数学分析复习讲座

王尔卓

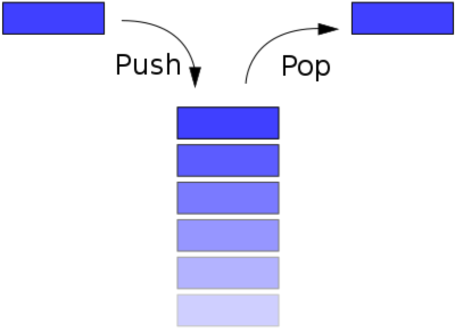
强基数学 2101

2024 年 7 月 6 日

目录

栈的定义

- 栈是计算机科学中的一种抽象数据类型，只允许在有序的线性数据集合的一端（称为堆栈顶端,top）进行插入数据（PUSH）和删除数据（POP）的运算。



一个有趣的问题

一个有趣的问题

- 一个栈的进栈序列为 $1, 2, 3, \cdots, n$, 请问有多少个不同的出栈序列?

一个有趣的问题

- 一个栈的进栈序列为 $1, 2, 3, \cdots, n$, 请问有多少个不同的出栈序列?
- 我们记 C_n 为进栈序列 $1, 2, 3, \cdots, n$ 的出栈个数, 显然 $C_0 = 1, C_1 = 1$

一个有趣的问题

- 一个栈的进栈序列为 $1, 2, 3, \cdots, n$, 请问有多少个不同的出栈序列?
- 我们记 C_n 为进栈序列 $1, 2, 3, \cdots, n$ 的出栈个数, 显然 $C_0 = 1, C_1 = 1$
- 注意到有递推公式:

$$\begin{cases} C_0 = 1 \\ C_n = C_0 \cdot C_{n-1} + C_1 \cdot C_{n-2} + C_2 \cdot C_{n-3} + \ldots + C_{n-1} \cdot C_0 \\ \quad\;\; = \sum_{i=0}^{n-1} C_i \cdot C_{n-1-i} \quad , \qquad n \geq 1 \end{cases}$$

C_n 的通项公式

在数学分析中我们知道如下幂级数

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n, \quad \forall x \in (-1,1)$$

其中 $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}_{\geq 0}$. 现在我们用这个幂级数的性质给出 C_n 的通项公式.

设 C_n 的生成函数为
$G(x)=\sum_{n=0}^{\infty}C_nx^n=C_0+C_1x+C_2x^2+\ldots+C_nx^n+\ldots$(仅为形式幂级数)

$$\begin{aligned}G^2(x)&=(C_0)^2+(C_0C_1+C_1C_0)x+\left(C_0C_2+(C_1)^2+C_2C_0\right)x^2\\&+\ldots+(C_0C_n+C_1C_{n-1}+\ldots+C_nC_0)x^n+\ldots\\&=1+C_2x+C_3x^2+\ldots+C_{n+1}x^n+\ldots\end{aligned}$$

所以 $xG^2(x)-G(x)+1=0$ 解此二元一次方程并由 $G(0)=1$ 得到 $G(x)=\frac{1}{2x}-\frac{1}{2x}\sqrt{1-4x}$ 利用 $(1+x)^a=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(a-1)\ldots(a-n+1)}{n!}x^n$ 对 $G(x)$ 进行泰勒展开可得

$$\begin{aligned}G(x)&=\frac{1}{2x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-3)!!}{2^nn!}(-4x)^n\\&=\frac{1}{2x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^nn!}\frac{(2n-2)!}{2\cdot4\cdot\ldots\cdot(2n-2)}(-4x)^n\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{(2n-2)!}{(n-1)!(n-1)!}x^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}C_{2n-2}^{n-1}x^{n-1}\end{aligned}$$

收敛范围

对于幂级数

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n, \quad \forall x \in (-1,1)$$

对于区间端点的收敛情况，我们有如下结论：

- 当 $\alpha \leqslant -1$ 时，收敛域为 $(-1,1)$；
- 当 $-1 < \alpha < 0$ 时，收敛域为 $(-1,1]$；
- 当 $\alpha > 0$ 时，收敛域为 $[-1,1]$.

