Analysis II

Prof. Richard Pink

FS 2011

Michal Sudwoj

Geschrieben in

XeLaTeX

INHALTSVERZEICHNIS

Inhaltsverzeichnis

Teil I

Vorlesungsnotizen

Kapitel 1

Einschub: Stetigkeit

$f : X \to \mathbb{R}^n, X \to\subset \mathbb{R}^m$
f stetig $\iff \forall x \in X \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall y \in X : |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$
f gleichmässig stetig $\iff$
$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in X \forall y \in X : |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

Bem.:
gleichmässig stetig $\Rightarrow$ stetig
gleichmässig stetig $\not\Leftarrow$ stetig

Bsp.:

$\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto |x| \rightsquigarrow \delta := \varepsilon$ tut's
$|x - y| < \varepsilon \implies ||x| - |y|| < \varepsilon$

Bsp.:

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sin x \rightsquigarrow d := \text{ tut's}$$

$$|\sin x - \sin y| \overset{\text{MWS}}{=} \left| \frac{d \sin x}{dx} \right|_{x=t} \text{ für ein } t \text{ zu } x, y$$

$$|\sin x - \sin y| = |\cos t| \leq 1$$

Bsp.:

$\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ nicht gleichmässig stetig. Denn wenn zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ es täte, dann insbesondere $y = x + \frac{\delta}{2}$ $\left|x^2 - (x + \frac{\delta}{2})^2\right| = \left|\frac{\delta}{2}(2x + \frac{\delta}{2})\right| \to \infty$ für $x \to \infty$, insbesondere nicht $< \varepsilon$ für alle $x \in \mathbb{R}$

Bsp.:

$\mathbb{R}^{\geq 0} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x}$ gleichmässig stetig, denn: auf $[0, 1]$ wegen Satz (siehe unten), auf $[1, \infty[$ wegen $|f'(x)| \leq 1 \rightsquigarrow$ auf $[0, \infty[$ tut's jeweils das kleinere δ

Satz:

X kompakt $\implies$ jede Folge in X besitzt eine konvergente

Teilfolge.

Beweisidee:
Halbierungsprinzip

Satz:
X kompakt, $f : X \to \mathbb{R}^n$ stetig $\implies$ f ist gleichmässig stetig

Bew.:

Wenn nicht, sei $\varepsilon > 0$, so dann: $\forall\delta > 0 \exists x \exists y \in X : |x-y| < \delta \wedge |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$
Zu jedem $r \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$: wähle $x_r \in X, y_r \in X$: $|x_r - y_r| < \frac{1}{r}, |f(x_r) - f(y_r)| \geq \varepsilon$
Dann ist (x_r) eine Folge in X, d.h.: $\exists$ natürliche Zahlen $r_1 < r_2 < r_3 < \ldots$ sodass $\lim_{i\to\infty} x_{r_i} = x \in X \implies |x - x_{r_i}| \to 0$ für $i \to \infty$
$\underbrace{|x - y_{r_i}|}_{\to 0} \leq \underbrace{|x - x_{r_i}|}_{\to 0} + \underbrace{|x_{r_i} - y_{r_i}|}_{\leq \frac{1}{r_i} \to 0}$
Aber: f stetig in $x \implies \exists\delta > 0 : \forall z \in X : |z - x| < \delta \implies |f(z) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$
$\implies \exists i_0 \forall i \geq i_0$:
$|x - x_{r_i}| < \delta \implies |f(x) - f(x_{r_i})| < \frac{\varepsilon}{3}$
$|x - y_{r_i}| < \delta \implies |f(x) - f(y_{r_i})| < \frac{\varepsilon}{3}$
$\implies |f(x_{r_i}) - f(y_{r_i})| \leq \frac{2\varepsilon}{3}$ Widerspruch!

Def.: Lipschitz stetig:

f heisst **Lipschitz stetig**, falls $\exists C > 0 : \forall x, y \in X : |f(x) - f(y)| \leq C \cdot |x - y|$ (dann tut's $\delta := \frac{\varepsilon}{C}$ in gleichmässiger Stetigkeit)

Def.: lokal Lipschitz stetig:

f heisst **lokal Lipschitz stetig**, falls:
$\forall x \in X : \exists C > 0 \exists \delta > 0 : \forall y \in X : |x-y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| \leq C \cdot |x-y|$

Bsp.:
$\mathbb{R}^{\geq 0} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^\alpha$ für $0 < \alpha < 1$ ist nicht lokal Lipschitz stetig, denn:
$x = 0, |f(x) - f(y)| = y^\alpha \not\leq C \cdot y$ für $y \to 0$

Bem.:
f differenzierbar $\implies$ f lokal Lipschitz stetig.

Bew.:
head = Denn Für $x \in X$ fest: $f(y) = f(x) + f'(x) \cdot (x-y)$
$\implies |f(y) - f(x)| \leq |f'(x)| \cdot |x-y| + |x-y|$
$\implies C := |f'(x)| + 1$
$\frac{g(x)}{|x-y|} \to 0$ für $y \to x$
$\implies \exists \delta > 0 : \frac{|g(x)|}{|x-y|} \leq 1$
Dieses C und dieses δ tun's!

Bem.:
Die Grundrechenarten sind lokal Lipschitz stetig.

Bem.:
Jede Komposition von lokal Lipschitz stetigen Funktionen ist Lipschitz stetig.

Kapitel 2

Differenzialgleichungen

Def.: gewönliche Differentialgleichung $n$ter Ordnung:
Eine **Differentialgleichung** ist eine Gleichung der Form

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

für eine Funktion $F : X \to \mathbb{R}, X \subset \mathbb{R}^{n+2}$
$n = 0 : F(x, y) = 0$
Eine Funktion $x \mapsto y(x)$ mit $F(x, y(x)) = 0$ heisst **implizite Funktion**. So heisst sie auch **implizite Differentialgleichung**.
"explizite" Differentialgleichung n-ter Ordnung:

$$y^(n) = G(x, y, \dots, y^{(n-1)}$$

für eine Funktion G.

Interpretation für $n = 1$:

$$y' = G(x, y); G : X \to \mathbb{R}, x \subset \mathbb{R}^2$$

Richtungsfeld durch G bestimmt.
Graph einer Lösung = Kurve, die überall tangential zum Richtungsfeld ist.

2.1 Existenz- und Eindeutigkeitssatz

Satz: Exsistenz- und Eindeutigkeitssatz:

Sei $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen und $F: U \to \mathbb{R}$ lokal Lipschitz stetig. Sei $(x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}) \in U$ ein Anfangspunkt.

(a) Die Gleichung $y^{(n)} = F(x, y, \dots, y^{(n-1)})$ hat eine Lösung $y : [x_0, x_0 + \varepsilon[\to \mathbb{R}$ mit $y^{(i)}(x_0) = y_0^{(i)}$ für alle $0 \leq i \leq n-1$ für ein $\varepsilon > 0$.

(b) Zwei solche Lösungen stimmen auf dem Durchschnitt ihrer Existenzintervalle überein.

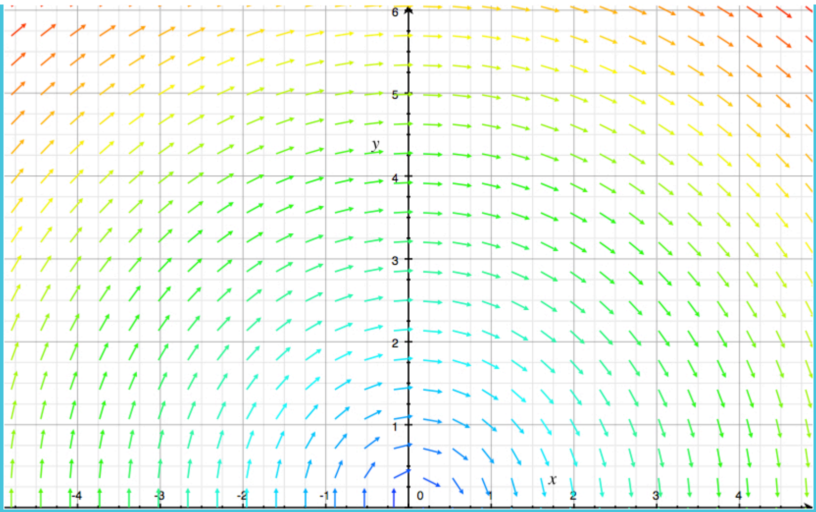
(c) Es existiert eine eindeutige "maximale" Lösung, d.h. mit ε maximal, d.h. auf $[x_0, x_1[$ mit x_1 maximal

(d) Diese maximale Lösung verlässt jede kompakte Teilmenge $K \subset U$, d.h. $\exists \xi \in [x_0, x_1[$ mit $\forall x \in [\xi, x_1[$: $(x, y(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) \notin K$

Analog auf $]x_2, x_1]$ nach hinten! Analog vektorwertige Funktionen: $U \subset \mathbb{R}^{1+n \cdot m}$, $y : [x_0, x_0 + \varepsilon[\to \mathbb{R}$ $\leftrightsquigarrow$ System von m gekoppelten Differentialgleichungen

Bsp.1:

$y' = \frac{-x}{y}$ auf $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$
Richtungsfeld:
Steigung: $= \frac{-x}{y}$
$\rightsquigarrow$ Vektor in diese Richtung $(1, -\frac{x}{y})$
$(y, -x) = (x, y)$ um $90°$ gedreht



Rate: $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ für $r > 0$

$$\implies y' = \frac{-2x}{2\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{-x}{y}$$

$(x, y) \mapsto \frac{-x}{y}$ ist lokal Lipsschitz stetig $\implies$ Existenz- und Eindeutigkeitssatz anwendbar.
Zu $(x_0, y_0) \in U$ gibt $r := \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ eine Lösung $x \mapsto \sqrt{r^2 - x^2}$ durch (x_0, y_0)
$\implies$ das ist **die** Lösung durch (x_0, y_0).
max. Existenzintervall $]-r, r[$

Bsp.2:

$$y' = \underbrace{y^2}_{\text{lokal Lipschitz stetig}} \quad \text{auf } U = \mathbb{R}^2$$

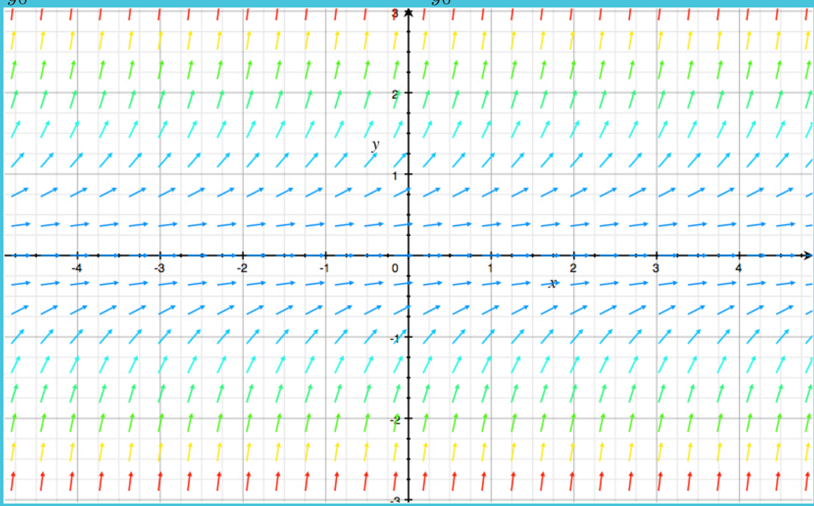
Rechentrik: Vertausche x, y:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y^2 \overset{y \neq 0}{\iff} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{y^2} \iff x = \int \frac{dy}{y^2} = \frac{-1}{y} + c$$
$$\iff \frac{-1}{y} = c - x \iff y = \frac{1}{c - x}$$

Test:

$$\left(\frac{1}{c-x}\right)' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{c-x}\right) = \frac{+1}{(c-x)^2} = \left(\frac{1}{c-x}\right)^2$$

$\Longrightarrow$ Die Funktion $x \mapsto y := \frac{1}{c-x}$ ist eine Lösung. $\mathbb{R}\backslash\{c\} \to \mathbb{R}$ für jedes $c \in \mathbb{R}$.
Diese gilt durch $(x_0, y_0) \iff x_0 \neq c \wedge y_0 = \frac{1}{c-x} \neq 0 \iff \frac{1}{y_0} = c - x_0 \iff y_0 \neq 0 \wedge c = \frac{1}{y_0} + x_0$

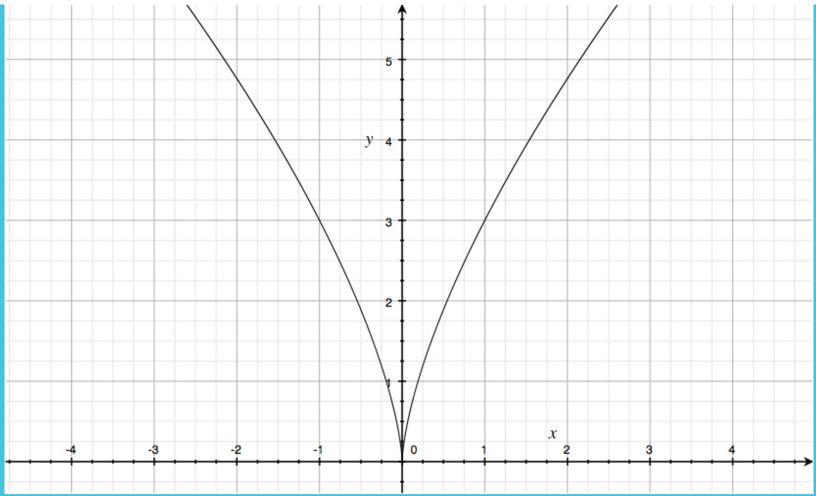


$\rightsquigarrow$ Maximallösungen: auf $]-\infty, c[$ oder $]c, \infty[$ sowie $y \equiv 0$ auf $\mathbb{R}$

Bsp.3:

$$y' = 3\,|y|^{\frac{2}{3}}$$

Graph ($y \mapsto 3\,|y|^{\frac{2}{3}}$)



nicht lokal Lipschitz stetig bei $y = 0$

Fall $y > 0:$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 3y^{\frac{2}{3}}$$

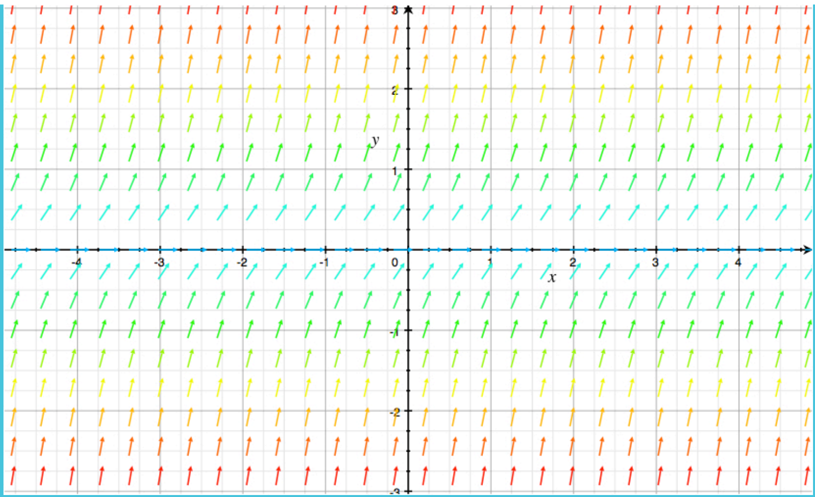
$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}}$$

$$x = \int \frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}}dy = y^{\frac{1}{3}} + c$$

$$y^{\frac{1}{3}} = x - c$$

$$y = (x - c)^3$$

Diese $> 0 \iff x > c$
$\rightsquigarrow$ Lösung: $]c, \infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto (x - c)^3$
Test: $y' = 3(x - c)^2 = 3\,|x - c|^{\frac{2}{3}}$
Fall $y < 0$ ...
Lösung: $]-\infty, c[\to \mathbb{R}, x \mapsto (x - c)^3$



Leicht: Durch jeden Punkt (x_0, y_0) mit $y_0 \neq 0$ geht genau eine dieser Lösungen.
Darin ist $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 0$ eine Lösung.
Jede Lösung auf einem Intervall hat die Gestalt für $-\infty \leq c_2 \leq c_1 \leq \infty$

$$y(x) = \begin{cases} (x - c_1)^3 & x > c_1 \\ 0 & c_2 \leq x \leq c_1 \\ (x - c_2)^3 & x < c_2 \end{cases}$$

Bsp.:

Finde alle Kurven in $\mathbb{R}^2$, welche die Hyperbeln $xy = \text{const}$ überall sekrecht schneiden (**Orthogonaltrajektorien**)
Durch (x_0, y_0) geht die Hyperbel $xy = x_0 y_0$

$$xy = x_0 y_0$$
$$y = \frac{x_0 y_0}{x}$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{-x_0 y_0}{x^2}$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0} = -\frac{y_0}{x_0}$$

Orthogonale Steigung: $+\frac{x_0}{y_0}$

Gesuchte Kurve hat die Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x}{y}$$

Die ist **separierbar**. Trick: Multipliziere mit $y \cdot \mathrm{d}x$

$$y\,\mathrm{d}y = x\,\mathrm{d}x$$
$$y^2 = \int 2y\,\mathrm{d}y = \int 2x\,\mathrm{d}x = x^2 + c$$
$$y = \pm\sqrt{x^2+c}$$
$$y^2 - x^2 = c$$
$$(y-x)(y+x) = c \text{ Drehung um } 45° \text{ Grad}$$

Antowort: Alle um $45°$ gedrehten Hyperbeln
Nachrechnen $\rightsquigarrow$ okay, auch für $x = 0$ und $y = 0$

2.2 Lösungen von Differentialgleichungen in Termen bekannter Funktionen und Integralen

2.2.1 Separierbare Differentialgleichungen erster Ordnung

$$y' = g(x) \cdot K(y)$$

Ansatz:

(a) Für y_0 mit $K(y_0) = 0$ ist $y \equiv y_0$ eine Lösung

(b) Für $K(y) \neq 0$ multipliziere mit $\mathrm{d}x \cdot K(y)^{-1}$

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{K(y)} = \int g(x)\,\mathrm{d}x$$
$$H(y) = F(x) + c$$

$H(y)$ ist lokal invertierbar, da $\frac{dH}{dy}(y) = \frac{1}{K(x)} \neq 0$
$\rightsquigarrow$ Lösung ist: $y = H^{-1}(F(x) + c)$

Bsp.:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1 + y^2$$

$1 + y^2 \neq 0$ immer

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{1+y^2} = \int \mathrm{d}x$$

$$\arctan y = x + c$$

$$y = \tan(x + c)$$

Bsp.:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}$$

konstante Lösungen: $y = \pm 1$

nichtkonstante Lösungen:

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^2}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\arcsin y = \arcsin x + c$$

$$\begin{aligned} y &= \sin(\arcsin x + c) \\ &= x \cdot \cos c + \cos \arcsin x \cdot \sin c \\ &= x \cdot b \pm \sqrt{1-x^2} \cdot a, a^2 + b^2 = 1 \\ &= xb + \sqrt{1-x^2} \cdot a \end{aligned}$$

2.2.2 Homogene Differentialgleichungen ertster Ordnung

$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x,y)$ mit $f(x,y) = f(cx,cy)$ für alle c,x,y

Äquivalent: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f\left(1,\frac{y}{x}\right)$

Ansatz: $u = \frac{y}{x}$

$\rightsquigarrow \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}{x} - \frac{y}{x^2} = \frac{f(1,u)}{x} - \frac{u}{x}$

$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{f(1,u)-u}{x}$ separierbar

Bsp.:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y+\sqrt{x^2+y^2}}{x}$$
$$\frac{y}{x} = u \rightsquigarrow u + \sqrt{1+u^2}$$
$$\rightsquigarrow \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{\sqrt{1+u^2}}{x}$$

$\rightsquigarrow$ keine konstante Lösungen

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u^2}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x}$$
$$\operatorname{arsinh} u = \log|x| + c$$
$$u = \sinh(\log|x|+c) = \sinh\log ax = \frac{e^{\log ax} - e^{-\log ax}}{2} = \frac{ax - \frac{1}{ax}}{2}$$
$$\rightsquigarrow y = ux = \frac{ax-\frac{1}{ax}}{2}\cdot x = \frac{a^2x^2-1}{2a}$$

Bsp.:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x+qy}{qx-y} = \frac{1+q\frac{y}{x}}{q-\frac{y}{x}}$$

$$u = \frac{y}{x} \rightsquigarrow \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{1+qu}{q-u}$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{1+qu}{q-u} - u}{x} = \frac{\frac{1+u^2}{q-u}}{x}$$

$$\rightsquigarrow \int \frac{q-u}{1+u^2} du = \int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \log|x| + c$$

Linke Seite: $q \cdot \arctan u - \underbrace{\int \frac{u\,\mathrm{d}u}{1+u^2}}_{\frac{1}{2}\log(1+u^2)}$

$$q \arctan u - \frac{1}{2}\log(1+u^2) = \log|x| + c$$

nicht nach u auflösbar. Aber:

$$x = r\cos\varphi$$

$$y = r\sin\varphi$$

$$\rightsquigarrow u = \tan\varphi$$

$$\underbrace{q\varphi - \frac{1}{2}\log\frac{1}{\cos^2\varphi}}_{+\log|\cos\varphi|} = \underbrace{\log|r\cos\varphi|}_{\log r + \log|\cos\varphi|} + c$$

$$q\varphi = \log r + c$$

$$r = e^{q\varphi - c}$$

$$x = e^{q\varphi - c}\cos\varphi$$

$$y = e^{q\varphi - c}\sin\varphi$$

logarithmische Spirale

2.2.3 Allgemeine lineare Differentialgleichung erster Ordnung

$y' = p(x) \cdot y + q(x)$

Homogener Fall

homogen falls $q(x) \equiv 0$

$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p(x) \cdot y$ ist separierbar
konstante Lösungen: $y \equiv 0$

$$\log|y| = \int \frac{dy}{y} = \int p(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\underbrace{\log|y| - c}_{\log\frac{y}{a}, a \neq 0} = \int p(x)\,\mathrm{d}x$$

allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung

$y = a \cdot e^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}$ für alle $a \in \mathbb{R}$ konstant

Inhomogener Fall

Variation der Konstanten, d.h. ersetze die Konstante durch eine Funktion.
Wähle eine nichtriviale Lösung $Y \neq 0$ der homogenen Differentialgleichung:
$Y' = p(x) \cdot Y$

Ansatz: $y(x) = Y(x) \cdot u(x)$

$$\underbrace{y'}_{\substack{=py+q \\ =pYu+q}} = (Yu)' = Y'u + Yu' = pYu + Yu'$$

$$Yu' = q$$

$$u' = \frac{q}{Y}$$

$$u(x) = \int \frac{q(x)}{Y(x)}\,\mathrm{d}x + c$$

$$y(x) = Y(x) \cdot \left[\int \frac{q(x)}{Y(x)}\,\mathrm{d}x + c\right]$$

$y(x) = Y(x) \cdot \int \frac{q(x)}{Y(x)}\,\mathrm{d}x + c \cdot Y(x), c$ const.

