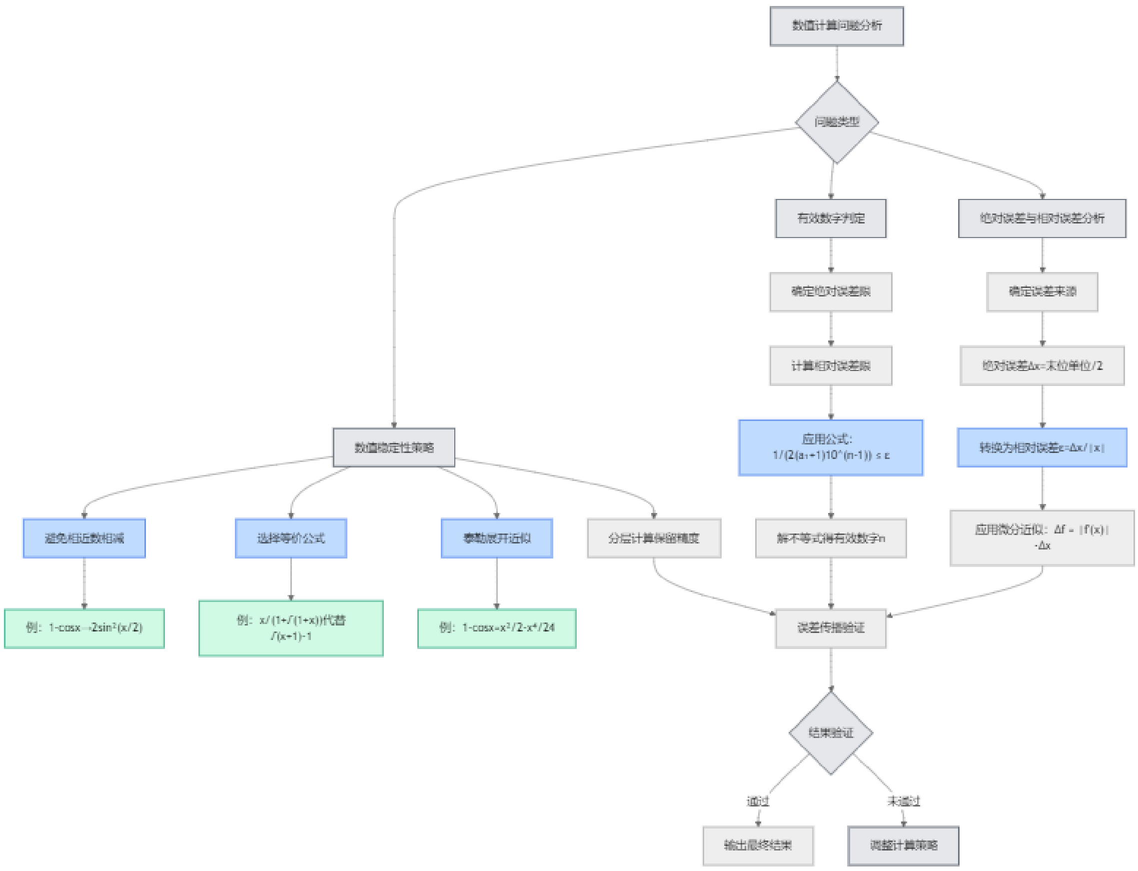
Chapter1-误差与有效数字

姓名：张恒祯　学号：2351071

日期：2025 年 3 月 2 日

1　思路图



2 必做题 (奇数)

1 近似值误差分析

解题诀窍：取最后一位乘 $\frac{1}{2}$。**(1)** $x_1^* = 0.024$

$$\delta_{x_1} = 0.0005, \quad \varepsilon_{x_1} = \frac{0.0005}{0.024} \approx 2.08\%, \quad 2 \text{ 位有效数字} \tag{1}$$

(2) $x_2^* = 0.4135$

$$\delta_{x_2} = 0.00005, \quad \varepsilon_{x_2} = \frac{0.00005}{0.4135} \approx 0.012\%, \quad 4 \text{ 位有效数字} \tag{2}$$

