{n+1}| &= \left|\frac{f''(t)}{2f'(x_n)}\right| \cdot |(\xi - x)|^2
\end{aligned}
$$

Wähle n_0 so, dass $\forall n \geq n_0$

$$
\begin{aligned}
&|f'(x_n)| \geq \frac{1}{2}\,|f'(\xi)| \\
&\exists [a,b] \subset I: \text{ alle } x_n, \xi \in [a,b] \\
&\implies t \in [a,b] \quad n \geq n_0
\end{aligned}
$$

und $M = \max \left| f''|_{[a,b]} \right|$ existiert

$$
\implies |\xi - x_{n+1}| \leq \underbrace{\frac{M}{2\frac{1}{2}\,|f'(\xi)|}}_{=:C} \cdot |\xi - x_n|^2 \qquad \blacksquare
$$

Bsp.:

Finde $\sqrt{a}, a > 0 \iff$
Finde Nullstellen von $f(x) = x^2 - a$ auf $[0, \infty[$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 2x \\
x_{n+1} &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\
&= x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n} \\
&= x_n - \frac{x_n}{2} + \frac{a}{2x_n} \\
&= \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)
\end{aligned}$$

Kapitel 8

Integral

8.0.3 Inhalt einer Teilmenge von $\mathbb{R}^n$

#I#I\GenericWarning (hyperref) Package hyperref Warning: Token not allowed in a PDF string (Unicode):removing `math shift'#I#I\GenericWarning (hyperref) Package hyperref Warning: Token not allowed in a PDF string (Unicode):removing `math shift'#I#I\GenericWarning (hyperref) Package hyperref Warning: Token not allowed in a PDF string (Unicode):removing `\<def>-command'#I#I\GenericWarning (hyperref) Package hyperref Warning: Token not allowed in a PDF string (Unicode):removing `\sl@PackageName'#I#I\Generic (hyperref) Package hyperref Warning: Token not allowed in a PDF string (Unicode):removing `\sl@UnexpandedMessage'#I#I\GenericWarning (hyperref) Package hyperref Warning: Token not allowed in a PDF string (Unicode):removing `\<let>-command'#I#I\GenericWarning (hyperref) Package hyperref Warning: Token not allowed in a PDF string (Unicode):removing `\string'#I#I\GenericWarning (hyperref) Package hyperref Warning: Token not allowed in a PDF string (Unicode):removing `\<def>-command'#I#I\GenericWarning (hyperref) Package hyperref Warning: Token not allowed in a PDF string (Unicode):removing `\sl@Tempa'#I#I\GenericWarning (hyperref) Package hyperref Warning: Token not allowed in a PDF string (Unicode):removing `\global'#I#I\GenericWarning (hyperref) Package hyperref Warning: Token not allowed in a PDF string (Unicode):removing `\sl@Message'#I#I\GenericWarning (hyperref) Package hyperref Warning: Token not allowed in a PDF string (Unicode):removing `math shift'#I#I\GenericWarning (hyperref) Package hyperref Warning: Token not allowed in a PDF string (Unicode):removing `math shift'

$n = 1$:	Länge	$b - a$
$n = 2$:	Flächeninhalt	$a \cdot b$
$n = 3$:	Volumen	$a \cdot b \cdot c$

Bem.:
Nicht jede Teilmenge hat einen Inhalt

Sei f eine Funktion auf $[a,b]$.
Eine **Zerlegung** $\mathcal{Z}$ von $[a,b]$ besteht aus endlich vielen Zwischenpunkten

$$a = b_0 < b_1 < \ldots < b_r = b$$

sowie "Stützpunkten"

$$x_i \in [b_{i-1}, b_i] \quad \text{für alle } 1 \leq i \leq r$$

Die **Feinheit** von $\mathcal{Z}$ ist $\delta(\mathcal{Z}) := \max\{b_i - b_{i-1} \mid 1 \leq i \leq r\}$ Die zugehörige Riemann-Summe:

$$S_f(\mathcal{Z} := \sum_{i=1}^{r} f(x_i) \cdot (b_i - b_i - 1)$$

Bem.:
ist $f \geq 0$, so ist dies der Flächeninhalt der Treppenfläche

Def.: Riemann-Integral
Wenn $\lim_{\delta(\mathcal{Z}) \to 0} S_f(\mathcal{Z})$ existiert, so heisst f **Riemann-integrierbar**, und der Grenzwert heisst das **Riemann-**

Intergal

$$\int_a^b f(x)dx$$

D.h.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta \forall \mathcal{Z} \text{ Zerlegung } : \delta(\mathcal{Z}) < \delta \implies \left| S_f(\mathcal{Z}) - \int_a^b f(x)dx \right| < \varepsilon$$

Satz:
Jede stetige Funktion ist Riemann-integrierbar

Fakt:
Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ stetig, so ist $\int_a^b f(x)dx$ der Flächeninhalt der von $\mathrm{graph}(f); y = 0; x = a; x = b$ begrenzten Fläche.

8.0.4 Grundeigenschaften

- Falls $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$ vektorwertig, so ist f integrierbar g.d., w. jedes f_i integrierbar ist, und dann gilt

$$\int_a^b f(x)dx = \left(\int_a^b f_i(x)dx \right)_{i=1,\dots,n}$$

- Speziell: $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ ist integrierbar g.d., w. $\Re(f)$ und $\Im(f)$ integrierbar sind, und dann ist

$$\Re\left(\int_a^b f(x)dx\right) = \int_a^b \Re(f(x))dx$$
$$\Im\left(\int_a^b f(x)dx\right) = \int_a^b \Im(f(x))dx$$

- f, g integrierbar $\implies$ $f+g$ integrierbar, und

$$\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

Bew.:

$$S_{f+g}(\mathcal{Z}) \overset{\text{def.}}{=} \sum_{i=1}^{r} [f(x_i)+g(x_i)] \cdot (b_i - b_i - 1)$$
$$\sum_{i=1}^{r} f(x_i) \cdot (b_i - b_i - 1) + \sum_{i=1}^{r} g(x_i) \cdot (b_i - b_i - 1)$$
$$\overset{\text{def.}}{=} S_f(\mathcal{Z}) + S_g(\mathcal{Z})$$

Für $\varepsilon > 0$ sei $\delta > 0$ sodass

$$\forall \mathcal{Z} : \delta(\mathcal{Z}) < \delta \implies \left|S_f(\mathcal{Z}) - \int_a^b f(x)dx\right| < \varepsilon$$
$$\text{und } \left|S_g(\mathcal{Z}) - \int_a^b g(x)dx\right| < \varepsilon$$
$$\implies \left|S_{f+g}(\mathcal{Z}) - \left[\int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx\right]\right| \leq$$
$$\left|S_f(\mathcal{Z}) - \int_a^b f(x)dx\right| + \left|S_g(\mathcal{Z}) - \int_a^b g(x)dx\right| < \varepsilon + \varepsilon < 2\varepsilon$$
$$\implies \lim_{\delta(\mathcal{Z}) \to 0} S_{f+g} = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \quad \blacksquare$$

Grundeigenschaften des Integrals

- falls die rechte Seite existiert, existiert auch die linke Seite

  (a)
  $$\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

  (b)
  $$\int_a^b \lambda \cdot f(x)dx = \lambda \cdot \int_a^b f(x)dx$$

- falls beide Seiten existieren

  (c)
  $$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx$$

  (d)
  $$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx \text{ falls } f \leq g \text{ auf } [a,b]$$

Bem.: zu (c)
Integral zählt Flächteile oberhalb der x-Achse positive, unterhalb der x-Achse negativ.

Bem.: zu (d)

$$\int_a^b [g(x) - f(x)]dx$$

Flächeninhalt des von $\mathrm{graph}(f), \mathrm{graph}(g), x = a, x = b$ umgrenzten Bereichs.

(e)

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

falls $a \leq c \leq b$

Bem.:

$$\int_a^b f(x)dx = 0$$

ist definiert!

Bsp.1:

$f(x) = c$ konstant
$\mathcal{Z}$ Zerlegung: $a = b_0 < b_1 < \ldots < b_r = b; x_i \in [b_{i-1}, b_i]$

$$\begin{aligned}
\rightsquigarrow S_{\mathcal{Z}}(f) &\overset{\text{def.}}{=} \sum_{i=1}^{r} \underbrace{f(x_i)}_{=c}(b_i - b_{i-1}) \\
&= c \cdot \sum_{i=1}^{r}(b_i - b_{i-1}) \\
&= c \cdot (b_r - b_0) = c(b - a)
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \int_a^b c dx = c(b-a)$$

Bsp.2:

$f(x) = \frac{c}{b} \cdot x$
Für $r \geq 1$ wähle $b_i := \frac{ib}{r}, x_i = b_i$ für die Zerlegung $\mathcal{Z}_r$

$$S_{\mathcal{Z}_r}(f) = \sum_{i=1}^{r} \left(\frac{c}{b} \cdot \frac{ib}{r}\right) \cdot \underbrace{\left(\frac{ib}{r} - \frac{(i-1)b}{r}\right)}_{=\frac{b}{r}}$$

$$= \frac{c}{b} \cdot \frac{b}{r} \cdot \frac{b}{r} \cdot \sum_{i=1}^{r} i$$

$$= \frac{cb}{r^2} \cdot \frac{r(r+1)}{2}$$

$$= \frac{cb}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{r}\right) \to \frac{cb}{2} \text{ für } r \to \infty$$

Folge:

$$\int_0^b \left(\frac{c}{b} x\right) dx = \frac{cb}{2}$$

= Fläche eines rechtwinkligen Dreiecks mit Katheten b, c

Bsp.3:

$f(x) = \frac{1}{x}$ auf $[1, b]$

Für $r \geq 1$ sei $\mathcal{Z}_r$ die Zerlegung mit $b_i = b^{\frac{i}{r}}$ und $x_i = b_{i-1}$

$$\begin{aligned}
\delta(\mathcal{Z}_r) &= \max\{b^{\frac{i}{r}} - b^{\frac{i-1}{r}} \mid 1 \leq i \leq r\} \\
&= \max\{b^{\frac{i}{r}} \cdot (1 - b^{\frac{-1}{r}}) \mid 1 \leq i \leq r\} \\
&= b \cdot (1 - b^{\frac{-1}{r}}) \to 0 \text{ für } r \to \infty
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{\mathcal{Z}_r}(f) &= \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{b^{\frac{i-1}{r}}} \cdot (b^{\frac{i}{r}} - b^{\frac{i-1}{r}}) \\
&= \sum_{i=1}^{r} (b^{\frac{1}{r}} - 1) \\
&= r(b^{\frac{1}{r}} - 1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{r\to\infty} r(b^{\frac{1}{r}} - 1) = \lim_{x\to 0+} \frac{b^x - 1}{x} \\
&\overset{\text{BH}}{=} \lim_{x\to 0+} \frac{(\log b) \cdot b^x}{1} \\
&= \log b
\end{aligned}$$

Antwort:

$$\int_1^b \frac{1}{x} dx = \log b \text{ für alle } b \geq 1$$

Bem.:

Für $a > b$ sei

$$\int_a^b f(x)dx := -\int_b^a f(x)dx$$

und f auf $[b, a]$

Dann gilt (e) für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$, sofern alle Integrale definiert sind.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Bem.:
Jede stückweise stetige Funktion ist Riemann-integrierbar, dh.

$$\exists \text{ Zerlegung } [a, b] = [a_0, a_1] \cup [a_2, a_i] \cup \ldots \cup [a_{n-1}, a_n] \text{ sodass } f|_{]a_{i-1}, a_i[}$$

die Einschränkung einen stetigen Funktion auf $[a_{i-1}, a_i]$ ist, für alle i. Dann ist

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^n \int_{a_{i-1}}^{a_i} f(x)dx$$

Fakt:
Falls für alle bis auf endlich viele $x \in [a, b]$ gibt $f(x) = g(x)$, und $\int_a^b g(x)dx$ existiert, so existiert $\int_a^b f(x)dx$ und sie sind gleich.

Hauptsatz der Infinitesimalrechnung

Satz: Hauptsatz der Infinitesimalrechnung (Version A)
Sei f auf $[a, b]$ stetig. Dann ist

$$[a, b] \ni t \mapsto F(x) := \int_a^t f(x)dx$$

differenzierbar mit Ableitung $F' = f$.
Begründung:
Für t fest sei $t' > t; t, t' \in [a, b]$

$$\implies F(t') - F(t) = \int_t^{t'} f(x)dx$$

Erinnerrung:
f stetig in t heisst

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in [a, b] : |x - t| < \delta \implies |f(x) - f(t)| < \varepsilon$$

$$\begin{aligned}
\underbrace{|F(t') - [F(t) + (t' - t) \cdot f(t)]|}_{\overset{\text{soll}}{=} o(t'-t)} &= \left| \int_t^{t'} f(x)dx - \int_t^{t'} f(t)dx \right| \\
&= \left| \int_t^{t'} [f(x) - f(t)]dx \right| \\
&\leq \int_t^{t'} \underbrace{|f(x) - f(t)|}_{\substack{<\varepsilon \\ \text{falls } |t'-t|<\varepsilon}} dx \\
&\leq \int_t^{t'} \varepsilon dx \\
&= (t' - t) \cdot \varepsilon
\end{aligned}$$

$\frac{\text{linke Seite}}{t' - t} \leq \varepsilon$ falls $|t' - t| < \delta$

dh. $\lim\limits_{t' \to t+} \frac{\text{linke Seite}}{t' - t} = 0 \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \delta$

Def.: Stammfunktion

Sei f eine auf einem Intervall I definierte Funktion. Dann heisst jede auf I definierte differenzierbare Funktion F mit $F' = f$ eine **Stammfunktion** von f.

Bem.:

Mit F ist auch $F + c$ eine Stammfunktion von f für jede Konstante c;
und jede weitere Stammfunktion von f hat diese Gestalt.

Satz: Hauptsatz der Infinitesimalrechnung (Version B)

Sei f auf $[a, b]$ stetig und F eine Stammfunktion von f. Dann gilt:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Bew.:

Mit $F_0(t) := \int_a^t f(x)dx$ gilt
$F = F_0 + c$ für c konstant. Dann ist $F_0(a) = \int_a^a f(x)dx = 0$
$\implies \int_a^b f(x)dx = F_0(b) - F_0(a) = F(b) - F(a)$ ■

Prinzip zur Berechnung von Integralen:

(a) Errate eine Stammfunktion F

(b) Werte aus $F(b) - F(a) =: F(x)|_{x=a}^{x=b}$

Bsp.4:

$$\int_a^b x^s dx = \begin{cases} & s \in \mathbb{R}, 0 < a < b \\ & s \in \mathbb{Z}^{<0}, a < b < 0 \\ & s \in \mathbb{Z}^{\geq 0}, a < b \end{cases}$$

Für $s \neq -1$ ist $\frac{x^{s+1}}{s+1}$ eine Stammfunktion von x^s

$$\Longrightarrow \int_a^b s^s dx = \frac{x^{s+1}}{s+1}\Big|_{x=a}^{x=b} = \frac{b^{s+1} - a^{s+1}}{s+1}$$

Für $s = -1$ ist $\log|x|$ eine Stammfunktion

$$\Longrightarrow \int_a^b \frac{1}{x} dx = \log|x| \,|_a^b = \log|b| - \log|a|$$

Bsp.:

$$\int_a^b \frac{1}{x^2+1} dx = \arctan x|_a^b = \arctan b - \arctan a$$

8.1 Integrationstechniken

Bezeichnung: $\int f(x)dx$ steht für irgendeine Stammfunktion von f. "unbestimmtes Integral"

Bem.:

$$\underbrace{\int_a^b f(x)dx}_{\text{bestimmtes Integral}} = \left[\int f(x)dx\right]\Big|_a^b$$

Bem.: Konvention

$\int f(x)dx =$ Formel + Konstante

Partielle Integration

Produktregel: $(fg)' = fg' + f'g$
dh. fg ist Stammfunktion von $f'g + f'g$

$$\int (fg' + f'g)dx = fg + c$$
$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

Das funktioniert gut, wenn f' einfacher ist als f und g nicht komplizierter als g'

$$\int \underbrace{x}_{\downarrow} \underbrace{e^x}_{\uparrow} dx = xe^x - \int 1 e^x dx = xe^x - e^x + c$$

$$\begin{array}{ll} f(x) = x & f'(x) = 1 \\ g'(x) = e^x & g(x) = e^x \end{array}$$

Bsp.:

$$n \in \mathbb{Z}^{\geq 0}, \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

$$I_n := \int \underbrace{t^n}_{\downarrow} \underbrace{e^{\lambda t}}_{\uparrow} dt = t^n \frac{e^{\lambda t}}{\lambda} - \int n t^{n-1} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda} = \frac{t^n e^{\lambda t}}{\lambda} - \frac{n}{\lambda} I_{n-1}$$

Induktion $\rightsquigarrow$

$$I_n = (-1)^n \frac{n!}{\lambda^{n+1}} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-\lambda t)^k}{k!} \right) e^{\lambda t}$$

Bsp.:

$$\begin{aligned} \int \log t dt &= \int \underbrace{(\log t)}_{\downarrow} \cdot \underbrace{1}_{\uparrow} \\ &= (\log t) t - \int \underbrace{\frac{1}{t} t}_{=1} \, dt \\ &= (\log t) t - t + c \end{aligned}$$

Bsp.:

$$\begin{aligned}\int (\log t)^2 dt &= \int (\log t)^2 \cdot 1 dt \\ &= (\log t)t - \int 2(\log t)\frac{1}{t} t dt \\ &= (\log t)^2 t - 2\int \log t dt \\ &= (\log t)^2 t - 2(\log t)t + 2t + c\end{aligned}$$

Bsp.:

$$\begin{aligned} I &= \int \underbrace{e^{\alpha t}}_{\uparrow} \underbrace{\cos \beta t}_{\downarrow}\, dt \\ &= \frac{e^{\alpha t}}{\alpha}\cos\beta t - \int \frac{e^{\alpha t}}{\alpha}(-\beta \sin \beta t) dt \\ &= \frac{e^{\alpha t}}{\alpha}\cos\beta t + \frac{\beta}{\alpha}\int \underbrace{e^{\alpha t}}_{\uparrow} \underbrace{\sin\beta t}_{\downarrow}\, dt \\ &= \frac{e^{\alpha t}}{\alpha}\cos\beta t + \frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{e^{\alpha t}}{\alpha}\sin\beta t - \int \frac{e^{\alpha t}}{\alpha}\beta\cos\beta t dt\right) \\ &= \frac{e^{\alpha t}}{\alpha}\cos\beta t + \frac{\beta e^{\alpha t}}{\alpha^2}\sin\beta t - \frac{\beta^2}{\alpha^2}\underbrace{\int e^{\alpha t}\cos\beta t dt}_{=I}\end{aligned}$$

$$\left(1+\frac{\alpha^2}{\beta^2}\right) I = \frac{e^{\alpha t}}{\alpha}\cos\beta t + \frac{\beta e^{\alpha t}}{\alpha^2}\sin\beta t + c$$

$$I = \int e^{\alpha t}\cos\beta t dt = \frac{\alpha^2}{\alpha^2+\beta^2}\left(\frac{e^{\alpha t}}{\alpha}\cos\beta t + \frac{\beta e^{\alpha t}}{\alpha^2}\sin\beta t + c\right)$$

$$\begin{aligned}\int e^{\alpha t}\cos\beta t dt &= \int e^{\alpha t}\cdot\frac{e^{\imath\beta t}+e^{-\imath\beta t}}{2}dt \\ &= \int \frac{e^{(\alpha+\imath\beta)t}+e^{(\alpha-\imath\beta)t}}{2}dt \\ &= \frac{\frac{e^{(\alpha+\imath\beta)t}}{\alpha+\imath\beta}+\frac{e^{(\alpha-\imath\beta)t}}{\alpha-\imath\beta}}{2}+c \\ &= \frac{e^{\alpha t}}{\alpha^2+\beta^2}(\alpha\cos\beta t+\beta\sin\beta t)+c\end{aligned}$$