Bsp.1:

$y' = x^3 - xy$

homogene DGL: $Y' = -xY$

$$\int -x \,\mathrm{d}x = -\frac{x^2}{2} + c$$

Wähle $Y = e^{-\frac{x^2}{2}}$

$$\implies y(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \int \frac{x^3}{e^{-\frac{x^2}{2}}} \,\mathrm{d}x + c \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$\begin{aligned}
\int x^3 e^{\frac{x^2}{2}} &= \left| \begin{matrix} u = \frac{x^2}{2} \\ \mathrm{d}u = x \,\mathrm{d}x \\ x^3 = x^2 x = 2ux \end{matrix} \right| \\
&= \int \underbrace{2u}_{\downarrow} \cdot \underbrace{e^u}_{\uparrow} \,\mathrm{d}u \\
&= 2ue^u - \int 2e^u \,\mathrm{d}u \\
&= 2ue^u - 2e^u + c \\
&= 2e^u(u-1) + c \\
&= 2e^{\frac{x^2}{2}}(\frac{x^2}{x} - 1) + c \\
&= e^{\frac{x^2}{2}}(x^2 - 2) + c
\end{aligned}$$

$y(x) = x^2 - 2 + ce^{-\frac{x^2}{2}}$

Probe: $y' = 2x - cxe^{-\frac{x^2}{2}}$

$x^3 - xy = x^2 - x(x^2 - 2 + ce^{-\frac{x^2}{2}}$

Bsp.2:

$y' + \frac{y}{x} = \sqrt{x}$ für $x > 0$

homogene DGL: $Y' + \frac{Y}{x} = 0$

d.h. $\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}x} = -\frac{Y}{x} \iff \int \frac{\mathrm{d}Y}{Y} = -\int \frac{\mathrm{d}x}{x}$

$$\iff \log|Y| = -\log|x| + c$$

$$= \log \frac{1}{|x|} + c$$

$Y =$ const. $\cdot \frac{1}{x}$

Wähle $Y = \frac{1}{x} \rightsquigarrow \frac{q(x)}{Y(x)} = \frac{\sqrt{x}}{\frac{1}{x}}$

Ansatz: $y = u\frac{1}{x}$

$$y(x) = \frac{1}{x}\int x^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x + \frac{c}{x} = \frac{1}{x}\left(\frac{2}{3}x^{\frac{5}{2}}\right) + \frac{c}{x}$$

$$\implies y(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{c}{x}$$

2.2.4 Lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$y'' + p(x)\cdot y' + q(x)\cdot y = r(x)$$

homogen falls $r(x) = 0$

(a) Suche Lösungen der homogenen Differentialgleichung $Y'' + pY' + qY = 0$

(b) Variation der Konstanten für inhomogene Gleichung

Bsp.: Ad (b):

$y'' + y = \tan x$

$Y'' + Y = 0$Errate Lösungen: $\sin x, \cos x$

$\rightsquigarrow$ allg. Lösung der homogenen DGL:

$a \cdot \sin x + b \cdot \cos x; a, b$ konstant

Ansatz: $y = u \sin x + v \cos x$

für zu bestimmende Funktionen u, v

$\rightsquigarrow y' = (u \cos x - v \sin x) + (\underbrace{u' \sin x + v' \cos x}_{\text{Setze } =0})$

$\rightsquigarrow y'' = (-u \sin x - v \cos x) + (u' \cos c - v' \sin x)$

$\underbrace{y + y''}_{=\tan x} = u' \cos x - v' \sin x$

$u' \sin x + v' \cos x = 0$

$u' \cos x - v' \sin x = \tan x$

Dies ist ein LGS für u' und v'

$u'(\underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_{=1}) + v'(\underbrace{\cos x \sin x - \sin x \cos x}_{=0}) = \underbrace{\tan x \cos x}_{=\sin x}$

$\rightsquigarrow u' = \sin x$

analog: $v' = \dfrac{-\sin^2 x}{\cos x}$

$\rightsquigarrow u = \displaystyle\int \sin x \, \mathrm{d}x = -\cos x +$ const.

$v = -\displaystyle\int \frac{sin^2}{\cos x} \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \log \left| \frac{1 - \sin x}{1 + \sin x} \right| + \sin x +$ const.

$\rightsquigarrow$ allg. Lösung:

$$y(x) = -\cos x \sin x + \left(\frac{1}{2} \log \left| \frac{1 - \sin x}{1 + \sin x} \right| + \sin x \right) \cdot \cos x$$
$$+ a \sin x + b \cos x$$
$$= \frac{1}{2} \cos x \log \left| \frac{1 - \sin x}{1 + \sin x} \right| + a \sin x + b \cos x$$

für Konstanten a, b

Bsp.: für Lösung mit Potenzreihenansatz:

Besselsche DGL:

$$f''(x) + \frac{1}{x} f'(x) + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) \cdot f(x) = 0, n \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$$

Gesucht: alle Lösungen der Form

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot x^k \text{ für Konstanten } a_k$$

$$\rightsquigarrow f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot k \cdot x^{k-1}$$

$$f''(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot k \cdot (k-1) \cdot x^{k-2}$$

$$\rightsquigarrow 0 = \sum_{k=0}^{\infty} a_k k(k-1) x^{k-2} + \frac{1}{x} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot k \cdot x^{k-1} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot x^k$$

Setze $a_{-1} = a_{-2} = 0$

$$0 = \sum_{k=0}^{\infty} x^{k-2} \left[a_k k(k-1) + a_k k - a_k n^2\right] + \sum_{k=0}^{\infty} a_{k-2} x^{k-2}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} x^{k-2} \left[\underbrace{a_k k(k-1) + a_k k - a_k n^2 + a_{k-2}}_{=0 \text{ nach Potenzreihenidentitätssatz}}\right]$$

d.h. $\forall k \geq 0 : a_k(k^2 - n^2 + a_{k-2} = 0$

$$\rightsquigarrow \forall k \geq 0 : \begin{cases} a_k = \frac{a_{k-2}}{n^2-k_2} & k \neq n \\ a_{n-2} = 0 & k = n \end{cases}$$

$\rightsquigarrow a_k = 0$ falls $k \not\equiv n \pmod 2$

$a_k = 0$ falls $k < n$

Setze $a_n = a$

$\rightsquigarrow$ für $l \geq 0$ gilt $a_{n+2l} = \dfrac{a_{n+2(l-1)}}{-2l(2n+2l)}$

$= \dfrac{-a_{n+2(l-1)}}{4l(n+l)}$ falls $l \geq 1$

$$\implies a_{n+2l} = \frac{(-1)^l \cdot a}{4^l l!\,(n+l)(n+l-1)\cdots(n+1)} = \frac{(-1)^l \cdot a \cdot n!}{4^l \cdot l! \cdot (n+1)!}$$

Antwort:

$$f(x) = \underbrace{c}_{\text{const.}} \cdot \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l \cdot x^{n+2l}}{4^l \cdot l! \cdot (n+1)!}$$

Die hat Konvergenzradius ∞

2.2.5 Lineare Differentialgleichung beliebiger Ordnung

Funktionen von x

$$y^{(n)} + f_{n-1} \cdot y^{(n-1)} + \ldots + f_0 y^{(0)} = g$$

Homogener Fall

homogen falls $g = 0$, sonst inhomogen
Abkürzung: $D := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$. Dann $y' = Dy$

$$y'' = DDy = D^2 y$$

$$D^n y = y^{(n)}$$
$$L := D^n + f_{n-1}D^{n-1} + \ldots + f_0 D^0 \text{ Differentialoperator } n\text{-ter Ordnung}$$
$$Ly = g$$

Das ist eine linearer Operator

$$L(y_1 + y_2) = Ly_1 Ly_2$$
$$L(\lambda y) = \lambda L(y) \text{ für } \lambda \text{ konstant}$$

D.h. L ist eine lineare Abbildung m Sinne der linearen Algebra

z.B. wenn $f_0, \ldots, f_{n-1} \in \mathbb{C}^\infty(I), I$ Intervall
$\rightsquigarrow L : C^\infty(I) \to C^\infty(I)$

Die Lösungen von $Ly = 0$ sind genau der Kern von L, also ein Untervektorraum und zwar der Dimension n. Denn: die Abbildung

$$\mathrm{Kern}(L) \to \mathbb{R}, y \mapsto (y(x_0), \ldots, y(^{(n-1)}(x_0)$$

ist bijektiv nach dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz
Folgen:

(a) Sind $y_1, \ldots, y_n$ linear unabhängige Lösungen, so ist jede Lösung gleich $\lambda_1 y_1 + \ldots + \lambda_n y_n$ für Konstanten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$

(b) Ist y_p eine "partikuläre" Lösung von $Ly_p = g$, so hat die allgemeine Lösung $Ly = g$ die Gestalt $y_p + \lambda_1 y_1 + \ldots + \lambda_n y_n$, λ_i Konstanten.

d.h. $y_1, \ldots, y_n$ sind Basis des Lösungsraumes
Ab jetzt: $f_0, \ldots, f_{n-1}$ konstant. d.h. $Ly = y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_0 y$ mit Konstanten a_i

$$n = 1:$$
$$y' + a_0 y = 0$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -a_0 y$$
$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} \int -a_0 \,\mathrm{d}x$$
$$\log|y| = -a_0 x + c$$
$$y = c' \cdot e^{-a_0 x}$$
$\rightsquigarrow$ Fundamentallösung $y_1 = e^{-a_0 x}$

Ansatz: $y = e^{\lambda x}$, λ konstant

$$De^{\lambda x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(e^{\lambda x}) = \lambda \cdot e^{\lambda x}$$
$$D^k e^{\lambda x} = \lambda^k \cdot e^{\lambda x}$$
$$\rightsquigarrow Le^{\lambda x} = (\underbrace{\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0}_{\text{charakteristisches Polynom von } L =: \mathrm{ch}_L(\lambda)})e^{\lambda x}$$

$\rightsquigarrow$ $e^{\lambda x}$ ist Lösung von $Ly = 0$ g.d., w. λeine Nullstelle von $\mathrm{ch}_L(\lambda)$ ist.

Fakt:

Falls $\mathrm{ch}_L(\lambda)$ nur einfache Nullstellen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ hat, sind $e^{\lambda_1 x}, \ldots, e^{\lambda_n x}$ Fundamentallösungen von $Ly = 0$

Bsp.:

$$Ly = y'' + 6y' + 8y = 0$$
$$\rightsquigarrow \mathrm{ch}_L(\lambda) = \lambda^2 + 6\lambda + 8 = (\lambda + 4)(\lambda + 2) = 0$$
$$\iff \lambda = -2, -4$$

allgemeine Lösung: $a \cdot e^{-2x} + b \cdot e^{-4x}$ für Konstanten a, b

$y'' + 9y = 0$
$\mathrm{ch}_L(\lambda) = \lambda^2 + 9 = 0$
$\iff \lambda = \pm 3\imath$
allgemeine Lösung: $a \cdot e^{3\imath x} + b \cdot e^{-3\imath x}; a, b \in \mathbb{C}$ konstant
allgemeine reelle Lösungen:
$a(\cos 3x + \imath \sin 3x) + b(\cos x - \sin 3x)$
$= \underbrace{(a+b)}_{c} \cos 3x + \underbrace{(a-b)}_{d} \imath \sin 3x$
allgemeine Lösung: $c \cdot \cos 3x + d \cdot \sin 3x$
komplexe Lösung: $c, d \in \mathbb{C}$
reelle Lösung: $c, d \in \mathbb{R}$

Bsp.:

$y'' - 2y' + 2y = 0$
$\mathrm{ch}_L(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0 = (\lambda - 1 - \imath)(\lambda - 1 + \imath) = 0$
$\iff \lambda = 1 \pm \imath$
$\rightsquigarrow$ Fundamentallösungen:
$e^{(1\pm\imath)x} = e^x \cdot e^{\pm\imath x} = e^x(\cos x \pm \imath \sin x)$
Äquivalente Fundamentallösungen: $e^x \cos x, e^x \sin x$

$$y^{(4)} + 2y'' - 8y' + 5y = 0$$

$$\begin{aligned}\mathrm{ch}_L(\lambda) &= \lambda^4 + 2\lambda^2 - 8\lambda + 5 \\ &= (\underbrace{\lambda - 1}_{\text{doppelte Nullstelle } 1})^2(\underbrace{\lambda^2 + 2\lambda + 5}_{\text{Nullstelle } -1\pm 2\imath}) \\ &= 0\end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$ 3 linear unabhängige Lösungen: $e^x, e^{(-1\pm 2\imath)x}$

Vergleiche: $y'' = 0$ hat $\mathrm{ch}_L(\lambda) = \lambda^2$
Fundamentallösungen: $\underbrace{1}_{e^{0x}}, \underbrace{x}_{\text{zusätzliche Lösung}}$

Aber xe^x ist eine weitere Lösung, und die allgemeine Lösung lautet

$$ae^x + bxe^x + ce^{(-1+2\imath)x} + de^{(-1+2\imath)x}$$

Allgemein: Jede Nullstelle λ con ch_L der Multiplizität $k \geq 1$ liefert Fundamentallösungen $e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, \ldots, x^{k-1}e^{\lambda x}$.
Wieso: Schreibe $y = z \cdot e^{\lambda x}$, $z = z(x)$

$$Ly = L(z \cdot e^{\lambda x})$$

$$D(z \cdot e^{\lambda x}) = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} \cdot e^{\lambda x} + \lambda z \cdot e^{\lambda x} = \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} + \lambda z\right) \cdot e^{\lambda x} = ((D+\lambda)(z)) \cdot e^{\lambda x}$$

$$\implies D^k(z \cdot e^{\lambda x}) = ((D+\lambda)^k(z)) \cdot e^{\lambda x}$$

$\implies$ Ist $L = D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \ldots + a_0$ so gilt $L(z \cdot e^{\lambda x}) = 0$

$$\iff \underbrace{((D+\lambda)^n + a_{n-1}(D+\lambda)^{n-1} + \ldots + a_0)}_{L'} z = 0$$

$$\mathrm{ch}_{L'} = \mathrm{ch}_L(\lambda' + \lambda)$$

Also ist λ k-fache Nullstelle con $\mathrm{ch}_L \iff \lambda' = 0$ k-fache Nullstelle con ch_L
$\iff L' = D^n + \ldots + *D^k \implies z = 1, x, \ldots, x^{k-1}$ sind Lösungen!

Bsp.:

$y^{(4)} + 2y'' + y = 0$
$\mathrm{ch}_L(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = (\lambda^2+1)^2 = (\lambda - \imath)^2(\lambda+\imath)^2 = 0$
doppelte Nullstelle $\pm\imath$
$\leadsto$ allgemeine Lösungen: lineare Kombinationen von
$e^{\imath x}, xe^{\imath x}, e^{-\imath x}, xe^{-\imath x}$
allgemeine reelle Lösungen: lineare Kombinationen von
$\cos x, \sin x, x\cos x, x\sin x$

Bsp.: gedämpfter harmonischer Oszillator:

$Ly = m \cdot \ddot{y} + b \cdot \dot{y} + f \cdot y$
$m, f > 0, b \geq 0$
Eigenwerte: $\lambda = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4fm}}{2m}$
$b = 0 : \lambda = \pm\dfrac{\sqrt{4fm}}{2m} \cdot \imath = \nu i$
$\leadsto$ Fundamentallösungen: $\cos \nu t, \sin \nu t$
$0 < b < \sqrt{4fm}$: kleine Reibung:
$\lambda = -\mu \pm \imath\nu, \nu \neq 0, \mu > 0 \implies e^{-\mu t} \cdot \cos \nu t, e^{-\mu t} \sin \nu t$
$b = \sqrt{4fm} : \lambda = \dfrac{-b}{2m}$ doppelte Nullstelle $e^{\lambda b}, b \cdot e^{\lambda b}$
$b > \sqrt{4fm} : e^{\lambda_1 b}, e^{\lambda_2 b} fr 0 > \lambda_1 > \lambda_2$

Bsp.: Randwertproblem:

Hat die DGL $y'' = y$ eine Lösung mit $y(0) = y(1) = 1$? charakteristische Gleichung: $\lambda^2 - 1 = 0$
Eigenwerte ± 1
allgemeine Lösung $ae^x + be^{-x}$
Einsetzen:

$$a + b = 1$$
$$ae + be^-1 = 1$$

Antwort:

$$y = \frac{e^x + e^{1-x}}{e+1}$$

Bem.:

Asymptotisches Verhalten für $x \to \infty$ oder $x \to -\infty$ ($\hat{=}$ Randbedingung bei $\pm\infty$)
$x^j e^{\lambda x} \to$ g.d., w. $\Re(\lambda) < 0$ ist, denn $\left|e^{\lambda x}\right| = e^{\Re(x)\cdot x}$
$x^j e^{\lambda x}$ für $x \to 0$ beschränkt $\iff \Re(\lambda) < 0 \vee (\Re(\lambda) = 0 \wedge j = 0)$
Entsprechend: eine Linearkombination solchen Funktionen geht gegen 0 (bzw. bleibt beschränkt) g.d., w. jeder Summand es tut.

Inhomogener Fall

Ist $g(x) = a \cdot e^{\lambda x}; a, \lambda$ konstant und λ kein Eigenwert von L, dann existiert eine partikuläre Lösung von $Ly = g$ mit $y = b \cdot e^{\lambda x}; b$ konstant.
Denn:

$$L(be^{\lambda x} = bL(e^{\lambda x}) = b \underbrace{\mathrm{ch}_L(\lambda)}_{\neq 0} e^{\lambda x}$$

und

$$b := \frac{a}{\mathrm{ch}_L(\lambda)} \text{ tut's!}$$

Fakt:
Entsprechend Linearkombintationen: Sind $Ly_k = g_k(x)$ für $k = 1, \ldots, m$, dann ist $L(y_1 + \ldots + y_m) = g_1(x) + \ldots + g_m(x)$

Bsp.:
Bestimme alle Lösungen der DGL

$$y^{(4)} + 2y'' - 8y' + 5y = e^{-x}$$

die für $x \to \infty$ beschränkt bleiben.
Lösung:

$$\begin{aligned}\mathrm{ch}_L(\lambda) &= \lambda^4 + 2\lambda^2 - 8\lambda + 5 = 0 \\ &= (\lambda - 1)(\lambda^3 + \lambda^2 + 3\lambda - 5) \\ &= (\lambda - 1)^2(\lambda^2 + 2\lambda + 5)\end{aligned}$$

$\lambda = +1$ mit Multiplizität 2

$\lambda = -1 \pm 2\imath$ mit Multiplizität 1

$\lambda = -1$ ist kein EW!

Ansatz: partikuläre Lösung

$$y = be^{-x}; Ly = e^{-x}$$

$$\text{Ausrechnen} \rightsquigarrow b = \frac{1}{16}$$

allgemeine Lösung der inhomogener Gleichung

$$\frac{1}{16}e^{-x} + (\alpha + \beta x)e^x + \gamma e^{(-1+2\imath)x} + \delta e^{(-1-2\imath)x}$$

Fakt:

Ist λ eine Nullstelle von ch_L der Multiplizität $m \geq 1$, dann hat $Ly = ae^{\lambda x}$ eine partikuläre Lösung der Gestalt $y = bx^m e^{\lambda x}$, b konstant.