含参变量积分

考虑一个含参变量积分

$$I(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2} \cos 2\pi\alpha x \, \mathrm{d}x$$

我们把这个积分改写成

$$I(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2} e^{-2\pi \mathrm{i} x\alpha} \, \mathrm{d}x$$

由分部积分

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\alpha}I(\alpha) &= \int_{\mathbb{R}} 2\pi \mathrm{i} x e^{-\pi x^2} e^{-2\pi \mathrm{i} x\alpha}\ \mathrm{d}x \\ &= 2\pi\alpha I(\alpha)\end{aligned}$$

考虑 $g(\alpha) = e^{-\pi\alpha^2} I(\alpha)$, 由上式求导得到 $g(\alpha)$ 为常数, 且由 $g(0) = 1$, 我们有

$$I(\alpha) = e^{-\pi\alpha^2}$$

事实上, 对一个 $\mathbb{R}$ 上绝对可积的函数 $f(x)$, 我们定义它的傅里叶变换为

$$\mathcal{F}f(\xi) = \widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2\pi i\xi\cdot x}dx$$

上面的关于含参变量积分的计算告诉我们 $e^{-\pi x^2}$ 的傅里叶变换等于自身!
如果 $f(x):\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ 是绝对可积函数, 我们定义

$$f^{\vee}(x) = \widehat{f}(-x) = \int_{\mathbb{R}} f(\xi)e^{2\pi i\xi\cdot x}d\xi$$

为傅里叶逆变换.

更多可以尝试的傅里叶变换以及逆变换

- $f(x) = e^{-2\pi|\xi|}$, 求傅里叶逆变换 (Laplace 分布的密度函数)
- $f(\xi) = \max(0, 1 - |\xi|)$, 求傅里叶逆变换
- $f(x) = e^{-2\pi x} x^{a-1}$ for $x > 0$ and $f(x) = 0$ for $x \le 0$, 求 f 的傅里叶变换.(卡方分布的密度函数)

$$
\begin{aligned}
\phi(x) &= \int_{-1}^{0} (1+\xi) e^{2\pi i \xi \cdot x} d\xi + \int_{0}^{1} (1-\xi) e^{2\pi i \xi \cdot x} d\xi \\
&= \frac{e^{2\pi i x} + e^{-2\pi i x} - 2}{(2\pi i x)^2} = \left(\frac{\sin \pi x}{\pi x}\right)^2
\end{aligned}
$$

- Given $a > 0$, let $f(x) = e^{-2\pi x}x^{a-1}$ for $x > 0$ and $f(x) = 0$ for $x \leq 0$.

  a. $f \in L^1$, and $f \in L^2$ if $a > \frac{1}{2}$.

  b. $\widehat{f}(\xi) = \Gamma(a)[(2\pi)(1+i\xi)]^{-a}$. (Here we are using the branch of z^a in the right half plane that is positive when z is positive. Cauchy's theorem may be used to justify the complex substitution $y = (1+i\xi)x$ in the integral defining $\widehat{f}$.)

  c. If $a, b > \frac{1}{2}$ then

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1-ix)^{-a}(1+ix)^{-b}\,dx = \frac{2^{2-a-b}\pi\Gamma(a+b-1)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}.$$

设 $x \notin \mathbb{Z}_{\leqslant 0}$，证明

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = xe^{\gamma x} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{-\frac{x}{n}},$$

其中 γ 是 Euler 常数。

Theorem (Hadamard' s factorization theorem)

Suppose f is entire and has growth order ρ_0. Let k be the integer so that $k \leq \rho_0 < k+1$. If $a_1, a_2, \ldots$ denote the (non-zero) zeros of f, then

$$f(z) = e^{P(z)} z^m \prod_{n=1}^{\infty} E_k\left(z/a_n\right),$$

where P is a polynomial of degree $\leq k$, and m is the order of the zero of f at $z = 0$.

稠密子集与连续函数

稠密子集与连续函数

- 回顾稠密的定义: E 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个子集, 如果 E 的闭包为 $\mathbb{R}^n$ 则称 E 是一个稠密子集.