Substitution

Sei $f' = f$: Kettenregel: $(F(\varphi(y)))' = F'(\varphi(y))\cdot\varphi'(y) = f(\varphi(y))\cdot\varphi'(y)$
$y \mapsto F(\varphi(y))$ ist Stammfunktion von $y \mapsto f(\varphi(y))\cdot\varphi'(y)$

$$\int f(\varphi(y))\cdot\varphi'(y)dy = \left(\int f(x)dx\right)\Big|_{x=\varphi(y)}$$

Anwendung in wei Richtungen:
1. Fall; Integrand hat die Form $f(\varphi(y))\cdot\varphi'(y)$

Bsp.:

$$\int \sin^3 y\cdot cosy dy = \left|\begin{matrix} x=\sin y \\ \frac{dx}{dy}=cosy\end{matrix}\right| = \int x^3dx = \frac{x^4}{4}+c = \frac{\sin^4 y}{4}+c$$

Bem.:

$$\begin{aligned} x &= \varphi(y) \\ \frac{dx}{dy} &= \varphi'(y) \\ \implies dx &= \varphi'(y)dy \\ \implies dx &= \frac{dx}{dy} \cdot dy \end{aligned}$$

Bsp.:

$$\begin{aligned} \int \tan t dt &= \int \frac{\sin t}{\cos t} dt \\ &= -\int \frac{1}{\cos t}(-\sin t)dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u &= \cos t \\ \frac{du}{dt} &= -\sin t \\ du &= -\sin t dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= -\int \frac{1}{u} du \\ &= -\log|u| + c \\ &= -\log|\cos t| + c \end{aligned}$$

2. Fall:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{x}{\sqrt{2x-3}}dx &= \left| \begin{array}{c} y = \sqrt{2x-3} \\ y^2 = 2x-3 \\ x = \frac{y^2+3}{2} \\ \frac{dx}{dy} = y \\ dx = y \cdot dy \end{array} \right| \\
&= \int \frac{\frac{y^2+3}{2}}{y} \cdot y dy \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}y^3 + 3y\right) + c \\
&= \frac{y}{6}(y^2+9) + c \\
&= \frac{\sqrt{2x-3}}{6}(2x+6) + c
\end{aligned}
$$

Bsp.:

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left| \begin{array}{c} x = \sin t \\ dx = \cos t dt \\ 1 - x^2 = \cos^2 t \\ t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\end{array} \right|$$

$$= \int \frac{\sin^2 t}{\cos t} \cdot \cos t dt$$

$$= \sin^2 t dt$$

$$\cos 2t = 1 - 2\sin^2 t$$

$$\sin^2 t = \frac{1 - \cos 2t}{2}$$

$$= \int \frac{1 - \cos 2t}{d} t$$

$$= \frac{t}{2} - \frac{1}{2} \frac{\sin 2t}{2} + c$$

$$= \frac{t}{2} - \frac{1}{2} \sin t \cos t + c$$

$$= \frac{\arcsin x}{2} - \frac{x}{2}\sqrt{1 - x^2} + c$$

Bsp.:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}} &= \left| \begin{matrix} y = e^x \\ dz = e^x dx = y dx \\ dx = \frac{1}{y} dy \end{matrix} \right| \\
&= \int \frac{dy}{y \cdot \sqrt{1+y}} \\
&= \left| \begin{matrix} u = \sqrt{1+y} \\ y = u^2 - 1 \\ dy = 2udu \end{matrix} \right| \\
&= \int \frac{2udu}{(u^2-1)u} \\
&= \int \frac{2}{u^2-1} du \\
&= \int \left(\frac{-1}{u+1} + \frac{1}{u-1} \right) du \\
&= -\log|u+1| + \log|u-1| + c \\
&= \log \left| \frac{u-1}{u+1} \right| + c \\
&= \log \left| \frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1} \right| + c
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\int \frac{dx}{\sqrt{(b-x)(x-a)}} \quad , x \in]a,b[\\
&(b-x)(x-a) = -x^2 + (a+b)x - ab\\
&\qquad\qquad\qquad\quad = -\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - ab\\
&\qquad\qquad\qquad\quad = \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2\\
&\qquad\qquad\qquad\quad = \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 \left(1 - \left(\frac{2x-a-b}{b-a}\right)^2\right)\\
&y = \frac{2x-a-b}{b-a}\\
&dy = \frac{2dx}{b-a}\\
&dx = \frac{b-a}{2}dy
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{(b-x)(x-a)}} &= \int \frac{\frac{b-a}{2}dy}{\frac{b-a}{2}\sqrt{1-y^2}}\\
&= \int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}\\
&= \arcsin y + c\\
&= \arcsin \frac{2x-a-b}{b-a} + c
\end{aligned}
$$

Vereinfachung von $\sqrt{ax^2+bx+c}$ kann führen zu:

- $$\sqrt{1-y^2} : \begin{cases} y = \sin x \\ y = \cos x \end{cases}$$
- $$\sqrt{1+y^2} : y = \sinh x$$

- $$\sqrt{y^2-1} : y = \cosh x$$

Integration von rationalen Funktionen

Bsp.:

$$\int \frac{1-x^6}{x(x^2+1)^2}dx$$

Ansatz: $\dfrac{1-x^6}{x(x^2+1)^2} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b+cx+dx^2+e^3}{(x^2+1)^2} + f + gx$

$$\begin{aligned}
1-x^6 &= a(x^2+1)^2 && +(b+cx+dx^2+e^3)x \\
&&& +(f+gx)x(x^2+1)^2 \\
&= a(x^4+2x^2+1) && +(bx+cx^2+dx^3+e^4)x \\
&&& +f(x^5+2x^3+x) \\
&&& +g(x^6+2x^4+x^2)
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{aligned}
&g=-1 \\
&f=0 \qquad b+f=0 \\
&a=1 \qquad a+e+2g=0 \\
&b=0 \\
&e=1 \\
&c=-1 \\
&d=0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ldots &= \int \left(\frac{1}{x} + \frac{x^3-x}{(x^2+1)^2} - x\right) dx \\
&= \log|x| - \frac{x^2}{2} + \int \frac{x^3-x}{(x^2+1)^2}dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^3-x}{(x^2+1)^2}dx &= \left| \begin{array}{c} y = x^2+1 \\ dy = 2xdx \\ x^3-x = x(x^2-1) = \frac{2x}{2}(y-2) \end{array} \right| \\
&= \int \frac{\frac{y-2}{2}}{y^2}dy \\
&= \int \left(\frac{1}{2y} - \frac{1}{y^2}\right) dy \\
&= \frac{1}{2}\log|y| + \frac{1}{y} + c \\
&= \frac{1}{2}\log(x^2+1) + \frac{1}{x^2+1} + c
\end{aligned}$$

Gesamtresultat

$$\log|x| - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\log(x^2+1) + \frac{1}{x^2+1} + c$$

Bsp.:

$$\int \frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}dx$$

$$\frac{x^2-1}{(x^2+1)^2} = \frac{ax^2}{(x^2+1)^2} + \frac{b}{(x^2+1)}$$

$$x^2-1 = ax^2 + b(x^2+1)$$

$$b=-1$$

$$1 = a+b \implies a=2$$

$$\int \frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}dx = \frac{2x^2dx}{(x^2+1)^2} - \underbrace{\int \frac{dx}{x^2+1}}_{=\arctan x + c}$$

$$\int \underbrace{\frac{2x}{(x^2+1)^2}}_{\uparrow} \underbrace{x}_{\downarrow} dx \qquad \left(\frac{1}{x^2+1}\right)' = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{-1}{x^2+1}x - \int \frac{-1}{x^2+1}\cdot 1dx$$

$$= \frac{-x}{x^2+1} + \arctan x + c$$

$$\int \frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}dx = \frac{-x}{x^2+1} + c$$

Methode:

(1) Faktorisiere Nenner

(2) Partialbruchzerlegung

(3) $\int \frac{\text{Polynom}}{(x-a)^n} dx \rightsquigarrow$ Substituiere $y = x - a \rightsquigarrow \int \frac{\text{Polynom}(y)}{y^n} dy$ bekannt.

(4) $\int \frac{\text{Polynom}}{quad(x)^n} dx \rightsquigarrow$ Substituiere $y = ax + b$ sodass Nenner $(y^2+1)^n$ wird

(5) $\int \frac{(\text{Polynom in } y^2)\cdot y}{(y^2+1)^n} dy \rightsquigarrow$ Substituiere $y^2 + 1 = z$

(6) $\int \frac{\text{Polynom}_{iny^2}}{(y^2+1)^n} dy$
$n = 1$: $\arctan y$
$n > 1$: $\int \frac{dy}{(y^2+1)^n} = \frac{2n-3}{2n-2} \int \frac{dy}{(y^2+1)^{n-1}} + \frac{1}{2n-2} \cdot \frac{y}{(y^2+1)^{n-1}}$

8.1.1 Uneigentliche Integrale

Bisher:	Integral einer Funktion auf	$[a, b]$
Jetzt:	" - "	$[a, b[$
	" - "	$]a, b]$
	" - "	$]a, b[$

$$\int_a^b = \int_a^c + \int_c^b \quad \text{für } a < c < b$$

Def.: uneigentlischer Grenzwert

Sei f auf $[a, b[$ definiert, so dass für jedes $c \in [a, b[$ $\int_a^c f(x)dx$ existiert. Dann heisst

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{c \to b-} \int_a^c f(x)dx$$

das **uneigentliche Integral** von f über $[a, b[$, falls der limes existiert. Falls nicht, sagt man, dass das uneigentliche Interval divergiert.

Bem.:

Dies gilt wenn f stetig ist. Denn dann ist $f|_{[a,c]}$ stetig.

Analog: f auf $]a,b]$ definiert, $f|_{[c,b]}$ integrierbar für alle $a < c < b$

$$\rightsquigarrow \int_a^b f(x)dx := \lim_{c\to a+} \int_c^b f(x)dx$$

Analog: f auf $]a,b[$ definiert, $f|_{[c,d]}$ integrierbar für alle $a < c < d < b$

$$\rightsquigarrow \int_a^b f(x)dx := \lim_{c\to a+} \lim_{d\to b-} \int_c^d f(x)dx$$

Bsp.1:

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x^s} \quad a > 0 \quad x \mapsto \frac{1}{x^s} \text{ stetig auf } [a,\infty[$$

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x^s} \overset{\text{def.}}{=} \lim_{b\to\infty} \int_a^b \frac{dx}{x^s}$$

$$= \begin{cases} \lim_{b\to\infty} \left(\frac{x^{1-s}}{1-s}\Big|_a^b \right) = \lim_{b\to\infty} \left(\frac{b^{1-s}-a^{1-s}}{1-s} \right) = \begin{cases} \frac{a^{1-s}}{s-1} & s > 1 \\ \infty & s < 1 \end{cases} & s \neq 1 \\ \lim_{b\to\infty}(\log x|_a^b) = \lim_{b\to\infty}(\log b - \log a) = \infty & s = 1 \end{cases}$$

Anwendung 1: Ist f auf $[a,\infty[$ stetig, und $|f(x)| \leq \frac{c}{x^s}$ mit konstanten $s > 1$ und c, dann konvergiert $\int_a^\infty f(x)dx$

Anwendung 2: Ist f auf $[a,\infty[$ stetig und $f(x) \geq \frac{c}{x^s}$ mit konstanten $s \leq 1$

und $c > 0$, dann divergiert $\int_a^\infty f(x)dx$ gegen ∞

Majorantenkriterium

f auf $[, a\infty[$ definiert auf jedem $[a, b]$ integrierbar, und $|f(x)| \leq \frac{c}{x^s}$ mit Konstanten c und $s > 1 \implies \int_a^i nftyf(x)dx$ existiert.

Minorantenkriterium

f auf $[, a\infty[$ definiert auf jedem $[a, b]$ integrierbar, und $f(x) \geq \frac{c}{x^s}$ mit Konstanten $c > 0$ und $s \leq 1 \implies \int_a^i nftyf(x)dx$ divergiert gegen ∞.

Bsp.:

$$\int_0^\infty \frac{t^2+4}{(1+4t^2)^{\frac{3}{2}}} \,\mathrm{d}t$$

Nur Problem bei ∞

$$\frac{t^2+4}{(1+4t^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{t^2(1+\frac{4}{t^2})}{t^3(\frac{1}{t^2}+4)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{t}\frac{1+\frac{4}{t^2}}{(\frac{1}{t^2}+4)^{\frac{3}{2}}} \to \frac{1}{8} \text{ für } t \to \infty \implies = \infty$$

Bsp.:

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x(\log x)^s} \qquad s > 0$$

$$= \int_{\log 2}^\infty \frac{dy}{y^s} \begin{cases} \text{konvergent} & s > 1 \\ \text{divergent} & s \leq 1 \end{cases}$$

Bsp.:

$$\int_{10}^{\infty} \frac{dx}{x \cdot \log x \cdot \log\log x} \text{ divergent}$$

Bsp.:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} &= \lim_{a\to-\infty} \lim_{b\to\infty} \arctan t\big|_a^b \\
&= \lim_{a\to-\infty} \lim_{b\to\infty} (\arctan b - \arctan a) \\
&= \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) \\
&= \pi \\
&= \lim_{b\to\infty} \int_{-b}^{b} \frac{dt}{1+t^2}
\end{aligned}$$

Bsp.:

Vorsicht!

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

Kein Problem bei 0, da stetige Fortsetzung =1

$$\int_1^t \underbrace{\sin x}_{\uparrow} \underbrace{\frac{1}{x}}_{\downarrow} dx = \underbrace{-\cos x \cdot \frac{1}{x}\Big|_1^t}_{\frac{\cos 1}{1} - \frac{\cos t}{t}} - \underbrace{-\int_1^t \cos x \cdot \frac{-1}{x^2} dx}_{\substack{\text{konvergiert für} \\ t\to\infty \\ \text{nach Majorantenkriterium!}}} = \text{ konvergiert für } t \to \infty$$

$$\int_0^t = \int_0^1 + \int_1^t \implies \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx \text{ konvergiert}$$

Analog für $\int_{-\infty}^{\cdot} \ldots$

Bsp.:

$$a < b$$

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^s} = \lim_{c\to a+} \int_c^b \frac{dx}{(x-a)^s}$$

$$s < 1 \implies \lim_{c\to a+} \frac{(x-a)^{1-s}}{1-s}\Big|_c^b = \lim_{c\to a+} \frac{(b-a)^{1-s} - (c-a)^{1-s}}{1-s} \text{ konvergiert}$$

$s > 1$ divergiert

$$s = 1: \lim_{c\to a+} \log(x-a)|_c^b = \lim_{c\to a+} [\log(b-a) - \log(c-a)] \text{ divergiert}$$

Majorantenkriterium

f auf $]a,b]$ definiert, auf jedem $[c,b]$ integrierbar, und $|f(x)| \leq \frac{c}{(x-a)^s}$ für Konstanten c und $s < 1$. Dann konvergiert $\int_a^b f(x)dx$

Minorantenkriterium

f auf $]a,b]$ definiert, auf jedem $[c,b]$ integrierbar, und $|f(x)| \geq \frac{c}{(x-a)^s}$ für Konstanten $c > 0$ und $s \geq 1$. Dann divergiert $\int_a^b f(x)dx$

Bsp.:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{\tan x}}$$

Kein Problem bei $\frac{\pi}{2}$, stetig fortsezbar = 0

$$\text{bei } 0: \frac{1}{\sqrt{\tan x}} = \frac{1}{\sqrt{x \frac{\sin x}{x} \frac{1}{\cos x}}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} \sqrt{\frac{\cos x}{\frac{\sin x}{x}}} \to 1 \text{ für } x \to 0$$

$$\implies \exists \delta > 0 : \forall x > 0 : x < \delta \implies \sqrt{\frac{\cos x}{\frac{\sin x}{x}}} \leq 2$$

$$\text{Majorantenkriterium: } \frac{1}{\sqrt{\tan x}} \leq \frac{2}{x^{\frac{1}{2}}}$$

$$\implies \int_0^\delta \frac{dx}{\sqrt{\tan x}} \text{ konvergiert}$$

$$\implies \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\tan x}} \text{ konvergiert}$$

Bsp.:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x} \text{ divergent}$$

$$\frac{1}{\sin x} = \underbrace{\frac{x}{\sin x}}_{\geq \frac{1}{2}} \frac{1}{x} \implies \int_0^\delta \frac{dx}{\sin x} = \infty$$

Bsp.:

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^3} = \int_{-1}^{1} x^{-3} dx = \frac{x^{-2}}{-2}\Big|_{-1}^{1} = \frac{1^{-2}}{-2} - \frac{(-1)^{-2}}{-2} = 0 \textbf{ FALSCH}$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^3} = \underbrace{\int_{-1}^{0} \frac{dx}{x^3}}_{\infty} - \underbrace{\int_{0}^{1} \frac{dx}{x^3}}_{-\infty}$$

Teil II

Übungsnotizen

Kapitel 1

Landau-Symbole

$O(\cdot)$-Notation

Bsp.:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + O(x^3)$$

Bsp.: Mergesort

$$\begin{aligned} k &= \log_2 n \\ \text{Laufzeit } T(n) &= T(2^k) \\ &= 1 + (k-1)2^k \\ &= 1 + (\log_2 n - 1)n \\ &= 1 + n\log_2 n - n \\ &= O(n \log_2 n) \end{aligned}$$

$o(\cdot)$-Notation
Restterm vernachlässigbar klein

Teil III

Anhänge

Anhang A

Vorlesungsvorlagen

Druck		Schrift	Deutsch	
A	a	A	A	a
B	b	B	B	b
C	c	C	C	c
D	d	D	D	d
E	e	E	E	e
F	f	F	F	f
G	g	G	G	g
H	h	H	H	h
I	i	I	I	i
J	j	J	J	j
K	k	K	K	k
L	l	L	L	l
M	m	M	M	m
N	n	N	N	n
O	o	O	O	o
P	p	P	P	p
Q	q	Q	Q	q
R	r	R	R	r
S	s	S	S	ſ s
T	t	T	T	t
U	u	U	U	u
V	v	V	V	v
W	w	W	W	w
X	x	X	X	x
Y	y	Y	Y	y
Z	z	Z	Z	z

Griechisch		
Α	α	Alpha
Β	β	Beta
Γ	γ	Gamma
Δ	δ	Delta
Ε	ε	Epsilon
Ζ	ζ	Zeta
Η	η	Eta
Θ	ϑ	Theta
Ι	ι	Iota
Κ	κ	Kappa
Λ	λ	Lambda
Μ	μ	My
Ν	ν	Ny
Ξ	ξ	Xi
Ο	ο	Omikron
Π	π	Pi
Ρ	ρ	Rho
Σ	σ	Sigma
Τ	τ	Tau
Υ	υ	Ypsilon
Φ	φ	Phi
Χ	χ	Chi
Ψ	ψ	Psi
Ω	ω	Omega

Körper

Körper-Axiome	
Ein Körper ist eine Menge K zusammen mit zwei binären Operationen $+$ und $\cdot$ sowie zwei ausgezeichneten Elementen 0 und 1, so dass folgendes gilt:	
$\forall x\ \forall y\colon\quad x+y=y+x$	Kommutativität der Addition
$\forall x\ \forall y\ \forall z\colon\quad x+(y+z)=(x+y)+z$	Assoziativität der Addition
$\forall x\colon\quad 0+x=x$	Neutrales Element der Addition
$\forall x\ \exists x'\colon\quad x+x'=0$	Inverses Element der Addition
$\forall x\ \forall y\colon\quad x\cdot y=y\cdot x$	Kommutativität der Multiplikation
$\forall x\ \forall y\ \forall z\colon\quad x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z$	Assoziativität der Multiplikation
$\forall x\colon\quad 1\cdot x=x$	Neutrales Element der Multiplikation
$\forall x\neq 0\ \exists x'\colon\quad x\cdot x'=1$	Inverses Element der Multiplikation
$\forall x\ \forall y\ \forall z\colon\quad x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z$	Distributivität
$1\neq 0$	Nichttrivialität

Das inverse Element der Addition zu x ist eindeutig bestimmt und wird auch mit $-x$ bezeichnet. Für $x+(-y)$ schreibt man auch $x-y$.

