

1 Весовые характеристики функции. Сбалансированная функция. Теорема о связи множества всех отображений декартовой степени конечного множества с множеством всех систем координатных функций, следствие. Система весовых характеристик системы функций. Нормальное весовое строение системы функций. Критерий сбалансированности системы функций, следствие.

Функция $f : X \rightarrow Y$ сбалансирована, если

$$|\{x \in X \mid f(x) = y\}| = |\{x \in X \mid f(x) = z\}| \quad \forall y, z \in Y. \quad (1)$$

Теорема:

$$\varphi : X^n \rightarrow X^m \iff F_{m,n} = \{f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)\} \quad (2)$$

где $F_{m,n}$ - система координатных функций.

Следствие: Множество всех отображений $V_n \rightarrow V_m$ взаимно однозначно соответствует множеству всех систем из m б.ф. от n переменных.

Весовые характеристики:

$$N_{r_1, \dots, r_s}^{i_1, \dots, i_s} = |\{(x_1, \dots, x_n) \in X^n \mid f_{i_1}(x_1, \dots, x_n) = r_1, \dots, f_{i_s}(x_1, \dots, x_n) = r_s\}| \quad (3)$$

где $\{i_1, \dots, i_s\} \subseteq \{1 \dots m\}$, $(r_1, \dots, r_s) \in X^s$. Множество весовых характеристик функции образуют систему весовых характеристик этой функции.

Функция имеет нормальное весовое строение (н.в.с.), если $(X = E_k - \text{числа от } 0 \text{ до } k-1 \text{ (типа } \mathbb{Z}_k))$:

$$N_{r_1, \dots, r_s}^{i_1, \dots, i_s} = k^{n-s} \quad (4)$$

Теорема: Отображение $F_{m,n}$ сбалансировано $\iff F_{m,n}$ имеет н.в.с.

Следствие 1: Отображение, заданное системой б.ф. $F_{m,n}$, сбалансировано \iff для любого непустого подмножества $\{i_1, \dots, i_s\}$ мн-ва $\{1, \dots, m\}$:

$$|f_{i_1}(x_1, \dots, x_n) \cdot \dots \cdot f_{i_s}(x_1, \dots, x_n)| = 2^{n-s} \quad (5)$$

Следствие 2: Если $F_{m,n}$ сбалансировано, то все его координатные ф-ции тоже сбалансированы.

2 Алгебраически зависимая система функций. Критерий алгебраической зависимости системы функций, следствие (без доказательства). Линейные, аффинные, нелинейные функции векторных пространств, замечания. Критерий сбалансированности линейного отображения векторных пространств (без доказательства).

Система ф-ций $F_{m,n}$ является АЗ, если $\exists b \in X$ и $\exists \psi : X^m \rightarrow X$, отличная от константы, для которых

$$\psi(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)) \equiv b \quad (6)$$

Теорема: Отображение φ , определяемое системой $F_{m,n}$, сюръективно $\iff F_{m,n}$ - АНЗ

Следствие: Преобразование g множества X^n биективно \iff АНЗ система его координатных ф-ций.

Пусть P - некоторое поле. Ф-ция $\varphi : P^n \rightarrow P^m$ линейная, если:

$$\forall x, y \in P^n \quad \forall a, b \in P : \varphi(a \cdot x + b \cdot y) = a \cdot \varphi(x) + b \cdot \varphi(y) \quad (7)$$

Ф-ция $\varphi : P^n \rightarrow P^m$ аффинная, если:

$$\varphi(x) = \psi(x) + a \quad (8)$$

где ψ - линейная функция, $a \in P^m$

Ф-ция, отличная от аффинной, называется нелинейной.

Утверждение: Между мн-вом линейных функций из P^n в P^m φ и мн-вом матриц $m \times n$ M_φ существует биекция. При этом коэф-ты линейного полинома i -й координатной функции соответствуют i -й строке матрицы M_φ . Верно следующее: φ сбалансирована $\iff \text{rang} M_\varphi = m$.

3 Треугольное преобразование декартовой степени конечно-го множества. Критерий биективности треугольного преобразования, следствие. Отображение неавтономного (преобразование автономного) регистра сдвига над конечным множеством. Линейные регистры сдвига. Критерий биективности преобразования автономного регистра сдвига, следствие.

Преобразование g_n множества X^n называется треугольным, если $g_n = F_{\Delta,n} = \{f_1(x_1), f_2(x_1, x_2), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n)\}$, иначе если $S(f_i) \subseteq 1, \dots, i$ для $i = 1, \dots, n$, где $S(f)$ — множество номеров существенных переменных функции f .

