

Inhaltsverzeichnis

1	Integration	2
2	Uneigentliche Integrale	3
2.1	Folgerungen und Spezialfälle	3
2.2	Majorante/Minorante	3
2.2.1	Standard-Abschätzung	4
2.3	Polstellen u.ä.	4
2.4	Cauchy Hauptwert, aka. Polstelle in \mathbb{D}	4
3	Kurven	5
3.1	Tangentialvektor	5
3.2	Kegelschnitte	5
3.3	p.m. Tangentengleichung	5
3.4	Implizit Ableiten	5
3.5	Normale	5

1 Integration

p.485/487

f ist eine Funktion von x

- Effektivwert, auch Quadratisches Mittel genannt:

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}; \quad \sqrt{\frac{1}{b-a} \int_a^b |f|^2}$$

- Linearer Mittelwert/"mittlere Funktionshöhe"

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

- Gleichrichtwert

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b |f(x)| dx$$

- Partielle Integration

$$\int u'v = uv - \int uv'$$

- Allgemeine Potenzregel p.485

$$\int f^\alpha f' = \frac{f^{\alpha+1}}{\alpha+1} \quad (\forall \alpha \neq -1)$$

- Log-Regel

$$\int \frac{f'}{f} = \ln|f|$$

- Substitution p.491

$$\int f(x) dx \stackrel{!}{=} \int f(g(t)) \underbrace{d(g(t))}_{df = \frac{df}{dx} dx = f' dx} = \int f(g(t)) g'(t) dt$$

$$x = g(t) \rightarrow g^{-1} = t$$

$$dx = g'(t) dt$$

- Universalsubstitution/Rationalisierung

$$\int (\text{Rationale Funktion aus } \{\cos(x); \sin(x)\}) dx \quad (1)$$

$$t := \tan\left(\frac{x}{2}\right) \Rightarrow \cos(x) \stackrel{!}{=} \frac{1-t^2}{1+t^2}; \quad \sin(x) \stackrel{!}{=} \frac{2t}{1+t^2} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} dt &= d\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \\ &\Rightarrow dt = (1+t^2) = \frac{1}{2} dx \\ \frac{2dt}{1-t^2} &= dx \end{aligned} \quad (3)$$

2 Uneigentliche Integrale

Das Intervall (\vec{x}) kann ∞ sein, oder der Wertebereich (\vec{y}) .

$$\int_a^\infty f(x) dx := \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\int_a^t f(x) dx \right) = \begin{cases} \text{konvergent} & (\text{endlicher Flächeneinhalt}) \\ \text{divergent} & \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^a f(x) dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \left(\int_t^a f(x) dx \right)$$

$\rightarrow F(\infty) - F(a); F(a) - F(-\infty) \rightarrow$ konventionelle Limit-Rechnung

$$\int_{-\infty}^\infty f(x) dx \stackrel{\text{Zerlegung}}{=} \left(\int_{-\infty}^a f(x) dx \right) + \left(\int_a^\infty f(x) dx \right) \quad (!\mathbb{D} \stackrel{!}{=} \mathbb{R})$$

2.1 Folgerungen und Spezialfälle

$$\int_A^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx \text{ konvergiert} \Leftrightarrow \alpha > 1 \quad (\forall A > 0)$$

$$\int_a^\infty f(x) dx \text{ konvergiert} \Rightarrow f(x) = y < \overset{x \rightarrow \infty}{\rightarrow} 0$$

$$\int_a^\infty f(x) dx \text{ divergiert} \Leftarrow f(x) = y < \overset{x \rightarrow \infty}{\rightarrow} \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

2.2 Majorante/Minorante

Dies ist Vergleichbar mit Majorante und Minorante einer Folge.