Ist λ eine Nullstelle der Ordnung m von ch_L, und $P(x)$ ein Polynom von Grad l, so hat $Ly = P(x)e^{\lambda x}$ eine partikuläre Lösung der Form $y = Q(x)e^{\lambda x}$

Bsp.:

$y^{(5)} + y = xe^x$
$\mathrm{ch}_L(\lambda) = \lambda^5 + 1$
$\lambda = 1$ ist keine Nullstelle

Ansatz für partikuläre Lösung:

$$y = (a + bx)e^x = ae^x + bxe^x$$
$$y^{(5)} = ae^x + bxe^x + 5be^x$$
$$\rightsquigarrow \underbrace{y^{(5)} + y}_{=xe^x} = (\underbrace{a + a + 5b}_{0})e^x + (\underbrace{b + b}_{1})xe^x$$
$$\rightsquigarrow b = \frac{1}{2}; 2a + 5b = 0 \implies a = -\frac{5}{2}b = -\frac{5}{4}$$

$\rightsquigarrow$ partikuläre Lösung:

$$y = \left(-\frac{5}{4} + \frac{1}{2}x\right) e^x$$

Fakt: Variante: falls alle Koeffizienten reell::

Ist $\lambda = \mu + \imath\nu; \mu, \nu \in \mathbb{R}; \nu \neq 0$, Nullstelle der Ordnung m, so hat $Ly = P_1(x) \cdot e^{\mu x} \cdot \cos \nu x + P_2(x) \cdot e^{\mu x} \cdot \sin \nu x$ mit reelen Polynomen P_1, P_2 eine partikuläre Lösung der Gestalt $y = Q_1(x) \cdot e^{\mu x} \cdot \cos \nu x + Q_2(x) \cdot e^{\mu x} \cdot \sin \nu x$ mit reellen Polynomen Q_1, Q_2 von Grad $\leq m + l$

Bsp.: Angeregter harmonischer Oszillator:

$\ddot{y} + \omega^2 y = \cos \lambda t; \omega, \lambda \in \mathbb{R}$

$\mathrm{ch}_L(T) = T^2 + \omega^2$ hat Nullstellen $\pm \imath\omega$

Fall 1: $\lambda \pm \imath\omega \leftrightarrow \lambda$ keine Nullstelle con $\mathrm{ch}_L(T)$

$\rightsquigarrow$ Ansatz: $y_p(t) = a \cos \lambda t + b \sin \lambda t \qquad \omega^2$

Einsetzen: $\ddot{y}_p = -a\lambda^2 \cos \lambda t - b\lambda^2 \sin \lambda t$

$$\begin{aligned}\cos \lambda t &= \ddot{y}_p + \omega^2 y_p \\ &= a(\omega^2 - \lambda^2) \cos \lambda t + b\underbrace{(\omega^2 - \lambda^2)}_{\neq 0} \sin \lambda t \\ &= \dots\end{aligned}$$

$$\rightsquigarrow b = 0, a = \frac{1}{\omega^2 - \lambda^2}$$

$$y_p = \frac{\cos \lambda t}{\omega^2 - \lambda^2}$$

Fall 2: $\lambda = \pm\omega$

Ansatz: $at \cos \lambda t + bt \sin \lambda t$

$\vdots$

$$\implies y_p(t) = \frac{t \sin \lambda t}{2\lambda}$$

allgemeine Lösung:

$$y_p + c\cos\omega t + d\sin\omega t$$

2.2.6 Systeme von linearen Differentialgleichungen erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$\begin{aligned}
&y_1, \dots, y_m \text{ Funktionen von } x \\
&\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x} = F_1(x, y_1 \dots, y_m) = a_{11}y_1 + \dots + a_{1m}y_m + g_1(x) \\
&\vdots \\
&\frac{\mathrm{d}y_n}{\mathrm{d}x} = F_1(x, y_1 \dots, y_m) = a_{n1}y_1 + \dots + a_{nm}y_m + g_n(x)
\end{aligned}$$

Betrachte ein System von lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten.

$$\begin{aligned}
&y' = Ay + g \\
&y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, g = \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix} \\
&g = 0: \text{ Ansatz: } y = e^{\lambda x} \cdot v, v \text{ konstanter Vektor} \\
&\underbrace{y'}_{Ay} = \underbrace{\lambda e^{\lambda x} \cdot v}_{e^{\lambda x} \cdot Av} \iff Av = \lambda v \\
&\iff v \text{ ist Eigenvektor von } A \text{ zum Eigenwert } \lambda \in \mathbb{C}
\end{aligned}$$

Für $\mathrm{ch}_A(\lambda) = \det(\lambda Id_n - A) = 0$charakteristische Gleichung
Falls alle Nullstellen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ Multiplizität 1 haben, zum Eigenvektor $v_1, \dots, v_n \rightsquigarrow e^{\lambda_1 x}v_1, \dots, e^{\lambda_n x}v_n$ ist Basis des Lösungsraums
Genauso wenn $\mathbb{C}^n$ eine Basis aus Eigenvektoren hat.
Im allgemeinen existiert eine Basis aus Funktionen der Form

$$e^{\lambda x} \cdot (\text{ Polynom in } x \text{ mit Koeffizienten in } \mathbb{C}^n)$$

Für $g(x) =$ Linearkombination von $x^j e^{\lambda x}$ für irgendwelche j, λ existiert eine Lösung als Linearkombination von $x^j e^{\lambda x}$ für dieselben λ aber beliebige j

Bsp.:

$$
\begin{aligned}
&y_1' = -y_1 + 3y_2 \\
&y_2' = 2y_1 - 2y_2 \\
&y_1(0) = 5 \\
&y_2(0) = 0 \\
&y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}; A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \\
&\mathrm{ch}_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda+1 & -3 \\ -2 & \lambda+2 \end{vmatrix} \\
&\qquad = (\lambda+1)(\lambda+2) - (-2)(-3) \\
&\qquad = \lambda^2 + 3\lambda - 4 \\
&\qquad = (\lambda-1)(\lambda+4) \\
&\text{EV}: \lambda = 1: \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \\
&\lambda = -4: \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&\rightsquigarrow \text{ allgemeine Lösungen } y(x) = ae^x \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + be^{-4x} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&y(0) = \begin{pmatrix} 3a - b \\ 2a + b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} \; a = 1 \\
&b = -2 \\
&\text{Lösung: } y(x) = \begin{pmatrix} 3e^x + 2e^{-4x} \\ 2e^x - 2e^{-4x} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Bsp.: Zwei Körper Problem:

n Körper der Massen $m_i \quad (1 \leq i \leq n)$ im $\mathbb{R}^3$ im Ort $z_i \in \mathbb{R}^3$.
Newtonscher Gravitationsgesetz:
Zwischen m_i und m_j wirkt die Kraft

$$\frac{Gm_i m_j}{|z_i - z_j|^2}$$

$\rightarrow$ Kraftvektor

$$\frac{Gm_i m_j}{|z_i - z_j|^3}(z_j - z_i)$$

Totalkraft auf m_i

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{Gm_i m_j}{|z_i - z_j|^3}(z_j - z_i) = m_i \cdot \ddot{z}_i$$

System von $3n$ gekoppelten nichtlinearen Differentialgleichungen 2ter Ordnung.
Ab jetzt: $n = 2$
12 Parameter

$$\begin{aligned}
z_0 &:= \frac{m_1 \cdot z_1 + m_2 \cdot z_2}{m_1 + m_2} \\
\implies \ddot{z}_o &= \frac{1}{m_1 + m_2}(m_1 \ddot{z}_1 + m_2 \ddot{z}_2) \\
&= \frac{1}{m_1 + m_2}\left(\frac{Gm_1 m_2}{|z_2 - z_1|^3}(z_2 - z_1) + \frac{Gm_1 m_2}{|z_1 - z_2|^3}(z_1 - z_2)\right) \\
&= 0 \\
\implies z_0(t) &= z_0(0) + \dot{z}_0(0) \cdot t
\end{aligned}$$

Ersetze z_i durch $z_i - z_0 \implies$ oBdA $m_1 z_1 + m_2 z_2 = 0$

Zur Vereinfachung setze $z := m_1 z_1 = -m_2 z_2$

$$\begin{aligned}
\implies z_2 - z_1 &= -\frac{z}{m_2} - \frac{z}{m_1} = -\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) z \\
\implies \ddot{z} &= m_1 \cdot \ddot{z}_1 \\
&= \frac{Gm_1 m_2}{|z_2 - z_1|^3}(z_2 - z_1) \\
&= \frac{-Gm_1 m_2}{\left|\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right|^3 \cdot |z|^3} \cdot \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) \cdot z
\end{aligned}$$

$$\ddot{z} = -\frac{Gm_1^3 m_2^3}{(m_1+m_2)^2} \cdot \frac{z}{|z|^3}$$

Ersetze z durch λz für geeignetes $\lambda \in \mathbb{R}^{>0}$ $\rightsquigarrow$ $\ddot{z} = -\frac{z}{|z|^3}$

Beh.:

Die Lösung bleibt in dem von $z(0) \neq 0, \dot{z}(0)$ aufgespannten Teilraum U

Denn::

Invarianz unter Drehungen $\implies$ oBdA $U = \begin{pmatrix} * \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} * \\ * \\ 0 \end{pmatrix}$
Dann betrachte dieselbe DGl. nur für $z \in U$. Die hat eine Lösung, und diese ist auch eine Lösung in $\mathbb{R}^3$ Lösung in $\mathbb{R}^3$ $\overset{\text{Eindeutigkeit}}{\implies}$ Dies ist **die** Lösung in $\mathbb{R}^3$

$\dim U = 1:$ eine gewöhnliche DGl. 2ter Ordnung
ab jetzt $\dim U = 2$
Ersetze $\mathbb{R}^3$ durch $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$
Polarkoordinaten: $z = re^{\imath\varphi}$

$$\implies \dot{z} = \dot{r}e^{\imath\varphi} + r\imath\dot{\varphi}e^{\imath\varphi}$$

$$\ddot{z} = \ddot{r}e^{\imath\varphi} + 2\dot{r}\imath\dot{\varphi} + r(\imath\ddot{\varphi}e^{\imath\varphi} + (\imath\dot{\varphi})^2e^{\imath\varphi})$$

$$-\frac{z}{|z|^3} = \frac{-re^{\imath\varphi}}{r^3} = -\frac{1}{r^2}e^{\imath\varphi}$$

$$\rightsquigarrow \ddot{r} + 2\dot{r}\imath\dot{\varphi} + r(\imath\ddot{\varphi} - \dot{\varphi}^2) = -\frac{1}{r^2}$$

$$\iff \begin{cases} \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -\frac{1}{r^2} \\ 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} = 0 \end{cases}$$

Erhaltungsgrössen:

Winkelmoment $\mu := r^2 \cdot \dot{\varphi}$

$\dot{\mu} = 2r\dot{r}\dot{\varphi} + r^2\ddot{\varphi} = r(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}) = 0$

$\implies \mu$ konstant

Energie $E := \dfrac{|\dot{z}|^2}{2} - \dfrac{1}{|z|}$

$$E = \frac{|\dot{r} + r\imath\dot{\varphi}|^2}{2} - \frac{1}{r} = \frac{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2}{2} - \frac{1}{r}$$

$\dot{E} = \ldots = 0$

$\implies E$ konstant

$$\dot{\varphi} = \frac{\mu}{r^2} \implies E = \frac{\dot{r}^2 + \frac{\mu^2}{r^2}}{2} - \frac{1}{r}$$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} \dot{\varphi} = \frac{\mu}{r^2} \\ \dot{r}^2 = 2E + \frac{2}{r} - \frac{\mu^2}{r^2} \end{cases}$$

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \pm\sqrt{2E + \frac{2}{r} - \frac{\mu^2}{r^2}}$$

$$\int \frac{\pm\,\mathrm{d}r}{\sqrt{2E + \frac{2}{r} - \frac{\mu^2}{r^2}}} = \int \mathrm{d}t$$

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi} = \frac{\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}} = \frac{\pm\sqrt{2E + \frac{2}{r} - \frac{\mu^2}{r^4}}}{\frac{\mu}{r^2}}$$

Variablentransformation: $u = \dfrac{1}{r}$

$$\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2 = \left(\frac{-1}{r^2}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2 = \frac{1}{r^4} \cdot \frac{2E + \frac{2}{r} - \frac{\mu^2}{r^2}}{\left(\frac{\mu}{r^2}\right)^2} =$$

$$\frac{1}{\mu^2} \cdot \left(2E + 2u - \mu^2u^2\right)$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2 = \underbrace{\left(\frac{2E}{\mu^2}+\frac{1}{\mu^4}\right)}_{H^2\geq 0 \text{ für } H\geq 0} - \left(u-\frac{1}{\mu^2}\right)^2$$

Substitution: $v = H^{-1}\left(u-\frac{1}{\mu^2}\right)$

$$\rightsquigarrow \left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2 = \left(H\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2 = H^2 - H^2v^2$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2 = 1-v^2$$

$$v = \sin(\varphi-\varphi_0)$$

$$r = \frac{\mu^2}{1+H\mu^2\sin(\varphi-\varphi_0)}$$

$$x = r\cdot\cos\varphi$$

$$y = r\cdot\sin\varphi$$

Nach Drehung oBdA $\varphi_0 = 0$

Einsetzen und Ausrechnen

$\vdots$

$$\rightsquigarrow x^2 = 2E\mu^2y^2 - 2H\mu^4y + \mu^4$$

$E<0 \implies$ Ellipse

$E=0 \implies$ Parabel

$E>0 \implies$ Hyperbel

2.3 Differentialrechnung in mehreren Variablen

$$\mathbb{R}^n \supset U \to V \subset \mathbb{R}^m$$

$f(x, y) = x^2 \cdot \cos y$

Fixiere x und betrachte die Ableitung nach y: $\frac{\partial f}{\partial y}$
Fixiere y und betrachte die Ableitung nach x: $\frac{\partial f}{\partial x}$

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen , $f : U \to \mathbb{R}$

Def.: partielle Differenzierbarkeit:

f heisst partiell differenzierbar in $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ falls für alle $1 \leq i \leq n$ die **partielle Ableitung**

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} := \lim_{h \to 0} \frac{f\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i + h \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} - f\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}{h}$$

existiert.

Def.: Richtungsableitung:

Sei $e \in \mathbb{R}^n$ ein Einheitsvektor.
Die **Richtungsableitung** von f in $x \in U$ in Richtung e ist

$$\begin{aligned}(D_e f)(x) &:= \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(x+te)\right)\bigg|_{t=0} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{f(x+te) - f(x)}{t}\end{aligned}$$

Also:

$$e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \leftarrow i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow D_{e_i} f = \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

D.h.:

$$f(x+te) = f(x) + (D_e f)(x) \cdot t + o(t)$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in U, e = \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} \text{ Einheitsvektor}\,;\, f : U \to \mathbb{R}$$

f partiell differenzierbar

$$\iff \forall i : f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \leftarrow i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \cdot h\right) = f(x) + \frac{\partial f}{\partial x_i} + o(h)$$

f in Richtung e differenziebar

$$\iff f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} \cdot t\right) = f(x) + D_e f(x) \cdot t + o(t)$$

f (total) differenzierbar

$$\iff f\left(\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}h_1\\\vdots\\h_n\end{pmatrix}\right)=f(x)+(A_1h_a+\ldots+A_nh_n)+o(|h|);$$

$$h=\begin{pmatrix}h_1\\\vdots\\h_n\end{pmatrix}$$

Dabei heisst $(A_1,\ldots,A_n)=\operatorname{grad} f=\nabla f$ ("nabla") der **Gradient** von f in x oder die (totale) Ableitung von f in x Ist f total differenzierbar, dann ist

$$\begin{aligned}f(x+te)&=f(x)+(A_ite_1+\cdots+A_nte_n)+o(|te|)\\&=f(x)+(A_1e_1+\cdots+A_ne_n)t+o(t)\end{aligned}$$

Also ist f in jede Richtung e differenzierbar, und $D_ef=(\operatorname{grad} f)\underbrace{\cdot}_{\text{Matrixprodukt}}e$

Bem.:

total differenziebar $\overset{\Rightarrow}{\not\Leftarrow}$ in jede Richtung differenzierbar $\overset{\Rightarrow}{\not\Leftarrow}$ partiell differenzierbar

Bsp.:

$$f\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}:=\begin{cases}\frac{uv}{u^2+v^2} & \text{falls } \begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\\ 0 & \text{falls } \begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\end{cases}$$

In jede Richtung differenzierbar in $\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

$$f\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix} - f\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \frac{uv}{u^2-v^2} = 0 \text{ falls } u = 0 \vee v = 0$$

$$\implies f \text{ partiell differenzierbar mit } \frac{\partial f}{\partial u}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial v}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = 0$$

$e = \begin{pmatrix}c\\s\end{pmatrix}$ Einheitsvektor

$$f\begin{pmatrix}ct\\st\end{pmatrix} - f\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \frac{ct \cdot st}{(ct)^2+(st)^2} = cs \neq 0$$

$$\implies D_e f \text{ für } e \neq \begin{pmatrix}\pm 1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\\pm 1\end{pmatrix}$$

existiert nicht und f nicht stetig.

Bsp.:

$$f\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix} := \begin{cases} \frac{u^2v}{u^2+v^2} & \text{falls } \begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \\ 0 & \text{falls } \begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \end{cases}$$

$\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}$ existieren überall

$$f\begin{pmatrix}ct\\st\end{pmatrix} - f\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \frac{(ct)^2 \cdot (st)}{(ct)^2+(st)^2} = c^2 st$$

$\rightsquigarrow$ f in Richtung $e = \begin{pmatrix}c\\s\end{pmatrix}$ differenzierbar mit $D_e f = c^2 s$

Da $c^2 s$ nicht linear in $\begin{pmatrix}c\\s\end{pmatrix}$ ist,

kann f nicht total differenzierbar sein

Fakt:
Die Grundrechenarten

$$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{matrix} x+y \\ x \cdot y \\ \frac{x}{y} \end{matrix}$$

sind differenzierbar wo definiert.

Fakt:
f total differenzierbar $\implies$ f stetig

Fakt:
Richtungsdifferenzierbarkeit $\not\implies$ Stetigkeit

Def.: stetig differenzierbar:
f heisst **stetig differenzierbar**, oder C^1 falls f differenzierbar und $\nabla f : U \to \mathbb{R}^n$ stetig ist. Dabei ist

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(f) \right)$$

Fakt:
f ist C^1 $\iff$ f partiell differenzierbar und $\forall i : \frac{\partial f}{\partial x_i}$ stetig.

Fakt:
Die Grundrechenarten sind C^1.

Bsp.:

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto x + y$$
$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) + (1, 1) \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + 0$$
$$(x + a) + (y + b) = x + y + 1a + ab$$

Bsp.:

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto x \cdot y$$
$$g\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right) = g\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (y, x)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + o\left(\left|\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right|\right)$$

$$(x+a)\cdot(y+b) = xy + ya + xb + ab$$

Satz:

Sei $f: U \to \mathbb{R}$ differenzeirbar, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, und sei $g = \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix} : I \to U; I \subset \mathbb{R}$ Intervall, differenzierbar; Dann ist $f \circ g : I \to \mathbb{R}, t \mapsto f(g(t))$ differenzierbar und

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(g(t)) = (\nabla f)(g(t)) \cdot g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(g(t)) \cdot g_1'(t) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(g(t)) \cdot g_n'(t)$$

Bew.:

$$
\begin{aligned}
g(t+h) &= g(t) + g'(t)k + o(|k|) \\
g'(t) &= \begin{pmatrix} g_1'(t) \\ \vdots \\ g_n'(t) \end{pmatrix} \\
f(g(t+k)) &= f(g(t) + g'(t)k + o(|k|)) \\
&= f(g(t)) \\
&\quad + \nabla f(g(t)) \cdot (g'(t)k + o(|k|)) \\
&\quad + \underbrace{o(|g'(t)k + o(|k|)|)}_{=o(|k|)} \\
&= f(g(t)) \\
&\quad + \underbrace{(\nabla f)(g(t)) \cdot g'(t) \cdot k}_{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(g(t))} \\
&\quad + o(|k|) \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

Bsp.:

$$
\begin{aligned}
h &: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \frac{x}{y} \text{ für } y \neq 0 \\
\frac{\partial h}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(x\frac{1}{y}) = \frac{1}{y} \\
\frac{\partial h}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}(x\frac{1}{y}) = \frac{-x}{y^2}
\end{aligned}
$$

$$\implies h \in C^1 \text{ mit } \nabla h = \left(\frac{1}{y}, \frac{-x}{y^2}\right)$$

Folge:
Jede aus differenzierbaren Funktionen und Grundrechenarten zusammengesetzte Funktion ist differenzierbar. Analog C^1.

Bsp.:

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto x_1 \cdot x_2 \implies \nabla f = (x_2, x_1)$$

$$g_1, g_2 : I \to \mathbb{R} \rightsquigarrow g := \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} \text{ differenzierbar}$$

$$\implies t \mapsto g_1(t) \cdot g_2(t) \text{ ist differenzierbar mit Ableitung:}$$

$$(g_2, g_1) \cdot \begin{pmatrix} g_1' \\ g_2' \end{pmatrix} = g_2 \cdot g_1' + g_1 \cdot g_2'$$

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^2 + y^2$$

$$\nabla f = (2x, 2y)$$

$$g(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \implies g'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f(g(x))) = (2\cos t, 2\sin t) \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} = 0$$

$$f(g(t)) = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$$

Bsp.1:

Berechne näherungsweise

$$\alpha := \sqrt{3.03^2 + 3.95^2} = \left| \begin{pmatrix} 3.03 \\ 3.95 \end{pmatrix} \right|$$

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ differenzierbar für } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\nabla f = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$$

$$f\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

$$\nabla f \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right)$$

$$\begin{aligned} f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.03 \\ -0.05 \end{pmatrix} \right) &= f\begin{pmatrix} 3 \\ x \end{pmatrix} + \nabla f \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.03 \\ -0.05 \end{pmatrix} + \text{ klein} \\ &= 5 + \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right) \cdot \begin{pmatrix} 0.03 \\ -0.05 \end{pmatrix} + \text{ klein} \\ &= 4.978 + \text{ klein} \end{aligned}$$

wirklicher Wert $\alpha = 4.7829\ldots$

Bsp.2:

Im Punkt P_0 knickt der Bergweg ab nach SO steigt er mit $+25\%$ an, nach S fällt er mit -20% ab. In welche Richtung geht er am steilsten bergauf, und wie steil?