Das inverse Element der Multiplikation zu $x\neq 0$ ist eindeutig bestimmt und wird auch mit $\frac{1}{x}$ bezeichnet. Für $x\cdot\frac{1}{y}$ schreibt man auch $\frac{x}{y}$.

Beispiele von Körpern
Die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen
Die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen
Die Menge $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen
Die Menge $\mathbb{F}_2$ der binären Zahlen

Binäre Zahlen: $\mathbb{F}_2=\{0,1\}$ mit den folgenden Operationen:

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

Winkel und trigonometrische Funktionen

Bedeutung einiger Winkel			
Grad	φ	$\sin\varphi$	Bedeutung
360°	2π	0	Vollkreis
180°	π	0	Halbkreis
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	rechter Winkel
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	Gleichseitiges Dreieck
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	Diagonale im Quadrat
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	Halbes gleichseitiges Dreieck

Einige wichtige trigonometrische Formeln
$\cos\varphi = \sin\big(\varphi + \frac{\pi}{2}\big)$
$\sin(-\varphi) = -\sin\varphi$
$\cos(-\varphi) = \cos\varphi$
$\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$ (Pythagoras)
$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$
$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$
$\sin(2\varphi) = 2\sin\varphi\cos\varphi$
$\cos(2\varphi) = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi$
$\tan\varphi = \begin{cases} \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} & \text{falls } \cos\varphi \neq 0, \\ \text{undefiniert} & \text{sonst} \end{cases}$
$\cot\varphi = \begin{cases} \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} & \text{falls } \sin\varphi \neq 0, \\ \text{undefiniert} & \text{sonst} \end{cases}$
$\varphi = \arcsin x \iff \sin\varphi = x \ \wedge\ \varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
$\varphi = \arccos x \iff \cos\varphi = x \ \wedge\ \varphi \in [0, \pi]$
$\varphi = \arctan x \iff \tan\varphi = x \ \wedge\ \varphi \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$
$\varphi = \operatorname{arccot} x \iff \cot\varphi = x \ \wedge\ \varphi \in \left]0, \pi\right[$

Viele weitere Formeln lassen sich aus diesen herleiten.

Grenzwert-Baukasten

Seien $X \subset \mathbb{R}^m$ eine Teilmenge und $f : X \to \mathbb{R}^n$ eine Funktion, und seien $x_0 \in \mathbb{R}^m$ und $y_0 \in \mathbb{R}^n$. Die Abwandlung des üblichen Grenzwertbegriffs $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y_0$ liefert insgesamt $3 \times 5 = 15$ Varianten, wobei eine beliebige Zeile der oberen Tabelle mit einer beliebigen Zeile der unteren Tabelle kombiniert werden darf:

			Dimension
y_0	$\varepsilon > 0$	$\lvert f(x) - y_0 \rvert < \varepsilon$	n beliebig
$+\infty$	N	$f(x) > N$	$n = 1$
$-\infty$	N	$f(x) < -N$	$n = 1$

$$\boxed{\lim_{x \to \dots} f(x) = \dots \quad :\Longleftrightarrow \quad \forall \dots \; \exists \dots \; \forall x \in X : \dots\dots\dots \Rightarrow \dots\dots\dots}$$

			Dimension	Vorbedingung
x_0	$\delta > 0$	$0 < \lvert x - x_0 \rvert < \delta$	m beliebig	$x_0 \in \overline{X \setminus \{x_0\}}$
x_0+	$\delta > 0$	$0 < x - x_0 < \delta$	$m = 1$	$x_0 \in \overline{X \cap \,]x_0, \infty[}$
x_0-	$\delta > 0$	$0 < x_0 - x < \delta$	$m = 1$	$x_0 \in \overline{X \cap \,]-\infty, x_0[}$
$+\infty$	M	$x > M$	$m = 1$	X nach oben unbeschränkt
$-\infty$	M	$x < -M$	$m = 1$	X nach unten unbeschränkt

Umordnung von Reihen (Maple worksheet)

Diese Rechnung illustriert, wie man durch Umordnen einer konvergenten, aber nicht absolut konvergenten, Reihe den Grenzwert verändern kann. Grundlage ist die alternierende harmonische Reihe, welche bekanntlich konvergiert, aber nicht absolut konvergiert. Um die Rechnung zu beschleunigen, fassen wir je zwei aufeinanderfolgende Terme zusammen; da dabei keine Umordnung stattfindet, bleibt der Grenzwert derselbe:

```
> seriesterm := '1/(2*k-1) - 1/(2*k)';
```

$$seriesterm := \frac{1}{2\,k-1} - \frac{1}{2\,k}$$

```
> evalf(sum(seriesterm, 'k'=1..1000000000));
```

$$0.6931471806$$

Nun ändern wir die Reihenfolge, indem wir jeweils zwei positive Reihenglieder (ungerader Nenner) und ein negatives Reihenglied (gerader Nenner) aufsummieren. Diese Umordnung "bevorzugt" die positiven Glieder und "benachteiligt" die negativen Glieder. Das negative Reihenglied, das vorher an der 2k-ten Stelle stand, steht nunmehr an der 3k-ten Stelle; diese Glieder werden also immer stärker nach hinten verschoben. Die resultierende Reihe ist immer noch konvergent, hat aber einen grösseren Grenzwert:

```
> seriesterm := '1/(4*k-3) + 1/(4*k-1) - 1/(2*k)';
```

$$seriesterm := \frac{1}{4\,k-3} + \frac{1}{4\,k-1} - \frac{1}{2\,k}$$

```
> evalf(sum(seriesterm, 'k'=1..1000000000));
```

$$1.039720771$$

Nehmen wir jeweils drei, bzw. vier, statt zwei positive Reihenglieder, so wächst der Grenzwert noch stärker:

```
> seriesterm := '1/(6*k-5) + 1/(6*k-3) + 1/(6*k-1) - 1/(2*k)';
```

$$seriesterm := \frac{1}{6\,k-5} + \frac{1}{6\,k-3} + \frac{1}{6\,k-1} - \frac{1}{2\,k}$$

```
> evalf(sum(seriesterm, 'k'=1..1000000000));
```

$$1.242453328$$

```
> seriesterm := '1/(8*k-7) + 1/(8*k-5) + 1/(8*k-3) + 1/(8*k-1) - 1/
  (2*k)';
```

$$seriesterm := \frac{1}{8\,k-7} + \frac{1}{8\,k-5} + \frac{1}{8\,k-3} + \frac{1}{8\,k-1} - \frac{1}{2\,k}$$

```
> evalf(sum(seriesterm, 'k'=1..1000000000));
```

$$1.386294362$$

Wir können auch eine wachsende Anzahl positiver Reihenglieder zwischen je zwei negative Reihenglieder schieben. Zum Beispiel jeweils 1, 2 , 3 , 4, usw. Das liefert die Reihe mit den Gliedern:

```
> seriesterm := 'sum(1/(k^2+k+1-2*i),i=1..k) - 1/(2*k)';
```

$$seriesterm := \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{k^2+k+1-2\,i} - \frac{1}{2\,k} \tag{1}$$

Man kann beweisen, dass diese Reihe gegen unendlich divergiert. Das Computeralgebrasystem weiss das aber nicht von sich aus, und da die Divergenz so langsam ist, kann es auch so weitgehende

Partialsummen nicht mehr berechnen. Man sieht nur, dass die Partialsummen langsam wachsen:

```
> evalf(sum(seriesterm, 'k'=1..100));
```

$$2.651638016 \tag{2}$$

```
> evalf(sum(seriesterm, 'k'=1..1000));
```

$$3.800701023 \tag{3}$$

```
> evalf(sum(seriesterm, 'k'=1..10000));
```

$$4.951768775 \tag{4}$$

```
> evalf(sum(seriesterm, 'k'=1..100000));
```

$$6.103038828 \tag{5}$$

Das Umgekehrte passiert, wenn wir nach jedem positiven Reihenglied zwei, drei, bzw. vier negative Reihenglieder aufsummieren. Diese Umordnung "bevorzugt" die negativen Glieder und "benachteiligt" die positiven; die letzteren werden immer stärker nach hinten verschoben. Die resultierenden Reihen sind immer noch konvergent, ihr Grenzwert wird aber immer kleiner:

```
> seriesterm := '1/(2*k-1) - 1/(4*k-2) - 1/(4*k)';
```

$$seriesterm := \frac{1}{2\,k-1} - \frac{1}{4\,k-2} - \frac{1}{4\,k}$$

```
> evalf(sum(seriesterm, 'k'=1..1000000000));
```

$$0.3465735903$$

```
> seriesterm := '1/(2*k-1) - 1/(6*k-4) - 1/(6*k-2) - 1/(6*k)';
```

$$seriesterm := \frac{1}{2\,k-1} - \frac{1}{6\,k-4} - \frac{1}{6\,k-2} - \frac{1}{6\,k}$$

```
> evalf(sum(seriesterm, 'k'=1..1000000000));
```

$$0.1438410331$$

```
> seriesterm := '1/(2*k-1) - 1/(8*k-6) - 1/(8*k-4) - 1/(8*k-2) - 1/
(8*k)';
```

$$seriesterm := \frac{1}{2\,k-1} - \frac{1}{8\,k-6} - \frac{1}{8\,k-4} - \frac{1}{8\,k-2} - \frac{1}{8\,k}$$

```
> evalf(sum(seriesterm, 'k'=1..1000000000));
```

$$0.$$

Der Wert der Reihe ist in diesem Fall nicht nur näherungsweise, sondern exakt gleich Null, wie man durch eine geeignete Umformung beweisen kann.

```
> seriesterm := '1/(2*k-1) - 1/(10*k-8) - 1/(10*k-6) - 1/(10*k-4) -
1/(10*k-2) - 1/(10*k)';
```

$$seriesterm := \frac{1}{2\,k-1} - \frac{1}{10\,k-8} - \frac{1}{10\,k-6} - \frac{1}{10\,k-4} - \frac{1}{10\,k-2} - \frac{1}{10\,k}$$

```
> evalf(sum(seriesterm, 'k'=1..1000000000));
```

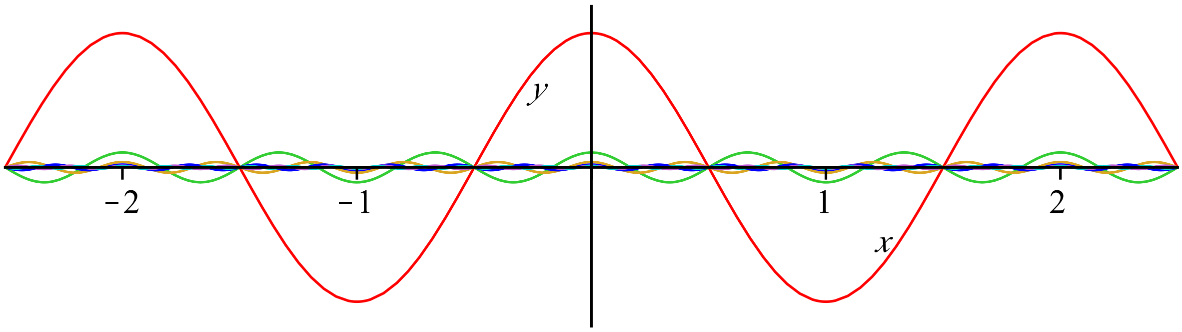
$$-0.1115717757$$

Natürlich kann man so weiter machen. Dabei kann man durch geeignete Umordnung jeden beliebigen Grenzwert erreichen, einschliesslich unendlich oder minus unendlich; und man kann auch erreichen, dass die Reihe gar nicht konvergiert.

Beispiel zu Fourierreihen (Maple Worksheet)

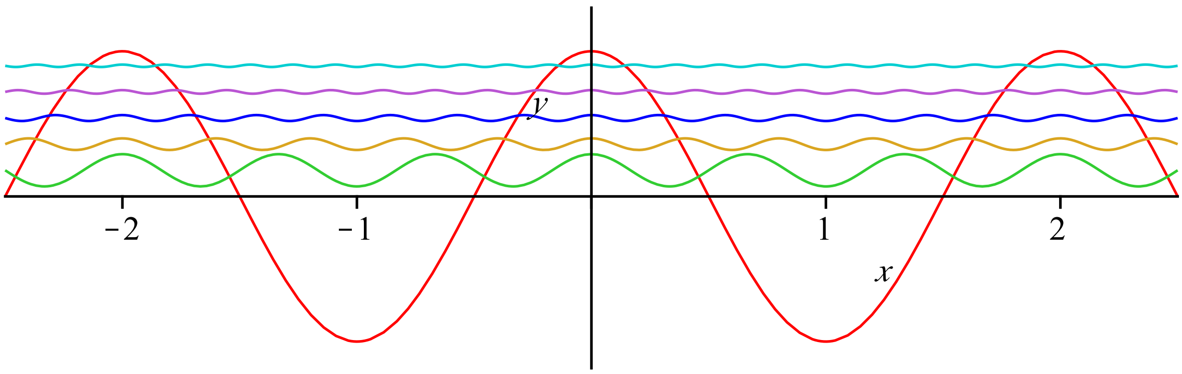
Wir betrachten die Überlagerung von Cosinuswellen der Frequenzen 2k für alle ungeraden k>0 mit den Amplituden 1/k^2. Die ersten sechs Komponenten sind:

```
> plot( [cos(Pi*x) ,
>         cos(3*Pi*x)/9   ,
>         cos(5*Pi*x)/25 ,
>         cos(7*Pi*x)/49 ,
>         cos(9*Pi*x)/81 ,
>         cos(11*Pi*x)/121 ]
>       , x=-2.5..2.5 , y=-1...1.2 , xtickmarks=[-2,-1,0,1,2] ,
  ytickmarks=0 );
```



Um sie besser sehen zu können, sind sie hier vertikal auseinander gerückt:

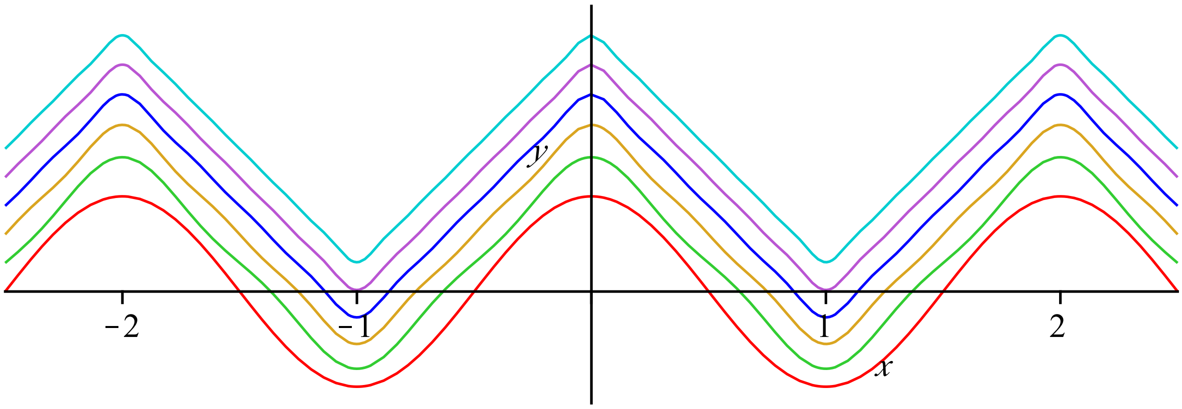
```
> plot( [cos(Pi*x) ,
>         cos(3*Pi*x)/9 + .18 ,
>         cos(5*Pi*x)/25 + .36 ,
>         cos(7*Pi*x)/49 + .54 ,
>         cos(9*Pi*x)/81 + .72 ,
>         cos(11*Pi*x)/121 + .9 ]
>       , x=-2.5..2.5 , y=-1.2..1.3 , xtickmarks=[-2,-1,0,1,2] ,
  ytickmarks=0 );
```



Die ersten Partialsummen sind Funktionen mit den folgenden Graphen (wieder der Übersichtlichkeit wegen vertikal verschoben):