(3) $x_3^* = 57.50$

$$\delta_{x_3} = 0.005, \quad \varepsilon_{x_3} = \frac{0.005}{57.50} \approx 0.0087\%, \quad 4 \text{ 位有效数字} \tag{3}$$

(4) $x_4^* = 60000$

$$\delta_{x_4} = 0.5, \quad \varepsilon_{x_4} = \frac{0.5}{60000} \approx 0.00\%, \quad 5 \text{ 位有效数字} \tag{4}$$

(5) $x_5^* = 8 \times 10^5$

$$\delta_{x_5} = 5 \times 10^4, \quad \varepsilon_{x_5} = \frac{5 \times 10^4}{8 \times 10^5} = 6.25\%, \quad 1 \text{ 位有效数字} \tag{5}$$

3 $\sqrt{11}$ 的有效数字分析

设需要 n 位有效数字，相对误差限满足：

$$\frac{1}{2 \times 10^{n-1}} \leq 0.001 \tag{6}$$

取 $\sqrt{11} \approx 3.3166$，首位数字 $a_1 = 3$，修正公式：

$$\frac{1}{2(a_1 + 1) \times 10^{n-1}} \leq 0.001 \Rightarrow n \geq 3.70 \tag{7}$$

向上取整得：$\boxed{4}$位有效数字

5 边长误差限计算

已知： 正方形边长 $l \approx 100$ cm，要求面积误差 $\Delta A \leq 1\ \text{cm}^2$。
步骤： 面积公式 $A = l^2$，误差传播关系：

$$\Delta A \approx 2l \cdot \Delta l \tag{8}$$

解边长误差限：

$$\Delta l \leq \frac{\Delta A}{2l} = \frac{1}{2 \times 100} = 0.005\ \text{cm} \tag{9}$$

单位换算：

$$0.005\ \text{cm} = 0.05\ \text{mm} \tag{10}$$

结论：边长测量允许最大误差为$\boxed{\pm 0.005\ \text{cm}}$

问题 7 方程求根

方程： $x^2 - 40x + 1 = 0$，已知 $\sqrt{399} \approx 19.975$

解法： 判别式计算：

$$\Delta = 40^2 - 4 \times 1 = 1596 = 4 \times 399 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{399} \approx 39.95$$

根 1（避免相近数相减）：

$$x_1 = \frac{40 + 39.95}{2} = \frac{79.95}{2} = 39.975 \quad (\text{直接计算})$$

根 2（利用韦达定理）：

$$x_2 = \frac{1}{x_1} = \frac{1}{39.975} = 0.02501876 \approx 0.025019$$

结果验证：

$$x_1 \times x_2 = 39.975 \times 0.025019 \approx 1.0000 \quad (\text{满足方程})$$

结论：根为 $\boxed{39.98}$ 和 $\boxed{0.02502}$（四位有效数字）。

问题 9 优化计算方法

(1) $1 - \cos 1°$：采用泰勒展开避免相近数相减：

$$1 - \cos x \approx \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}, \qquad x = \frac{\pi}{180} \approx 0.017453$$

计算结果：

$$1 - \cos 1° \approx 1.523 \times 10^{-4} \quad (\text{四位有效数字})$$

(2) $\ln(30 - \sqrt{30^2 - \sqrt{30^3 - 1}})$：分层计算保留中间量高精度：

$$\sqrt{30^3 - 1} \approx 164.3160 \quad (\text{六位开方})$$
$$\sqrt{30^2 - 164.3160} = \sqrt{735.684} \approx 27.1190$$
$$\ln(30 - 27.1190) = \ln(2.8810) \approx 1.0575$$

(3) $\frac{1-\cos x}{\sin x}$（$|x|$ **极小）：** 三角恒等变换：

$$\frac{1 - \cos x}{\sin x} = \tan\frac{x}{2} \approx \frac{x}{2} \quad (|x| \to 0)$$