Annahme: Höhenfunktion differenzierbar; oBdA $P_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$H\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = Ax + By + o\left(\left|\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right|\right)$$

$$\frac{1}{4} = D_{e_{SO}} H\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (A, B) \cdot e_{SO} = \frac{1}{\sqrt{2}}(A - B)$$

$$-\frac{1}{5} = D_{e_S} H\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (A, B) \cdot e_S = -B$$

$$\implies B = \frac{1}{5}, A = \frac{1}{5} + \frac{\sqrt{2}}{4}$$

Gesucht φ mit $(A, B) \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$ maximal für

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \ldots$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} \right\rangle$$

$\ldots \varphi \approx 19.86°$

Steigung $= 59\%$

Bsp.3:

Bestimme die Tangentialebene an $\operatorname{graph}(f)$ für $f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \frac{1}{xy}$ im Punkt $P = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

$$\nabla = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \left(\frac{-1}{x^2y}, \frac{-1}{xy^2}\right)$$

$$\begin{aligned} f\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right) &= f\left(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}x-1\\y-2\end{pmatrix}\right) + o\left(\left\|\begin{pmatrix}x-1\\y-2\end{pmatrix}\right\|\right) \\ &= \frac{1}{2} + \left(\frac{-1}{2}, \frac{-1}{4}\right) \cdot \begin{pmatrix}x-1\\y-2\end{pmatrix} + o(\ldots) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{4}(y-2) + \ldots \\ &= \frac{3}{2} - \frac{x}{2} - \frac{y}{4} + o\left(\left\|\begin{pmatrix}x-1\\y-2\end{pmatrix}\right\|\right) \end{aligned}$$

Copy from Simon

Satz:

Sei $f : U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, mit $\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0$ überall. Sei U "x_1-einfach", d.h. für alle $x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$: ist $\left\{x_1 \in \mathbb{R} \middle| \begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix} \in U\right\}$ leer oder ein Intervall. Dann ist $f\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$ von x_1 unabhängig, d.h.

$$U = \left\{\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix}x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix} \in V : \varphi\begin{pmatrix}x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix} < x_1 < \Phi\begin{pmatrix}x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}\right\}$$

für $V \subset \mathbb{R}^{n-1}$ offen und Funktionen $\varphi, \Phi : V \to \mathbb{R}$

Analog: x_i-einfach ; $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$ für jeden $1 \leq i \leq n$

Bem.:
$U \subset \mathbb{R}^n$ heisst **konvex**, wenn

$$\forall x, y \in U \forall \lambda \in [0,1] : \lambda x + (1-\lambda) y \in U$$

Bem.:
U konvex $\implies U$ x_i-einfach für jeden i

Bsp.:

$$U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) | x \leq 0\}$$

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{cases} 0 & \text{falls } x_1 \geq 0 \\ x_1^2 \cdot \operatorname{sgn} x_2 & \text{sonst} \end{cases}$$

$\dfrac{\partial f}{\partial x_2}$; f sogar total differenzierbar

Fakt:

Sei $f: U \to \mathbb{R}, U \subset \mathbb{R}^2$ stetig mit $\frac{\partial f}{\partial c}$ stetig. Dann ist

$$G\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right) = \int_a^b f(x,c)\,\mathrm{d}x$$

differenzierbar mit

$$\nabla G = \left(f(a,c), f(b,c), \int_a^b \frac{\partial f}{\partial c}(x,c)\,\mathrm{d}x \right)$$

wo definiert. Insbesondere:

$$\frac{\partial}{\partial c}\left(\int_a^b f(x,c)\,\mathrm{d}x \right) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial c}(x,c)\,\mathrm{d}x$$

Folge:

Sei f wie oben, und $a(t), b(t)$ differenzierbar; dann ist

$$F(t) := \int_{a(t)}^{b(t)} f(x,t)\,\mathrm{d}x$$

differenzierbar mit

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,\mathrm{d}x + f(b(t),t)\cdot b'(t) - f(a(t),t)\cdot a'(t)$$

Denn: Kettenregel für

$$F(t) = G\begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \\ t \end{pmatrix}$$

sagt: F differenzierbar mit

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial G}{\partial a}\cdot a'(t) + \frac{\partial G}{\partial b}\cdot b'(t) + \left.\frac{\partial G}{\partial c}\right|_{c=t} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(t) \\ &= -f(a(t),t)\cdot a'(t) + f(b(t),t)\cdot b'(t) + \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f}{\partial c}(x,c)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Bsp.4:

Berechne

$$\int_0^1 \frac{x^\alpha - 1}{\log x} \, \mathrm{d}x =: F(x)$$

Bem.:

Bei $x = 1$ ist

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 1-} \frac{x^\alpha - 1}{\log x} &\overset{\text{BH}}{=} \lim_{x \to 1-} \frac{\alpha x^{\alpha-1}}{\frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x \to 1-} \alpha x^\alpha \\ &= \alpha \end{aligned}$$

$\alpha \geq 0 \implies$ Integrand hat stetige Fortsetzung mit $0 \mapsto 0 \implies$ existiert.
$-1 \leq \alpha < 0$ uneigentilches Integral existiert mit Majorantenkriterium $\left| \frac{x^\alpha - 1}{\log x} \right| \leq x^\alpha$ für $x > 0$ klein.
$\implies$ Integral existiert für $\alpha > -1$

$$\begin{aligned} F'(\alpha) &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{x^\alpha - 1}{\log x}\right) \mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \frac{x^\alpha \log\alpha}{\log\alpha} \mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 x^\alpha \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{\alpha+1} \end{aligned}$$

$$\implies F(\alpha) = \int \frac{1}{\alpha+1} \mathrm{d}\alpha = \log(\alpha+1) + c$$

Aber $F(0) = \int_0^1 \frac{x^\alpha - 1}{\log x} \mathrm{d}x = \int_0^1 0 \, \mathrm{d}x = 0$

$\implies 0 = F(0) = \log(0+1) + c = c$

Also $F(\alpha) = \log(\alpha+1)$

Bsp.5:

Berechne

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x$$

Wegen $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ kein Problem bei 0.

Ansatz:

$$I(t) := \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} \cdot e^{-xt} \, \mathrm{d}x$$

Für $t > 0$ existiert $I(t)$ nach Majorantenkriterium.

$$\begin{aligned}
I'(t) &= \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\sin x}{x} \cdot e^{-xt}\right) \mathrm{d}x \\
&= \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} \cdot (-x) e^{-xt} \, \mathrm{d}x \\
&= \int_0^\infty \underbrace{-\sin x}_{\uparrow} \underbrace{e^{-xt}}_{\downarrow} \, \mathrm{d}x \\
&= \cos x e^{-xt}\big|_0^\infty - \int_0^\infty \cos x (-t) e^{-xt} \, \mathrm{d}x \\
&= -1 + t \int_0^\infty \underbrace{\cos x}_{\uparrow} \underbrace{e^{-xt}}_{\downarrow} \, \mathrm{d}x \\
&= -1 + t \left(\sin x e^{-xt}\big|_0^\infty - \int_0^\infty \sin x (-t) e^{-xt} \, \mathrm{d}x \right) \\
&= -1 + t \left(0 + t \int_0^\infty \sin x e^{-xt} \, \mathrm{d}x \right) \\
&= -1 - t^2 \int 0^\infty (-\sin x) e^{-xt} \, \mathrm{d}x \\
&= -1 - t^2 I(t)
\end{aligned}$$

$$\implies I(t) = \frac{-1}{1+t^2}$$

$$\implies I(t) = \int \frac{-1}{1+t^2} \, \mathrm{d}t = -\arctan t + c$$

$$\implies \lim_{t\to\infty} I(t) = c - \lim_{t\to\infty} \arctan t = c - \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} e^{-xt} \, \mathrm{d}x &= \int_0^\infty \lim_{t\to\infty} \left(\frac{\sin x}{x} e^{-xt} \right) \mathrm{d}x \\
&= \begin{cases} 0 & x > 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases} \\
&= \int_0^\infty 0 \, \mathrm{d}x \\
&= 0
\end{aligned}$$

Also ist $c - \dfrac{\pi}{2} = 0$

$$\implies c = \frac{pi}{2}$$

Schliesslich ist

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x &= \lim_{t\to 0+}\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}e^{-xt}\,\mathrm{d}x\\ &= \lim_{t\to 0} I(t)\\ &= \lim_{t\to 0}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan t\right)\\ &= \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

Antwort: $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$

Höhere Ableitungen

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen; $f : U \to \mathbb{R}$

Def.: m-fach differenzierbar:
f heisst **$\mathbf{m}$-fach differenzierbar** für $m \geq 1$ wenn f differenzierbar ist und für jedes $1 \leq i \leq m$ $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ $(m-1)$-fach differenziebar ist.

Def.: m-fach stetig differenzierbar:

f heisst **$\mathbf{m}$-fach stetig differenzierbar** für $m \geq 1$ wenn f differenzierbar ist und für jedes $1 \leq i \leq m$ $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ $(m-1)$-fach stetig differenziebar ist.
Bezeichnug: C^m

Konkret: $\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$

Abkü: $f_{x_i} := \frac{\partial f}{\partial x_i}$

$f_{x_i x_j} = (f_{x_i})_{x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$

Satz:

Ist f C^m, so sind alle bis zur m^{ter} partiellem Ableitung von der Reihenfolge unabhängig.

Beweisidee:

$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Zu zeigen: $f_{xy} = f_{yx}$

$$\begin{aligned} f_{xy} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \\ &= \lim_{k \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}\begin{pmatrix} x \\ y+k \end{pmatrix} - \frac{\partial f}{\partial x}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}{k} \\ &= \lim_{k \to 0} \lim_{h \to 0} \frac{\frac{f\begin{pmatrix} x+h \\ y+k \end{pmatrix} - f\begin{pmatrix} x \\ y+k \end{pmatrix}}{h} - \frac{f\begin{pmatrix} x+h \\ y \end{pmatrix} - f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}{h}}{k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{yx} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}\begin{pmatrix} x+h \\ y \end{pmatrix} - \frac{\partial f}{\partial y}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \lim_{k \to 0} \frac{\frac{f\begin{pmatrix} x+h \\ y+k \end{pmatrix} - f\begin{pmatrix} x+h \\ y \end{pmatrix}}{k} - \frac{f\begin{pmatrix} x \\ y+k \end{pmatrix} - f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}{k}}{h} \end{aligned}$$

Also nur $\frac{n(n+1)}{2}$ versiedene 2^te^ Ableitungen.

$$r = r\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$$

beliebig oft stetig differenzierbar ausserhalb $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}(x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}(x_1^2 + \cdots + x_n^2) = \frac{1}{2r} \cdot 2x_i = \frac{x_i}{r}$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{x_i}{r}\right) = \frac{\frac{\partial x_i}{\partial x_j} r - x_i \frac{\partial r}{\partial x_j}}{r^2}$$

$$i \neq j \implies \ldots = -\frac{x_i}{r^2} \cdot \frac{x_j}{r} = \frac{-x_i x_j}{r^3}$$

$$i = j \implies \ldots = \frac{r - x_i \frac{x_i}{r}}{r^2} = \frac{r^2 - x_i^2}{r^3}$$

Taylor-Entwickelung

Erinnerung: $f(x)$ C^m-Funktion

$$\begin{aligned} \implies f(x) = f(x_0) &+ f'(x_0)(x - x_0) \\ &+ \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 \\ &+ \cdots \\ &+ \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x - x_0)^m \\ &+ o(|x - x_0|^m) \end{aligned}$$

Jetzt $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ C^m-Funktion

m-tes Taylorpolynom von f an der Stelle $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$

$$
\begin{aligned}
f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \sum_{i=0}^{m} \frac{\frac{\partial^i f}{\partial x_i}\begin{pmatrix} x_0 \\ y \end{pmatrix}}{i!}(x-x_0)^i + o(|x-x_0|^m) \\
&= \sum_{i=0}^{m} \left(\sum_{j=0}^{m-i} \frac{\frac{\partial^j}{\partial x_j}\left(\frac{\partial^i f}{\partial y_i}\right)\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}}{j!}(y-y_0)^j + o(|y-y_0|^{m-i}) \right) \frac{(x-x_0)^i}{i!} \\
&+ o(|x-x_0|^m) \\
&= \sum_{\substack{i,j\geq 0 \\ i+j\leq m}} \frac{\partial^j \partial^i f}{\partial y^j \partial x_i}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \cdot \frac{(y-y_0)^j}{j!} \cdot \frac{(x-x_0)^i}{i!} \\
&+ \underbrace{\sum_{i=0}^{m} o\left(\frac{|y-y_0|^{m-i} \cdot |x-x_0|^i}{i!}\right) + o(|x-x_0|^m)}_{o\left(\left|\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}\right|\right)}
\end{aligned}
$$

Copy from Simon

Bem.:
Kann auch Taylorpolynom einsetzen

Gib den Taylorpolynom vom Grad 3 von $\cos x \cdot e^{x+y}$ bei $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
\cos x \cdot e^{x+y} &= \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) \\
&\quad \cdot \left(1 + (x+y) + \frac{(x+y)^2}{2} + \frac{(x+y)^3}{6} + o((x+y)^3)\right) \\
&= 1 + (x+y) + \frac{(x+y)^2}{2} + \frac{(x+y)^3}{6} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{2}(x+y) + o\left(\left|\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right|^3\right) \\
&= 1 + (x+y) + \frac{2xy + y^2}{2} + \frac{(x+y)(-2x^2 + 2xy + y^2)}{6} + o\left(\left|\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right|^3\right)
\end{aligned}$$

Analog: n Variablen
Fall $m = 2$

$$\begin{aligned}
\nabla f &= (f_x, f_y) \\
\nabla^2 f &:= \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \quad & + f_x\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \cdot (x - x_0) \\ & + f_y\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \cdot (y - y_0) \\ & + f_{xx}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \frac{(x-x_0)^2}{2} \\ & + f_{xy}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} (x-x_0)(y-y_0) \\ & + f_{yy}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \frac{(y-y_0)^2}{2} \\ & + o\left(\left\|\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}\right\|\right) \\ = f\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \quad & + \left(\nabla f\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \\ & + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}^T \cdot \left(\nabla^2 f\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \\ & + o\left(\left\|\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}\right\|\right) \end{aligned}$$

Fall $m = 2$; n beliebig

$$\nabla f = (f_{x_1}, \dots, f_{x_n})$$

$$\nabla^2 f = \begin{pmatrix} f_{x_1x_1} & \cdots & f_{x_1x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x_nx_1} & \cdots & f_{x_nx_n} \end{pmatrix} \text{ Hesse-Matrix}$$

Für f C^2-Funktion ist

$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{\nabla f(x_0)}_{\text{Zeilen-}} \cdot \underbrace{(x - x_0)}_{\text{Spalte-vektor}} + \frac{1}{2} \cdot (x - x_0) \cdot \nabla^2 f(x_0) \cdot (x - x_0) + o(|x - x_0|^2)$$

Def.: kritischer Punkt:

Ein Punkt x_0 mit $\nabla f(x_0) = (0, \ldots, 0)$ heisst **kritischer Punkt** von f.
Äquivalent: Tangentialebene an $\mathrm{graph}(f)$ ist horizontal.

Fakt:
Jede lokale Extremastelle ist kritischer Punkt.

Def.: entartet:
Ein kritischer Punkt x_0 von f heisst nicht entartet wenn $\det \nabla^2 f(x_0) \neq 0$ ist.

Satz:
Ein nicht entarteter kritischer Punkt $x_0$von f ist ein:

lokales Maximum	falls	$\nabla^2 f(x_0)$ negativ definit ist.
lokales Minimum	falls	$\nabla^2 f(x_0)$ positiv definit ist.
Sattelpunkt	falls	$\nabla^2 f(x_0)$ indefinit ist.

x_0 kritischer Punkt $\iff$ $f(x) = f(x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^T \nabla^2 f(x_0)(x - x_0) + o(|x - x_0|^2)$

Untersuche die kritischen Punkte der Funktion auf $\mathbb{R}^2$

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \cos(x+2y) + \cos(2x+3y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\sin(x+2y) - 2\sin(2x+3y) \stackrel{!}{=}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2\sin(x+2y) - 3\sin(2x+3y) \stackrel{!}{=}$$

$$\sin(x+2y) = 0$$

$$\sin(2x+3y) = 0$$

$$\begin{aligned} x + 2y &\in \pi\mathbb{Z} \quad && (\cdot 2) \\ 2x + 3y &\in \pi\mathbb{Z} && (\cdot(-1)) \end{aligned}$$

$$2(x+2y) - (2x+3y) = y \in \pi\mathbb{Z} \implies x \in \pi\mathbb{Z}$$

Weil $f\left(\begin{pmatrix} x + 2\pi k \\ y + 2\pi k \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$,

genügt es, die kritischen Punkte $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pi \\ \pi \end{pmatrix}$

$$f_{xx} = -\cos(x+2y) - 4\cos(2x+3y)$$

$$f_{xy} = -2\cos(x+2y) - 6\cos(2x+3y)$$

$$f_{yy} = -4\cos(x+2y) - 9\cos(2x+3y)$$

kritischer Punkt	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ \pi \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \pi \\ \pi \end{pmatrix}$
$\nabla^2 f \begin{pmatrix} -5 & -8 \\ -8 & -13 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 13 \end{pmatrix}$	
$\det(\nabla^2 f)$	1	-1	-1	1

Antwort:

lokale Max.	$\begin{pmatrix} 2\pi k \\ 2\pi l \end{pmatrix}$	
lokale Min.	$\begin{pmatrix} \pi + 2\pi k \\ \pi + 2\pi l \end{pmatrix}$	$k, l \in \mathbb{Z}$
Sattelpunkte	$\begin{pmatrix} \pi + 2\pi k \\ 2\pi l \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2\pi k \\ \pi + 2\pi l \end{pmatrix}$	

Bsp.: ausgeartete kritische Punkte:

a)

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^2 + y^3$$

$$\nabla^2 f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ semidefinit}$$

b)

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^2 + y^4$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ isoliertes lokales Minimum}$$

c)

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^2 - y^4$$

d)

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^3 + y^3$$

Zwei Partikel befinden sich in $[0,1]$ an den Stellen $0 < x < y < 1$ mit den Abstossungskräften BILD
Wo ist die Gleichgewichtslage und ist sie stabil?

Potentielle Energie: $V = -\log x - 2\log(y-x) - \log(1-y)$

$$\left.\begin{aligned} V_x &= -\tfrac{1}{x} + \tfrac{2}{y-x} \stackrel{!}{=} 0 \\ V_y &= -\tfrac{2}{y-x} + \tfrac{1}{1-y} \stackrel{!}{=} 0 \end{aligned}\right\} = \begin{cases} x = \frac{1}{4} \\ y = \frac{3}{4} \end{cases}$$

stabil, falls V isoliertes Minimum

$$V_{xx} = \frac{1}{x^2} + \frac{2}{(y-x)^2}$$

$$V_{xy} = -\frac{2}{(y-x)^2}$$

$$V_{yy} = \frac{2}{(y-x)^2} + \frac{1}{(1-y)^2}$$

$$\nabla^2 f \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 & -8 \\ -824 & \end{pmatrix} = 8\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Wegen $3 > 0$ und $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 8 > 0$ ist diese Matrix positiv definit
$\Longrightarrow$ isoliertes lokales Minimum
$\Longrightarrow$ stabil

BILD

Globale Extrema

Erinnerung: Ist $B \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $f : B \to \mathbb{R}$ stetig, so nimmt f ein globales Maximum und ein globales Minimum an. Methode:

(a) Teile B auf in endlich viele Teile, die durch offene Teilmengen von $\mathbb{R}^m$ für $0 \leq m \leq n$ parametrisiert werden.

(b) Finde alle lokalen Extrema auf allen Teilen mit Differentialrechnung.

(c) Vergleiche Funktionswerte an allen so erhaltenen Kandidaten.

Bsp.:

Bestimme die globalen Extrema von

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = x^3 - 18x^2 + 81x + 12y^2 - 144y + 24xy$$

auf

$$B := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \begin{matrix} x \geq 0 \\ y \geq 0, x + y \leq 10 \end{matrix} \right\}$$

Lösung:
f stetig, B kompakt $\implies$ $\exists$ globales Min., globales Max.

7 Teile: $B^0 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \begin{matrix} x > 0 \\ y > 0, x + y > 10 \end{matrix} \right\}$

(a) f beliebig oft differenzierbar

$$f_x = 3x^2 - 36x + 81 + 24y \stackrel{!}{=} 0$$
$$f_y = 24y - 144 + 24x \stackrel{!}{=} 0$$
$$\hookrightarrow 24(y + x - 6) = 0 \implies y = 6 - x$$
$$\begin{aligned} 0 = f_x &= 3(x^2 - 12x + 27 + 8(6 - x)) \\ &= 3(x^2 - 20x + 75) \\ &= 3(x - 5)(x - 15) \end{aligned}$$
$$\implies x = 5 \implies y = 1$$
$x = 15 \implies y = -9$ Nicht in B!