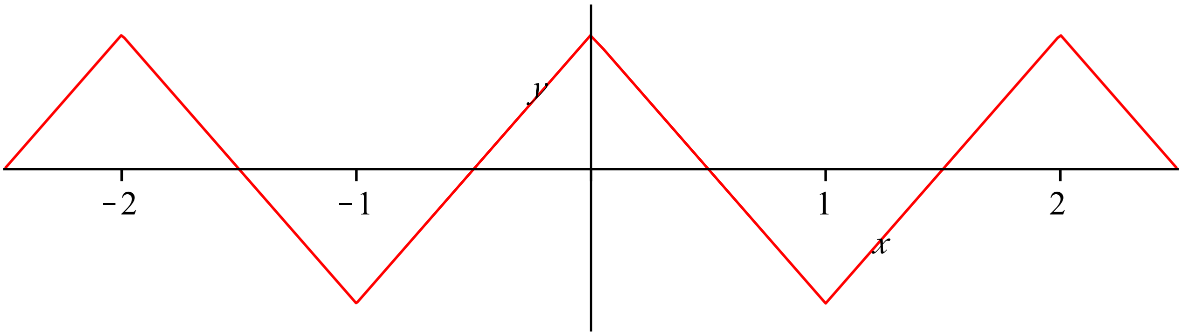
```
> plot( [cos(Pi*x) ,
>         cos(Pi*x) + cos(3*Pi*x)/9 + .3 ,
>         cos(Pi*x) + cos(3*Pi*x)/9 + cos(5*Pi*x)/25 + .6 ,
>         cos(Pi*x) + cos(3*Pi*x)/9 + cos(5*Pi*x)/25 + cos(7*Pi*x)
  /49 + .9 ,
>         cos(Pi*x) + cos(3*Pi*x)/9 + cos(5*Pi*x)/25 + cos(7*Pi*x)
  /49 + cos(9*Pi*x)/81 + 1.2 ,
>         cos(Pi*x) + cos(3*Pi*x)/9 + cos(5*Pi*x)/25 + cos(7*Pi*x)
  /49 + cos(9*Pi*x)/81 + cos(11*Pi*x)/121 + 1.5 ]
```

```
>        , x=-2.5..2.5 , y=-1.2..3 , xtickmarks=[-2,-1,0,1,2] ,
  ytickmarks=0 );
```



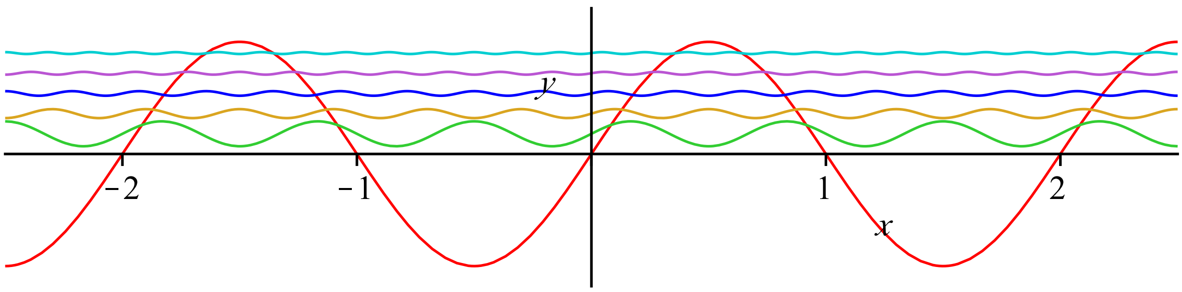
Da die Reihe \sum 1/k^2 eine konvergente Majorante ist, konvergiert die Fourierreihe absolut für jede reelle Zahl x. Die Grenzfunktion ist zwischen je zwei aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen linear, und ihr Graph hat tatsächlich die Sägezahnform, die man aus dem obigen Bild erahnen kann:

```
> plot( sum( cos((2*k-1)*Pi*x)/(2*k-1)^2 , k=1..infinity)
>      , x=-2.5..2.5 , y=-1.5..1.5 , xtickmarks=[-2,-1,0,1,2] ,
  ytickmarks=0 );
```



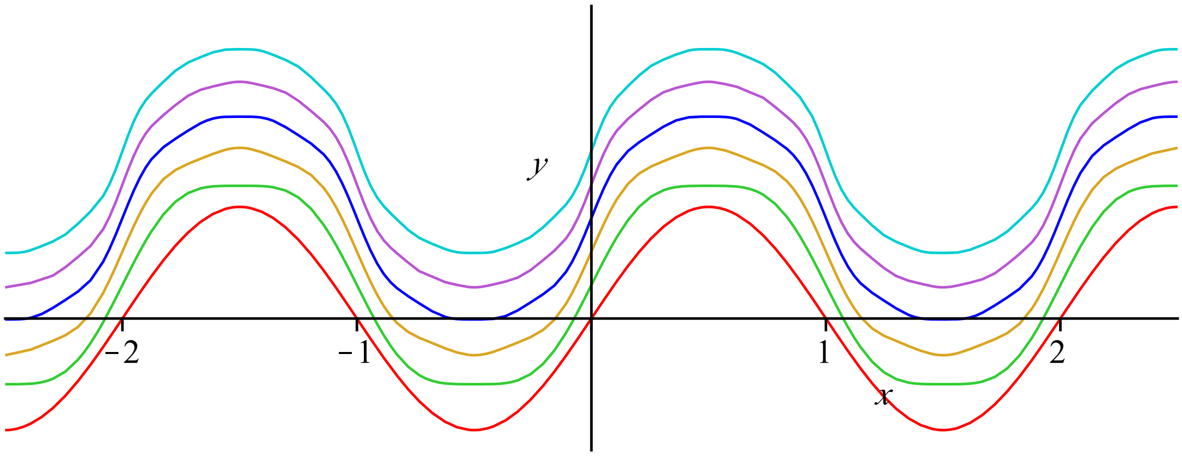
Wenn wir mit denselben Frequenzen und Amplituden jeweils den cosinus durch sinus ersetzen, so bedeutet dies, dass wir auf die einzelnen Komponenten verschiedene Phasenverschiebungen anwenden. Die Komponenten behalten dabei bis auf Verschiebung ihre Form:

```
> plot( [sin(Pi*x) ,
>        sin(3*Pi*x)/9 + .18 ,
>        sin(5*Pi*x)/25 + .36 ,
>        sin(7*Pi*x)/49 + .54 ,
>        sin(9*Pi*x)/81 + .72 ,
>        sin(11*Pi*x)/121 + .9 ]
>      , x=-2.5..2.5 , y=-1.2..1.3 , xtickmarks=[-2,-1,0,1,2] ,
  ytickmarks=0 );
```



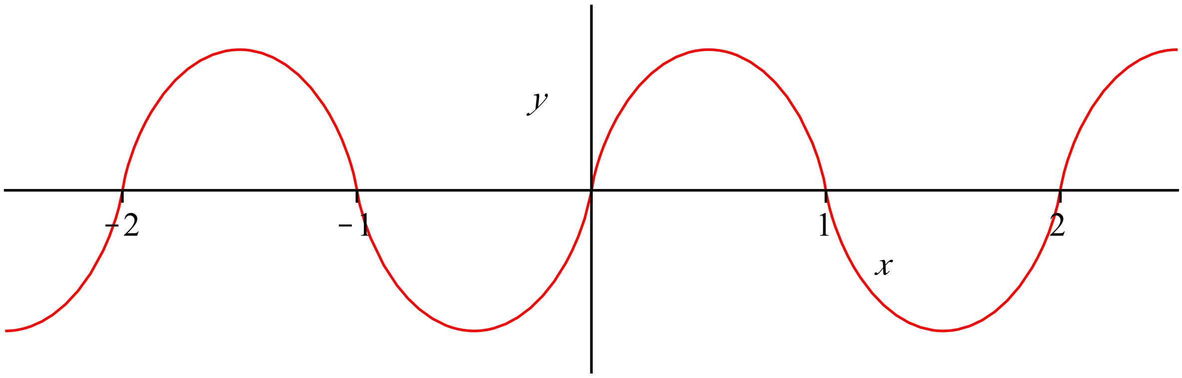
Die Überlagerung dieser Wellen sieht nun aber völlig anders aus:

```
> plot( [sin(Pi*x) ,
>         sin(Pi*x) + sin(3*Pi*x)/9 + .3 ,
>         sin(Pi*x) + sin(3*Pi*x)/9 + sin(5*Pi*x)/25 + .6 ,
>         sin(Pi*x) + sin(3*Pi*x)/9 + sin(5*Pi*x)/25 + sin(7*Pi*x)
  /49 + .9 ,
>         sin(Pi*x) + sin(3*Pi*x)/9 + sin(5*Pi*x)/25 + sin(7*Pi*x)
  /49 + sin(9*Pi*x)/81 + 1.2 ,
>         sin(Pi*x) + sin(3*Pi*x)/9 + sin(5*Pi*x)/25 + sin(7*Pi*x)
  /49 + sin(9*Pi*x)/81 + sin(11*Pi*x)/121 + 1.5 ]
>     , x=-2.5..2.5 , y=-1.2..2.8 , xtickmarks=[-2,-1,0,1,2] ,
  ytickmarks=0 );
```



Die neue Fourierreihe ist aus demselben Grund wie vorher absolut konvergent. Der Graph ihrer Grenzfunktion hat die folgende Form. Sie hat aber keine einfache Beschreibung durch elementare Funktionen (sondern hängt mit der sogenannten Dilogarithmus-Funktion zusammen).

```
> plot( sum( sin((2*k-1)*Pi*x)/(2*k-1)^2 , k=1..infinity)
>     , x=-2.5..2.5 , y=-1.2..1.2 , xtickmarks=[-2,-1,0,1,2] ,
  ytickmarks=0 );
```



Fazit: Die Form einer zusammengesetzten Welle hängt nicht nur von den Amplituden der einzelnen Frequenzen, sondern wesentlich auch von deren Phasen ab.

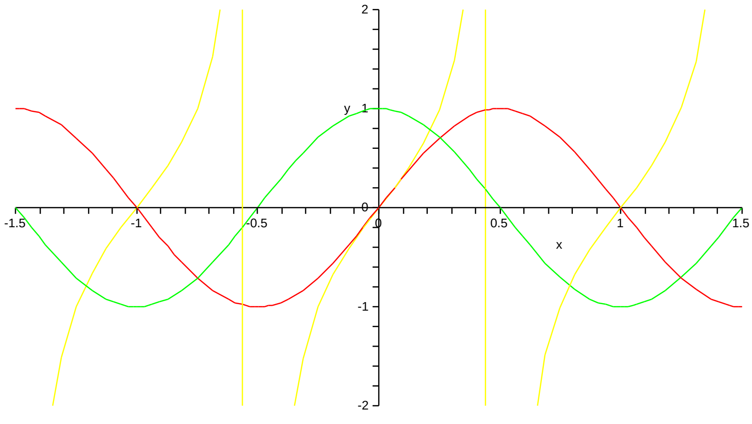
Trigonometrische und Hyperbolische Funktionen

Beziehung zur Exponentialfunktion		
$\cos x = \dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$	$\cosh x = \dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}$	$\operatorname{arcosh} y = \log\left(y+\sqrt{y^2-1}\right)$
$\sin x = \dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$	$\sinh x = \dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2}$	$\operatorname{arsinh} y = \log\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)$
$\tan x = \dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{e^{ix}+e^{-ix}}\cdot\dfrac{1}{i}$	$\tanh x = \dfrac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$	$\operatorname{artanh} y = \dfrac{1}{2}\log\dfrac{1+y}{1-y}$

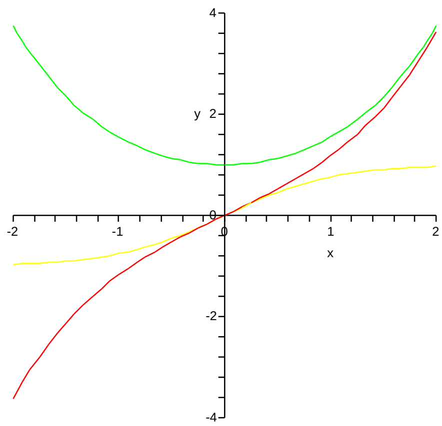
Reihenentwicklungen		
e^x	$= 1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^4}{24}+\ldots$	$= \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$
$\cos x$	$= 1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}-\ldots$	$= \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\cdot\frac{x^{2k}}{(2k)!}$
$\sin x$	$= x-\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^5}{120}-\ldots$	$= \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\cdot\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$
$\cosh x$	$= 1+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}+\ldots$	$= \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k}}{(2k)!}$
$\sinh x$	$= x+\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^5}{120}+\ldots$	$= \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$
$\log(1+x)$	$= x-\dfrac{x}{2}+\dfrac{x^2}{3}-\ldots$	$= \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\cdot\frac{x^k}{k}$
$\arctan x$	$= x-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{5}-\ldots$	$= \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\cdot\frac{x^{2k+1}}{2k+1}$
$\operatorname{artanh} x$	$= x+\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{5}+\ldots$	$= \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{2k+1}$

Additionstheoreme, Pythagoras	
$e^{x+y} \;=\; e^x \cdot e^y$	$\log xy \;=\; \log x + \log y$
$\sin(x{+}y) \;=\; \sin x \cos y + \cos x \sin y$	$\sinh(x{+}y) \;=\; \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$
$\cos(x{+}y) \;=\; \cos x \cos y - \sin x \sin y$	$\cosh(x{+}y) \;=\; \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$
$\sin(2x) \;=\; 2 \sin x \, \cos x$	$\sinh(2x) \;=\; 2 \sinh x \, \cosh x$
$\cos(2x) \;=\; \cos^2 x - \sin^2 x$	$\cosh(2x) \;=\; \cosh^2 x + \sinh^2 x$
$\cos^2 x + \sin^2 x \;=\; 1$	$\cosh^2 x - \sinh^2 x \;=\; 1$

Definitions- und Zielbereiche	Bezeichnung
$\log y : \quad]0,\infty[\;\longrightarrow\;]-\infty,\infty[$	Natürlicher Logarithmus
$\arcsin y : \quad [-1,1] \;\longrightarrow\; [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$	Arcus Sinus
$\arccos y : \quad [-1,1] \;\longrightarrow\; [0,\pi]$	Arcus Cosinus
$\arctan y : \quad]-\infty,\infty[\;\longrightarrow\;]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$	Arcus Tangens
$\operatorname{arsinh} y : \quad]-\infty,\infty[\;\longrightarrow\;]-\infty,\infty[$	Area Sinus hyperbolicus
$\operatorname{arcosh} y : \quad [1,\infty[\;\longrightarrow\; [0,\infty[$	Area Cosinus hyperbolicus
$\operatorname{artanh} y : \quad]-1,1[\;\longrightarrow\;]-\infty,\infty[$	Area Tangens hyperbolicus



sin, cos, tan



sinh, cosh, tanh

Ableitung

Definition

Betrachte $f : X \to Y$ mit $X, Y \subset \mathbb{R}$ und $x_0 \in X$

f ist *differenzierbar im Punkt* x_0 *mit Ableitung* $f'(x_0)$

$\Leftrightarrow\ f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + o(x - x_0)$ für $x \to x_0$

$\Leftrightarrow\ f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

(Zum Vergleich:) f ist *stetig im Punkt* x_0

$\Leftrightarrow\ f(x) = f(x_0) + o(1)$ für $x \to x_0$

$\Leftrightarrow\ f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x)$

Grundregeln

Summe	$(f+g)' = f' + g'$	
konstanter Faktor	$(\lambda f)' = \lambda f'$	
Produktregel	$(fg)' = f'g + fg'$	
Quotientenregel	$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$	
Kettenregel	$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$	$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$
Umkehrfunktion	$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}$	$\frac{dx}{dy} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^{-1}$

Potenzen und Logarithmus

$f(x)$	$f'(x)$	Bedingungen
const	0	
x^n	nx^{n-1}	$n \in \mathbb{Z}$ und $x \neq 0$ wenn $n < 0$
x^a	ax^{a-1}	$a \in \mathbb{R}$ und $x > 0$
$\log x$	$\frac{1}{x}$	$x > 0$
e^x	e^x	
a^x	$a^x \cdot \log a$	$a > 0$

