Lebesgue 测度的旋转不变性

王尔卓　强基数学 2101

2023 年 5 月 27 日

本文我们将证明如下命题:

Theorem 1. *f 是 $\mathbb{R}^n$ 上的 Lebesgue 可积函数，T 是 $\mathbb{R}^n$ 上的可逆线性变换，则 $f \circ T$ 也可积且有*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = |\det T| \int_{\mathbb{R}^n} f \circ T(x)dx$$

其推论正是 Lebesgue 测度的旋转不变性 (取 $f(x)$ 为特征函数).

Corollary 2. *记 $\mathcal{L}^n$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中 Lebesgue 可测集全体，m 为 Lebesgue 测度，如果 $E \in \mathcal{L}^n$,T 是 $\mathbb{R}^n$ 上的可逆线性变换，则 $m(T(E)) = |\det T| m(E)$*

我们将采取 Folland 实分析中的证明思路, 通过 Fubini 定理分别证明三种初等变换对该结论成立，再将 T 拆成初等变换的乘积，从而证明该结论.

Lemma 3 (Fubini 定理)**.** *考虑 σ-finite 的测度空间 $(X, \mathcal{M}, \mu)$ 和 $(Y, \mathcal{N}, \nu)$, 两个测度空间的乘积记为 $(X \times Y, \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}, \mu \times \nu)$ ，$f(x, y)$ 为 $(X \times Y, \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}, \mu \times \nu)$ 上的可积函数，则 $f_x(y) = f(x, y)$ 对几乎处处的 x, 有 $f_x(y)$ 为 Y 中的可积函数，定义*

$$g(x) = \begin{cases} \int f_x(y) & f_x(y)\text{在 } x \text{ 处可积} \\ 0 & Otherwise \end{cases}$$

则 $g(x)$ 在 X 上可积，且有

$$\int f(x, y)d\mu d\nu = \int g(x)d\mu$$

该定理对多个测度空间取乘积仍然成立. 我们还需要一个 $\mathbb{R}$ 上的 Lebesgue 可测集的结论.

Lemma 4. *E 上 $\mathbb{R}$ 上的 Lebesgue 可测集，$s, r \in \mathbb{R}$, 则 $s + E, rE$ 均为 Lebesgue 可测集，且 $m(s + E) = m(E), m(rE) = |r|m(E)$*

Proof: 　由于 $x \mapsto x + s, x \mapsto rx$ 为连续函数，因此 $s + E, rE$ 均为 Lebesgue 可测集，我们可以在 $\mathbb{R}$ 上对所有 Borel 集合定义测度 $\tau_s(E) = m(E + s), \tau_r(E) = m(rE)$, 这个测度在左开右闭的区间上分别与测度 $m, |r|m$ 相等，由测度延拓的唯一性，命题得证.

接下来我们对定理 1 作证明, 由于 Lebesgue 可积函数和 Borel 可积函数只差一个 Lebesgue 零测集，我们不妨设 f 为 Borel 可积函数，接下来我们对初等变换 T_1(两行交换),T_2(一行的倍数加到另一行)，T_3(某一行乘一个非零倍数 c) 分别证明该定理.

不妨设 $T_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_2, x_1, \ldots, x_n)$, 则

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \circ T_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x_2, x_1, \ldots, x_n)dx$$

右边交换 x_1, x_2 的积分顺序以后可以得到

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x_2, x_1, \ldots, x_n)dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)dx$$

注意到 $\det T_1 = -1$, 则对 T_1 定理 1 成立. 考虑 T_2, 不妨设 $T_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_1, x_2 + \lambda x_1, \ldots, x_n)$, 则 $\det T_2 = 1$, 由于对 $\mathbb{R}$ 上 Borel 可积函数 g, 将 g 写成简单函数的极限的形式, 由控制收敛定理和 Lemma 4

$$\int_{\mathbb{R}} g(x+c)dx = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \phi_n(x+c)dx = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \phi_n(x)dx = \int_{\mathbb{R}} g(x)dx$$

则由 Fubini 定理,

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \circ T_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, x_2 + \lambda x_1, \ldots, x_n)dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)dx$$

考虑 T_3, 不妨设 $T_3 = (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (cx_1, x_2, \ldots, x_n)$, 则 $\det T_3 = c$, 由于对 $\mathbb{R}$ 上 Borel 可积函数 g, 将 g 写成简单函数的极限的形式, 由控制收敛定理和 Lemma 4

$$\int_{\mathbb{R}} g(rx)dx = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \phi_n(rx)dx = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} |r|\phi_n(x)dx = |r| \int_{\mathbb{R}} g(x)dx$$

则由 Fubini 定理,

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \circ T_3(x_1, x_2, \ldots, x_n)dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(cx_1, x_2, \ldots, x_n)dx = |c| \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)dx$$

证毕.