Теорема: Треугольное преобразование g_n множества X^n биективно \iff функция $f_i(x_1, \dots, x_i)$ биективна по последней переменной x_i , $i = 1, \dots, n$.

Пусть $\tau(y_1, y_2)$ — внутренняя бинарная операция на X . Отображение $f\varphi : X^{n+1} \rightarrow X^n$ называется **отображением неавтономного регистра левого сдвига над X с обратной связью $f : X^n \rightarrow X$** , если

$$f\varphi(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = (x_2, \dots, x_n, \tau(f(x_1, \dots, x_n), x_{n+1})). \quad (9)$$

То есть, x_{n+1} нам приходит извне. Мы считаем значение функции τ от текущих элементов регистра и от новой пришедшей переменной, и ставим его на последнее (самое правое, т.к. регистр левого сдвига \Rightarrow всё сдвигается влево) место.

- Число n — длина регистра.
- Отображение f — функция обратной связи.
- Переменные x_1, \dots, x_n — внутренние переменные.
- Переменная x_{n+1} — входная переменная.

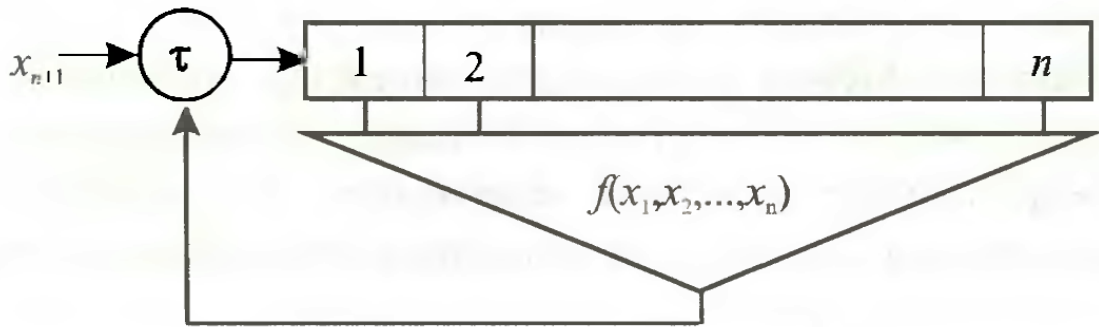


Рис. 1: Неавтономный регистр правого сдвига длины n .

Обычно X — кольцо или поле, а τ биективна по обоим переменным и реализует сложение.

Отображение регистра сдвига над кольцом X является линейным, если линейна функция обратной связи. Соответствующие регистры называются **линейными регистрами сдвига (ЛРС)** над кольцом X .

Теорема: Преобразование fg автономного регистра левого сдвига множества X^n биективно \iff функция обратной связи $f : X^n \rightarrow X$ биективна по переменной x_1 (по выталкиваемой переменной).

Следствие: Преобразование fg регистра левого сдвига над $GF(2)$ с обратной связью $f : X^n \rightarrow X$ биективно $\iff f$ линейна по переменной x_1 :

$$f(x_1, \dots, x_n) = x_1 \oplus \psi(x_2, \dots, x_n), \quad (10)$$

где ψ — произвольная б.ф. от $n - 1$ переменной.

4 Последовательность. Подпоследовательность, отрезок, мультиграмма. Функция перестановки, замены, сопряжения. Период и предпериод последовательности. Чисто периодическая последовательность. Утверждение о длинах предпериода и периода последовательности; об изменении длин периода и предпериода при замене членов последовательности.

Пусть $X_{\rightarrow} = \{x_1, \dots, x_i, \dots\}$ - бесконечная последовательность на мн-вом X порядка k .

Последовательность $\{x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_i}, \dots\}$ при $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_i < \dots$ называется подпоследовательностью пос-ти X_{\rightarrow} .

Подпоследовательность $\{x_r, x_{r+1}, \dots, x_{r+s-1}\}$ называется s -граммой пос-ти X_{\rightarrow} (или $[r, r+s-1]$ -отрезком X_{\rightarrow}). При $s > 1$ она называется мультиграммой.

Пос-ть X_{\rightarrow} называется периодической, если $x_i = x_{i+\tau}$ при $i > \mu$, где $\tau \in \mathbb{N}, \mu \in \mathbb{N}_0$ (в X_{\rightarrow} имеются совпадения на расстоянии τ , начиная с $\mu + 1$). Наименьшее такое τ называется длиной периода последовательности и обозначается через $t(X_{\rightarrow})$. Длиной предпериода пос-ти ($\nu(X_{\rightarrow})$) называется наименьшее $\nu \in \mathbb{N}_0$, при котором имеются совпадения на расстоянии $t(X_{\rightarrow})$, начиная с номера $\nu + 1$.