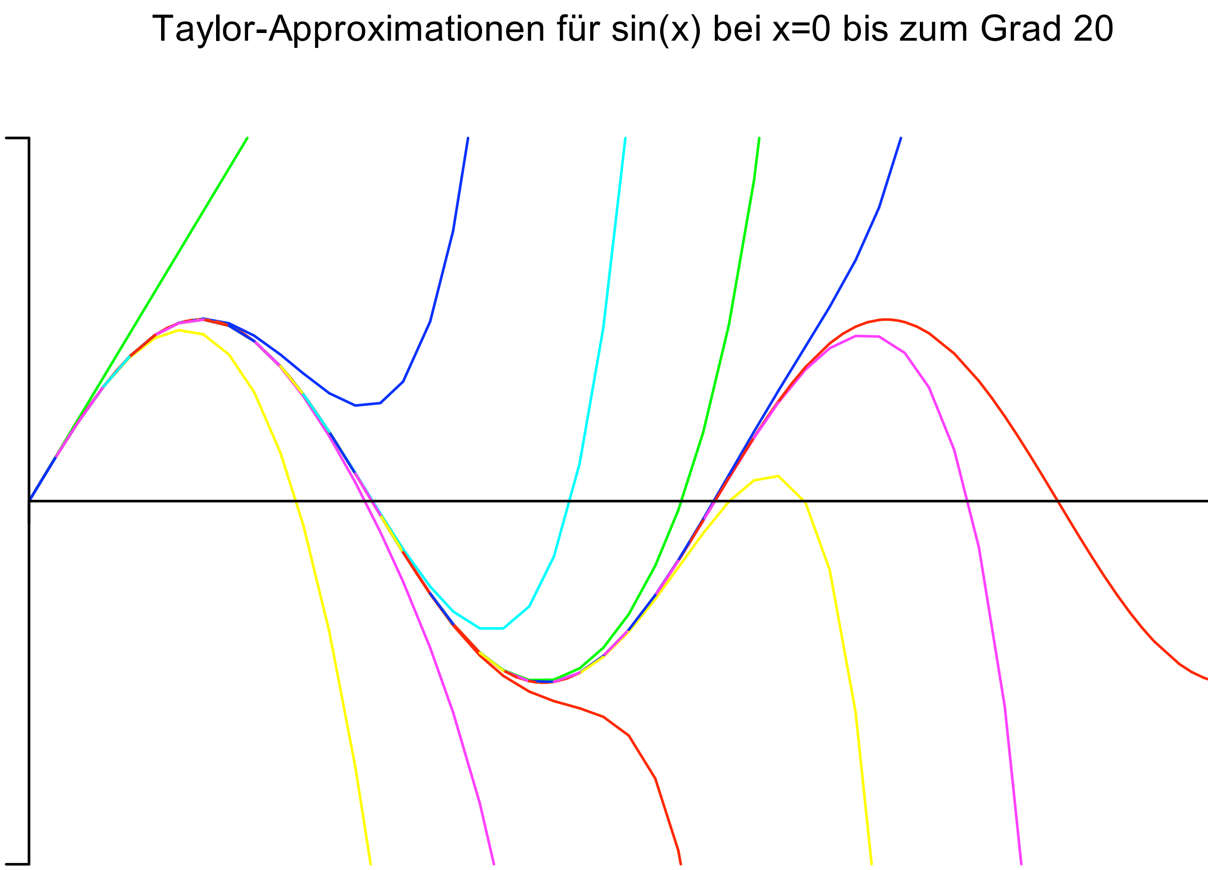
Kreisfunktionen

$f(x)$	$f'(x)$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$

Hyperbelfunktionen

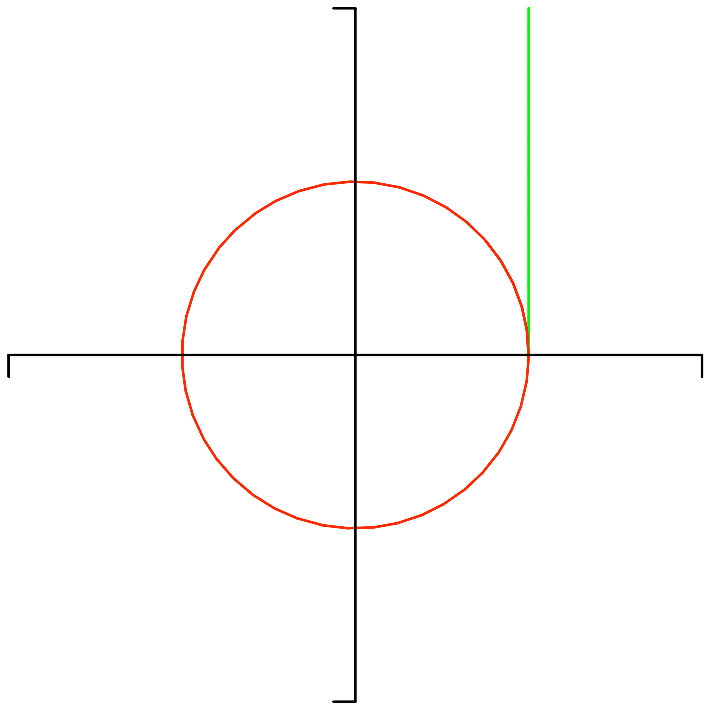
$f(x)$	$f'(x)$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\tanh x$	$\frac{1}{\cosh^2 x}$
$\operatorname{arsinh} x$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\operatorname{arcosh} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\operatorname{artanh} x$	$\frac{1}{1-x^2}$

```
> mylist := [ sin(x) ]:
> for n from 2 by 2 to 20 do
>   mylist := [ op(mylist), convert(series(sin(x),x,n), polynom) ]
>   end do:
> plot( mylist, x=0..11, y=-2..2, xtickmarks=[], ytickmarks=[],
labels=["",""] ,
>   title="\n Taylor-Approximationen für sin(x) bei x=0 bis zum Grad
20",
>   titlefont=[Helvetica,14] );
```

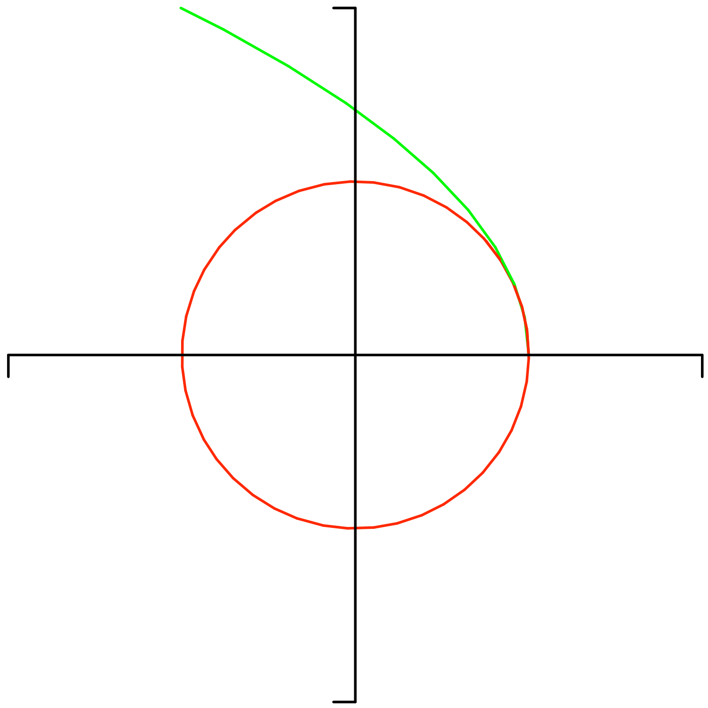



```
> DrawCisApprox := proc(n)
> plot( [ [cos(t),sin(t),t=0..7],
>         [convert(series(cos(t),t,n+1), polynom),
>          convert(series(sin(t),t,n+1), polynom), t=0..10] ],
>       x=-2..2, y=-2..2, xtickmarks=[], ytickmarks=[], labels=["",
""],
>       title=cat("\n Taylor-Approximation für cis(t) bei t=0 vom
Grad ",convert(n,string) ),
>       titlefont=[Helvetica,14] )
> end proc:
> for n from 1 by 1 to 20 do DrawCisApprox(n) end do;
```

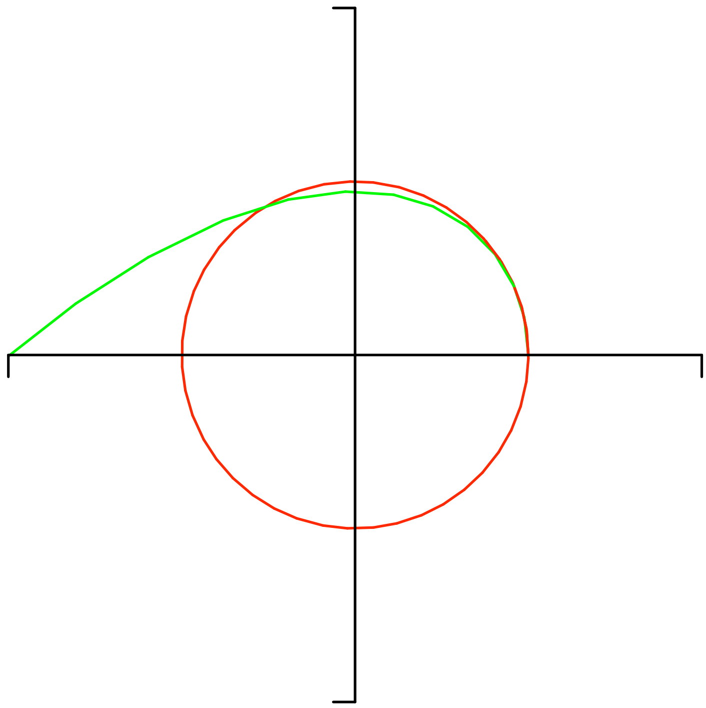
Taylor-Approximation für cis(t) bei t=0 vom Grad 1



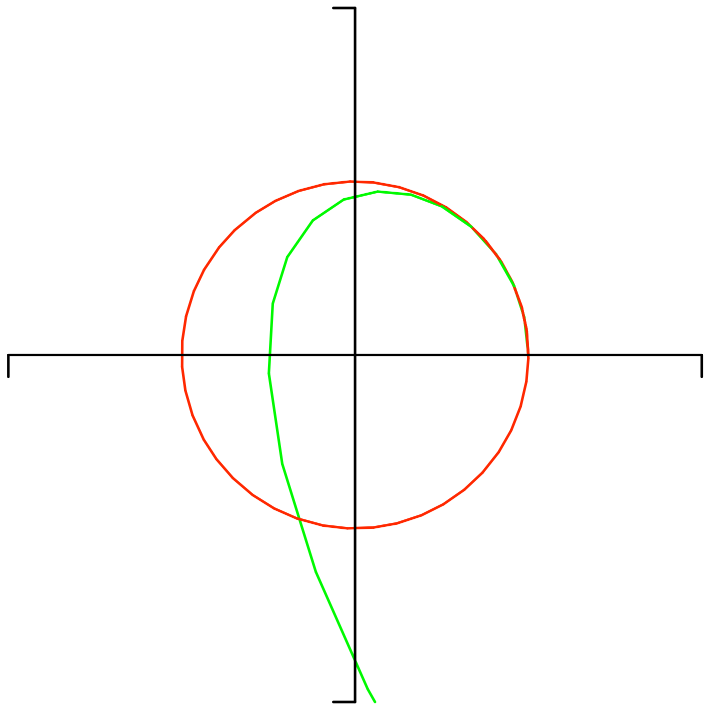
Taylor-Approximation für cis(t) bei t=0 vom Grad 2



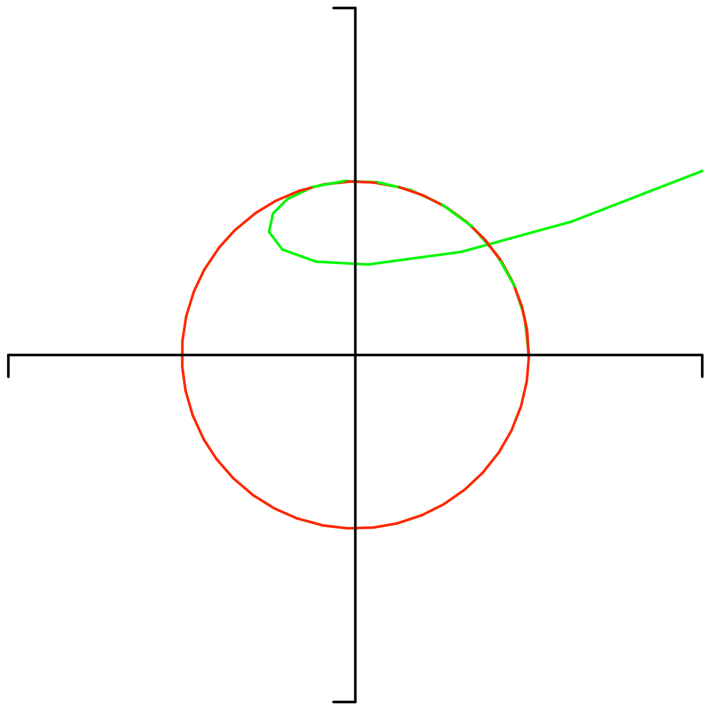
Taylor-Approximation für cis(t) bei t=0 vom Grad 3



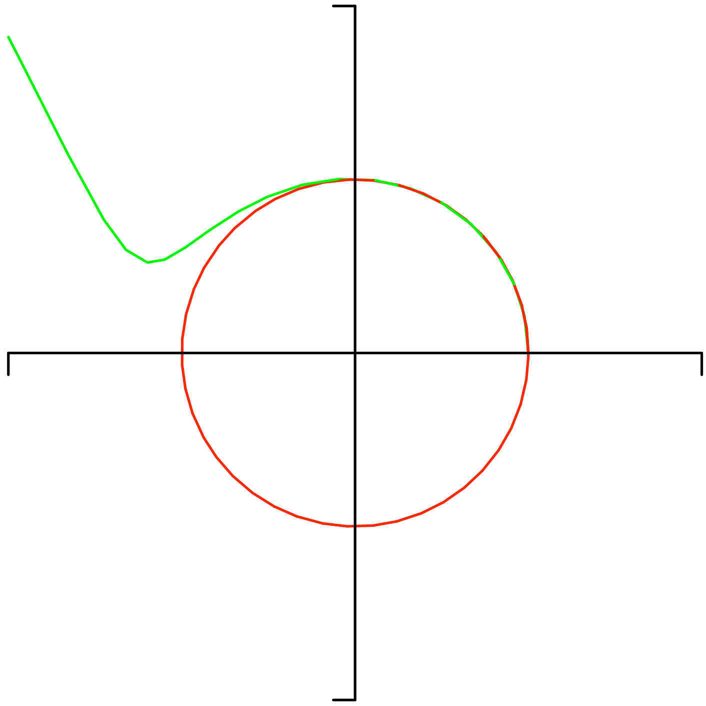
Taylor-Approximation für cis(t) bei t=0 vom Grad 4



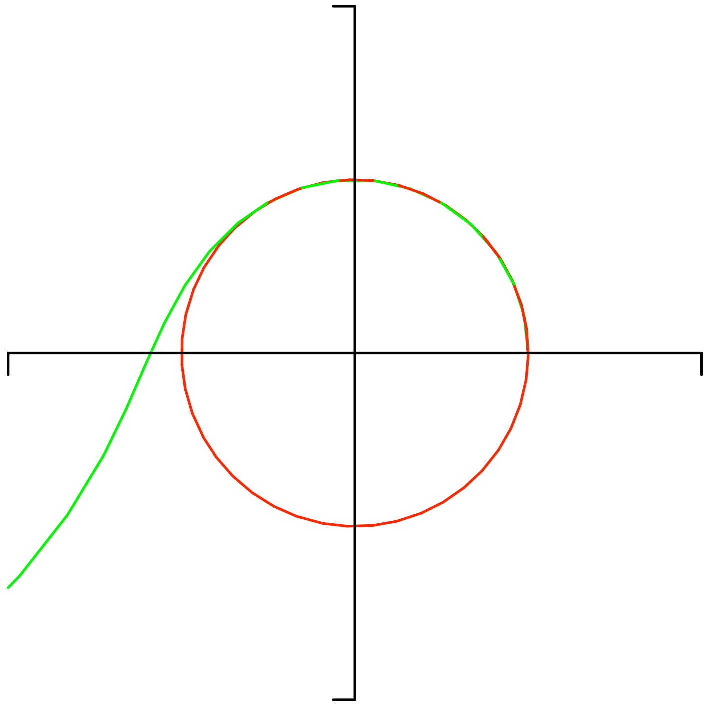
Taylor-Approximation für cis(t) bei t=0 vom Grad 5



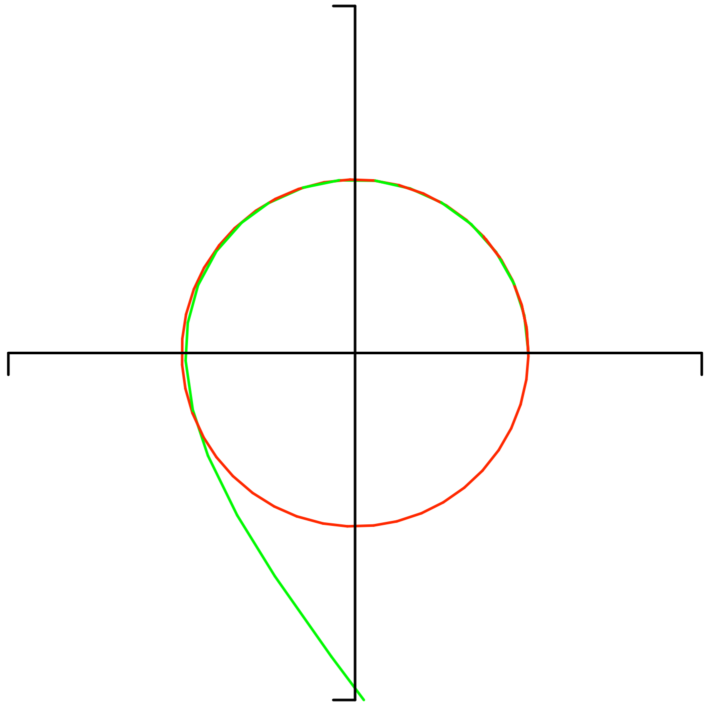
Taylor-Approximation für cis(t) bei t=0 vom Grad 6



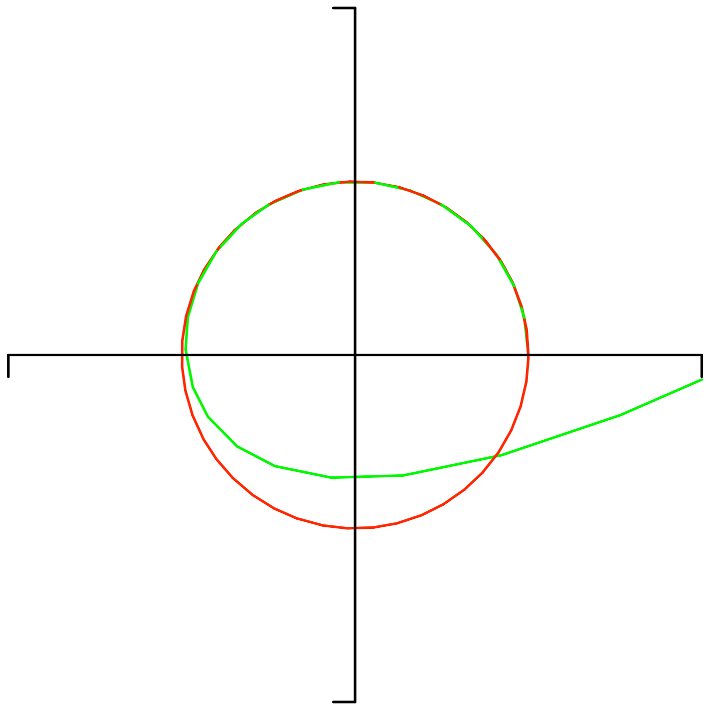
Taylor-Approximation für cis(t) bei t=0 vom Grad 7



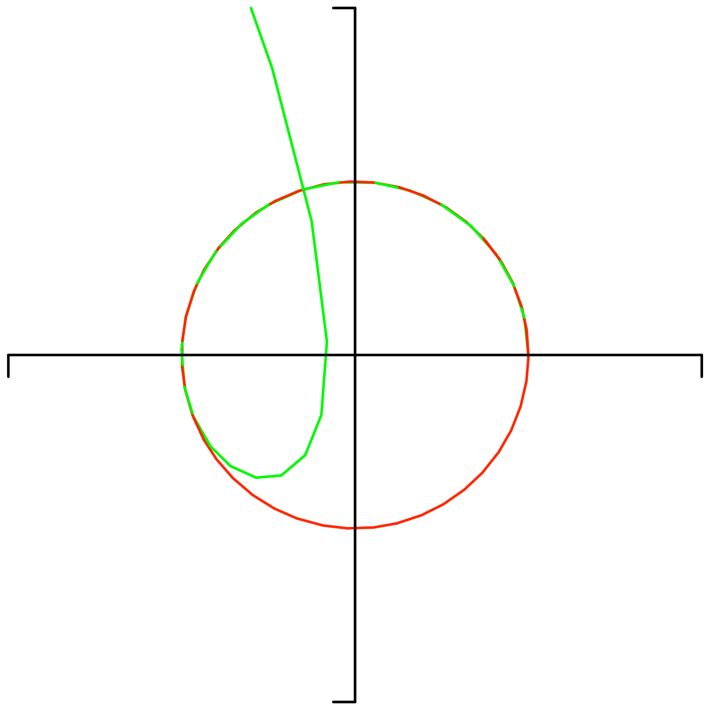
Taylor-Approximation für cis(t) bei t=0 vom Grad 8