(4) $\frac{1}{N+1}$（N **充分大）：** 泰勒展开保留主项：

$$\frac{1}{N+1} = \frac{1}{N} - \frac{1}{N^2} + o\left(\frac{1}{N^2}\right)$$

结论：通过数学变换和分层计算可提高精度。

3 选做题 (偶数)

2 π^{10} 的有效数字分析

设需要 n 位有效数字，相对误差限满足：

$$\frac{1}{2\times 10^{n-1}} \le 0.001 \tag{11}$$

取 $\pi^{10} \approx 93648.05$，首位数字 $a_1 = 9$，修正公式：

$$\frac{1}{2(a_1+1)\times 10^{n-1}} \le 0.001 \Rightarrow n \ge 4.47 \tag{12}$$

向上取整得：$\boxed{5}$位有效数字

4 纬度计算误差分析

已知：纬度 $\phi = 45°0'2''$（测量到秒），求 $\sin\phi$ 的误差。
步骤：角度测量误差 $\Delta\phi = \pm 0.5''$，转换为弧度：

$$\Delta\phi = 0.5'' \times \frac{1°}{3600''} \times \frac{\pi}{180} = 2.424\times 10^{-6}\ \text{rad} \tag{13}$$

利用微分近似计算 $\sin\phi$ 误差：

$$\Delta(\sin\phi) \approx |\cos\phi|\cdot\Delta\phi \tag{14}$$

代入 $\phi = 45°$，$\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$：

$$\Delta(\sin\phi) \approx 0.7071\times 2.424\times 10^{-6} = 1.715\times 10^{-6} \tag{15}$$

结论：$\sin\phi$ 的误差为 $\pm 1.7\times 10^{-6}$

6 多项式误差传播分析

已知：$y = P(x) = x^2 + x - 1150$，精确值 $x = \frac{100}{3}$，近似值 $x^* = 33$。
步骤：

$$y_{\text{精确}} = P\left(\frac{100}{3}\right) = \left(\frac{100}{3}\right)^2 + \frac{100}{3} - 1150 = -\frac{50}{9} \approx -5.5556 \tag{16}$$

$$y^* = P(33) = 33^2 + 33 - 1150 = -28 \tag{17}$$

相对误差计算：

$$\varepsilon_x = \frac{|33-\frac{100}{3}|}{\frac{100}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{100}{3}} = 1\% \tag{18}$$

$$\varepsilon_y = \frac{|-28-(-\frac{50}{9})|}{|\frac{50}{9}|} = \frac{\frac{202}{9}}{\frac{50}{9}} = 404\% \tag{19}$$

结论：相对误差为 $\varepsilon_x = \boxed{1\%}$，$\varepsilon_y = \boxed{404\%}$

问题 8 误差传播分析

表达式：

$$(1)\ y_1 = \frac{x^2 \pm \varepsilon}{100}, \quad (2)\ y_2 = \frac{x^2 \pm \varepsilon}{0.001}$$

误差分析：对 $y = \frac{f(x)}{a}$，绝对误差满足 $\Delta y = \frac{\Delta f}{|a|}$

(1) y_1 **计算：**

$$\Delta y_1 = \frac{|2x\varepsilon| + \varepsilon}{100} \leq \frac{(2|x|+1)\varepsilon}{100}$$

特性：分母 100 使绝对误差缩小 100 倍，相对误差保持不变。

(2) y_2 **计算：**

$$\Delta y_2 = \frac{|2x\varepsilon| + \varepsilon}{0.001} = 1000(2|x|+1)\varepsilon$$

特性：分母 0.001 使绝对误差放大 1000 倍，相对误差仍不变。

结论：表达式 (1) 误差缩小，表达式 (2) 误差放大。

10. 数值稳定性公式选择

(1) 已知 $|x| \le 1$

$$\text{(a) } y = \frac{1}{1+2x} - \frac{1-x}{1+x}$$
$$\text{(b) } y = \frac{2x^2}{(1+2x)(1+x)}$$