Предпериодом называется $[1, \nu]$ -отрезок, а периодом - $[\nu + i, \nu + i + t - 1]$ -отрезок, $i \in \mathbb{N}$.

Чисто периодической последовательностью называется пос-ть X_{\rightarrow} , для которой $\nu(X_{\rightarrow}) = 0$.

Утверждение:

1. Если в X_{\rightarrow} имеются совпадения на расстоянии τ , начиная с номера $\mu + 1$, то $t \mid \tau$ и $\nu = \mu$.
2. Если пос-ть $Y_{\rightarrow} = f^*(X_{\rightarrow}) = \{f(x_i)\}$, где $X_{\rightarrow} = \{x_i\}$ - периодическая, а $f : X \rightarrow Y$, то Y_{\rightarrow} - тоже периодическая, при этом: $\nu(Y_{\rightarrow}) \leq \nu(X_{\rightarrow})$ и $t(X_{\rightarrow}) \mid t(Y_{\rightarrow})$. При этом если f - биекция, то $\nu(Y_{\rightarrow}) = \nu(X_{\rightarrow})$ и $t(X_{\rightarrow}) = t(Y_{\rightarrow})$.

5 Теорема о связи длин периода и предпериода последовательностей специального вида над конечной аддитивной группой (без доказательства). Утверждение о длинах предпериода и периода сопряжения последовательностей, следствие (без доказательства). Усложненная последовательность. Верхние и нижние оценки длины периода усложненной последовательности (без доказательства).

Теорема: Для пос-тей X_{\rightarrow} и Y_{\rightarrow} над конечной аддитивной группой X , где $y_i = \sum_{j=1}^i x_j$, выполнено:

1. Если X_{\rightarrow} - периодическая с длиной предпериода $\nu > 0$ и длиной периода t , то Y_{\rightarrow} - периодическая с длиной предпериода $\nu - 1$ и длиной периода t' , где $t' \mid d \cdot t$, где d - порядок эл-та $y_{\nu+t} - y_{\nu}$ группы X .

2. Если X_{\rightarrow} - чисто периодическая с длиной периода t , то Y_{\rightarrow} - чисто периодическая с длиной периода t' , где $t' \mid d \cdot t$, где d - порядок эл-та y_t группы X

Утверждение:

1. X_{\rightarrow} - пос-ть над $X = X_1 \times \dots \times X_n$ периодическая $\iff X_{\rightarrow}^{(j)}$ - периодическая $j = \overline{1, n}$. При этом верно:

$$\nu(X_{\rightarrow}) = \max\{\nu(X_{\rightarrow}^{(1)}), \dots, \nu(X_{\rightarrow}^{(n)})\} \quad (11)$$

$$t(X_{\rightarrow}) = [t(X_{\rightarrow}^{(1)}), \dots, t(X_{\rightarrow}^{(n)})] \quad (12)$$

2. Если пос-ть $X_{\rightarrow}^{(j)}$ отличается от $X_{\rightarrow}^{(1)}$ лишь сдвигом на $j - 1$ знак, то верно:

$$\nu(X_{\rightarrow}) = \nu(X_{\rightarrow}^{(1)}) \quad (13)$$

$$t(X_{\rightarrow}) = t(X_{\rightarrow}^{(1)}) = \dots = t(X_{\rightarrow}^{(n)}) \quad (14)$$

Следствие: Если X_{\rightarrow} - периодическая последовательность над $X = X_1 \times \dots \times X_n$ и $t(X_{\rightarrow}) = p^m$, p - простое, $m \in \mathbb{N}$, то $t(X_{\rightarrow}^{(j)}) = p^{m_j}$, $j = \overline{1, n}$, где $0 \leq m_j \leq m$ и $\max\{m_1, \dots, m_n\} = m$

Последовательность $Y_{\rightarrow} = \{f(x_{i,1}, \dots, x_{i,n})\}, i \geq 0$, полученную из пос-ти $X_{\rightarrow} = \{x_{i,1}, \dots, x_{i,n}\}$ над $X = X_1 \times \dots \times X_n$ с помощью ф-ции усложнения $f : X \rightarrow Y$, называются усложненной последовательностью по отношению к исходным пос-тям $X_{\rightarrow}^{(j)}, j = \overline{1, n}$.