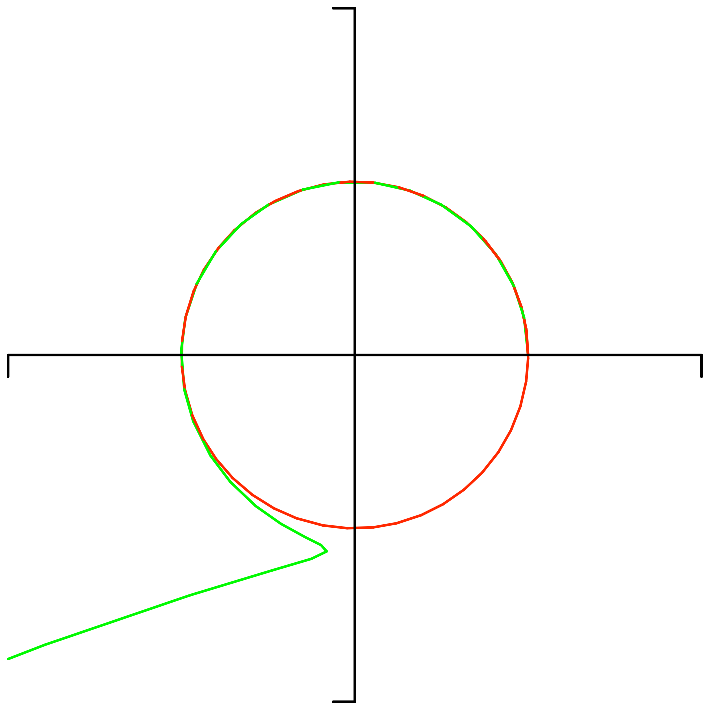
Taylor-Approximation für cis(t) bei t=0 vom Grad 9



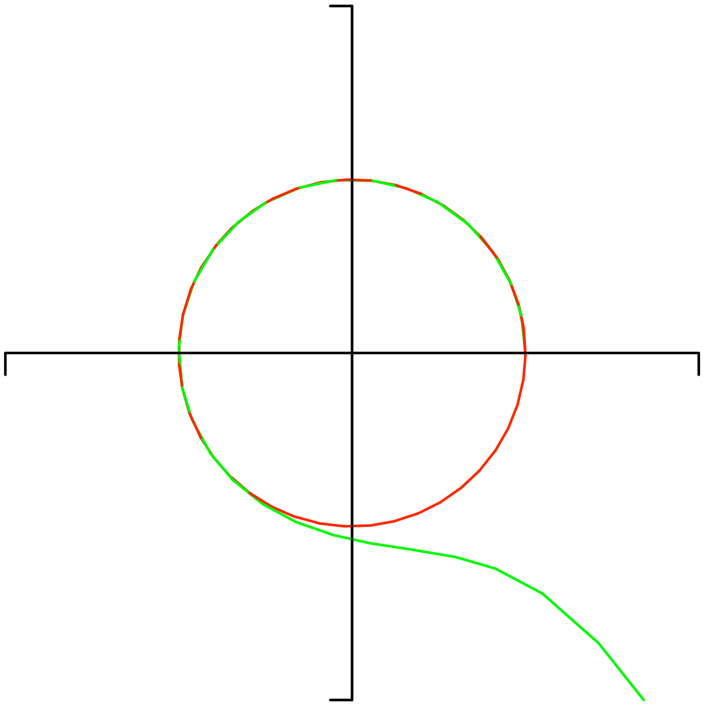
Taylor-Approximation für cis(t) bei t=0 vom Grad 10



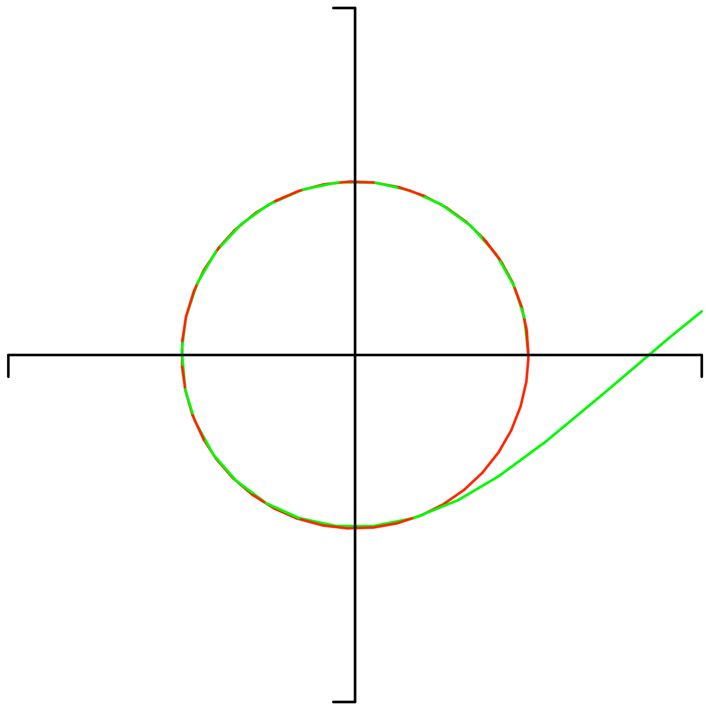
Taylor-Approximation für cis(t) bei t=0 vom Grad 11



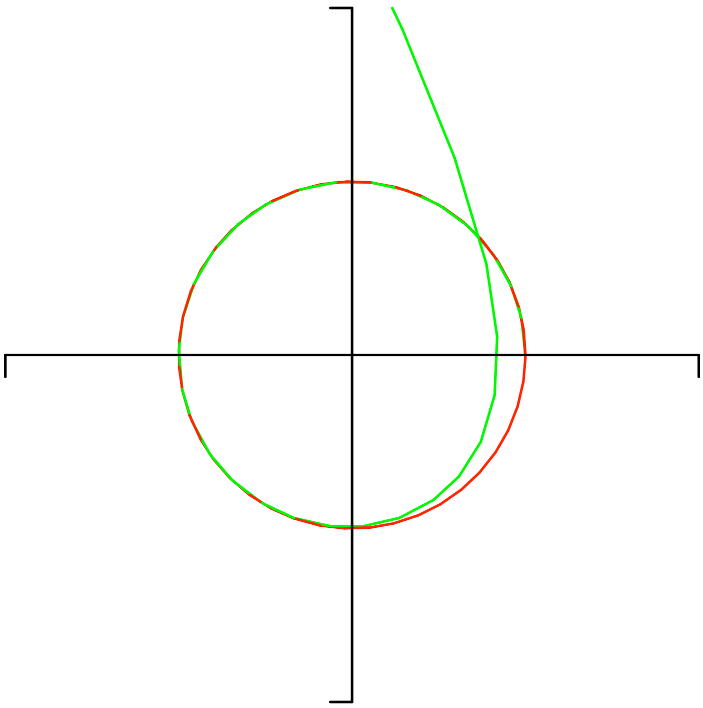
Taylor-Approximation für cis(t) bei t=0 vom Grad 12



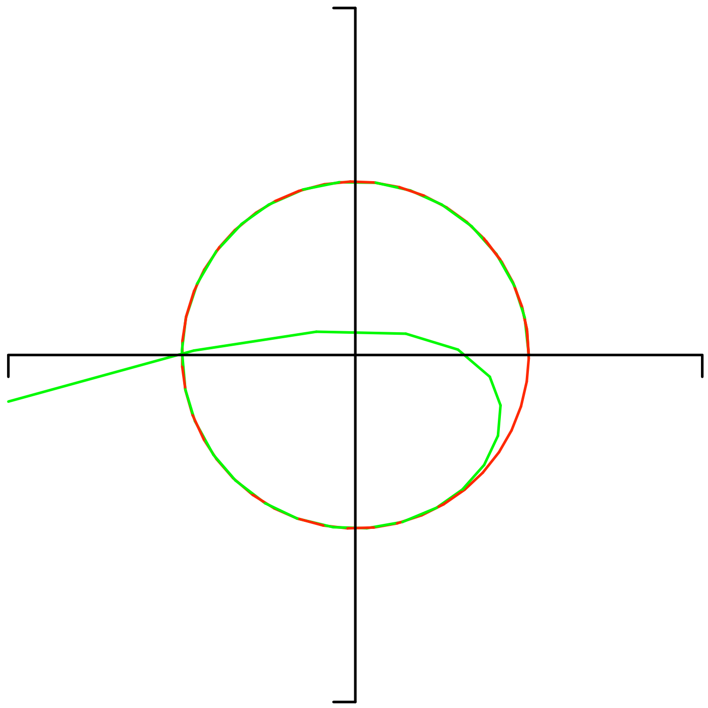
Taylor-Approximation für cis(t) bei t=0 vom Grad 13



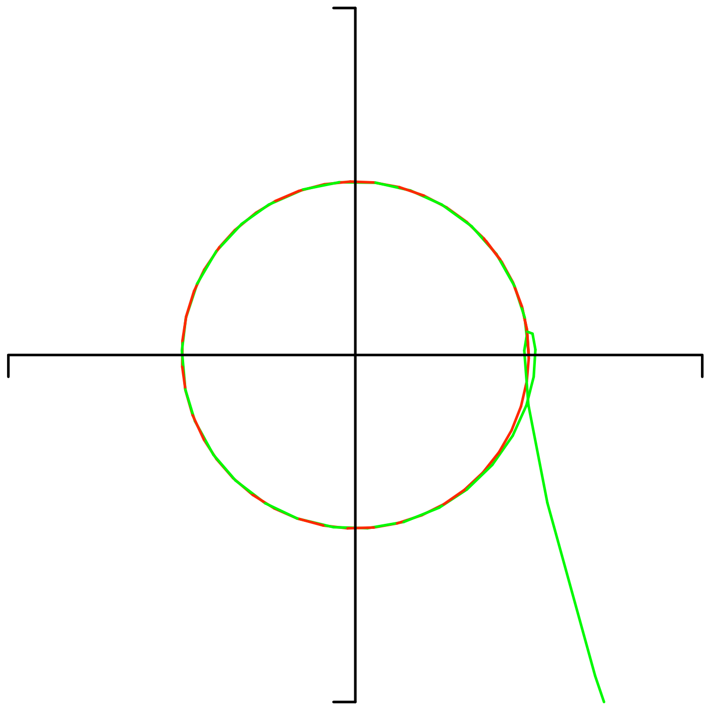
Taylor-Approximation für cis(t) bei t=0 vom Grad 14



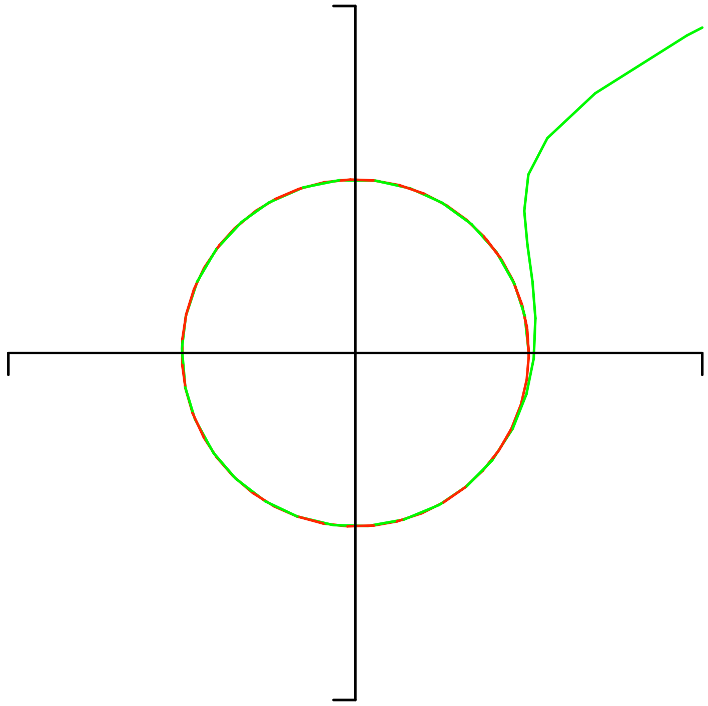
Taylor-Approximation für cis(t) bei t=0 vom Grad 15



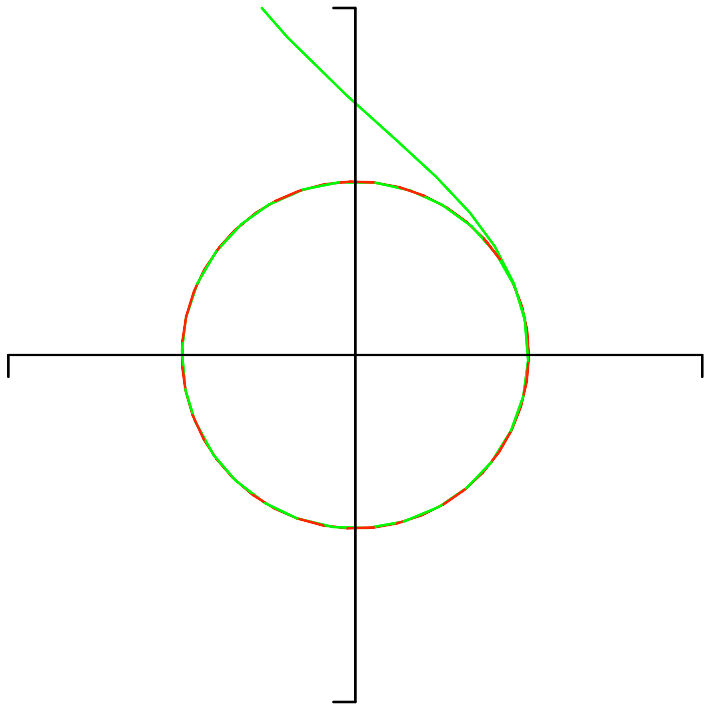
Taylor-Approximation für cis(t) bei t=0 vom Grad 16



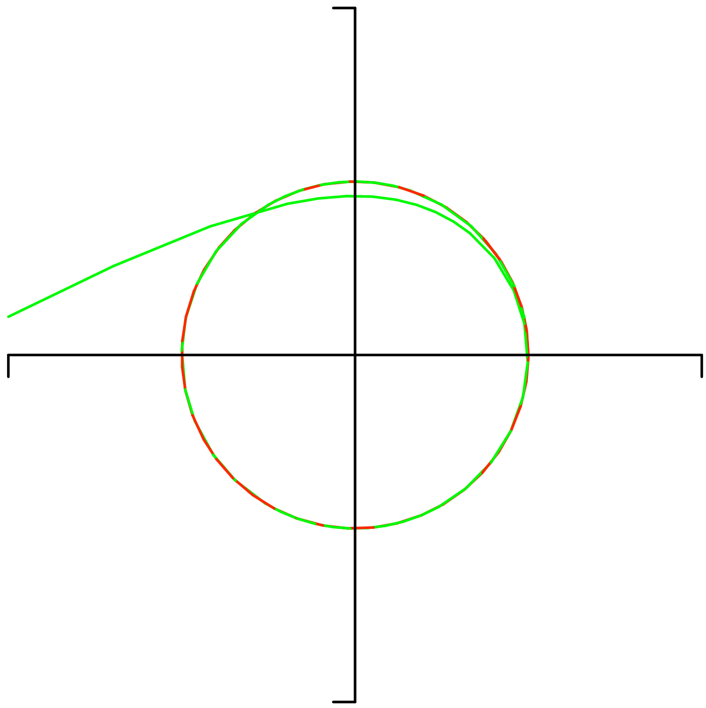
Taylor-Approximation für cis(t) bei t=0 vom Grad 17



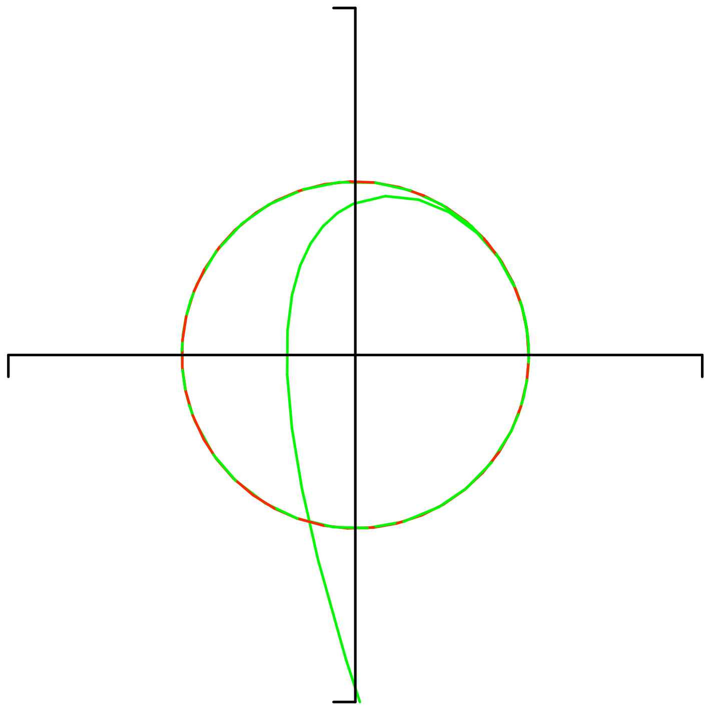
Taylor-Approximation für cis(t) bei t=0 vom Grad 18