选择： $\boxed{b}$ **原因：** 当 $|x| \ll 1$ 时，(a) 式中两分数项的值近似相等（$\approx 1-x$），直接相减会导致有效数字丢失。例如 $x = 0.001$ 时：

$$\frac{1}{1.002} - \frac{0.999}{1.001} \approx 0.9980 - 0.9980 = 0 \text{ (实际应有 } y \approx 2 \times 10^{-6}\text{)}$$

而 (b) 式通过通分消除减法操作，计算更稳定。

(2) 已知 $|x| \gg 1$

$$\text{(a) } y = \frac{2}{x\left(\sqrt{x+\frac{1}{x}} + \sqrt{x-\frac{1}{x}}\right)}$$
$$\text{(b) } y = \sqrt{x+\frac{1}{x}} - \sqrt{x-\frac{1}{x}}$$

选择： $\boxed{a}$ **原因：** 当 $|x| \gg 1$ 时，(b) 式中两个平方根项近似相等，相减导致有效数字丢失。例如 $x = 1000$ 时：

$$\sqrt{1000.001} - \sqrt{999.999} \approx 31.6228 - 31.6222 = 0.0006 \text{ (实际应有 } y \approx 3.16 \times 10^{-8}\text{)}$$

而 (a) 式通过分母相加保留修正项，避免减法误差。

(3) 已知 $|x| \le 1$

$$\text{(a) } y = \frac{2\sin^2 x}{x}$$
$$\text{(b) } y = \frac{1-\cos 2x}{x}$$

选择： $\boxed{a}$ **原因：** 当 $|x| \ll 1$ 时，(b) 式中 $1 - \cos 2x \approx 2x^2$ 为相近数相减，例如 $x = 0.001$ 时：

$$\frac{1-0.999998}{0.001} = \frac{2 \times 10^{-6}}{0.001} = 0.002 \text{ (有效数字丢失)}$$

而 (a) 式通过 $\sin^2 x = x^2 - \frac{x^4}{3} + \cdots$ 直接计算更稳定。

(4) 已知 $p \gg q > 0$

$$\text{(a) } y = \frac{q^2}{p+\sqrt{p^2+q^2}}$$
$$\text{(b) } y = \sqrt{p^2+q^2} - p$$

选择： $\boxed{a}$ **原因：** 当 $p \gg q$ 时，(b) 式中 $\sqrt{p^2+q^2} \approx p + \frac{q^2}{2p}$，相减后：