Einziger Kandidat: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

(b)

$$y = 0, 0 < x < 10$$
$$f\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = x^3 - 18x^2 + 81x$$
$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} &= 3x^2 - 36x + 81 \\ &= 3(x^2 - 12x + 27) \\ &= 3(x-3)(x-9)\end{aligned}$$

Kandidaten: $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \end{pmatrix}$

(c)

$$x = 0, 0 < y < 1$$

Kandidaten: $\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}, \cancel{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$

(d)

$$x + y = 10, 0 < x < y < 10$$
$$f\begin{pmatrix} x \\ 10 - x \end{pmatrix} = \ldots = x^3 - 30x^2 + 223x - 240$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(f\begin{pmatrix} x \\ 10 - x \end{pmatrix}\right) 3(x-5)(x-15)$$

Kandidaten: $\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$

(e)

(f)

(g)

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 9 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix}$
$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$	68	108	0	$\underbrace{-432}_{\text{eindeutiges Minimum}}$	$\underbrace{260}_{\text{eindeutiges Maximum}}$	0	10	-24

Fix table

Bsp.:

Säge aus einem Baumstamm von Radius R einen rechteckigen Balken mit maximalem Widerstandsmoment $W = \frac{b \cdot h^2}{6}$ $(b \geq h)$

Lösung:

$$4R^2 = h^2 + b^2 \implies h^2 = 4R^2 - b^2$$

$$\implies W = \frac{b}{6}(4R^2 - b^2) = \frac{4}{6}R^2 b - \frac{b^3}{6}$$

$$0 \leq h, b \leq 2R$$

kritische Punkte

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}b} = \frac{4}{6}R^2 - \frac{b^2}{2} \stackrel{!}{=} 0 \iff b^2 = \frac{4R^2}{3} \iff b = \frac{2R}{\sqrt{3}}$$

$$\implies h^2 = 4R \cdot \frac{2}{3} \implies h = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}2R$$

$$b = 0, 2R \implies W = 0$$

$$\implies \text{Maximum bei } b = \frac{2R}{\sqrt{3}}, h = \sqrt{2}b$$

Extrema mit Nebenbedingungen

Seien $f, g : U \to \mathbb{R}, U \subset \mathbb{R}^n$ offen.
Gesucht: lokale Extrema von f auf $B := \{x \in U \mid g(x) = 0\}$

Satz:

Sind f, g differenzierbar und $x_0 \in B$ ein lokales Extremum von f auf B, so sind $\nabla f(x_0)$ und $\nabla g(x_0)$ linear abhängig.

Beweisidee:

Wenn nicht, existiert ein Richtungsvektor e mit $\nabla f(x_0) \cdot e \neq 0 = \nabla g(x_0) \cdot e$
$\rightarrow$ entlang einer Kurve in Richtung e hat f kein lokales Extremum

Def.: Bedingt kritischer Punkt:

Bedingt kritische Punkte von f bezüglich g sind solche mit $g(x_0) = 0$ und

(a) $\nabla g(x_0) = 0$ (Singularität von B) oder

(b) $\nabla f(x_0)$ ist Vielfaches von $\nabla g(x_0)$

Bsp.:

$$g\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \cdot y, \nabla g \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Bsp.:

Bestimme das Minimum von

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \cdots x_n$$

auf

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \text{alle } x_i > 0, x_1 + \cdots + x_n = S \right\}$$

Lösung:
B kompakt (da alle $0 \leq x_i \leq S$ sind)
f stetig $\implies$ Max. existiert
$B' := B \cap U$ für $U := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \,\middle|\, \text{alle } x_i > 0 \right\}$
Auf $B \setminus B'$ ist mindestens ein $x_i = 0$, also

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$$

lokale Max. auf B':

$$g\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := x_1 + \cdots + x_n - S$$

$$\begin{aligned} \nabla f\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_2 \cdots x_n & x_1 x_3 \cdots x_n & \cdots & x_1 \cdots x_{n-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{x_1 \cdots x_n}{x_1} & \cdots & \frac{x_1 \cdots x_n}{x_n} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\nabla g\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Bedingt kritischer Punkt

$$\iff \text{alle } \left(\frac{x_1 \cdots x_n}{x_1} \quad \cdots \quad \frac{x_1 \cdots x_n}{x_n}\right) \text{ gleich}$$

$$\iff x_1 = \ldots = x_n \iff x_1 = \ldots = x_n = \frac{S}{n}$$

$$\implies f\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \left(\frac{S}{n}\right)^n > 0$$

$$\implies \text{eindeutiger Maximum an } \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{S}{n} \\ \vdots \\ \frac{S}{n} \end{pmatrix}$$

Bedeutung

$$\forall \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in B : f\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \leq \left(\frac{S}{n}\right)^n$$

$$\iff \underbrace{\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}}_{\text{geometrisches Mittel}} \leq \underbrace{\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}}_{\text{arithmetisches Mittel}}$$

Lagrange-Ansatz

Betrachte die Funktion

$$L : \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ \lambda \end{pmatrix} \mapsto f\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} - \lambda \cdot g\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\nabla f = (\nabla f - \lambda \nabla g, g)$$

link Also: Bedingt kritische Punkte vom Typ (b)sind genau die kritischen Punkte von L

Bsp.:

Bestimme die Extrema von $f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \sqrt{3}x + 3y + 2z$ auf der Einheitssphäre

$$B := \left\{ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| x^2 + y^2 + z^2 = 1 \right\}$$

Lösung:

$$g\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = x^2 + y^2 + z^2 - 1$$

B kompakt, f stetig $\implies \exists$ Extrema

$$\nabla g\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2x & 2y & 2z\end{pmatrix} \text{ ist überall } \neq \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\end{pmatrix} \text{ auf } B$$

Also ist jede Extremalstelle ein bedingt kritischer Punkt von Typ (b)

$$L\begin{pmatrix}x\\y\\z\\\lambda\end{pmatrix} = \sqrt{3}x + 3y + 2z - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$$

kritische Punkte von L

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \sqrt{3} - \lambda 2x \stackrel{!}{=} 0 \implies x = -\frac{\sqrt{3}}{2\lambda} \quad (\lambda \neq 0)$$
$$\frac{\partial L}{\partial y} = 3 - \lambda 2y \stackrel{!}{=} 0 \implies y = \frac{3}{2\lambda}$$
$$\frac{\partial L}{\partial z} = 2 - \lambda 2z \stackrel{!}{=} 0 \implies z = \frac{1}{\lambda}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = -(x^2 + y^2 + z^2 - 1) \overset{!}{=} 0$$

$$\implies 1 = x^2 + y^2 + z^2 = \frac{3}{4\lambda^2} + \frac{9}{4\lambda^2} + \frac{4}{4\lambda^2} = \frac{16}{4\lambda^2} = \left(\frac{2}{\lambda}\right)^2$$

$$\implies \frac{2}{\lambda} = \pm 1$$

$$\implies \lambda = \pm 2$$

$$\implies \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Dort ist $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \pm 4$

Antwort:

Max. $= 4$ in $\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Min. $= -4$ in $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{4} \\ -\frac{3}{4} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

link (b)

Extrema mit mehreren NB

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f, g_1, \ldots, g_m : U \to \mathbb{R}$ differenzierbar.

Fakt:
Jedes lokale Extremum von f auf $B := \{x \in U \mid g_1(x) = \ldots = g_m(x) = 0\}$ ist ein bedingt kritischer Punkt, d.h. einer

mit $\nabla f(x_0), \nabla g_1(x_0), \ldots, \nabla g_m(x_0)$ linear abhängig. D.h.:

(a) $\nabla g_1, \ldots, \nabla g_m$ linear abhängig, oder

(b) ∇f ist Linearkombination von $\nabla g_1, \ldots, \nabla g_m$

Lagrange:

$$L := f - \lambda_1 g_1 - \lambda_2 g_2 - \cdots - \lambda_m g_m$$
$$\nabla L = (\nabla f - \lambda_1 \nabla g_1 - \cdots - \lambda_m \nabla g_m, -g_1, \ldots, -g_m)$$

link $\rightarrow$ Typ (b) $\iff$ kritische Punkte von L

Bsp.:

Bestimme das Maximum von

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x$$

auf

$$B := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| \begin{matrix} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ 5x + 4y + 3z = 0 \end{matrix} \right\}$$

Ansatz:

$$\begin{aligned}
L &= x - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1) - \mu(5x + 4y + 3z) \\
L_x &= 1 - 2\lambda x - 5\mu \\
L_y &= -2\lambda y - 4\mu \\
L_z &= -2\lambda z - 3\mu \\
L_\lambda &= -(x^2 + y^2 + z^2 - 1) \\
L_\mu &= -(5x + 4y + 3z)
\end{aligned}$$

$$L_x = L_y = L_z = 0:$$

$$\left.\begin{aligned} 2\lambda x + 5\mu &= 1 \\ 2\lambda y + 4\mu &= 0 \\ 3\lambda z + 3\mu &= 0 \end{aligned}\right\} \implies 6\lambda y - 8\lambda z = 0, \lambda \neq 0 \implies 6y = 8z$$

$$\implies \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \pm\frac{\sqrt{2}}{10} \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\implies f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mp\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Typ (a):

$$\nabla g_1 = (2x, 2y, 2z)$$
$$\nabla g_2 = (5, 4, 3)$$

Antwort:

$$\text{Max.} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ bei } \frac{\sqrt{2}}{10}\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

link (a)

2.4 Implizite Funktionen

Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ eine C^1-Funktion und $L := \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in U \mid f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0\}$. L heisst regulär in $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$, falls $\nabla f\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \neq (0,0)$. Sonst **singulär**

$$\underbrace{f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{=0 \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in L} = \underbrace{f\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}}_{=0} + \nabla f\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + o\left(\left\|\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}\right\|\right)$$

$\rightsquigarrow$ Tangente an L in $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ hat die Gleichung $\nabla f \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = 0$ falls $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ regulär in L. Diese ist vertikal $\iff \frac{\partial f}{\partial y} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = 0$

Satz:

Seien U, f, L wie oben und $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in L$ ein Punkt mit $\frac{\partial f}{\partial y} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \neq 0$. Dann existieren offene Intervalle I, J mit $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in I \times J \subset U$, sowie eine Funktion $\varphi : I \to J$ so dass $L \cap (I \times J) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ \varphi(x) \end{pmatrix} \middle| x \in I \right\} = \mathrm{graph}(\varphi)$ und φ ist C^1 mit Ableitung

$$\varphi'(x) = -\frac{f_x \begin{pmatrix} x \\ \varphi(x) \end{pmatrix}}{f_y \begin{pmatrix} x \\ \varphi(x) \end{pmatrix}} \text{ für alle } x \in I$$

Dabei ist $f_y \begin{pmatrix} x \\ \varphi(x) \end{pmatrix} \neq 0$ für alle $x \in I$.

Ist f C^m, so auch φ

Übung: Berechne φ''

Bem.:

maximales I?

Bsp.6:

$$f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} := x^3 + y^3 - 3xy \text{ für } \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

$$\begin{aligned}
f_x &= 3x^2 - 3y\\
f_y &= 3y^2 - 3x\\
f_y = f = 0 &\iff x = y^2 \wedge y^6 + y^3 - 3y^3 = 0\\
&\iff y^3(y^3 - 2) = 0\\
&\iff y = 0 \vee y = \sqrt[3]{2}\\
&\rightsquigarrow x = 0 \vee x = \sqrt[3]{4}
\end{aligned}$$

Bem.:

L ist Niveaulinie von f

Bem.: Singuläre Punkte von L:

f Sattelpunkt

$$f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = x^3 - y^2 = 0 \iff y = \pm x^{\frac{3}{2}}$$

Bsp.7:

$$f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = (1+x+y)\cdot e^{x^2+y^2} - 1 \text{ auf } \mathbb{R}^2$$

$$\begin{aligned}
f_x &= e^{x^2+y^2} + (1+x+y)\cdot 2x\cdot e^{x^2+y^2} = (1+2x+2x^2+2xy)\cdot e^{x^2+y^2}\\
f_y &= (1+2y+2y^2+2xy)\cdot e^{x^2+y^2}\\
f_y &= 0 \iff 1+2y+2y^2+2xy = 0\\
f_y &= e^{x^2+y^2} + 2y\underbrace{(1+x+y)\cdot e^{x^2+y^2}}_{=f+1}\\
f &= 0 \implies f_y = e^{x^2+y^2} + 2y\\
&\qquad = 1+x^2+y^2+\frac{(x^2+y^2)^2}{2}+\dots+2y\\
&\qquad = \underbrace{(1+y)^2+x^2+\frac{(x^2+y^2)^2}{2}}_{>0} + (\text{Rest} \geq 0)
\end{aligned}$$

Also ist $f_y > 0$ auf $L = \{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = 0\}$

Analog $f_x > 0$

$\implies$ Satz überall anwendbar und $\varphi'(x) = -\dfrac{f_x\begin{pmatrix}x\\\varphi(x)\end{pmatrix}}{f_y\begin{pmatrix}x\\\varphi(x)\end{pmatrix}} < 0$

$\implies$ φ streng monoton fallend

Bsp.8:

Sei $x \mapsto g(x)$ eine C^1-Funktion einer Variable mit $g'(x_0) \neq 0$.

Dann gilt für $f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} := g(x) - y$

$$\operatorname{graph}(g) = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\middle| f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = 0\right\}$$

und

$$f_x \begin{pmatrix} x_0 \\ g(x_0) \end{pmatrix} = g'(x_0) \neq 0$$

$\rightsquigarrow$ in einer Umgebung existiert eine Funktion $y \mapsto \varphi(y)$ mit $\mathrm{graph}(\varphi) = \left\{ \begin{pmatrix} \varphi(y) \\ y \end{pmatrix} \middle| y \in I \right\}$, d.h. $\varphi(g(x)) = x$ und $g(\varphi(y)) = y$

2.4.1 Allgemeine Dimension

Satz:

Sei $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen, sei $f : U \to \mathbb{R}$ eine C^m-Funktion, $m \geq 1$, sei $L := \{x \in U \mid f(x) = 0\}$ und $x_0 \in L$ mit $\frac{\partial f}{\partial x_{n+1}}(x_0) \neq 0$ Dann existieren $V \subset \mathbb{R}^n$ offen und $J \subset \mathbb{R}$ offener Intervall und eine C^m-Funktion $\varphi : V \to J$ so dass $x_0 \in V \times J \subset U$ so dass

$$\mathrm{graph}(\varphi) = L \cap (V \times J)$$

ist.
Ausserdem ist für alle $x \in V$ mit alle $1 \leq i \leq n$:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}\begin{pmatrix} x \\ \varphi(x) \end{pmatrix}}{\frac{\partial f}{\partial x_{n+1}}\begin{pmatrix} x \\ \varphi(x) \end{pmatrix}}$$

Bem.:

Für $x_0 \in L$ regulär, d.h. mit $\nabla f(x_0) \neq 0$ ist der Tangentialraum von L im Punkt x_0 gegeben durch

$$\nabla f(x_0) \cdot (x - x_0) = 0$$
$$= \langle \nabla f(x_0)^T, x - x_0 \rangle = 0$$

Bsp.:

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x^2 + y^2 + z^2 - 1$$

Nullstellmenge $= L =$ Einheitssphäre

$$\nabla f = (2x, 2y, 2z)$$

reguläre auf L

Bsp.:

Zweite Ableitung: $f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ C^2

$\varphi(x)$ mit $f \begin{pmatrix} x \\ \varphi(x) \end{pmatrix} = 0$ und $f_y \neq 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x} \begin{pmatrix} x \\ \varphi(x) \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x}}_{=1} + \frac{\partial f}{\partial y} \begin{pmatrix} x \\ \varphi(x) \end{pmatrix} \cdot \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}(x) = 0$$

$$\implies \varphi'(x) = -\frac{f_x}{f_y} \begin{pmatrix} x \\ \varphi(x) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\implies \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\begin{pmatrix} x \\ \varphi(x)\end{pmatrix}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\begin{pmatrix} x \\ \varphi(x)\end{pmatrix}\cdot\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x} \\
+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\begin{pmatrix} x \\ \varphi(x)\end{pmatrix}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x}\right. \\
\left.+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\cdot\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x} \\
+\frac{\partial f}{\partial y}\begin{pmatrix} x \\ \varphi(x)\end{pmatrix}\cdot\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}x^2} \\
=0
\end{aligned}$$

$$\implies f_{xx} + f_{xy}\varphi' + (f_{yx} + f_{yy}\varphi')\varphi' + f_y\varphi'' = 0$$

$$\implies f_{xx} + 2f_{xy}\varphi' + f_{yy}\varphi'^2 + f_y\varphi'' = 0$$

$$\implies f_{xx} - 2f_{xy}\frac{f_x}{f_y} + f_{yy}\frac{f_x^2}{f_y^2} + f_y\varphi'' = 0$$

$$\implies \varphi'' = -\frac{f_{xx}}{f_y} + 2\frac{f_{xy}f_x}{f_y^2} - \frac{f_{yy}f_x^2}{f_y^3}\begin{pmatrix} x \\ \varphi(x)\end{pmatrix}$$

2.5 Funktionalmatrix

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen ; $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix} : U \to \mathbb{R}^m$.

f heisst diefferenzierbar bzw. C^l falls jedes f_i es ist.
Differenzierbar:

$$\forall x_0 \in U : \forall i : f_i(x) = f_i(x_0) + \underbrace{\nabla f_i(x_0)}_{\text{Zeilenvektor}} \cdot \underbrace{(x - x_0)}_{\text{Spaltenvektor}} + o(|x - x_0|)$$

Also f differenzierbar $\iff \forall x_0$:

$$f(x) = f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot (x - x_0) + o(|x - x_0|)$$

Dabei

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

"nabla f" die **Funktionalmatrix von f**

Bem.: Vorsicht:
Nicht verwechseln mit

$P : U \to \mathbb{R} \quad C^2$-Funktion

$\implies \nabla^2 P$ symmetrische $n \times n$-Matrix "Hesse"-Matrix
Dann ist $(\nabla P)^T : U \to \mathbb{R}^n$ eine C^0-Funktion, und deren Funktionalmatrix $\nabla^2 P$ ist.

Def.: Potential:
Ist $f = (\nabla P)^T$ für $P : U \to \mathbb{R}$ differenzierbar, so heisst P ein **Potential** von f

2.5.1 Kettenregel

Seien

$$\underbrace{\overbrace{U}^{\mathbb{R}^n \supset}}_{\ni x} \vec{f} \underbrace{\overbrace{V}^{\mathbb{R}^m \supset}}_{\ni y} \vec{g} \overbrace{W}^{\mathbb{R}^l}$$

offene Teilmengen und f, g differenzierbar. Die vorige Kettenregel besagt:

$$\frac{\partial}{\partial x_k}(g_i(f(x))) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial g_i}{\partial y_j}(f(x)) \cdot \frac{\partial f_j}{\partial x_k}$$

In der obigen Situation ist $g \circ f : U \to W$ differenzierbar mit $\nabla(g \circ f)(x) = (\nabla g)(f(x)) \cdot \nabla f(x)$ oder kurz

$$\nabla(g \circ f) = \nabla g \cdot \nabla f$$

Bsp.:

$$f\begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$$

$$g\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2+y^2} \\ \arg(x+\imath y) \end{pmatrix}$$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$\nabla g = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{-x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \nabla g\left(f\begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix}\right) \cdot \nabla f\begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{x}{r} & \frac{y}{r} \\ \frac{-y}{r^2} & \frac{x}{r^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \frac{-\sin\varphi}{r} & \frac{\cos\varphi}{r} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\nabla(g \circ f)\begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$g \circ f\begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix}$$

Analog $\nabla f \cdot \nabla g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Erklärung: Umkehrfunktionen!

Allgemein: $Id : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, x \mapsto x$ hat

$$\nabla(Id) = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = \text{Einheits } n \times n\text{-Matrix}$$

Also: Sind

$$\underbrace{\overbrace{U}^{\mathbb{R}^n \supset}}_{\ni x} \vec{f} \underbrace{\overbrace{V}^{\mathbb{R}^m \supset}}_{\ni y} \vec{g} \overbrace{U}^{\mathbb{R}^n}$$

zueinander invers, differenzierbar, dann ist ∇f invertierbare Matrix und

$$(\nabla g)(f(x)) = (\nabla f)^{-1};\ \text{d.h.: } \nabla g(y) = (\nabla f(g(y)))^{-1}$$

Erinnerung:
Der **Rang** einer Matrix ist die maximale Anzahl linear unabhängiger Spalte (äquivalent: Zeilen). Eine $m \times n$ hat Rang $\leq \min\{m, n\}$

Def.: regulär:
$f : \mathbb{R}^n \supset U \to V \subset \mathbb{R}^m$ heisst **regulär**, falls $\operatorname{rang} \nabla f = \min\{m, n\}$ überall.

Spezialfälle

$n = 1$: f regulär $\iff \nabla f \neq 0$

$m = 1$: f regulär $\iff \nabla f \neq 0$

$n = m$: f regulär $\iff \nabla f$ invertierbar

Def.: regulär:

$f : U \to V$ **regulär** in x_0 $\begin{pmatrix} U \subset \mathbb{R}^n \\ V \subset \mathbb{R}^m \end{pmatrix}$ $\iff$ Rang $\nabla f(x_0)$ maximal.

Speziell:

$n = 1$: f ist Parametrisierung einer Kurve regulär $\iff$ $\nabla f \neq 0$ $\implies$ Kurve glatt. Tangente in x_0 hat Parametrisierung $x \mapsto f(x_0) + \nabla f(x_0)(x - x_0)$

$m = 1$: regulär falls die **Niveaufläche** $\{x \in U \mid f(x) = f(x_0)\}$ glatt in x_0 ist.

Bsp.:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, t \mapsto \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \end{pmatrix} \implies \mathrm{Bild}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| x^3 = y^2 \right\}$$

regulär nur für $t \neq 0$

Bsp.:

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} xy$$

$$S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u \cdot \cos v \\ u \cdot \sin v \\ \frac{v}{2\pi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\implies u = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$$

$$v = 2\pi z$$

$$x \cdot \sin 2\pi z = y \cos 2\pi z$$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \cos v & -u \sin v \\ \sin v & u \cos v \\ 0 & \frac{1}{2\pi} \end{pmatrix}$$

$\implies$ Spalten linear unabhängig
$\implies$ Rang = 2
$\implies$ S überall regulär

$n = m$: f regulär in x_0 $\iff$ $\nabla f(x_0)$ invertierbar $\iff$ $\det \nabla f(x_0) \neq 0$

Def.: Funktionaldeterminante:
$\det \nabla f(x_0)$ heisst **Funktionaldeterminante** oder **Jacobideterminante**.