稠密子集与连续函数

- 回顾稠密的定义: E 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个子集, 如果 E 的闭包为 $\mathbb{R}^n$ 则称 E 是一个稠密子集.
- 习题: 设 f 与 g 是从 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^m$ 的两个连续映射, E 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个稠密子集，并且对任意的 $\boldsymbol{x} \in E$ 有 $f(\boldsymbol{x}) = g(\boldsymbol{x})$, 证明 $f = g$.

我们考虑这个习题的逆命题什么时候成立，也就是说，在何种条件下，给定一个稠密子集 E 上的连续函数，我们可以将这个连续函数延拓为 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数.

我们考虑这个习题的逆命题什么时候成立，也就是说，在何种条件下，给定一个稠密子集 E 上的连续函数，我们可以将这个连续函数延拓为 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数.

我们考虑这个习题的逆命题什么时候成立，也就是说，在何种条件下，给定一个稠密子集 E 上的连续函数，我们可以将这个连续函数延拓为 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数.

- 我们给出一个该命题成立的充分条件，如果 $f\colon E \to \mathbb{R}^m$ 一致连续，则我们可以将 f 唯一延拓至 $\mathbb{R}^n$

我们考虑这个习题的逆命题什么时候成立，也就是说，在何种条件下，给定一个稠密子集 E 上的连续函数，我们可以将这个连续函数延拓为 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数.

- 我们给出一个该命题成立的充分条件，如果 $f: E \to \mathbb{R}^m$ 一致连续，则我们可以将 f 唯一延拓至 $\mathbb{R}^n$
- Step 1: 对 $x \in \mathbb{R}^n$，取一列 $x_n \in E$ 使得 $\lim_{n\to\infty} x_n = x$，定义 $f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$.
- Step 2: 证明这个定义 $well - defined$.
- Step 3: 证明 f 是连续的.

度量空间上的版本:

Theorem (extension theorem)

Suppose Y and Z are metric spaces, and Z is complete. Also suppose X is a dense subset of Y, and $f: X \to Z$ is uniformly continuous. Then f has a uniquely determined extension $\bar{f}: Y \to Z$ given by

$$\bar{f}(y) = \lim_{\substack{x \to y \\ x \in X}} f(x) \qquad \text{for } y \in Y$$

and $\bar{f}$ is also uniformly continuous.

- 关于分离性的一道习题: 设 A, B 是 $\mathbb{R}^n$ 中的两个闭集且 $A \cap B = \varnothing$, 证明存在开集 G_1 和 G_2 满足 $A \subseteq G_1, B \subseteq G_2$ 且 $G_1 \cap G_2 = \varnothing$.

- 关于分离性的一道习题: 设 A, B 是 $\mathbb{R}^n$ 中的两个闭集且 $A \cap B = \varnothing$, 证明存在开集 G_1 和 G_2 满足 $A \subseteq G_1, B \subseteq G_2$ 且 $G_1 \cap G_2 = \varnothing$.
- *Proof:*

Lemma

对 $\mathbb{R}^n$ 的任意两个非空子集 A 和 B, 记

$$d(A, B) = \inf_{\boldsymbol{x} \in A, \boldsymbol{y} \in B} |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|.$$

若 A 是紧集, B 是闭集则 $A \cap B = \varnothing$, 证明 $d(A, B) > 0$ 。

设 A, B 是不相交闭集, 不妨设它们都不是 $\varnothing$.$\forall x \in X$, 则 $d(x, A) + d(x, B) > 0$. 规定 X 上连续函数 f 为

$$f(x) = \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)}.$$

则当 $x \in A$ 时, $f(x) = 0; x \in B$ 时, $f(x) = 1$. 任取实数 $t \in (0, 1)$, 则 $f^{-1}((-\infty, t))$ 和 $f^{-1}((t, +\infty))$ 是 A 和 B 的不相交邻域.

Theorem (Usysohn's lemma)

Let X be a normal space; let A and B be disjoint closed subsets of X. Let $[a, b]$ be a closed interval in the real line. Then there exists a continuous map

$$f : X \longrightarrow [a, b]$$

such that $f(x) = a$ for every x in A, and $f(x) = b$ for every x in B.