$$y \approx \frac{q^2}{2p} \text{ (但计算时因大数相减丢失精度)}$$

而 (a) 式分母 $p + \sqrt{p^2+q^2} \approx 2p$，直接得到：

$$y = \frac{q^2}{2p} \text{ (无减法操作，精度更高)}$$

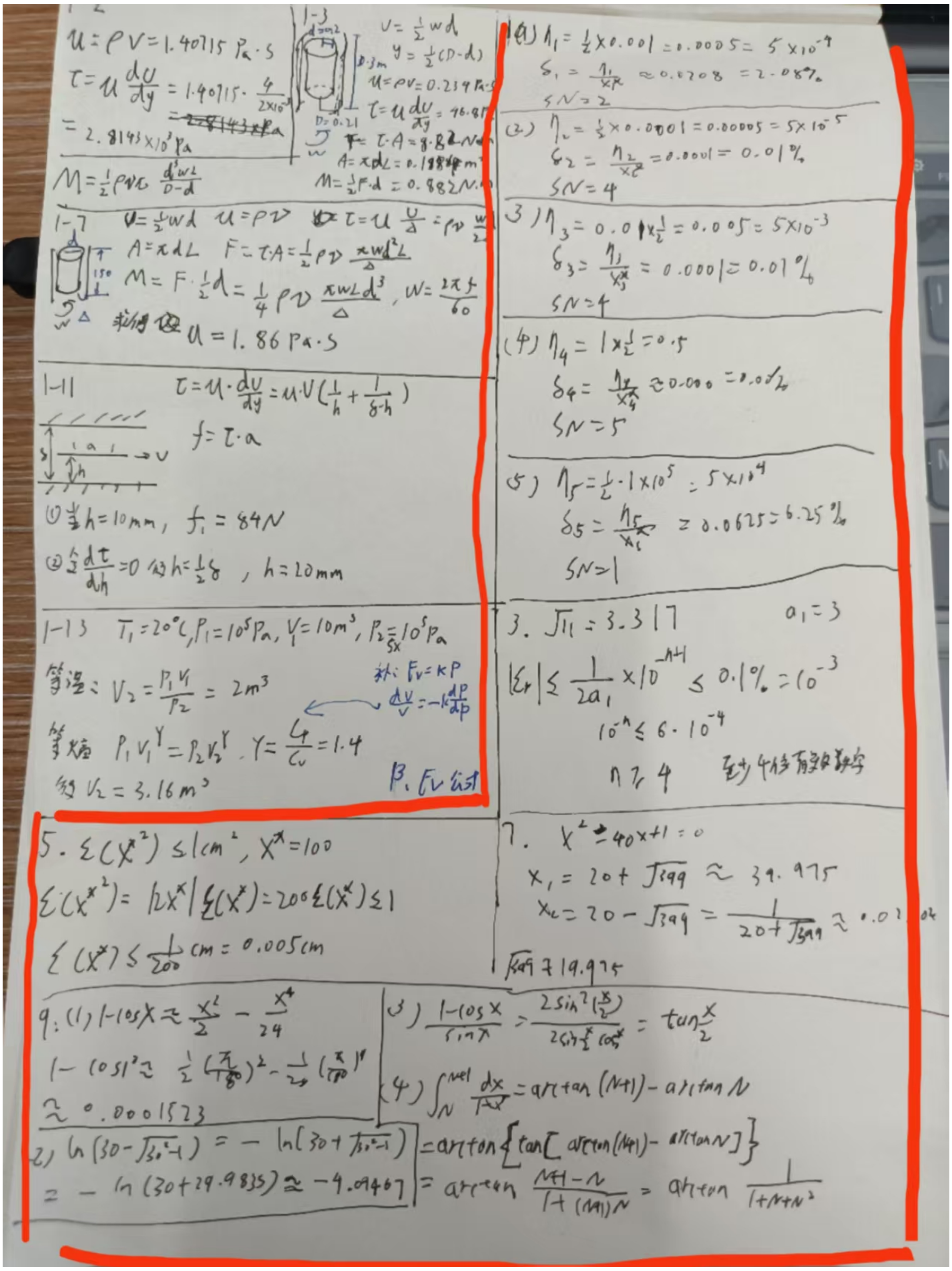
4 有效数字计算函数代码

```
function [n, e] = getdigits(xtrue, x)
% GETDIGITS Calculate significant digits and error bound
% Inputs:
%   xtrue - True value
%   x     - Approximate value
% Outputs:
%   n     - Number of significant digits
%   e     - Absolute error bound

err = abs(xtrue - x);  % Calculate absolute error
[x_norm, m] = scientific_notation(x);  % Convert to scientific notation
[err_norm, q] = scientific_notation(err);  % Convert error

% Determine significant digits based on leading error digit
if err_norm < 5
n = m - q;
else
n = m - q - 1;
end

% Calculate error bound (0.5 * 10^(m-n))
e = 0.5 * 10^(m - n);

% Nested function: Scientific notation conversion
function [x_scaled, exponent] = scientific_notation(x)
x = abs(x);
exponent = 0;  % Initialize exponent

if x == 0
x_scaled = 0;
exponent = 0;
return;
end

% Normalize to 1   x_scaled < 10
while x >= 10
x = x / 10;
exponent = exponent + 1;
end
while x < 1
x = x * 10;
exponent = exponent - 1;
end

x_scaled = x;
exponent = exponent;  % Final exponent
end
```

```
end
```

Listing 1: MATLAB 有效数字计算函数 (getdigits.m)