Die affine lineare Abbildung

$$f(x) = f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot (x - x_0)$$

approximiert f nahe x_0
Allgemein: $n = m \implies$ Ein achsenparaller Quader mit Volumen v hat als Bild einen Parallelepiped vom Volumen $|\det \nabla f(x_0)| \cdot v$. Die Abbildung f bildet also kleine Quader mit Ecke x_0 näherungsweise auf kleine Parallelpipede ab, wobei das Volumen näherungsweise mit $|\det \nabla f(x_0)|$ multipliziert wird. Und $\det \nabla f(x_0) > 0$ falls f orientierungserhaltend, $\det \nabla f(x_0) < 0$ falls f orientierungsvertauschend.

Bsp.:

$n = m = 1$
$|\det \nabla f(x_0)| = |f'(x_0)| =$ Streckungsfaktor.
Vorzeichen: monoton wachsend/fallend

Bsp.:

$$n = m = 2 : \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$$
$$\nabla f = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}$$
$$\det \nabla f = r$$

Allgemein $n = m$:
$\nabla f(x_0)$ invertierbar $\iff$ lineare Abbildung $x \mapsto f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot (x - x_0)$ bijektiv

Satz: Satz über inverse Funktionen:
Sind $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to V$ eine C^m-Funktion, $m \geq 1$, regulär in x_0 ; dann existieren offene Teilmengen $U' \subset U, V' \subset V$ mit $x_0 \in U'$ so dass f eine bijektive C^m-Funktion $g : U' \to V'$ induziert. Und dann ist $\nabla g(f(x_0)) = (\nabla f(x_0))^{-1}$

Bedeutung: (nicht linearer) Koordinatenwechsel oder Umparametrisierung.

Kapitel 3

Mehrdimensionale Integration

Fakt:

Jede kompakte Teilmenge A von $\mathbb{R}^n$ hat ein Volumen $\mu(A)$ mit den Eigenschaften:

- $$\mu(A) \in \mathbb{R}^{\geq 0}$$
- $$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$$
- $\mu(A)$ falls $\dim(A) < n$ ist
- $\mu(A \times B) = \mu(A) \cdot \mu(B)$ für $A \subset \mathbb{R}^n, B \subset \mathbb{R}^l$ kompakt $; A \times B = \{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mid a \in A, b \in B\}$
- μ ist invariant unter Translationen, Drehungen, Spiegelungnen

Sei jezt $B \subset \mathbb{R}^n$ kompakt unf f eine Funktion auf B. Eine **Zerlegung** $\mathcal{Z}$ von B beteht aus kompakten Teilmengen $B_1, \ldots, B_n$ mit $B = \bigcup_{i=1}^r B_i$ und $\mu(B_i \cap B_j) = 0$ für alle $1 \leq i < j \leq r$ sowie Basispunkten $z_i \in B_i$. Die zugehörige

Riemann-Summe ist

$$S_f(\mathcal{Z}) := \sum_{i=1}^{r} f(z_i) \cdot \mu(B_i)$$

Die **Feinheit** von $\mathcal{Z}$ ist

$$\delta(\mathcal{Z}) := \max\{\delta(B_i) \mid 1 \leq i \leq r\}$$

wobei $\delta(B_i)$ der Durchmesser von B_i ist, wobei der Durchmesser

$$\delta(B) := \max\{|x - y| : x, y \in B$$

Def.: Riemann-Integral:

Das **Riemann-Integral von f** über B ist

$$\lim_{\delta(\mathcal{Z}) \to 0} S_f(\mathcal{Z}) =: \int_B f(x)\mu(x)$$

falls es existiert.

Satz:

Ist f stetig auf $B \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, so existiert das Integral.

3.1 Grundeigenschaften

(a)

$$\int_{A \cup B} f(z)\mu(z) = \int_A + \int_B - \int_{A \cap B}$$

(b)

$$\int_B f(z)\mu(z) = 0 \text{ falls } \mu(B) = 0$$

(c)

$$\int_B 1 \cdot \mu(z) = \mu(B)$$

(d)

$$\int_B (f(z) + g(z))\mu(z) = \int_B f(z)\mu(z) + \int_B g(z)\mu(z)$$

(e)

$$\int_B \lambda f(z)\mu(z) = \lambda \int_B f(z)\mu(z) \quad \lambda\text{const.}$$

(f)

$$\forall z \in B : f(z) \leq g(z) \implies \int_B f(z)\mu(z) \leq \int_B g(z)\mu(z)$$

(g)

$$\left|\int_B f(z)\mu(z)\right| \leq \int_B |f(z)|\,\mu(z)$$

(h) Ist $f(z) \leq g(z)$ für alle $x \in B$ für stetige $f, g : B \to \mathbb{R}$, so ist

$$\int_B (g(x) - f(x)) \underbrace{\mu}_{n\text{-dimensionales Volumen}} (x)$$

$$= \underbrace{\mu}_{n+1\text{-dimensionales Volumen}} \left(\underbrace{\left\{ \begin{pmatrix} x \\ x_{n+1} \end{pmatrix} \middle| x \in B, f(x) \leq x_{n+1} \leq g(x) \right\}}_{C} \right)$$

Satz: Fubini:

Vor. wie oben, $h : C \to \mathbb{R}$

$$\int_C h \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{pmatrix} \mu \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{pmatrix}$$

$$= \int_B \left(\int_{f\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}^{g\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}} h \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{pmatrix} \mathrm{d}x_{n+1} \right) \mu \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Analog mit einem x_i anstelle x_{n+1}

Bsp.1:

$$a, b \geq 1$$

$$\int_{[1,a]\times[1,b]} \frac{1}{(x+y)^2} \mu \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \overset{\text{Fubini}}{=} \int_1^b \left(\int_1^a \frac{1}{(x+y)^2} \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$$

$$= \int_1^b \left(\frac{-1}{x+y}\Big|_1^a \right) \mathrm{d}y$$

$$= \int_1^b \left(\frac{1}{1+y} - \frac{1}{a+y} \right) \mathrm{d}y$$

$$= (\log(1+y) - \log(a+y))|_1^b$$

$$= \log(1+b) - \log(a+b)$$

$$- \log(2) + \log(a+1)$$

$$= \log \frac{(1+a)(1+b)}{2(a+b)}$$

Bsp.2:

$$W = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]^3$$

$$\int_W \cos(x+y+z)\mu\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$= \int_{\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]^2} \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x+y+z)\,\mathrm{d}z\right)\mu\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x+y+z)\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x+y+z)\,\mathrm{d}z$$

$$= \sin(x+y+z)\big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \sin(x+y-\frac{\pi}{2}) - \sin\left(x+y+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \cos(x+y) - (-\cos(x+y))$$

$$= 2\cos(x+y)$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2\cos(x+y)\,\mathrm{d}y$$

$$= 4\cos(x)$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4\cos(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= 8$$

Bsp.3:

Sei B der Bereich

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid \begin{matrix} 0 \leq x \leq 4 \\ -\sqrt{x} \leq y \leq \sqrt{4} \end{matrix} \right\}$$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid \begin{matrix} -2 \leq y \leq 2 \\ y^2 \leq x \leq 4 \end{matrix} \right\}$$

$$\begin{aligned}
\int_B xy^2 \mu \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \int_0^4 \left(\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} xy^2 \, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\
&= \int_0^4 \left(\frac{xy^3}{3} \Big|_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} \right) \mathrm{d}x \\
&= \int_0^4 \left(\frac{x}{3} 2x^{\frac{3}{2}} \right) \mathrm{d}x \\
&= \int_0^4 \frac{2}{3} x^{\frac{5}{2}} \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{3} x^{\frac{7}{2}} \frac{2}{7} \Big|_0^4 \\
&= \frac{512}{21}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_B xy^2 \mu \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \int_{-2}^2 \left(\int_{y^2}^4 xy^2 \, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \\
&= \int_{-2}^2 \left(\frac{x^2 y^2}{2} \Big|_{x=y^2}^{x=4} \right) \mathrm{d}y \\
&= \int_{-2}^2 \left(8y^2 - \frac{y^6}{2} \right) \mathrm{d}y = \left(\frac{8}{3} y^3 - \frac{y^7}{14} \right) \Big|_{y=-2}^{y=2} \\
&\vdots \\
&= \frac{512}{21}
\end{aligned}$$

Bsp.4:

$$\int_0^2 \left(\int_{y^3}^{4\sqrt{2y}} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$$

$$\begin{aligned} y^3 \le 4\sqrt{2y} \text{ für } 0 \le y \le 2 &\iff y^6 \le 16 \cdot 2y \\ &\iff y^5 \le 32 \\ &\iff y \le \sqrt[5]{32} = 2\checkmark \end{aligned}$$

Also mit $B = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid \begin{matrix} 0 \le y \le 2 \\ y^3 \le x \le 4\sqrt{2y} \end{matrix} \right\}$

ist das Integral $\int_B f(x,y)\mu \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid \begin{matrix} 0 \le x \le 8 \\ \frac{x^2}{32} \le y \le \sqrt[3]{x} \end{matrix} \right\}$$

$$\implies \int_0^8 \left(\int_{\frac{x}{32}}^{\sqrt[3]{x}} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

Bsp.5:

Vertausche Integrationsreihenfolge in

$$\int_{-1}^2 \left(\int_{-x}^{2-x^2} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid \begin{matrix} -1 \le x \le 2 \\ -x \le y \le 2 - x^2 \end{matrix} \right\}$$

$$B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid \begin{matrix} 1 \le y \le 2 \\ -\sqrt{2-y} \le x \le \sqrt{2-y} \end{matrix} \right\}$$

$$B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid \begin{matrix} -2 \le y \le 1 \\ -y \le x \le \sqrt{2-y} \end{matrix} \right\}$$

$$B = B_1 \cup B_2$$

$$\mu(B_1 \cap B_2) = 0$$

Antwort:

$$\int_1^2 \left(\int_{-\sqrt{2-y}}^{\sqrt{2-y}} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y + \int_{-2}^1 \left(\int_{-y}^{\sqrt{2-y}} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$$

Substitution

$\varphi : \mathbb{R}^n \supset \tilde{B} \to B \subset \mathbb{R}^n, \tilde{x} \mapsto x$

Betrachte kompakte $B, \tilde{B} \subset \mathbb{R}^n$ und : $\tilde{B} \to B, \tilde{x} \mapsto x$ surjektive Abbildung, injektiv ausserhalb einer Teilmenge $C \subset \tilde{B}$ mit $\mu(C) = 0$
Annahme: φ C^1-Funktion

Satz:
Dann ist

$$\int_B f(x)\mu(x) = \int_{\tilde{B}} f(\varphi(\tilde{x})) \cdot |\nabla\varphi(\tilde{x})| \cdot \mu(\tilde{x})$$

Beweisidee:

$$\text{Linke Seite} = \lim_{\delta(\mathcal{Z})\to 0} \sum_{i=1}^{r} \underbrace{f(z_i)}_{f(\varphi(\tilde{z}_i)} \underbrace{\mu(B_i)}_{\mu(\varphi(\tilde{B}_i))}$$

Setze $\tilde{B}_i := \varphi^{-1}(B_i)$

$$\implies B_i = \varphi(\tilde{B}_i)$$

Wähle $\tilde{z}_i \in \tilde{B}_i$ mit $\varphi(\tilde{z}_i) = z_i$

$$= \lim_{\delta(\mathcal{Z})\to 0} \underbrace{\sum_{i=1}^{r} (f(\varphi(\tilde{z}_i)) \cdot |\nabla\varphi(\tilde{z}_i)|) \cdot \mu(\tilde{B}_i)}_{\substack{\text{Riemannsumme von } f(\varphi(\tilde{x}))|\nabla\varphi(\tilde{x})| \\ \text{bezüglich der Zerlegung } \tilde{\mathcal{Z}}=(\tilde{B}_i,\tilde{z}_i)_{i=1\ldots r}}}$$

$$= \lim_{\delta(\mathcal{Z})\to 0} S_{f\circ\varphi\cdot|\nabla\varphi|}(\tilde{\mathcal{Z}})$$

$= \text{Rechte Seite}$ ■

Bem.:

$n = 1:$

$$\int_{\varphi(\tilde{a})}^{\varphi(\tilde{b})} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} f(\varphi(\tilde{x}))\varphi'(\tilde{x})\,\mathrm{d}\tilde{x}$$

$\varphi : [\tilde{a}, \tilde{b}] \to [a, b]$

äquivalent:

$$\underbrace{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}_{=\int_{[a,b]} f(x)\mu(x)} = \underbrace{\int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} f(\varphi(\tilde{x})) \cdot |\varphi'(\tilde{x})|\,\mathrm{d}\tilde{x}}_{=\int_{[\tilde{a},\tilde{b}]} \cdots}$$

Bsp.: lineare Substitution:
$\varphi : \tilde{B} \to B, x \mapsto Ax + b$ für $b \in \mathbb{R}^n$ und für eine $n \times n$-Matrix A mit $\det(A) \neq 0$

$$\implies \nabla\varphi = A$$
$$\implies \int_{\varphi\tilde{B})} f(x)\mu(x) = \int_{\tilde{B}} f(A\tilde{x} + b) \cdot \underbrace{|\det A|}_{\text{const.}} \cdot \mu(\tilde{x})$$

Insbesondere: $|\det A| = 1$ für Translationen, Drehungen, Spiegelungen.

Bsp.: Polarkoordinaten:

kompakt $[0, \infty[\times [-\pi, \pi] \supset \tilde{B} \to B \subset \mathbb{R}^2$

$$\psi : \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$$
$$\implies |\nabla\psi| = r$$

$$\implies \int_B f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\mu\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \int_{\tilde{B}} f\begin{pmatrix}r\cos\varphi\\r\sin\varphi\end{pmatrix}\cdot r\cdot\mu\begin{pmatrix}r\\\varphi\end{pmatrix}$$

d.h. $\displaystyle\int_B f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\tilde{B}} f\begin{pmatrix}r\cos\varphi\\r\sin\varphi\end{pmatrix}\cdot r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi$

Bsp.: Kreisfläche:

$$B = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\middle| x^2+y^2\leq R^2\right\}$$

$$\tilde{B} = [0,R]\times[-\pi,\pi]$$

$$\begin{aligned}\implies \mu(B) &= \int_B 1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\ &= \int_{[0,R]\times[-\pi,\pi]} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\\ &= \int_0^R r\,\mathrm{d}r\cdot\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}\varphi\\ &= \frac{r^2}{2}\bigg|_0^R\cdot 2\pi\\ &= \pi R^2\end{aligned}$$

Analog: Zylinderkoordinaten

Bsp.: Kugelkoordinaten:

$$[0,\infty[\times[-\pi,\pi]\times[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\to\mathbb{R}^3$$

bijektiv ausserhalb des Randes mit $\mu = 0$

$$\psi : \begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ \theta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r\cos\theta\cos\varphi \\ r\cos\theta\sin\varphi \\ r\sin\theta \end{pmatrix}$$

$$|\nabla\psi| = r^2\cos\theta$$

$$\implies \int f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

$$= \int f\begin{pmatrix} r\cos\theta\cos\varphi \\ r\cos\theta\sin\varphi \\ r\sin\theta \end{pmatrix} \cdot r^2\cos\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$$

Bsp.: Volumen der Kugel mit Radius R:

$$\tilde{B} = [0,R] \times [-\pi,\pi] \times [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$$

$$\begin{aligned}
\implies \mu(B) &= \int_B 1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\
&= \int_{r=0}^{R}\int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{\varphi=-\pi}^{\pi} r^2\cos\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi \\
&= \int_0^R r^2\,\mathrm{d}r \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta \cdot \int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}\varphi \\
&= \frac{r^3}{3}\bigg|_0^R \cdot \sin\theta|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cdot \varphi|_{-\pi}^{\pi} \\
&= \frac{R^3}{3}\cdot 2\cdot 2\pi \\
&= \frac{4\pi R^3}{3}
\end{aligned}$$

Bsp.:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in R^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2 \right\}$$

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} \in R^4 : x^4 + y^4 + z^4 + u^4 \leq R^2 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in B \text{ und } |u| \leq \sqrt{R^2 - x^2 - y^2 - z^2} \right\}$$

$$\mu(C) = \int_C 1\mu \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix}$$

$$\overset{\text{Fubini}}{=} \int_B \left(\int_{-\sqrt{R^2-x^2-y^2-z^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2-z^2}} 1 \, \mathrm{d}u \right) \mu \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix}$$

$$= \int_B 2\sqrt{R^2 - x^2 - y^2 - z^2} \mu \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix}$$

$$= \int_0^R \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\pi}^{\pi} 2\sqrt{R^2 - r^2} \cdot r^2 \cos\theta \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\varphi$$

$$= \underbrace{\int_0^R 2\sqrt{R^2 - r^2} r^2 \, \mathrm{d}r}_{*} \cdot \underbrace{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \, \mathrm{d}\theta}_{2} \cdot \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} 1 \, \mathrm{d}\varphi}_{2\pi}$$

$$r = R \cdot \sin t$$

$$\mathrm{d}r = R \cdot \cos t \, \mathrm{d}t$$

$$r = 0 \iff t = 0$$

$$r = R \iff t = \frac{\pi}{2}$$

$$
\begin{aligned}
* &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sqrt{R^2 - R^2\sin^2 t} \cdot R^2 \sin^2 t R \cos t \,\mathrm{d}t \\
&= 2R^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos^2 t \,\mathrm{d}t \\
&= \frac{R^4}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2t)^2 \,\mathrm{d}t \\
&= \frac{R^4}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - \cos 4t}{2} \,\mathrm{d}t \\
&= \frac{R^4}{2} \left(\frac{t - \frac{\sin 4t}{4}}{2} \right) \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}
\end{aligned}
$$

$$\mu(C) = \frac{\pi R^4}{8} \cdot 2 \cdot 2\pi = \frac{\pi^2 R^4}{2}$$

Anwendungen: Masse (/Ladung), Schwerpunkt, etc.

Masse Punktmassen m_i im Punkten $x_i \in \mathbb{R}^n \implies$ Gesamtmasse $\sum m_i$
kontinuierliche Variante: Massenverteilung $m : B \to \mathbb{R}$
$\implies$ Gesamtmasse $m(B) = \int_B m(x)\mu(x)$
Ist $m(x) = m$ konstant, dann ist $m(B) = m \cdot \mu(B)$

Schwerpunkt $\implies$ Gesamtschwerpunkt S

$$S = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}$$

analog:

$$S = \frac{\overbrace{\int_B m(x) \cdot \overbrace{x}^{x=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}} \mu(x)}^{\substack{\text{vektorwertiger Integral} = \\ \begin{pmatrix} \int_B m(x) x_1 \mu(x) \\ \vdots \\ \int_B m(x) x_n \mu(x) \end{pmatrix}}}}{\int_B m(x)\mu(x)}$$

Speziallfall: Rotationskörper

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \begin{matrix} a \le z \le b \\ x^2 + y^2 \le r(z)^2 \end{matrix} \right\}$$

für $r : [a, b] \to \mathbb{R}^{\ge 0}$

$$\int_B f \begin{pmatrix} \sqrt{x^@ + y^2} \\ z \end{pmatrix} \mu \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \int_a^b \left(\iint_{\sqrt{x^2+y^2} \le r(z)} f \begin{pmatrix} \sqrt{x^2 + y^2} \\ z \end{pmatrix} \mathrm{d}x \, \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}z$$

ebene Polarkoordinaten:

$$\begin{matrix} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{matrix} \Bigg| \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \rho \, \mathrm{d}\rho \, \mathrm{d}\varphi$$

$$= \int_a^b \left(\int_{\rho=0}^{\rho=2\pi} \left(\int_{\varphi=0}^{2\pi} \underbrace{f \begin{pmatrix} \rho \\ z \end{pmatrix} \rho \, \mathrm{d}\varphi}_{2\pi f \begin{pmatrix} \rho \\ z \end{pmatrix} \rho} \right) \mathrm{d}\rho \right) \mathrm{d}z$$

$$= \int_a^b \left(\int_0^{r(z)} f \begin{pmatrix} \rho \\ z \end{pmatrix} \cdot 2\pi\rho \, \mathrm{d}\rho \right) \mathrm{d}z$$

Wegen $\displaystyle\int_0^{r(z)} 2\pi\rho \, \mathrm{d}\rho = \pi\rho^2 \Big|_0^{r(z)} = \pi r(z)^2$ folgt

$$\int_B f(z)\mu\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \int_a^b f(z)\pi r(z)^2 \,\mathrm{d}z$$

Insbesondere: $f(z) = 1 \implies$ Volumen

$$\mu(B) = \int_a^b \pi r(z)^2 \,\mathrm{d}z$$

Bsp.: Kegel:

$$[a,b] \to [0,h]$$
$$r(z) = \frac{R}{h}(h-z)$$
$$\begin{aligned}\implies \mu(B) &= \int_0^h \pi\left[\frac{R}{h}(h-z)\right]^2 \mathrm{d}z\\ &= \pi\frac{R^2}{h^2}\frac{(z-h)^3}{3}\Big|_0^h\\ &= \pi\frac{R^2}{h^2}\left(0-\frac{(-h)^3}{3}\right)\\ &= \frac{\pi R^3 h}{3}\end{aligned}$$

Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, $m : B \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ Massenverteilung auf B.

