Inhaltsverzeichnis

1 Integration

p.485/487

f ist eine Funktion von x

- Effektivwert, auch Quadratisches Mittel genannt:

$$f : [a,b] \to \mathbb{R}; \quad \sqrt{\frac{1}{b-a}\int_a^b |f|^2}$$

- Linearer Mittelwert/"mittlere Funktionshöhe"

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

- Gleichrichtwert

$$\frac{1}{b-a}\int_b^a |f(x)|dx$$

- Partielle Integration

$$\int u'v = uv - \int uv'$$

- Allgemeine Potenzregel p.485

$$\int f\alpha f' = \frac{f^{\alpha+1}}{\alpha+1} \quad (\forall \alpha \neq -1)$$

- Log-Regel

$$\int \frac{f'}{f} = \ln|f|$$

- Substitution p.491

$$\int f(x)dx \stackrel{!}{=} \int f(g(t)) \underbrace{d(g(t))}_{df=\frac{df}{dx}dx=f'dx} = \int f(g(t))g'(t)dt$$

$$x = g(t) \to g{-}1 = t$$

$$dx = g'(t)dt$$

- Universalsubstitution/Rationalisierung

$$\int (\text{Rationale Funktion aus } \{\cos(x); \sin(x)\}) dx \tag{1}$$

$$t := \tan(\frac{x}{2} \Rightarrow \cos(x) \stackrel{!}{=} \frac{1-t^2}{1+t^2}; \quad \sin(x) \stackrel{!}{=} \frac{2t}{1+t^2} \tag{2}$$

$$dt = d(\tan(\frac{x}{2}) = \tan(\frac{x}{2}$$

$$\Rightarrow dt = (1+t^2 = \frac{1}{2}dx$$

$$\frac{2dt}{1-t^2} = dx \tag{3}$$

2 Uneigentliche Integrale

Das Intervall ($\vec{x}$) kann ∞ sein, oder der Wertebereich ($\vec{y}$).

$$\int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x := \lim_{t\to\infty}\left(\int_a^t f(x)\mathrm{d}x\right) = \begin{cases} konvergent & (endlicher Flaecheninhalt) \\ divergent \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^a f(x)\mathrm{d}x = lim_{t\to-\infty}\left(\int_t^a f(x)\mathrm{d}x\right)$$

$$\rightarrow \qquad F(\infty) - F(a); F(a) - F(-\infty) \rightarrow \text{konventionelle Limit-Rechnung}$$

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\mathrm{d}x \stackrel{\text{Zerlegung}}{=} \left(\int_{-\infty}^a f(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x\right) (!\mathbb{D} \stackrel{!}{=} \mathbb{R})$$

2.1 Folgerungen und Spezialfälle

$$\int_A^\infty \frac{1}{x^\alpha}\mathrm{d}x \text{ konvergiert} \Leftrightarrow \alpha > 1 \quad (\forall A > 0)$$

$$\int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x \text{ konvergiert} \Rightarrow f(x) = y <^{x\to\infty}_{\to} 0$$

$$\int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x \text{ divergiert} \Leftarrow f(x) = y <^{x\to\infty}_{\to} \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

2.2 Majorante/Minorante

Dies ist Vergleichbar mit Majorante und Minorante einer Folge.
Man wählt eine Funktion die immer grösser ist als der Betrag der Funktion, von welcher man bestimmen möchte, ob sie konvergiert (p. 503). Wenn die Majorante konvergiert,

konvergiert auch die Funktion.

$$
\begin{aligned}
&x \in [a;\infty)\,, |f(x)| \leq g(x): \\
&\int_a^\infty g(x)\mathrm{d}x \text{ konvergiert} && \Rightarrow \int_a^\infty |f(x)|\mathrm{d}x \text{ konvergiert} \\
& && \not\Rightarrow \int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x \text{ konvergiert}
\end{aligned}
$$

Wenn die Minorante divergiert, divergiert auch die Funktion.

$$
\begin{aligned}
&0 \overset{!}{\leq} g(x) \leq f(x): \\
&\int_a^\infty g(x)\mathrm{d}x = \infty \Rightarrow \int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x = \infty
\end{aligned}
$$

2.2.1 Standard-Abschätung

$$
\begin{aligned}
|\sin(\dots)| &\leq 1 \\
|\cos(\dots)| &\leq 1
\end{aligned}
$$

2.3 Polstellen u.ä.

Z.i.g. b ist z.B. eine Polstelle. b^- ist kleiner als b.

$$x \in [a,b): \quad \int_a^{b^-} f(x)\mathrm{d}x := \lim_{t \to b^-} \int_a^{t<b} f(x)\mathrm{d}x \tag{4}$$

$$x \in (a,b]: \int_{a^+}^b f(x)\mathrm{d}x := \lim_{t \to a^+} \left(\int_t^b f(x)\mathrm{d}x \right) \tag{5}$$

2.4 Cauchy Hauptwert, aka. Polstelle in $\mathbb{D}$

Abgekürzt C.H. (oder P.V. für prinziple Value). Wenn im zu integrierenden Bereich (ohne Rand) eine Polstelle liegt, kann man es aufteilen. Im schlimmsten Fall erhält man $\dots \infty - \infty$, da die Integrale einzeln ausgewertet werden müssen. Dies ergäbe eine unbestimmbare Lösung. Dies wird mit C.H. umgangen.

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\epsilon \to 0^+} \left(\int_a^{x_0-\epsilon} f(x)\mathrm{d}x + \int_{x_0+\epsilon}^b f(x)\mathrm{d}x \right)$$

Durch das ϵ sind die Integrationsgrenzen gleich weit von der Polstelle entfernt.
Lücken/Unstetigkeiten/Polstellen dürfen nicht ignoriert werden $\rightarrow$ Zerlegung des Intervall

3 Kurven

- Parameterform (Vektorform) $\vec{c} = \vec{\gamma}$ Intervall$\rightarrow \mathbb{R}^n$ (nD)

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ \vdots \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \psi(t) \\ \vdots \end{pmatrix}$$

- Explizite Darstellung $y = f(x)$
  Durch Parameterelimination erhält man aus der Parameterform die Explizite Darstellung

- Implizite Gleichung in $x, y \quad (x, y \in \text{Intervall})$

Umformung: Parameterform $\rightarrow$ Explizite Form $\rightarrow$ Implizite Form, Eine Umkehrung kann, muss aber nicht existieren.

3.1 Tangentialvektor

$$\begin{aligned} \vec{c}'(t) &= (x'(t); y'(t)) \quad 2D \\ \vec{c}'(t) &= (x'(t); y'(t); z'(t)) \quad 3D \\ |\vec{c}| &= \sqrt{x'^2 + y'^2 + \ldots} \text{Länge des Tangentialvektors} \end{aligned}$$

3.2 Kegelschnitte

3.3 p.m. Tangentengleichung

$f'(x) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$
Tangentengleichung am Punkt $P = (x_0, y_0)$:

$$y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0)$$

3.4 Implizit Ableiten

Ableiten ohne Funktion:

1. Gleichung beidseitig differenzieren (d*)
2. mit bekannten Regeln nach Funktionsvariablen ableiten (Linearität, Produkt, Quotient)
3. Division durch $\mathrm{d}x$
4. nach $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ Auflösen