5 附作业手写记录照片



6 Python 有效数字计算函数

```
from typing import Tuple
import math

def getdigits(xtrue: float, x: float) -> Tuple[int, float]:
"""
计算近似值的有效数字位数及误差限

Args:
xtrue (float): 真实值
x (float): 近似值

Returns:
Tuple[int, float]: (有效数字位数, 绝对误差限)
"""

def scientific_notation(num: float) -> Tuple[float, int]:
"""
将数值转换为标准科学计数法形式 (1   mantissa < 10)

Args:
num (float): 输入数值

Returns:
Tuple[float, int]: (尾数, 指数)
"""
if num == 0:
return 0.0, 0

num = abs(num)
exponent = 0

# 处理大数
while num >= 10:
num /= 10
exponent += 1

# 处理小数
while num < 1:
num *= 10
exponent -= 1

return num, exponent

# 计算绝对误差
err = abs(xtrue - x)

# 转换为科学计数法
```

```python
x_scaled, m = scientific_notation(x)
err_scaled, q = scientific_notation(err) if err != 0 else (0.0, 0)

# 获取误差首位数字
first_err_digit = int(math.floor(err_scaled)) if err_scaled >= 1 else 0

# 判断有效位数
if first_err_digit < 5:
n = m - q
else:
n = m - q - 1

# 计算绝对误差限
e = 0.5 * (10 ** (m - n))

return n, e


# 测试用例
if __name__ == "__main__":
# 示例1: 整数情况
print(getdigits(123.45, 123.40))   # (4, 0.05)

# 示例2: 小数情况
print(getdigits(0.0245, 0.024))   # (2, 0.0005)

# 示例3: 零值处理
print(getdigits(0.0, 0.0))        # (0, 0.0)

# 示例4: 大数情况
print(getdigits(123456, 123400))  # (4, 50.0)
```

Listing 2: Python 有效数字计算函数 (getdigits.py)

7 C++ 有效数字计算函数

```cpp
#include <iostream>
#include <cmath>
#include <utility>

using namespace std;

pair<int, double> getdigits(double xtrue, double x) {
/**
* 计算近似值的有效数字位数及误差限
* @param xtrue 真实值
* @param x 近似值
* @return pair<有效数字位数, 绝对误差限>
```

```
*/

auto scientific_notation = [](double num) -> pair<double, int> {
/**
* 将数值转换为标准科学计数法形式 (1   mantissa < 10)
* @param num 输入数值
* @return pair<尾数, 指数>
*/
if (num == 0) return {0.0, 0};

num = abs(num);
int exponent = 0;

// 处理大数
while (num >= 10) {
num /= 10;
exponent++;
}

// 处理小数
while (num < 1) {
num *= 10;
exponent--;
}

return {num, exponent};
};

// 计算绝对误差
double err = abs(xtrue - x);

// 转换为科学计数法
auto [x_scaled, m] = scientific_notation(x);
auto [err_scaled, q] = (err != 0) ?
scientific_notation(err) : make_pair(0.0, 0);

// 获取误差首位数字
int first_err_digit = (err_scaled >= 1) ?
floor(err_scaled) : 0;

// 判断有效位数
int n;
if (first_err_digit < 5) {
n = m - q;
} else {
n = m - q - 1;
}

// 计算绝对误差限
double e = 0.5 * pow(10, m - n);
```

```cpp

return {n, e};
}

int main() {
// 示例测试
auto test1 = getdigits(123.45, 123.40);
cout << "(" << test1.first << ", " << test1.second << ")\n";  // (4, 0.05)

auto test2 = getdigits(0.0245, 0.024);
cout << "(" << test2.first << ", " << test2.second << ")\n"; // (2, 0.0005)

auto test3 = getdigits(0.0, 0.0);
cout << "(" << test3.first << ", " << test3.second << ")\n";  // (0, 0.0)

auto test4 = getdigits(123456, 123400);
cout << "(" << test4.first << ", " << test4.second << ")\n"; // (4, 50.0)

return 0;
}
```

Listing 3: C++ 有效数字计算函数 (getdigits.cpp)