Gesamtmasse $\int_B m(x)\mu(x)$

Schwerpunkt (falls Nenner $\neq 0$) $\frac{\int_B m(x)\cdot x\mu(x)}{\int_B m(x)\mu(x)}$

Bsp.: Hablkreisscheibe:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \begin{matrix} x^2 + y^2 \leq R^2 \\ x \geq 0 \end{matrix} \right\}$$

$$m \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1$$

$$\int_B \mu \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{\pi}{2} \cdot R^2$$

$$\int_B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_0^R \left(\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{+\sqrt{R^2-x^2}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned} \int_B x \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y &= \int_0^R \left(\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{+\sqrt{R^2-x^2}} x \, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\ &= \int_0^R x \cdot 2\sqrt{R^2 - x^2} \, \mathrm{d}x \\ &= \dots \\ &= \frac{2}{3} R^3 \end{aligned}$$

$$\int_B y \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_0^R \left(\underbrace{\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{+\sqrt{R^2-x^2}} y \, \mathrm{d}y}_{= \frac{y^2}{2} \Big|_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{+\sqrt{R^2-x^2}} = 0} \right) \mathrm{d}x = 0$$

$$\implies \text{Schwerpunkt} = \frac{\begin{pmatrix} \frac{2}{3} R^3 \\ 0 \end{pmatrix}}{\frac{\pi}{2} R^2} = \begin{pmatrix} \frac{4R}{3\pi} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Trägheitsmoment von B bzgl. Achse in Richtung eines Einheitsvektors; $B \subset \mathbb{R}^3$
Punktmasse m im P mit Abstand ρ zur Achse hat Betrag $m \cdot \rho^2$; $\rho = |e \times P|$

$$\Theta_e(B) = \int_B m(B) \cdot |e \times P|^2 \, \mu(P)$$

Speziall: z-Achse

$$\implies e = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \rho = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\implies \Theta_e(B) = \int_B m \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot (x^2+y^2)\mu \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Bsp.: Kugel:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x^2+y^2+z^2 \leq R^2 \right\}$$

$m = 1$ konstant

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{c} -R \leq z \leq R \\ \sqrt{x^2+y^2} \leq \sqrt{R^2-z^2} \end{array} \right\}$$

$$\text{Masse: } \int_B \mu \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \int_{-R}^{R} \pi(R^2-z^2)\,\mathrm{d}z$$

$$= \pi\left(R^2 z - \frac{z^3}{3}\right)\Big|_{-R}^{R}$$

$$= \pi\left(R^3 - \frac{R^3}{3} + R^3 - \frac{R^3}{3}\right)$$

$$= \frac{4\pi}{3}R^3$$

Schwerpunkt:

$$\int_B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mu \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \int_B z\mu \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \int_{-R}^{R} z\pi(R^2-z^2)\,\mathrm{d}z = 0$$

$$\underset{\text{Variablenwechsel}}{\Longrightarrow} \int_B x\mu \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \int_B y\mu \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \int_B z\mu \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

$$\Longrightarrow \text{Schwerpunkt} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Trägheitsmoment

$$\begin{aligned}
\Theta_e(B) &\underset{\text{Symmetrie}}{=} \Theta_{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}(B) \\
&= \int_B (x^2+y^2)\mu \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\
&= \int_{-R}^{R} \left(\int_0^{\sqrt{R^2-z^2}} \underbrace{\rho^2 \cdot 2\pi\rho}_{2\pi\rho^3} \,\mathrm{d}\rho \right) \mathrm{d}z \\
&= \int_{-R}^{R} \left(\frac{2\pi}{4}\rho^4 \Big|_0^{\sqrt{R^2-z^2}} \right) \mathrm{d}z \\
&= \int_{-R}^{R} \frac{\pi}{2} \cdot (R^2-z^2)^2 \,\mathrm{d}z \\
&= \frac{\pi}{2} \cdot \int_{-R}^{R} (R^4 - 2R^2z^2 + z^4) \,\mathrm{d}z \\
&= \frac{\pi}{2} \left(R^4 z - \frac{2R^3}{3} z^3 - \frac{z^5}{5} \right) \Big|_{-R}^{R} \\
&= \frac{\pi}{2} \cdot 2 \cdot (R^5 - \frac{2}{3}R^5 + \frac{R^5}{5}) \\
&= \pi \frac{8}{15} R^5
\end{aligned}$$

Masse: $\frac{4\pi}{3}R^3$

Trägheitsmoment: $\frac{8\pi}{15}R^5$

allgemein: konstante Masse $m = 1$

$$\lambda > 0, \lambda B = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in B \right\}$$

$\implies$ Masse von $\lambda B = \lambda^3 \cdot$ (Masse von B)

Trägheitsmoment von $\lambda B = \lambda^5 \cdot$ (Trägheitsmoment von B)

Bew.:

$$\Theta_e(\lambda B) : \varphi : B \to \lambda B, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix}$$

$$\nabla \varphi = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$|\det \nabla \varphi| = \lambda^3$$

$$\begin{aligned} \implies \Theta_e(\lambda B) &= \int_{\lambda B} (x^2 + y^2) \mu \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= \int_B (\lambda^2 x^2 + \lambda^2 y^2) \cdot \lambda^3 \mu \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= \lambda^5 \int_B (x^2 + y^2) \mu \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Bsp.: homogene Kugel mit Radius R:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2 \right\} \text{ Massenverteilung } M$$

$$\text{Masse } m \; P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix} ; a > R$$

$$\implies \text{ Betrag der Gravitation } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ auf } P = \frac{GmM}{\left| P - \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right|^2}$$

$$\text{Vektor } \frac{GmM}{\left| P - \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right|^3} \left[P - \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right]$$

$\implies$ Gesamtkraft auf P :

$$\int_B \frac{GmM \cdot \left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - P \right]}{\left| \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - P \right|^3} \mu \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\text{Symmetrie } \implies = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ * \end{pmatrix} \text{ mit}$$

$$* = \int_B \frac{GmM(z-a)}{\left| \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - P \right|^3}$$

$$\begin{aligned}\left|\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}-p\right| &= \sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}\\ &= \int \frac{GmM(z-a)}{(x^2+y^2+(z-a)^2)^{\frac{3}{2}}}\mu\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\\ &= \int_{-R}^{R}\left(\int_0^{\sqrt{R^2-z^2}}\frac{GmM(z-a)}{(\rho^2+(z-a)^2)^{\frac{3}{2}}}\right)\mu\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\\ &= \dots\end{aligned}$$

Check with Si-mon

Bsp.: Gravitation einer Kugelschale:

$0 \leq R_1 \leq R_2$

$$b = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 \middle| R_1^2 \leq x^2+y^2+z^2 \leq R_2^2\right\}$$

$P = \begin{pmatrix}0\\0\\a\end{pmatrix}$; $0 < a < R_1$, oder $a > R_2$

konstante Dichte m , Masse M

G Newtonsche Gravitationskonstante

$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in B$ übt auf P dei Kraft $GmM \cdot \dfrac{\begin{pmatrix}x\\y\\z-a\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}x\\y\\z-a\end{pmatrix}\right|^3}$

$$\implies \text{Gesamtkraft} = \int_B GmM \frac{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z-a \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} x \\ y \\ z-a \end{pmatrix}\right|^3} \mu \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\overset{\text{Kugelkoordinaten}}{=} GmM \cdot$$

$$\int_{R_1}^{R_2} \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2\pi} \frac{\begin{pmatrix} r\cos\theta\cos\varphi \\ r\cos\theta\sin\varphi \\ r\sin\theta - a \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} r\cos\theta\cos\varphi \\ r\cos\theta\sin\varphi \\ r\sin\theta - a \end{pmatrix}\right|^3} r^2 \cos\theta \,\mathrm{d}\varphi \right) \mathrm{d}\theta \right) \mathrm{d}r$$

$$\left|\begin{pmatrix} r\cos\theta\cos\varphi \\ r\cos\theta\sin\varphi \\ r\sin\theta - a \end{pmatrix}\right| = \sqrt{r^2\cos^2\theta + (r\sin\theta - a)^2}$$

$$= \sqrt{r^2 - 2ra\sin\theta + a^2}$$

$$\text{Inneres Integral} = * = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} r\cos\theta\cos\varphi \\ r\cos\theta\sin\varphi \\ r\sin\theta - a \end{pmatrix} \mathrm{d}\varphi$$

Wegen $\int_0^{2\pi} \cos\varphi \,\mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi} \sin\varphi \,\mathrm{d}\varphi = 0$ ist das $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$

z - Komponente

$$= GmM \cdot \int_{R_1}^{R_2} \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\pi(r\sin\theta - a) r^2 \cos\theta \,\mathrm{d}\theta}{(r^2 - 2ra\sin\theta + a^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \mathrm{d}r$$

$$= \left| \begin{array}{c} t = \sin\theta \\ \mathrm{d}t = \cos\theta \,\mathrm{d}\theta \\ t = \pm 1 \leftrightarrow \theta = \pm\frac{\pi}{2} \end{array} \right|$$

$$= GmM \int_{R_1}^{R_2} \left(\int_{-1}^{1} \frac{2\pi(rt - a) r^2 \,\mathrm{d}t}{(r^2 - 2rat + a^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \mathrm{d}r$$

$r^2 - 2rat + a^2 = u^2; u > 0$

$-2ra \cdot \mathrm{d}t = 2u \,\mathrm{d}u$

$$r^2 + a^2 - u^2 = 2rat$$

$$rt - a = \frac{r^2 + a^2 - u^2}{2a} - a = \frac{r^2 - a^2 - u^2}{2a}$$

$$t = -1 \leftrightarrow u = |r - a| = r + a$$

$$t = 1 \leftrightarrow u = |r - a| \leftrightarrow u^2 = r^2 - a^2$$

$$\ldots = GmM \cdot \int_{R_1}^{R_2} \left(\int_{r+a}^{|r-a|} \frac{2\pi \frac{r^2-a^2-u^2}{2a} \cdot r^2 \cdot \frac{2u\,\mathrm{d}u}{-2ra}}{u^3} \right) \mathrm{d}r =$$

$$GmM \cdot \int_{R_1}^{R_2} \left(\frac{2\pi r^2 2}{2a(-2ra)} \cdot \underbrace{\int_{r+a}^{|r-a|} \left(\frac{(r^2 - a^2 - u^2)u\,\mathrm{d}u}{u^3} \right)}_{(*)} \right) \mathrm{d}r$$

$$(*) = \left| (r^2 - a^2) \cdot \frac{-1}{u} - u \right|_{r+a}^{|r-a|}$$

$$= \underbrace{\left(-\frac{r^2 - a^2}{|r-a|} - |r-a| \right)}_{\left(\frac{r^2-a^2}{r-a} - (r-a)\right)} - \underbrace{\left(-\frac{r^2 - a^2}{r+a} - (r+a) \right)}_{(-(r-a)-r-a)=-2r}$$

$$= -2r \cdot \operatorname{sgn}(r-a) + 2r$$

$$= \begin{cases} +4r & r < a \iff a > R_2 \\ 0 & r > a \iff a < R_1 \end{cases}$$

$$\ldots = \begin{cases} 0 & a < R_1 \\ GmM \cdot \int_{R_1}^{R_2} \frac{\pi r}{-a^2}(+4r)\,\mathrm{d}r & \text{sonst} \end{cases}$$

$$= -GmM\frac{4\pi}{a^2} \int_{R_1}^{R^2} r^2\,\mathrm{d}r = -GmM \cdot \frac{4\pi}{3a^2} \cdot (R_2^3 - R_1^3)$$

$$= \ldots$$

$$= -GMM_B \frac{1}{a^2}$$

$$\underbrace{\text{Masse von } B}_{M_B} = m\mu(B) = m \cdot \frac{4\pi}{3}(R_2^3 - R_1^3)$$

$$\Longrightarrow \text{Gesamtkraft} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ falls } a < R_1$$

$$\text{bzw. } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{GM \cdot M_B}{a^2} \end{pmatrix} \text{ falls } a > R_2$$

Bem.:
Für $R_1 \leq a \leq R_2$ haben wir ein uneigentilchen Integral, das aber in diesem Fall existiert.

Uneigentilches Integral

Def.: Uneigentliches Integral:

Ist f auf B stetig aber B nicht kompakt, so definieren wir

$$\int_B f(x)\mu(x) := \lim_{B'\subset B \text{ kompakt}} \int_{B'} f(x)\mu(x)$$

falls der $\lim$ existiert, d.h. falls gilt

$$\int_B f(x)\mu(x) = A$$

mit

$$\forall \varepsilon > 0 \exists B_0 \subset B \text{ kompakt} : \forall B' \subset B \text{ kompakt} : B_0 \subset B'$$
$$\implies \left| \int_{B'} f(x)\mu(x) - A \right| < \varepsilon$$

Bem.:

Ist $f \geq 0$ auf B (oder $f \leq 0$ auf B) so existiert das Integral oder es ist ∞, und man kann es immer mit Fubini berechnen

Bem.:

Im allgemeinen berechne über die Punkte mit $f \geq 0$ bzw. $f \leq 0$ separat.
$\rightsquigarrow$ Uneigentiliches Integral ist **nicht** definiert falls dies $\infty - \infty$ ergibt.

Für welches $s \in \mathbb{R}$ existiert

$$\int_{[1,\infty[\times[1,\infty[} \frac{1}{(x+y)^s} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_1^\infty \left(\underbrace{\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(x+y)^s}}_{=\infty \text{ falls } s\leq 1} \right) \mathrm{d}y$$

$$\stackrel{s\geq 1}{=} \int_1^\infty \left(\frac{(x+y)^{1-s}}{1-s} \Big|_1^\infty \right) \mathrm{d}y$$

$$= \int_1^\infty \left(-\frac{(1+y)^{1-s}}{1-s} \right) \mathrm{d}y$$

$$\stackrel{z=1+y}{=} \frac{1}{s-1} \underbrace{\int_2^\infty z^{1-s}\,\mathrm{d}z}_{=\infty \text{ falls } 1-s\geq -1 \iff s\leq 2}$$

$$\stackrel{s\geq 2}{=} \frac{1}{s-1} \frac{z^{2-s}}{2-s}\Big|_0^\infty$$

$$= \frac{1}{s-1} \left(-\frac{2^{2-s}}{2-s} \right)$$

$$= \begin{cases} \infty & s \leq 2 \\ \frac{2^{2-s}}{(s-1)(2-s)} & \end{cases}$$

Bsp.:

Berechne

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

Lösung: $I > 0$

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &\overset{\text{Polarkoordinaten}}{=} \int_{r=0}^{\infty}\int_{\varphi=0}^{2\pi} e^{-r^2} r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r \\ &= \int_0^{\infty} 2\pi e^{-r^2} r\,\mathrm{d}r \\ &= -\pi e^{-r^2}\Big|_0^{\infty} \\ &= 0 - (-\pi e^0) = \pi \end{aligned}$$

Antwort:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$$

3.1.1 Linienintegral

$\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^n, t \mapsto \varphi(t)\ C^1$

Parametrisierung einer Kurve $C = \varphi([a,b])$

$\left|\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right| =$ lokaler Streckungsfaktor bei t

$\varphi(t+h) = \varphi(t) + h \cdot \varphi'(t) + o(h) \iff |\varphi(t+h) - \varphi(t)| = h \cdot |\varphi'(t) - o(1)|$

Def.: Linienintegral:

$$\int_C f(x)\,\mathrm{d}x := \int_a^b f(\varphi(x)) \cdot |\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t$$

Bem.:
Analog zur Substitutionsformel

Def.: Linienintegral:

$$I = [a,b] \overset{\varphi}{\to} \overbrace{x \in C} \subset \mathbb{R}^n$$

bijektiv ausser in endlich vielen Punkten und C^1

$$f : C \to \mathbb{R}$$

$$\int_C f(x)\,|\mathrm{d}x| := \int_a^b f(\varphi(t)) \cdot |\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t$$

Das existiert, falls f stückwiese stetig ist.

Wegen:

$$\varphi(t+h) = \varphi(t) + \varphi'(t) \cdot h + o(h)$$

ist $|\varphi'(t)|$ der lokale Streckungsfaktor.

Fakt:

Das Linienintegral ist von der Parametrisierung unabhängig, d.h. hängt nur von C, f ab.

Fix

Bsp.: Kurvenlänge:

$$(\text{Länge von } C) = \int_C 1 \cdot |\mathrm{d}x| = \int_a^b |\varphi'(t)| \,\mathrm{d}t$$

Speziell: $C = \mathrm{graph}(\psi)$ für $\psi : [a, b] \to \mathbb{R} \rightsquigarrow$ Parametrisierung $\varphi : [a, b] \to^2, t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ \psi(t) \end{pmatrix}$

$\implies \varphi'(T) = \begin{pmatrix} 1 \\ \psi'(t) \end{pmatrix}$

$\implies$ Länge von C ist $\int_a^b \sqrt{1 + \psi'(t)^2} \,\mathrm{d}t$

Bsp.: Länge einer Parabel:

$$\psi : [-1, 1] \to \mathbb{R}, t \mapsto t^2$$

$$\begin{aligned}
\text{Länge} &= \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + 4t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \begin{vmatrix} 2t = \sinh s \\ \dots \end{vmatrix} \\
&= \dots \\
&= \left(\sqrt{1 + 4t^2} \cdot \frac{t}{2} + \frac{\operatorname{arsinh} 2t}{4} \right) \Big|_{-1}^{1} \\
&= \sqrt{5} + \frac{\operatorname{arsinh} 2}{2} \\
&= \sqrt{5} + \frac{\log(2 + \sqrt{5})}{2}
\end{aligned}$$

Flächenintegral

Def.: Flächenintegral:

$$R^2 \supset \underbrace{B}_{\ni \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}} \xrightarrow{\varphi} F \subset \mathbb{R}^2$$

B kompakt , φ C^1-Funktion, bijektiv ausserhalb Teilmenge mit $\mu = 0$

$$\int_F f(x)\delta(x) := \int_B f\left(\varphi\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right)\left|\frac{\partial\varphi}{\partial u} \times \frac{\partial\varphi}{\partial v}\right| \mu \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Parallelogramm aufgespannt von $\frac{\partial\varphi}{\partial u}, \frac{\partial\varphi}{\partial v}$

Fakt:

Das hängt nur von F und f ab.
Spezialfall:

$$F = \operatorname{graph}\psi, \psi : B \to \mathbb{R}\ C^1$$

$\rightsquigarrow$ Parametrisierung: $\varphi\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \psi\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial u}\times\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right| &= \left|\begin{pmatrix}1\\0\\\psi_u\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\1\\\psi_v\end{pmatrix}\right|\\ &= \left|\begin{pmatrix}\psi_u\\-\psi_v\\1\end{pmatrix}\right|\\ &= \sqrt{1+\psi_u^2+\psi_v^2}\end{aligned}$$

$\implies$ Flächeninhalt von $\operatorname{graph}\psi$

$$\int_B \sqrt{1+\psi_u^2+\psi_v^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

Bsp.:

$$\psi\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix} = u^2-v^2$$

$$B = \left\{\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}\middle| u^2+v^2\le R^2\right\}$$

$$\sqrt{1+\psi_u^2+\psi_v^2} = \sqrt{1+(2u)^2+(-2v)^2} = \sqrt{1+4(u^2+v^2)}$$

$$\begin{aligned}\implies \text{Flächeninhalt } &= \int_{u^2+v^2\le R^2}\sqrt{1+4(u^2+v^2)}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\\ &= \int_0^R\int_0^{2\pi}\sqrt{4r^2}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r\\ &= \int_0^R\sqrt{1+4r^2}2\pi r\,\mathrm{d}r\\ &= \frac{2\pi(1+4r^2)^{\frac{3}{2}}}{12}\Bigg|_0^R\\ &= \frac{\pi}{6}\cdot((1+4R^2)^{\frac{3}{2}}-1)\end{aligned}$$

Bsp.: Rotationsfläche:

$$g : [a,b] \to \mathbb{R}^{\geq 0} F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| \begin{matrix} a \leq z \leq b \\ x^2 + y^2 = g(z)^2 \end{matrix} \right\}$$

Parametrisierung:

$$\varphi : B = [a,b] \times [0, 2\pi] \xrightarrow{\varphi} F \subset \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} z \\ \theta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a(z)\cos\theta \\ b(z)\sin\theta \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial\varphi}{\partial z} \times \frac{\partial\varphi}{\partial\varphi} \partial\theta \right| &= \left| \begin{pmatrix} g'(z)\cos\theta \\ g(z)\sin\theta \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -g(z)\sin\theta \\ +g(z)\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} \right| \\ &= \left| \begin{pmatrix} -g(z)\cos\theta \\ -g(z)\sin\theta \\ g(z)\cdot g'(z) \end{pmatrix} \right| \\ &= g(z) \cdot \sqrt{1 + g'(z)} \end{aligned}$$

Flächeninhalt von F

$$\begin{aligned} &= \int_{z=a}^{b} \left(\int_{\theta=0}^{2\pi} g(z)\sqrt{1+g'(z)}\,\mathrm{d}\theta \right) \mathrm{d}z \\ &= 2\pi \int_a^b g(z)\sqrt{1+g'(z)}\,\mathrm{d}z \end{aligned}$$

Bsp.: Oberfläche einer Kugel mit Radius R:

$$\begin{aligned} &[a,b] = [-R, R] \\ &g(z) = \sqrt{R^2 - z^2} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\Longrightarrow\quad & 2\pi \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - z^2} \sqrt{1 + \left(\frac{-2z}{2\sqrt{R^2 - z^2}} \right)^2}\, \mathrm{d}z \\
&= 2\pi \int_{-R}^{R} \sqrt{(R^2 - z^2) + (-z)^2}\, \mathrm{d}z \\
&= 2\pi \int_{-R}^{R} R\, \mathrm{d}z \\
&= 2\pi \cdot R \cdot 2R \\
&= 4\pi R^2
\end{aligned}
$$

Kapitel 4

Vektorfelder

$U \subset \mathbb{R}^n$
$f : U \to \mathbb{R}$ Skalarfeld
$K : U \to \mathbb{R}^n$ Vektrofeld (Strömung, Kraft, Gradient $(\nabla f)^T$)

Bsp.: konstantes Vektorfeld:

Bsp.1: Punktmasse:

$$K(x) = c \cdot \frac{-x}{|x|^3}$$

Bsp.2: Homogene Kugel mit Radius R:

$\rightsquigarrow$ Gravitationsfeld

$$K(x) = \begin{cases} c \cdot \frac{-x}{|x|^3} & \text{für } |x| \geq R \\ -c \cdot \frac{-x}{|x|^3} & \text{für } |x| \leq R \end{cases}$$

Bsp.3:

$$K(x) = -c \cdot \frac{x}{|x|^3}, c > 0$$

(Gravitationsfeld einer Punktmasse

Bsp.4:

$\omega \neq 0$ Vektor in $\mathbb{R}^3$

$$K(x) = \omega \times x$$

Konstante Drehung um die Achse ω

Bsp.5:

$$K(x) = \frac{\omega \times x}{|\omega \times x|^2}$$

4.1 Feldlinien

Def.: Feldlinie:

Eine C^1-Abbildung $\gamma : [a, b] \to U$ mit

$$\gamma'(t) = K(\gamma(t))$$

heisst **Feldlinie** von K.
Bedeutung falls K das Geschwindigkeitsfeld eines strömmenden Mediums: Weg eines einzelnen Teilchens

Bsp.: 2:

$$\gamma(t) = -\sqrt[3]{3ct} \cdot \frac{x_0}{|x_0|}$$

Bsp.: 3,4:

Kreislinien senkrecht zu ω

Bem.:

K lokal Lipschitzstetig $\Longrightarrow$ für jeden Startwert $\gamma(0) = x_0 \in U$ existiert eine Maximallösung.
$\Longrightarrow$ Jeder Punkt liegt auf einer eindeutigen Feldlinien

Bsp.6:

$$K\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}\\ \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}\end{pmatrix}$$

auf

$$\mathbb{R}^2 \setminus \left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

allgemeine Lösung:

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix}(t+c)\cdot\cos(\varphi_0 + \log(t+c))\\(t+c)\cdot\sin(\varphi_0+\log(t+c))\end{pmatrix}$$

logarithmische Spirale

4.2 Potentiale

Def.: Potential:

Ist $K(x) = (\nabla f)^T$ für eine C^1-Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ (d.h. ein **Skalarfeld** f), so heisst f ein **Potential** von K.