Taylor-Approximation für cis(t) bei t=0 vom Grad 19



Taylor-Approximation für cis(t) bei t=0 vom Grad 20



>

Aufgabe: Bestimme die Lösung der Gleichung

```
> x^x=2;
```

$$x^x = 2 \tag{1}$$

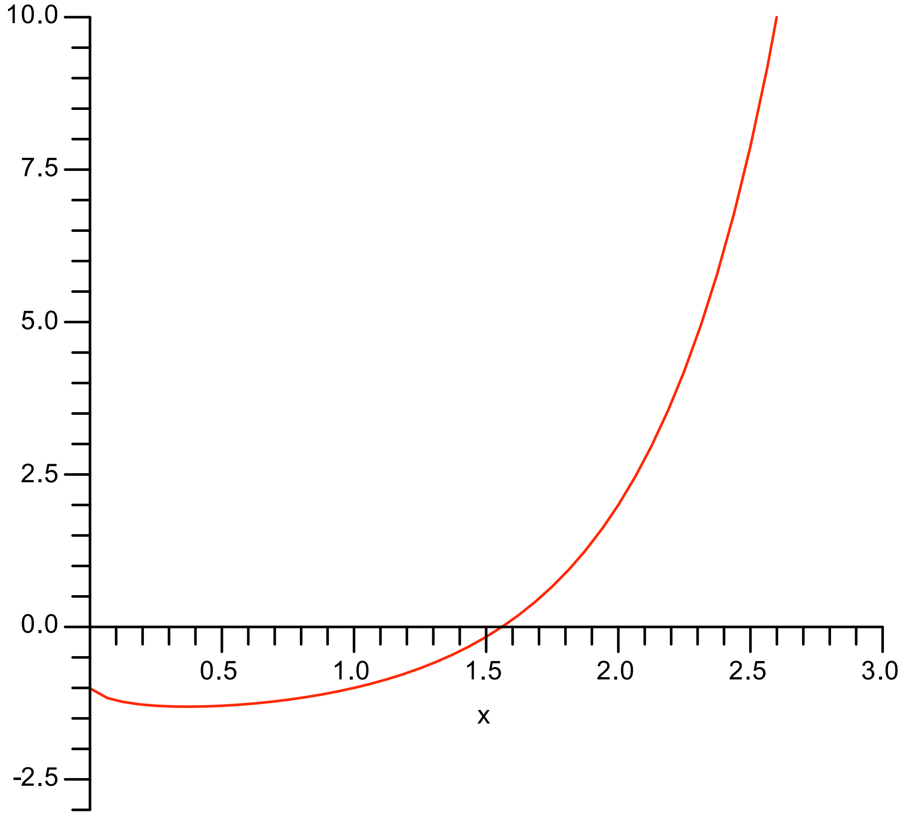
Dafür betrachten wir die Funktion:

```
> f(x) :=x^x-2;
```

$$f(x) := x^x - 2 \tag{2}$$

Hier ist eine Skizze:

```
> plot(x^x-2,x=0.001..3,-3..10);
```



Die ersten beiden Ableitungen

```
> f1(x) := diff(f(x),x);
> f2(x) := diff(f1(x),x);
```

sind offensichtlich positiv für x>1. Darum ist die Funktion streng monoton wachsend und konvex. Insbesondere hat sie genau eine Nullstelle x>1. Wir bestimmen diese Nullstelle näherungsweise mit dem Newton-Verfahren.

$$f1(x) := x^x (\ln(x) + 1)$$

$$f2(x) := x^x (\ln(x) + 1)^2 + \frac{x^x}{x} \tag{3}$$

Wir beginnen mit der standardmässig eingestellten Rechengenauigkeit von 10 floating point Dezimalstellen:

```
> Digits := 10;
```

$$Digits := 10 \tag{4}$$

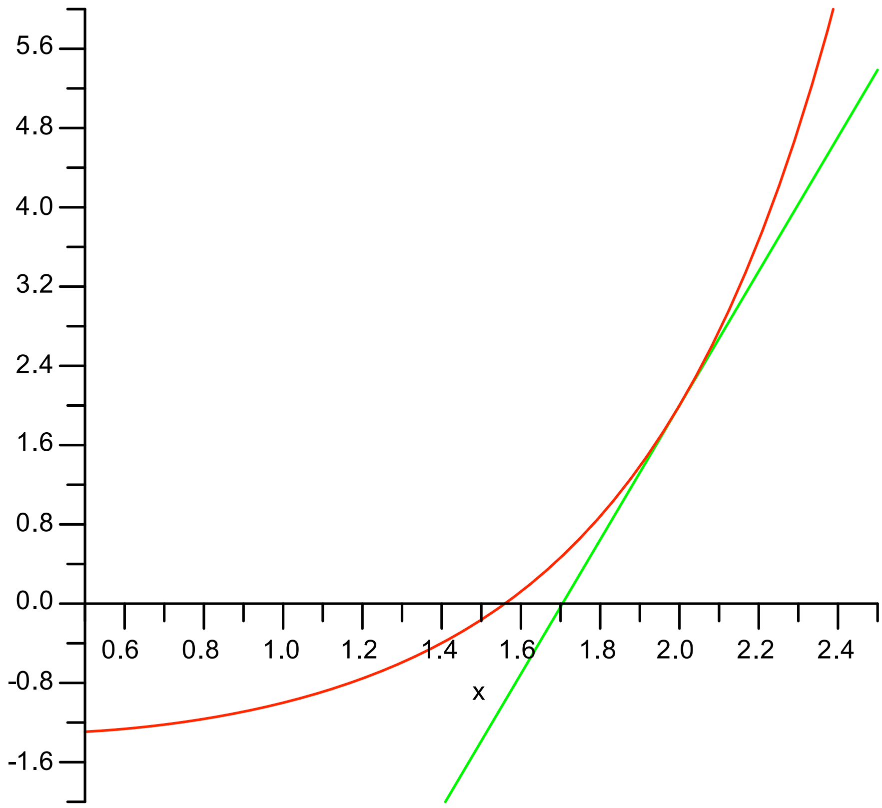
Wir beginnen mit dem Anfangswert

```
> t:=2;
```

$$t := 2 \tag{5}$$

Der jeweils nächste Wert ergibt sich aus der Tangente in dem Punkt (t,f(t)) durch Schneiden mit der x-Achse:

```
> plot([x^x-2,subs(x=t,f(x))+subs(x=t,f1(x))*(x-t)],x=0.5..2.5,-2.
  .6);
```




```
> t := evalf(t-subs(x=t,f(x)/f1(x)));
```

$$t := 1.704691946 \tag{6}$$

```
> t := evalf(t-subs(x=t,f(x)/f1(x)));
```

$$t := 1.577944558 \tag{7}$$

```
> t := evalf(t-subs(x=t,f(x)/f1(x)));
```

$$t := 1.559924538 \tag{8}$$

```
> t := evalf(t-subs(x=t,f(x)/f1(x)));
```

(9)

$$t := 1.559610563 \tag{9}$$

```
> t := evalf(t-subs(x=t,f(x)/f1(x)));
```

$$t := 1.559610470 \tag{10}$$

```
> t := evalf(t-subs(x=t,f(x)/f1(x)));
```

$$t := 1.559610469 \tag{11}$$

```
> t := evalf(t-subs(x=t,f(x)/f1(x)));
```

$$t := 1.559610469 \tag{12}$$

```
> t := evalf(t-subs(x=t,f(x)/f1(x)));
```

$$t := 1.559610469 \tag{13}$$

Offensichtlich hat sich der Wert schon nach 6 Schritten stabilisiert in den ersten 9 Nachkommastellen.

Versuchen wir es noch einmal mit grösserer Rechengenauigkeit:

```
> Digits := 100;
```

$$Digits := 100 \tag{14}$$

```
> t:=2;
```

$$t := 2 \tag{15}$$

```
> t := evalf(t-subs(x=t,f(x)/f1(x)));
```

$t :=$ (16)

1.70469194542517937512809654533837422144167347556305996627986039903908\
7533122771362372782388029075581

```
> t := evalf(t-subs(x=t,f(x)/f1(x)));
```

$t :=$ (17)

1.57794455747627044569220823373823215106864236086675276070613595024266\
1730542372044851155168774370367

```
> t := evalf(t-subs(x=t,f(x)/f1(x)));
```

$t :=$ (18)

1.55992453751707899242823044435245682392182514852486060058220214991352\
5561157015656308576730552209549

```
> t := evalf(t-subs(x=t,f(x)/f1(x)));
```

$t :=$ (19)

1.55961056257717667811411825090521591061446411465339074078530052555994\
4740804412284512773465544519861

```
> t := evalf(t-subs(x=t,f(x)/f1(x)));
```

$t :=$ (20)

1.55961046946237753625543253382371872673415175680679883477515124483111\
0373310340996164917744233643803

```
> t := evalf(t-subs(x=t,f(x)/f1(x)));
```

$t :=$ (21)

1.55961046946236934997038876882827667607543672778874886831407192682295\
429941264140804609373039928301 4

```
> t := evalf(t-subs(x=t,f(x)/f1(x)));
```

$t :=$ (22)

1.55961046946236934997038876876500299328488351184309142472337460260886\
493677807203429805746394834618 7

```
> t := evalf(t-subs(x=t,f(x)/f1(x)));
```

$t :=$ (23)

1.55961046946236934997038876876500299328488351184309142471959456941397\
303454959058710541344469128397 4

```
> t := evalf(t-subs(x=t,f(x)/f1(x)));
```

$t :=$ (24)

1.55961046946236934997038876876500299328488351184309142471959456941397\
303454959058710541344469128397 4

```
> t := evalf(t-subs(x=t,f(x)/f1(x)));
```

$t :=$ (25)

1.55961046946236934997038876876500299328488351184309142471959456941397\
303454959058710541344469128397 4

Hier haben bereits 8 Schritte genügt, um den Wert auf 99 Nachkommastellen genau zu berechnen! Dies illustriert die Stärke des Verfahrens.

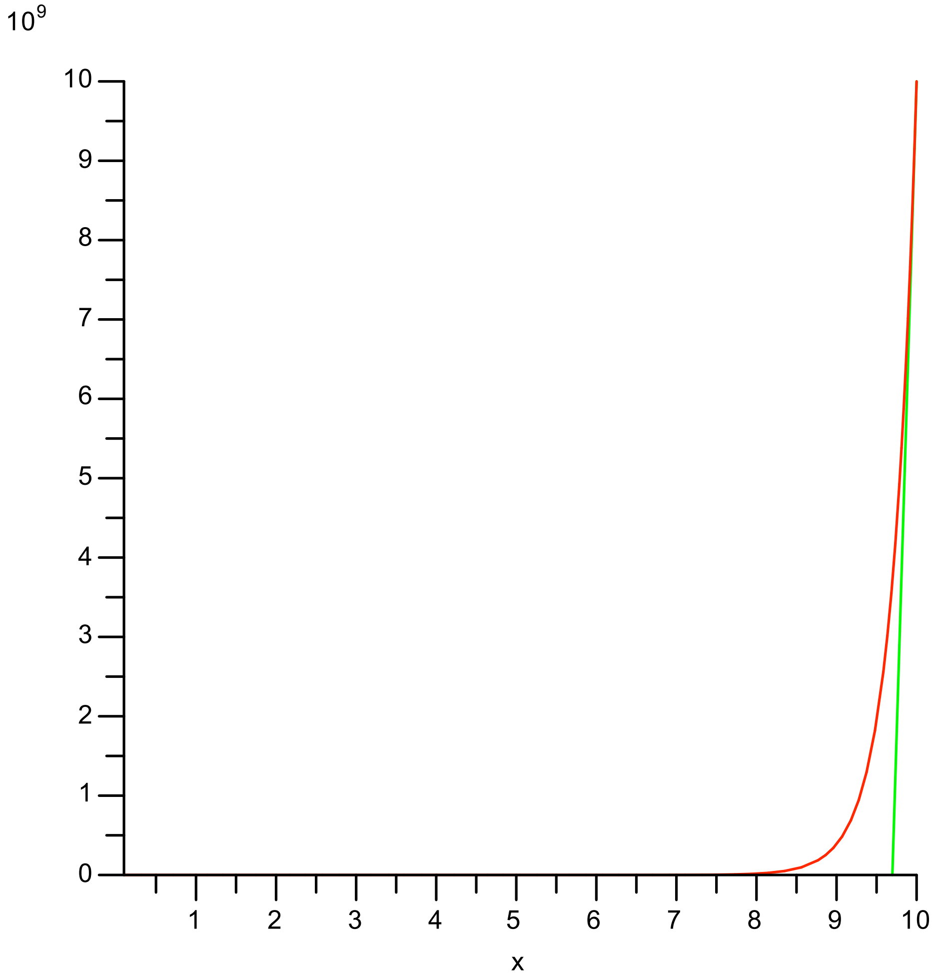
Bei einem ungünstigeren Startwert

```
> t:=10;
```

$$t := 10 \qquad (26)$$

geschieht zum Beispiel folgendes. Da die Tangente fast vertikal ist, ändert sich der Wert von t in einem Schritt relativ wenig:

```
> plot([x^x-2,subs(x=t,f(x))+subs(x=t,f1(x))*(x-t)],x=0.1..10,-10.
.10000000000);
```




```
> Digits := 10;
```

$$Digits := 10 \tag{27}$$

```
> t := evalf(t-subs(x=t,f(x)/f1(x)));
```

$$t := 9.697206894 \tag{28}$$

```
> t := evalf(t-subs(x=t,f(x)/f1(x)));
```

$$t := 9.391568280 \tag{29}$$

```
> t := evalf(t-subs(x=t,f(x)/f1(x)));
```

$$t := 9.082908423 \tag{30}$$

```
> t := evalf(t-subs(x=t,f(x)/f1(x)));
```

$$t := 8.771031637 \tag{31}$$

```
> t := evalf(t-subs(x=t,f(x)/f1(x)));
```

$$t := 8.455718896 \tag{32}$$

```
> t := evalf(t-subs(x=t,f(x)/f1(x)));
```

$$t := 8.136723664 \tag{33}$$

```
> t := evalf(t-subs(x=t,f(x)/f1(x)));
```

$$t := 7.813766706 \tag{34}$$

```
> t := evalf(t-subs(x=t,f(x)/f1(x)));
```
$$t := 7.486529559 \tag{35}$$

```
> t := evalf(t-subs(x=t,f(x)/f1(x)));
```
$$t := 7.154646231 \tag{36}$$

```
> t := evalf(t-subs(x=t,f(x)/f1(x)));
```
$$t := 6.817692502 \tag{37}$$

```
> t := evalf(t-subs(x=t,f(x)/f1(x)));
```
$$t := 6.475171989 \tag{38}$$

```
> t := evalf(t-subs(x=t,f(x)/f1(x)));
```
$$t := 6.126497830 \tag{39}$$

```
> t := evalf(t-subs(x=t,f(x)/f1(x)));
```
$$t := 5.770968550 \tag{40}$$

```
> t := evalf(t-subs(x=t,f(x)/f1(x)));
```
$$t := 5.407736710 \tag{41}$$

```
> t := evalf(t-subs(x=t,f(x)/f1(x)));
```
$$t := 5.035770310 \tag{42}$$

```
> t := evalf(t-subs(x=t,f(x)/f1(x)));
```
$$t := 4.653812845 \tag{43}$$

```
> t := evalf(t-subs(x=t,f(x)/f1(x)));
```
$$t := 4.260367992 \tag{44}$$

```
> t := evalf(t-subs(x=t,f(x)/f1(x)));
```
$$t := 3.853796758 \tag{45}$$

```
> t := evalf(t-subs(x=t,f(x)/f1(x)));
```
$$t := 3.432795886 \tag{46}$$

```
> t := evalf(t-subs(x=t,f(x)/f1(x)));
```
$$t := 2.998023758 \tag{47}$$

```
> t := evalf(t-subs(x=t,f(x)/f1(x)));
```
$$t := 2.556823225 \tag{48}$$

```
> t := evalf(t-subs(x=t,f(x)/f1(x)));
```
$$t := 2.134590212 \tag{49}$$

```
> t := evalf(t-subs(x=t,f(x)/f1(x)));
```
$$t := 1.791270495 \tag{50}$$

```
> t := evalf(t-subs(x=t,f(x)/f1(x)));
```
$$t := 1.604251568 \tag{51}$$

```
> t := evalf(t-subs(x=t,f(x)/f1(x)));
```
$$t := 1.561444976 \tag{52}$$

```
> t := evalf(t-subs(x=t,f(x)/f1(x)));
```
$$t := 1.559613644 \tag{53}$$

```
> t := evalf(t-subs(x=t,f(x)/f1(x)));
```
$$t := 1.559610469 \tag{54}$$

```
> t := evalf(t-subs(x=t,f(x)/f1(x)));
```

$$t := 1.559610469 \tag{55}$$

```
> t := evalf(t-subs(x=t,f(x)/f1(x)));
```

$$t := 1.559610469 \tag{56}$$

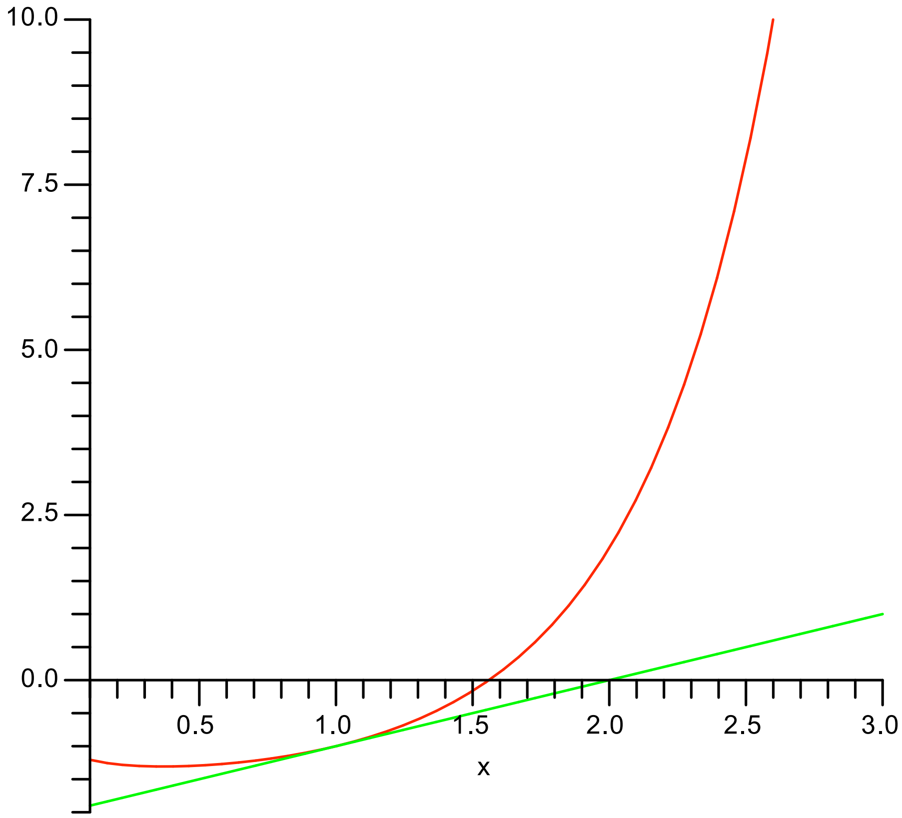
Hier haben wir 27 Schritte gebraucht, um 9 Nachkommastellen genau zu berechnen. Ab dann konvergiert das Verfahren natürlich wieder rasant, wie oben.