Верхняя оценка периода Y_{\rightarrow} :

$$t_Y \mid [t_1, \dots, t_n] \quad (15)$$

Нижние оценки:

Если $X_{1\rightarrow}$ и $X_{2\rightarrow}$ - пос-ти над аддитивной группой X с периодами t_1, t_2 соответственно, а $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$, то верно:

$$\frac{[t_1, t_2]}{(t_1, t_2)} \leq t_Y \quad (16)$$

Если $f : X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow Y$ биективна по переменным с номерами j_1, \dots, j_b ($\{j_1, \dots, j_b\} \subseteq \{1, \dots, n\}$), то верна оценка:

$$t_Y \geq \prod_{l=1}^b \frac{\Theta}{\Theta_{j_l}} \quad (17)$$

где $\Theta = [t_1, \dots, t_n]$, $\Theta_j = [t_1, \dots, t_{j-1}, t_{j+1}, \dots, t_n]$, $j = \overline{1, n}$

Следствие: Если f биективна по каждой переменной, а $(t_1, \dots, t_n) = 1$, то длина периода Y_{\rightarrow} максимальна: $t_Y = t_1 \cdot \dots \cdot t_n$

6 Период и предпериод элемента относительно преобразования, свойства. Утверждение о связи длин периода и предпериода элемента относительно преобразования с графом преобразования, замечание (без доказательства). Период и предпериод преобразования. Утверждение о связи длин периода и предпериода преобразования с графом преобразования, замечание (без доказательства).

Пусть $g \in \Pi(X)$. $g_{\rightarrow} = \{g^i\}, i = 1, 2, \dots$ - пос-ть над моноидом $\Pi(X)$, $g_{\rightarrow}(x) = \{g^i(x)\}$ - пос-ть над X .

Периодом (предпериодом) элемента x относительно преобразования g называется период (предпериод) пос-ти $g_{\rightarrow}(x)$. Их длины обозначаются через $t_{x,g}, \nu_{x,g}$ или t_x, ν_x .

Утверждение: $\forall g \in \Pi(X), x \in X$:

$$t_{x,g} + \nu_{x,g} \leq |X| \quad (18)$$

Если x - циклическая вершина графа $\Gamma(g)$, то $\nu_{x,g} = 0, t_{x,g}$ равна длине цикла, которому принадлежит вершина x

Если x - ациклическая вершина графа $\Gamma(g)$, то $\nu_{x,g}$ равна длине подхода из x к циклу C , а $t_{x,g}$ - длина этого цикла

(Замечание ???)

Периодом (пердпериодом) преобразования g называется период (предпериод) пос-ти g_{\rightarrow} (обозначение: t_g, ν_g)

Утверждение: величины t_g, ν_g - период и циклическая глубина эл-та g моноида $\Pi(X)$ $\forall g \in \Pi(X)$: $t_g = [l_1, \dots, l_n]$, l_1, \dots, l_n - длины циклов графа $\Gamma(X)$.

Если g - обратимое преобразование, то $\nu_g = 0$, иначе ν_g - наибольшая из длин подходов в графе $\Gamma(g)$

(Замечание ???)

- 7 Полноцикловое преобразование. Теорема о количестве различных полноцикловых преобразований. Линейный конгруэнтный генератор (ЛКГ). ЛКГ полного периода. Критерий максимальности длины периода ЛКГ (без доказательства). Критерий полноцикловости треугольного преобразования с координатными функциями специального вида (без доказательства).
- 8 Принцип склеивания-расклеивания, основополагающая теорема. Линейные преобразования максимального периода. Сопровождающая матрица и характеристический многочлен линейного регистра сдвига (ЛРС). Критерий максимальности длины периода ЛРС (без доказательства). Свойства примитивных многочленов.
- 9 Равномерно распределенные случайные последовательности, свойства. Псевдослучайные последовательности. Рекуррентные последовательности (РП), линейные рекуррентные последовательности (ЛРП). Замечание о длине периода РП. Замечание о связи множества РП и множества регистров сдвига. Замечание о связи множества ЛРП и множества ЛРС.
- 10 ЛРП максимального периода. Характеристический многочлен ЛРП. Утверждение о количестве мультиграмм на периоде ЛРП максимального периода. Замечание о низкой стойкости ЛРП. Аннулирующий и минимальный многочлены последовательности, свойства (без доказательства). Линейная сложность последовательности. Профиль линейной сложности последовательности.
- 11 Утверждения о минимальном многочлене сопряжения и линейной комбинации последовательностей. Замечания о линейной сложности суммы и почленного произведения последовательностей (без доказательства). Нормальная рекуррентная последовательность. Компенсированная по-