Bem.:

Ist K ein Kraftfeld, so kann f als zugehörige potentielle Energie verstanden werden.

Bem.:

Feldlinien

Bsp.: 2:

$$K(x) = -c \cdot \frac{x}{|x|^3} = \nabla \left(\frac{c}{|x|} \right)^T$$

Bsp.: 3,4:
Existiert kein Potential!

4.2.1 Explizite Berechnung eines Potentials

im $\mathbb{R}^2$; $K \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$ stetig, definiert auf $I \times I'$
$\rightsquigarrow$ DGL:

$$P \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x}$$
$$Q \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial y}$$

Methode: Wähle Stammfunktion $f_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \int P \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mathrm{d}x$

$\rightsquigarrow$ allgemeine Lösung der ersten DGL ist $f = f_1 + g_1(y)$

Einsetzen in zweite DGL

$$Q = \frac{\partial f_1}{\partial y} + g'(y) \iff g = \int \left(Q - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) \mathrm{d}y$$

Das funktioniert genau dann, wenn $Q - \frac{\partial f_1}{\partial y}$ von x unabhängig ist.

Bsp.:

$$K\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 + xy^2 \\ x^2y - y^5 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ansatz: } \frac{\partial f}{\partial x} = x^3 + xy \iff f = \int (x^2 + xy^2)\,\mathrm{d}x + g(y)$$

$$\iff f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2y^2}{2} + g'(y)$$

$$\text{und } \frac{\partial f}{\partial y} = x^2y - y^5 = x^2y - g'(y)$$

$$\iff g'(y) = \cancel{x^2y} - \cancel{x^2y} - y^5$$

$$\iff g'(y) = -\frac{y^6}{6} + c$$

$$\text{Existiert } f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2y^2}{2} - \frac{y^6}{6} + c$$

Analog in $\mathbb{R}^3$

Bsp.:

Für welche Konstanten a, b, c hat

$$K = \begin{pmatrix} 2xy + yz \\ x^2 + xz + z \\ axy + by + cz \end{pmatrix}$$

ein Potential. Lösung:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + yz \iff f = \int (2xy + yz)\,\mathrm{d}x + g\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$$

$$f = x^2y + xyz + g\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \cancel{x^2} + \cancel{xz} + z = \cancel{x^2} + \cancel{xz} + \frac{\partial g}{\partial y} \iff \frac{\partial g}{\partial y} = z \iff g\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = yz + h(z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = axy + by + cz = xy + y + \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}z} \iff \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}z} = (a-1)xy + (b-1)y + cz$$

Hat eine Lösung $h(z)$ (von x, y unabhängig) g.d.w. $a = 1$ und $b = 1$

$$h(z) = c\frac{z^2}{2} + d$$

Antwort: K hat ein Potential g.d.w. $a = b = 1$, und dann

$$f = x^2 + xyz + yz + c\frac{z^2}{2} + d$$

Bem.:
Analog wenn U konvex ist.

Bem.: Allgemein:
$\rightsquigarrow$ Entscheiden ob lokal ein Potential existiert.

Satz:

Ein C^1-Vektorfeld $K = \begin{pmatrix} K_1 \\ \vdots \\ K_n \end{pmatrix}$ hat lokal ein Potential g.d.w.

$$\forall i \forall j : \frac{\partial K_i}{\partial x_j} = \frac{\partial K_j}{\partial x_i}$$

Bew.:

Ist $K = (\nabla f)^T$, so ist

$$\frac{\partial K_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \cdot \partial x_i} \quad \text{(d.h. } \nabla K = \nabla^2 f)$$

$K\ C^1 \implies f\ C^2 \implies \nabla^2$ symmetrisch.
umgekehrt: Sei $n = 2$. Auf $I \times I' \subset U$ gelte

$$\frac{\partial K_1}{\partial x_2} = \frac{\partial K_2}{\partial x_1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = K_1 \iff f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\int K_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mathrm{d}x_1}_{=f_1\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}} + g(x_2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = K_2\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x_2} \iff \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x_2} = K_2 - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = K_2 - \int \frac{\partial K_1}{\partial x_2}\,\mathrm{d}$$

Bsp.: 3:

mit $\omega = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\implies K\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial K_1}{\partial x_2} = -1 \neq 1 = \frac{\partial K_2}{\partial x_1}$$

$\implies$ Existiert kein Potential

Bsp.: 4:

$$K = \frac{1}{x_1^2 + x_2^2} \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial K_1}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{-x_2}{x_1^2 + x_2^2}\right) = \frac{-1(x_1^2 + x_2^2) - (-x_2)2x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} = \frac{-x_1^2 + x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2}$$

$$\frac{\partial K_2}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}\right) = \ldots = -\frac{-x_1^2 + x_2^2}{(x_1^2 - x_2^2)^2}$$

Also gilt $\frac{\partial K_1}{\partial x_2} = \frac{\partial K_2}{\partial x_1}$

und lokal existiert ein Potential. Nämlich:

$$f(x) = \arg(x_1 + \imath x_2) + c = \begin{cases} c + \arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right) & x_1 \neq 0 \\ c' - \arctan\left(\frac{x_1}{x_2}\right) & x_2 \neq 0 \end{cases}$$

Aber die kann man nicht zu einem globalen Potential auf $\mathbb{R}^3$ (z-Achse) zusammensetzen!

Def.: Linienintegral:

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Sei $\gamma : [a,b] \to U$ C^1 ein Weg von $\gamma(a)$ nach $\gamma(b)$. Sei $f : U \to \mathbb{R}$ stetig, Skalarfeld; $K : U \to \mathbb{R}^n$ stetig, Vektorfeld.

$$\int_\gamma f(x)\,|\mathrm{d}x| := \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot |\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t$$

Hängt nur ab von Bild von γ, ohne Orientierung.

$$\int_\gamma K(x) \cdot |\mathrm{d}x| := \int_a^b K(\gamma(t)) \cdot |\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t$$

Hängt nur ab von Bild von γ, ohne Orientierung.

$$\int_\gamma f(x)\,\mathrm{d}x := \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,\mathrm{d}t$$

Hängt nur ab von Bild von γ, mit Orientierung (Vorzeichenwechsel).

$$\int_\gamma \langle K(x), \mathrm{d}x\rangle = \int_\gamma K(x) \cdot \mathrm{d}x := \int_a^b \langle K(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle\,\mathrm{d}t$$

Hängt nur ab von Bild von γ, mit Orientierung (Vorzeichenwechsel).

Fix

Satz:

Sei $f : U \to \mathbb{R}$ C^1 und γ ein C^1-Weg von P nach Q. Dann gilt:

$$\int_\gamma \nabla f(x) \cdot \mathrm{d}x = f(Q) - f(P)$$

Bew.:

$$\text{Linke Seite } = \int_a^b [(\nabla f)(\gamma t) \cdot \gamma'(t)]\,\mathrm{d}t = \int_a^b (f \circ \gamma)'(t)\,\mathrm{d}t \overset{\text{Hauptsatz}}{=} (f \circ \gamma)(b$$

Also: vektorielle Linienintegral eines Gradientenvektorfelds ist die Differenz der Potenzreihe an den Endpunkten.

Satz:
Für K ein stetiges Vektorfeld auf U sind äquivalent:

(a) K besitzt ein Potential

(b) Das Linienintegral von K über jeden Weg hängt nur von Anfangs- und Endpunkt ab

(c) Das Linienintegral von K über jeden geschlossenen Weg ist Null

Def.: konservativ:
Dann heisst K **konservativ**.

Bew.:

(a) $\Longrightarrow$ (b): $K = \nabla f$ direkte Folge aus Satz

(c) $\Longrightarrow$ (b): $\int_\gamma - \int_\delta = \int_\gamma + \int_{\delta'} = \int_\varepsilon$ ε = zusammengestezter Weg

(b) $\Longrightarrow$ (c): γ geschlossen $\Longrightarrow$ $\int_\gamma = \int_{\text{konstanter Weg}} = 0$

(b) $\Longrightarrow$ (a): Wähle $P_0 \in U$ und setze $f(P) := \int_\gamma K(x) \cdot \mathrm{d}x$ für irgendein Weg von P_0 nach P. Nach (b) ist dies wohldefiniert. Dann ist $\frac{\partial f}{\partial x_i}(P) = \ldots.$ $f(P + he_i) = \left(\int_\gamma + \int_{\substack{\text{Strecke}\\ \text{von } P\\ \text{nach } P+he_i}} K(x)\,\mathrm{d}x\right)$ (e_i $i$ter Einheitsvektor). Zweiter Term = $\int_0^h K(P + te_i) \cdot e_i\,\mathrm{d}t$. Dessen Ableitung nach h für $h = 0$ ist $K(P+te_i)\cdot e_i|_{t=0} = K(P)\cdot e_i = K_i(P)$. Also ist $\nabla f = K$. Da K stetig, folgt f C^1

Bsp.: 3:

$$K_3(x) = \omega \cdot x = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Linienintegral entlang einer Feldlinie:

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} r\cos t \\ r\sin t \\ 0 \end{pmatrix} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$$

$$\int_\gamma K_3(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} K_3 \begin{pmatrix} r\cos t \\ r\sin t \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -r\sin t \\ r\cos t \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{pmatrix} r\cos t \\ r\sin t \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -r\sin t \\ r\cos t \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Bsp.: 4:

$$K_4(x) = \frac{\omega \times x}{|\omega \cdot x|^2} = \frac{1}{x_1^2 + x_2^2} \begin{pmatrix} -x^2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\int_\gamma K_4(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{r^2} \int_\gamma K_3(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi$$

$\implies$ Beide haben kein globales Potential. Sei $\gamma'(t) := \begin{pmatrix} a + r\cos t \\ r\sin t \\ 0 \end{pmatrix}$ für $a > r$. Übung: Dann ist $\int_{\gamma'} K_3 \neq 0$, $\int_{\gamma'} K_4 = 0$

4.3 Satz von Green in $\mathbb{R}^2$

Def.: Randkurve:

Für $B \subset \mathbb{R}^2$ kompakt mit stückweise C^1-Rand bezeichnet ∂B die **Randkurve** (Kollektion endlich vieler Wege) mit derjenigen Orientierung für die B in Blickrichtung jeweils links liegt.

Def.: Rotation:

Für ein C^1-Vektorfeld $K = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} : B \to \mathbb{R}^2$ ist

$$\text{rot } K \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y}$$

Ist γ eine eindliche "Summe" (**Kette**) von Wegen $\gamma_1, \dots, \gamma_m; \gamma_i : [a_i, b_i] \to \mathbb{R}^n$ dann definieren wir

$$\int_\gamma = \int_{\gamma_1} + \dots + \int_{\gamma_m}$$

Satz: Satz von Green:

Sei $B \subset \mathbb{R}^2$ kompakt mit stückweise C^1 Rand ∂G und K ein C^1-Vektorfeld auf B. Dann:

$$\int_{\partial B} K \cdot \mathrm{d}x = \int_B (\text{rot } K) \cdot \mu(B)$$

Bew.: für B Rechteck:

$$K = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$$
$$\gamma_1 : [a, b] \to B, t \mapsto (t, c)^T$$
$$\gamma_2 : [c, d] \to B, t \mapsto (b, t)^T$$
$$\gamma_3 : [a, b] \to B, t \mapsto (t, d)^T$$
$$\gamma_4 : [a, b] \to B, t \mapsto (a, t)^T$$

$$\partial B = \gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3 - \gamma_4$$

$$\implies \int_{\partial B} K \,\mathrm{d}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} - \int_{\gamma_3} - \int_{\gamma_4}$$

$$\int_{\gamma_1} \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} \cdot \mathrm{d}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\overset{\text{def.}}{=} \int_a^b \left\langle \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ c \end{pmatrix}, \mathrm{d}\begin{pmatrix} t \\ c \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$= \int_a^b \left\langle \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \mathrm{d}t$$

$$= \int_a^b P \begin{pmatrix} t \\ c \end{pmatrix} \mathrm{d}t$$

$$= \int_a^b P \begin{pmatrix} t \\ c \end{pmatrix} + \int_c^d Q \begin{pmatrix} b \\ t \end{pmatrix} \mathrm{d}t - \int_a^b P \begin{pmatrix} t \\ d \end{pmatrix} \mathrm{d}t - \int_c^d Q \begin{pmatrix} a \\ t \end{pmatrix} \mathrm{d}t$$

$$= \int_a^b \left(P \begin{pmatrix} t \\ c \end{pmatrix} - P \begin{pmatrix} t \\ d \end{pmatrix} \right) \mathrm{d}t + \int_c^d \left(Q \begin{pmatrix} b \\ t \end{pmatrix} - Q \begin{pmatrix} a \\ t \end{pmatrix} \right) \mathrm{d}t$$

$$= -\int_a^b \left(P \begin{pmatrix} x \\ d \end{pmatrix} - P \begin{pmatrix} x \\ c \end{pmatrix} \right) \mathrm{d}x + \int_c^d \left(Q \begin{pmatrix} b \\ y \end{pmatrix} - Q \begin{pmatrix} a \\ y \end{pmatrix} \right) \mathrm{d}y$$

$$= -\int_a^b \left(\int_c^d \frac{\partial P}{\partial y} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x + \int_c^d \left(\int_a^b \frac{\partial Q}{\partial x} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$$

$$= \int_B \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mu \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Zusammensetzen $\rightsquigarrow$ Satz für B = endliche Vereinigung von Rechtecken
B beliebig: Nähere an durch Vereinigung von Recktecken; Beide Seiten konvergieren

4.3.1 Anwendung

Zu gegebenem Skalarfeld $f : B \to \mathbb{R}$ suche K Vektorfeld mit $\operatorname{rot} K = f$

$$\to \int_B f(x)\mu(x) = \int_{\partial B} K \cdot \mathrm{d}x$$

Speziell:

$$K\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -y \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{y}{2} \\ \frac{x}{2} \end{pmatrix}$$

haben alle $\operatorname{rot} K = 1$. Also:

$$\mu(B) = \int_{\partial B} \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} \cdot \mathrm{d}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \int_{\partial B} x\,\mathrm{d}y$$

$$\mu(B) = \int_{\partial B} x\,\mathrm{d}y = -\int_{\partial B} y\,\mathrm{d}x = \int_{\partial B} \frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{2}$$

Bsp.: Fläche einer Zykloide:

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, t \mapsto \begin{pmatrix} r\cdot(t - \sin t) \\ r\cdot(1 - \cos t) \end{pmatrix}$$

$$\delta : [0, 2\pi r] \to \mathbb{R}^2, t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\partial B = \delta - \gamma$$

$$\implies \mu(B) = -\int_{\partial B} y\,\mathrm{d}x = -\int_\delta + \int_\gamma y\,\mathrm{d}x$$

$$\int_\delta y\,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi r} 0 \cdot \mathrm{d}x = 0$$

$$
\begin{aligned}
\int_\gamma y \,\mathrm{d}x &= \int_0^{2\pi} r\cdot(1-\cos t)\,\mathrm{d}(r(t-\sin t)) \\
&= \int_0^{2\pi} r(1-\cos t)r(1-\cos t)\,\mathrm{d}t \\
&= r^2\int_0^{2\pi} (1-2\cos t+\cos^2 t)\,\mathrm{d}t \\
&= r^2\int_0^{2\pi} \left(1-2\cos t+\frac{1+\cos 2t}{2}\right)\mathrm{d}t \\
&= r^2\left(\frac{3}{2}t-2\sin t+\frac{\sin 2t}{4}\right)\Bigg|_{t=0}^{t=2\pi} \\
&= r^2\frac{3}{2}2\pi = 3\pi r^2
\end{aligned}
$$

Polarplanimeter von Amsler

$$
\begin{aligned}
\mu(B) &= \int_{\partial B}\frac{x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{2} \\
&= \begin{vmatrix} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{vmatrix} \\
&= \int_{\partial B}\frac{r\cos\varphi\cdot(\cancel{\mathrm{d}r\cdot\sin\varphi}+r\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi)-r\sin\varphi\cdot(\cancel{\mathrm{d}r\cos\varphi}-r\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi)}{2} \\
&= \int_{\partial B}\frac{r^2}{2}\,\mathrm{d}\varphi
\end{aligned}
$$

Bild BILD

$$m^2 = r^2 + l^2 - 2rl\cos\psi$$

$$\implies \mu(B) = \int_{\partial B}\frac{m^2-l^2+2rl\cos\psi}{2}\,\mathrm{d}\varphi = \underbrace{\int_{\partial B}\frac{m^2-l^2}{2}\,\mathrm{d}\varphi}_{=0} + \int_{\partial B} rl\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi$$

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = r\cdot e^{\imath\varphi}$$

Kontaktpunkt des Rads: $\rho = re^{\imath\varphi} - e^{\imath(\varphi-\psi)}w$

Gemessen wird:

$$\int_{\partial B} \Im\left(\frac{\mathrm{d}\rho}{e^{\imath(\varphi+\psi)}}\right) = \ldots = \frac{\mu(B)}{l}$$

Zu $K = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$ Vektorfeld auf $B \subset \mathbb{R}^2$ setze $\tilde{K} = \begin{pmatrix} \tilde{P} \\ \tilde{Q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -Q \\ P \end{pmatrix}$

$$\int_{\partial B} \underbrace{\tilde{K}\,\mathrm{d}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\substack{=\tilde{P}\,\mathrm{d}x+\tilde{Q}\,\mathrm{d}y \\ =P\,\mathrm{d}y-Q\,\mathrm{d}x \\ =K\cdot\begin{pmatrix} \mathrm{d}y \\ -\,\mathrm{d}x \end{pmatrix}}} \overset{\text{Green}}{=} \int_B \underbrace{\operatorname{rot}\tilde{K}}_{\substack{=\tilde{Q}_x-\tilde{P}_x \\ =P_x+Q_y}}\,\mu\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \int_B \operatorname{div} K\mu\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Def.: Divergenz:

$$\operatorname{div}\begin{pmatrix} K_1 \\ \vdots \\ K_n \end{pmatrix} = K_{1,x_1} + \cdots + K_{n,x_n}$$

Bedeutung: lokale Produktionsrate von K

$$\int_\gamma K\cdot\begin{pmatrix} \mathrm{d}y \\ -\,\mathrm{d}x \end{pmatrix} = \int_a^b K(\gamma(t))\cdot \underbrace{\begin{pmatrix} y'(t) \\ -x'(t) \end{pmatrix}\mathrm{d}t}_{\underbrace{\frac{1}{|\gamma'(t)|}\cdot\begin{pmatrix} y'(t) \\ -x'(t) \end{pmatrix}}_{\substack{\text{Normalvektor nach rechts} \\ \text{Einheitsvektor } n}}\cdot|\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t}$$

$$= \int_0^b \langle K(\gamma(t)), n(\gamma(t))\rangle \cdot |\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_\gamma K\cdot n\,|\mathrm{d}x|$$