Ein zu kleiner Startwert wird zuerst nach rechts geworfen und konvergiert danach von rechts gegen die gesuchte Nullstelle:

```
> t:=1;
```

$$t := 1 \tag{57}$$

```
> plot([x^x-2,subs(x=t,f(x))+subs(x=t,f1(x))*(x-t)],x=0.1..3,-2..10)
;
```




```
> t := evalf(t-subs(x=t,f(x)/f1(x)));
```

$$t := 2. \tag{58}$$

```
> t := evalf(t-subs(x=t,f(x)/f1(x)));
```

$$t := 1.704691946 \tag{59}$$

```
> t := evalf(t-subs(x=t,f(x)/f1(x)));
```

(60)

$$t := 1.577944558 \tag{60}$$

```
> t := evalf(t-subs(x=t,f(x)/f1(x)));
```

$$t := 1.559924538 \tag{61}$$

```
> t := evalf(t-subs(x=t,f(x)/f1(x)));
```

$$t := 1.559610563 \tag{62}$$

```
> t := evalf(t-subs(x=t,f(x)/f1(x)));
```

$$t := 1.559610470 \tag{63}$$

```
> t := evalf(t-subs(x=t,f(x)/f1(x)));
```

$$t := 1.559610469 \tag{64}$$

```
> t := evalf(t-subs(x=t,f(x)/f1(x)));
```

$$t := 1.559610469 \tag{65}$$

```
> t := evalf(t-subs(x=t,f(x)/f1(x)));
```

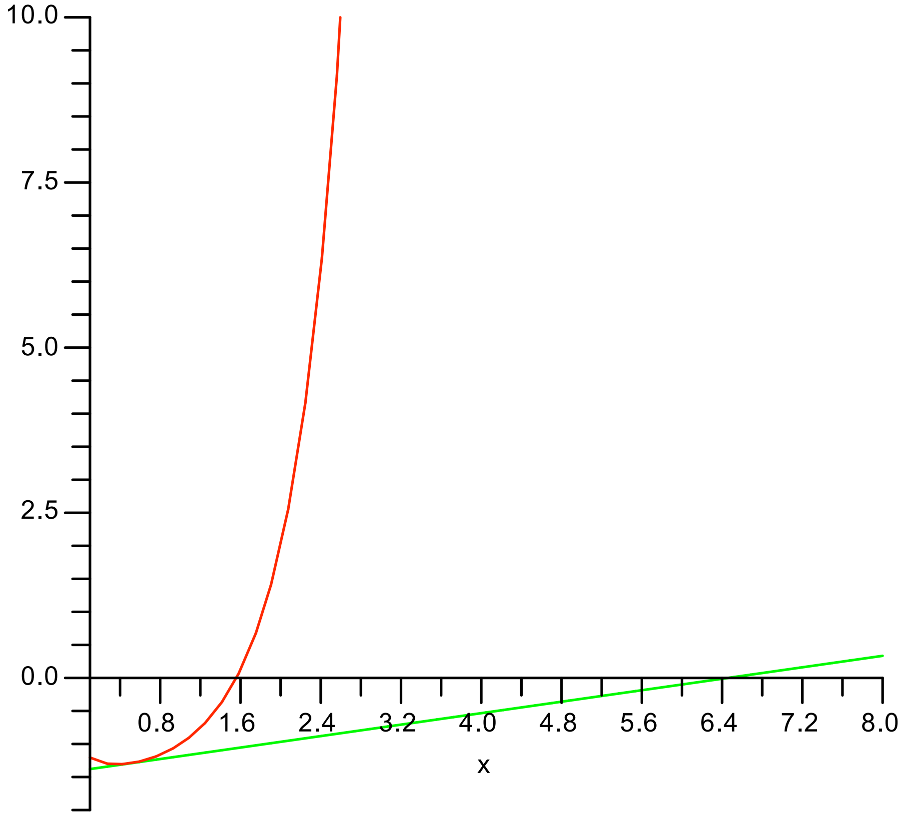
$$t := 1.559610469 \tag{66}$$

Das kann möglicherweise auch eine Weile dauern:

```
> t:=0.5;
```

$$t := 0.5 \tag{67}$$

```
> plot([x^x-2,subs(x=t,f(x))+subs(x=t,f1(x))*(x-t)],x=0.1..8,-2..10)
  ;
```




```
> t := evalf(t-subs(x=t,f(x)/f1(x)));
```
$t := 6.458645349$ (68)

```
> t := evalf(t-subs(x=t,f(x)/f1(x)));
```
$t := 6.109660408$ (69)

```
> t := evalf(t-subs(x=t,f(x)/f1(x)));
```
$t := 5.753783430$ (70)

```
> t := evalf(t-subs(x=t,f(x)/f1(x)));
```
$t := 5.390159079$ (71)

```
> t := evalf(t-subs(x=t,f(x)/f1(x)));
```
$t := 5.017745485$ (72)

```
> t := evalf(t-subs(x=t,f(x)/f1(x)));
```
$t := 4.635274627$ (73)

```
> t := evalf(t-subs(x=t,f(x)/f1(x)));
```
$t := 4.241239606$ (74)

```
> t := evalf(t-subs(x=t,f(x)/f1(x)));
```
$t := 3.834001634$ (75)

```
> t := evalf(t-subs(x=t,f(x)/f1(x)));
```
$$t := 3.412299812 \qquad (76)$$

```
> t := evalf(t-subs(x=t,f(x)/f1(x)));
```
$$t := 2.976967560 \qquad (77)$$

```
> t := evalf(t-subs(x=t,f(x)/f1(x)));
```
$$t := 2.535883754 \qquad (78)$$

```
> t := evalf(t-subs(x=t,f(x)/f1(x)));
```
$$t := 2.115736636 \qquad (79)$$

```
> t := evalf(t-subs(x=t,f(x)/f1(x)));
```
$$t := 1.778292681 \qquad (80)$$

```
> t := evalf(t-subs(x=t,f(x)/f1(x)));
```
$$t := 1.599662181 \qquad (81)$$

```
> t := evalf(t-subs(x=t,f(x)/f1(x)));
```
$$t := 1.561090984 \qquad (82)$$

```
> t := evalf(t-subs(x=t,f(x)/f1(x)));
```
$$t := 1.559612537 \qquad (83)$$

```
> t := evalf(t-subs(x=t,f(x)/f1(x)));
```
$$t := 1.559610469 \qquad (84)$$

```
> t := evalf(t-subs(x=t,f(x)/f1(x)));
```
$$t := 1.559610469 \qquad (85)$$

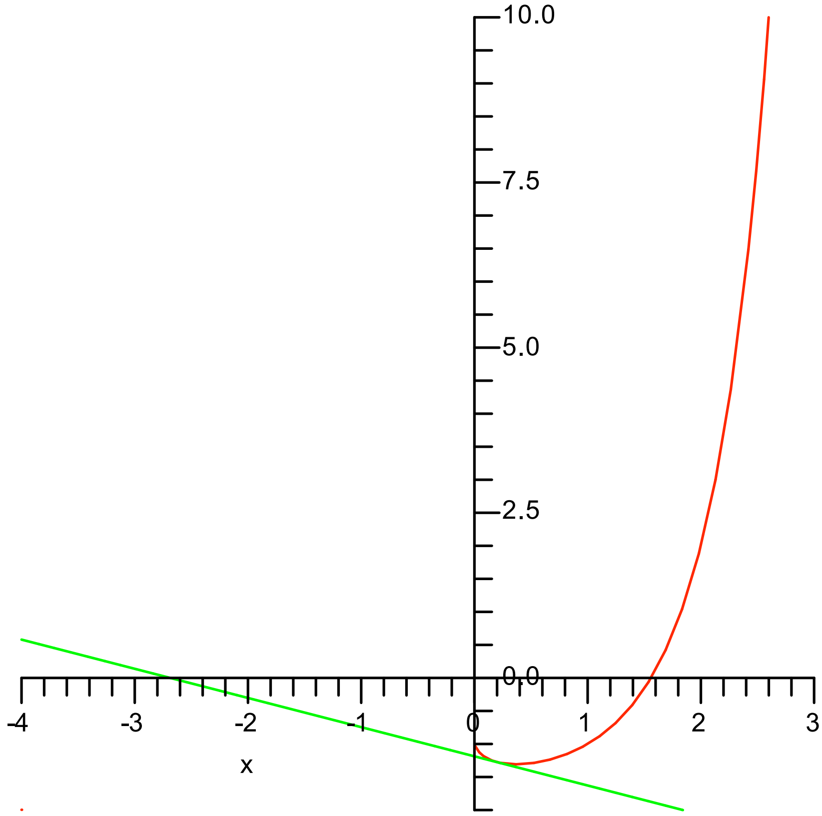
```
> t := evalf(t-subs(x=t,f(x)/f1(x)));
```
$$t := 1.559610469 \qquad (86)$$

Dafür waren 17 Schritte nötig.

Schliesslich kann ein noch kleinerer Startwert den folgenden Effekt haben:

```
> t:=0.2;
```
$$t := 0.2 \qquad (87)$$

```
> plot([x^x-2,subs(x=t,f(x))+subs(x=t,f1(x))*(x-t)],x=-4..3,-2..10);
```




```
> t := evalf(t-subs(x=t,f(x)/f1(x)));
```

$$t := -2.687019806 \tag{88}$$

```
> t := evalf(t-subs(x=t,f(x)/f1(x)));
```

$$t := 0.285025338 + 7.223969321\,\mathrm{I} \tag{89}$$

Hier hat t den Definitionsbereich von f(x) verlassen. Das Programm interpretiert den Logarithmus einer negativen Zahl als komplexe Zahl, was für die vorliegende Aufgabe aber nutzlos ist.

```
>
```

Einige unbestimmte Integrale

$$
\begin{array}{rcll}
\displaystyle\int x^n\,dx & = & \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + \text{const} & \text{für } x \in\ (-\infty,\infty),\ n\in\mathbb{Z},\ n\geq 0 \\
\displaystyle\int x^n\,dx & = & \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + \text{const} & \text{für } x \in\ (-\infty,0)\ \cup\ (0,\infty),\ n\in\mathbb{Z},\ n\leq -2 \\
\displaystyle\int x^s\,dx & = & \dfrac{x^{s+1}}{s+1} + \text{const} & \text{für } x \in\ (0,\infty),\ s\in\mathbb{C},\ s\neq -1 \\
\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx & = & \log|x| + \text{const} & \text{für } x \in\ (-\infty,0)\ \cup\ (0,\infty) \\
\displaystyle\int e^x\,dx & = & e^x + \text{const} & \text{für } x \in\ (-\infty,\infty) \\
\displaystyle\int \log x\,dx & = & x\log x - x + \text{const} & \text{für } x \in\ (0,\infty) \\
\displaystyle\int \sin x\,dx & = & -\cos x + \text{const} & \text{für } x \in\ (-\infty,\infty) \\
\displaystyle\int \cos x\,dx & = & \sin x + \text{const} & \text{für } x \in\ (-\infty,\infty) \\
\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx & = & \tan x + \text{const} & \text{für } x \in \displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(k\pi - \tfrac{\pi}{2}, k\pi + \tfrac{\pi}{2}\right) \\
\displaystyle\int \tan x\,dx & = & -\log|\cos x| + \text{const} & \text{für } x \in \displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(k\pi - \tfrac{\pi}{2}, k\pi + \tfrac{\pi}{2}\right) \\
\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx & = & \arcsin x + \text{const} & \text{für } x \in\ (-1,1) \\
\displaystyle\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx & = & \arccos x + \text{const} & \text{für } x \in\ (-1,1) \\
\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,dx & = & \arctan x + \text{const} & \text{für } x \in\ (-\infty,\infty) \\
\displaystyle\int \sinh x\,dx & = & \cosh x + \text{const} & \text{für } x \in\ (-\infty,\infty) \\
\displaystyle\int \cosh x\,dx & = & \sinh x + \text{const} & \text{für } x \in\ (-\infty,\infty) \\
\displaystyle\int \frac{1}{\cosh^2 x}\,dx & = & \tanh x + \text{const} & \text{für } x \in\ (-\infty,\infty) \\
\displaystyle\int \tanh x\,dx & = & \log\cosh x + \text{const} & \text{für } x \in\ (-\infty,\infty) \\
\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx & = & \operatorname{arsinh} x + \text{const} & \text{für } x \in\ (-\infty,\infty) \\
\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx & = & \operatorname{arcosh} x + \text{const} & \text{für } x \in\ (1,\infty) \\
\displaystyle\int \frac{1}{1-x^2}\,dx & = & \operatorname{artanh} x + \text{const} & \text{für } x \in\ (-1,1) \\
\displaystyle\int \frac{1}{1-x^2}\,dx & = & \operatorname{artanh} \dfrac{1}{x} + \text{const} & \text{für } x \in\ (-\infty,-1)\ \cup\ (1,\infty) \\
\displaystyle\int \frac{1}{1-x^2}\,dx & = & \dfrac{1}{2}\cdot\log\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right| + \text{const} & \text{für } x \in\ (-\infty,-1)\ \cup\ (-1,1)\ \cup\ (1,\infty)
\end{array}
$$

Integrationstechniken

für das unbestimmte Integral

Ableitungsregel	**Integrationsregel**
Addition: $(f+g)' = f' + g'$	Addition: $\int \big(f(x)+g(x)\big)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$
Skalare Multiplikation: $(\lambda f)' = \lambda \cdot f'$	Skalare Multiplikation: $\int \lambda \cdot f(x)dx = \lambda \cdot \int f(x)dx$
Produktformel: $(fg)' = f'g + fg'$	Partielle Integration: $\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$
Kettenregel: $\big(f(\varphi(y))\big)' = f'(\varphi(y)) \cdot \varphi'(y)$	Substitution: $\left(\int f(x)dx\right)_{x=\varphi(y)} = \int f(\varphi(y))\varphi'(y)dy$

Partialbruchzerlegung (zur Integration rationaler Funktionen):
Für teilerfremde Polynome $g_1(x), \ldots, g_n(x)$ und ein weiteres Polynom $f(x)$ existieren Polynome $f_i(x)$ vom Grad kleiner als der von $g_i(x)$ sowie ein Polynom $h(x)$, so dass gilt:

$$\frac{f(x)}{g_1(x)\cdots g_n(x)} = \frac{f_1(x)}{g_1(x)} + \ldots + \frac{f_n(x)}{g_n(x)} + h(x)$$

Standard-Substitutionen zur Integralberechnung

Integral	**Substitution**	**Differential**	**Bemerkungen**
$\int f\big(x, \sqrt{ax+b}\big)\,dx$	$x = \dfrac{t^2-b}{a}$	$dx = \dfrac{2t\,dt}{a}$	$t \geq 0$
$\int f\big(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\big)\,dx$	$x = \alpha t + \beta$	$dx = \alpha\,dt$	wähle $\alpha, \gamma > 0$ und β so, dass gilt $ax^2+bx+c = \gamma^2 \cdot (1-t^2)$ oder $= \gamma^2 \cdot (1+t^2)$ oder $= \gamma^2 \cdot (t^2-1)$
$\int f\big(x, \sqrt{1-x^2}\big)\,dx$	$x = \sin t$	$dx = \cos t\,dt$	$-\dfrac{\pi}{2} \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$
$\int f\big(x, \sqrt{1+x^2}\big)\,dx$	$x = \sinh t$	$dx = \cosh t\,dt$	$t \in \mathbb{R}$
$\int f\big(x, \sqrt{x^2-1}\big)\,dx$	$x = \cosh t$	$dx = \sinh t\,dt$	$t \geq 0$
$\int f(e^x, \sinh x, \cosh x)\,dx$	$e^x = t$	$dx = \dfrac{dt}{t}$	$t > 0$, und dabei gilt $\sinh x = \dfrac{t^2-1}{2t}$, $\cosh x = \dfrac{t^2+1}{2t}$
$\int f(\sin x, \cos x)\,dx$	$\tan \dfrac{x}{2} = t$	$dx = \dfrac{2\,dt}{1+t^2}$	$-\dfrac{\pi}{2} < t < \dfrac{\pi}{2}$, und dabei gilt $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$

In vielen Fällen wird das Integral nach der Substitution einfachere Gestalt haben. Ist insbesondere f eine rationale Funktion, so hat man nach der Substitution ein Integral der Form $\int R(t)\,dt$ mit einer rationalen Funktion $R(t)$. Dieses behandelt man durch Partialbruchzerlegung.

Wenn sich ein Integral mit diesen Hinweisen nicht lösen lässt, so sollte man es mit einer anderen Substitution oder mit partieller Integration versuchen. Im Zweifelsfall hilft nur Erfahrung.

Vorlesung Analysis I für D-ITET im HS 2010

Berechnung von $\displaystyle\int \frac{f(x)}{g(x)}\,dx$ mit Partialbruchzerlegung

Seien $f(x)$ und $g(x)$ zwei Polynome.

1) Faktorisiere $g(x)$ über $\mathbb{R}$ soweit wie möglich, das heisst, schreibe $g(x) = g_1(x)\cdots g_n(x)$ mit teilerfremden Polynomen $g_i(x)$, deren jedes eine Potenz eines irreduziblen Polynoms vom Grad 1 oder 2 ist. Dabei entsprechen die irreduziblen Faktoren vom Grad 1 den reellen Nullstellen von $g(x)$, die irreduziblen Faktoren vom Grad 2 den Paaren konjugiert komplexer nicht-reeller Nullstellen.

2) Finde die Partialbruchzerlegung von $\frac{f(x)}{g(x)}$, das heisst, finde weitere Polynome $g_i(x)$ sowie $h(x)$ mit $\deg f_i(x) < \deg g_i(x)$ und $\deg h(x) \leq \deg f(x) - \deg g(x)$, so dass gilt:

$$\frac{f(x)}{g_1(x)\cdots g_n(x)} = \frac{f_1(x)}{g_1(x)} + \ldots + \frac{f_n(x)}{g_n(x)} + h(x)$$

Die Polynome $g_i(x)$ und $h(x)$ findet man durch Ansatz mit noch zu bestimmenden Koeffizienten, durch Multiplizieren mit $g_1(x)\cdots g_n(x)$, sowie mit Koeffizientenvergleich.

Danach ist das Problem reduziert auf die folgenden Fälle:

3) $g(x) = (ax+b)^n$: Die Substitution $t = ax+b$ überführt das Integral in eines der Form $\int \frac{f(t)}{t^n}\,dt$. Dieses löst man durch Zerlegen von $f(t)$ in Monome und Einsetzen der bekannten Formeln für $\int t^s\,dt$.

4) $g(x) = (ax^2+bx+c)^n$: Eine Substitution der Form $t = \alpha x + \beta$ für geeignete α, β normiert $g(x)$ auf die Gestalt $(1+t^2)^n$. Danach schreibt man den Zähler in der Form $f(t) = f_0(1+t^2) + t \cdot f_1(1+t^2)$ und zerlegt f_0 und f_1 in Monome. Dies reduziert die Frage auf die Fälle $f(t) = 1$ und $f(t) = t$.

5) $g(x) = (1+t^2)^n$: Das Integral $\displaystyle\int \frac{t\,dt}{(1+t^2)^n}$ berechnet man mit Hilfe der Substitution $1+t^2 = u$. Andererseits hat man

$$\int \frac{dt}{1+t^2} \;=\; \arctan t + \text{const},$$

und für $n > 1$ beweist man mit partieller Integration die Induktionsformel

$$\int \frac{dt}{(1+t^2)^n} \;=\; \frac{2n-3}{2n-2} \cdot \int \frac{dt}{(1+t^2)^{n-1}} + \frac{1}{2n-2} \cdot \frac{t}{(1+t^2)^{n-1}} + \text{const}.$$

Index

Todo list