

Inhaltsverzeichnis

1	Integration	2
2	Uneigentliche Integrale	3
2.1	Folgerungen und Spezialfälle	3
2.2	Majorante/Minorante	3
2.2.1	Standard-Abschätzung	4
2.3	Polstellen u.ä.	4

1 Integration

p.485/487

f ist eine Funktion von x

- Effektivwert, auch Quadratisches Mittel genannt:

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}; \quad \sqrt{\frac{1}{b-a} \int_a^b |f|^2}$$

- Linearer Mittelwert/"mittlere Funktionshöhe"

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

- Gleichrichtwert

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b |f(x)| dx$$

- Partielle Integration

$$\int u'v = uv - \int uv'$$

- Allgemeine Potenzregel p.485

$$\int f^\alpha f' = \frac{f^{\alpha+1}}{\alpha+1} \quad (\forall \alpha \neq -1)$$

- Log-Regel

$$\int \frac{f'}{f} = \ln|f|$$

- Substitution p.491

$$\int f(x) dx \stackrel{!}{=} \int f(g(t)) \underbrace{\frac{d(g(t))}{dx} dx}_{df = \frac{df}{dx} dx = f' dx} = \int f(g(t)) g'(t) dt$$

$$x = g(t) \rightarrow g^{-1} = t$$

$$dx = g'(t) dt$$

- Universalsubstitution/Rationalisierung

$$\int (\text{Rationale Funktion aus } \{\cos(x); \sin(x)\}) dx \quad (1)$$

$$t := \tan\left(\frac{x}{2}\right) \Rightarrow \cos(x) \stackrel{!}{=} \frac{1-t^2}{1+t^2}; \quad \sin(x) \stackrel{!}{=} \frac{2t}{1+t^2} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} dt &= d\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \\ &\Rightarrow dt = (1+t^2) = \frac{1}{2} dx \\ \frac{2dt}{1-t^2} &= dx \end{aligned} \quad (3)$$

2 Uneigentliche Integrale

Das Intervall (\vec{x}) kann ∞ sein, oder der Wertebereich (\vec{y}) .

$$\int_a^\infty f(x) dx := \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\int_a^t f(x) dx \right) = \begin{cases} \text{konvergent} & (\text{endlicher Flächeneinhalt}) \\ \text{divergent} & \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^a f(x) dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \left(\int_t^a f(x) dx \right)$$

$\rightarrow F(\infty) - F(a); F(a) - F(-\infty) \rightarrow$ konventionelle Limit-Rechnung

$$\int_{-\infty}^\infty f(x) dx \stackrel{\text{Zerlegung}}{=} \left(\int_{-\infty}^a f(x) dx \right) + \left(\int_a^\infty f(x) dx \right) \quad (!\mathbb{D} \stackrel{!}{=} \mathbb{R})$$

2.1 Folgerungen und Spezialfälle

$$\int_A^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx \text{ konvergiert} \Leftrightarrow \alpha > 1 \quad (\forall A > 0)$$

$$\int_a^\infty f(x) dx \text{ konvergiert} \Rightarrow f(x) = y < \overset{x \rightarrow \infty}{\rightarrow} 0$$

$$\int_a^\infty f(x) dx \text{ divergiert} \Leftarrow f(x) = y < \overset{x \rightarrow \infty}{\rightarrow} \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

2.2 Majorante/Minorante

Dies ist Vergleichbar mit Majorante und Minorante einer Folge.

Man wählt eine Funktion die immer grösser ist als der Betrag der Funktion, von welcher man bestimmen möchte, ob sie konvergiert (p. 503). Wenn die Majorante konvergiert,

konvergiert auch die Funktion.

$$\begin{aligned}
 x \in [a; \infty), |f(x)| \leq g(x) : \\
 \int_a^\infty g(x) dx \text{ konvergiert} &\Rightarrow \int_a^\infty |f(x)| dx \text{ konvergiert} \\
 &\stackrel{\text{X}}{\Rightarrow} \int_a^\infty f(x) dx \text{ konvergiert}
 \end{aligned}$$

Wenn die Minorante divergiert, divergiert auch die Funktion.

$$\begin{aligned}
 0 \stackrel{!}{\leq} g(x) \leq f(x) : \\
 \int_a^\infty g(x) dx = \infty \Rightarrow \int_a^\infty f(x) dx = \infty
 \end{aligned}$$

2.2.1 Standard-Abschätzung

$$\begin{aligned}
 |\sin(\dots)| &\leq 1 \\
 |\cos(\dots)| &\leq 1
 \end{aligned}$$

2.3 Polstellen u.ä.

Z.i.g. b ist z.B. eine Polstelle. b^- ist kleiner als b .

$$x \in [a, b) : \int_a^{b^-} f(x) dx := \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^{t < b} f(x) dx \quad (4)$$

$$x \in (a, b] : \int_{a^+}^b f(x) dx := \lim_{t \rightarrow a^+} \left(\int_t^b f(x) dx \right) \quad (5)$$