Vorlesung Analysis I für D-ITET im HS 2010

Grenzwert-Baukasten

Seien $X \subset \mathbb{R}^m$ eine Teilmenge und $f : X \to \mathbb{R}^n$ eine Funktion, und seien $x_0 \in \mathbb{R}^m$ und $y_0 \in \mathbb{R}^n$. Die Abwandlung des üblichen Grenzwertbegriffs $\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0$ liefert insgesamt $3 \times 5 = 15$ Varianten, wobei eine beliebige Zeile der oberen Tabelle mit einer beliebigen Zeile der unteren Tabelle kombiniert werden darf:

			Dimension
y_0	$\varepsilon > 0$	$\lvert f(x) - y_0\rvert < \varepsilon$	n beliebig
$+\infty$	N	$f(x) > N$	$n = 1$
$-\infty$	N	$f(x) < -N$	$n = 1$

$$\boxed{\lim_{x\to\dots} f(x) = \dots \quad :\Longleftrightarrow \quad \forall \dots\ \exists \dots\ \forall x \in X : \dots\dots\dots \Rightarrow \dots\dots\dots}$$

			Dimension	Vorbedingung
x_0	$\delta > 0$	$0 < \lvert x - x_0\rvert < \delta$	m beliebig	$x_0 \in \overline{X \setminus \{x_0\}}$
x_0+	$\delta > 0$	$0 < x - x_0 < \delta$	$m = 1$	$x_0 \in \overline{X \cap]x_0, \infty[}$
x_0-	$\delta > 0$	$0 < x_0 - x < \delta$	$m = 1$	$x_0 \in \overline{X \cap]-\infty, x_0[}$
$+\infty$	M	$x > M$	$m = 1$	X nach oben unbeschränkt
$-\infty$	M	$x < -M$	$m = 1$	X nach unten unbeschränkt