Man wählt eine Funktion die immer grösser ist als der Betrag der Funktion, von welcher man bestimmen möchte, ob sie konvergiert (p. 503). Wenn die Majorante konvergiert,

konvergiert auch die Funktion.

$$\begin{aligned}
 x \in [a; \infty), |f(x)| \leq g(x) : \\
 \int_a^\infty g(x) dx \text{ konvergiert} &\Rightarrow \int_a^\infty |f(x)| dx \text{ konvergiert} \\
 &\stackrel{\text{X}}{\Rightarrow} \int_a^\infty f(x) dx \text{ konvergiert}
 \end{aligned}$$

Wenn die Minorante divergiert, divergiert auch die Funktion.

$$\begin{aligned}
 0 \stackrel{!}{\leq} g(x) \leq f(x) : \\
 \int_a^\infty g(x) dx = \infty \Rightarrow \int_a^\infty f(x) dx = \infty
 \end{aligned}$$

2.2.1 Standard-Abschätzung

$$\begin{aligned}
 |\sin(\dots)| &\leq 1 \\
 |\cos(\dots)| &\leq 1
 \end{aligned}$$

2.3 Polstellen u.ä.

Z.i.g. b ist z.B. eine Polstelle. b^- ist kleiner als b .

$$x \in [a, b) : \int_a^{b^-} f(x) dx := \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x) dx \quad (4)$$

$$x \in (a, b] : \int_{a^+}^b f(x) dx := \lim_{t \rightarrow a^+} \left(\int_t^b f(x) dx \right) \quad (5)$$

2.4 Cauchy Hauptwert, aka. Polstelle in \mathbb{D}

Abgekürzt C.H. (oder P.V. für prinzipale Value). Wenn im zu integrierenden Bereich (ohne Rand) eine Polstelle liegt, kann man es aufteilen. Im schlimmsten Fall erhält man $\dots \infty - \infty$, da die Integrale einzeln ausgewertet werden müssen. Dies ergäbe eine unbestimmbare Lösung. Dies wird mit C.H. umgangen.

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_a^{x_0 - \epsilon} f(x) dx + \int_{x_0 + \epsilon}^b f(x) dx \right)$$

Durch das ϵ sind die Integrationsgrenzen gleich weit von der Polstelle entfernt.

Lücken/Unstetigkeiten/Polstellen dürfen nicht ignoriert werden \rightarrow Zerlegung des Intervall

3 Kurven

- Parameterform (Vektorform) $\vec{c} = \vec{\gamma} \text{ Intervall} \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ (nD)}$

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ \vdots \end{pmatrix} \text{ bzw. } \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \psi(t) \\ \vdots \end{pmatrix}$$

- Explizite Darstellung $y = f(x)$
Durch Parameterelimination erhält man aus der Parameterform die Explizite Darstellung
- Implizite Gleichung in x, y ($x, y \in \text{Intervall}$)

Umformung: Parameterform \rightarrow Explizite Form \rightarrow Implizite Form, Eine Umkehrung kann, muss aber nicht existieren.

3.1 Tangentialvektor

$$\vec{c}'(t) = (x'(t); y'(t)) \text{ 2D}$$

$$\vec{c}'(t) = (x'(t); y'(t); z'(t)) \text{ 3D}$$

$$|\vec{c}'| = \sqrt{x'^2 + y'^2 + \dots} \text{ Länge des Tangentialvektors}$$

3.2 Kegelschnitte

3.3 p.m. Tangentengleichung

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \frac{dy}{dx}$$

Tangentengleichung am Punkt $P = (x_0, y_0)$:

$$y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0)$$

3.4 Implizit Ableiten

Ableiten ohne Funktion:

1. Gleichung beidseitig differenzieren (d^*)
2. mit bekannten Regeln nach Funktionsvariablen ableiten (Linearität, Produkt, Quotient)
3. Division durch dx
4. nach $\frac{dy}{dx}$ Auflösen

3.5 Normale

Gerade die senkrecht von der Funktion weg zeigt.

$$y = y_0 - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

3.6 Anstiegsformel (Tangentialsteigung)

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)dt}{x'(t)dt} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$$

dt kann gekürzt werden