Question 1. 6 种, 注意到 A, B, C, D 中任选两个点, 考虑一个人被这两个点遮挡, 那么这个人一定位于 AE 和 BF 的交点或者 AF 和 BE 的交点, 排除交点在四边形内部的情况, 得到最多有 6 种。

Question 2. 设击落第 n 个飞机时, 累计积分期望为 E_n. 等待第 i 个飞机的事件设为 $t_i, i = 1, \ldots, n$.

Question 3. (1): 设

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}$$

则

$$A^2=\begin{bmatrix} -\det(A) & 0 \\ 0 & -\det(A) \end{bmatrix}$$

从而

$$A^{2n}=\begin{bmatrix} (-\det(A))^n & 0 \\ 0 & (-\det(A))^n \end{bmatrix}$$

$$A^{2n+1}=\begin{bmatrix} (-\det(A))^n & 0 \\ 0 & (-\det(A))^n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}$$

现在我们设 $M=\max\{|a|,|b|,|c|,|d|\}$, $A^n=\begin{bmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{bmatrix}$. 任取一个 Lattice $\mathbb{Z}w_1\oplus\mathbb{Z}w_2$, 其中 w_1,w_2 为线性无关的复数. 如果平面上有一点 $P=a_1w_1+a_2w_2, w_1/w_2\in\mathbb{H}$, 其中 $a_1,a_2\in\mathbb{R}$, 则 P 与 Lattice 上最近点的距离不会超过 $\max\{||w_1+w_2||,||w_1-w_2||\}$. 这是因为由 Lattice 的周期性, 不妨设 $0\le a_1<1, 0\le a_2<1$. 那么最近的点只能是 $0,w_1,w_2,w_1+w_2$, 不妨取 w_1,w_2 夹角为锐角 (否则令 $w_2=-w_2$, Lattice 不变), 那么 P 与原点的距离不会超过 $||w_1+w_2||$, 故原结论成立.

对原问题, 根据先前的叙述, 注意到 $A^n\mathbb{Z}^2=A^ne_1\oplus A^ne_2$ 我们可以将问题转化成证明:

$$\max\left\{||\begin{bmatrix} a_n+b_n \\ c_n+d_n \end{bmatrix}||,||\begin{bmatrix} a_n-b_n \\ c_n-d_n \end{bmatrix}||\right\}=\mathcal{O}(|\det(A)|^{n/2})$$

$n=2k$ 为偶数时,

$$\max\left\{||\begin{bmatrix} a_n+b_n \\ c_n+d_n \end{bmatrix}||,||\begin{bmatrix} a_n-b_n \\ c_n-d_n \end{bmatrix}||\right\}\le 2|\det(A)|^k=2|\det(A)|^{n/2}$$

$n=2k+1$ 为奇数时,

$$\max\left\{||\begin{bmatrix} a_n+b_n \\ c_n+d_n \end{bmatrix}||,||\begin{bmatrix} a_n-b_n \\ c_n-d_n \end{bmatrix}||\right\}\le 2M|\det(A)|^k=\mathcal{O}(|\det(A)|^{n/2})$$

证毕.

(2): 我们证明一个弱一点的结论, 如果特征多项式在 $\mathbb{R}$ 上不可约, 则 (1) 中结论仍然成立.

首先 A 的特征多项式为 $x^2-\mathrm{tr}(A)x+\det(A)$, 在 $\mathbb{R}$ 上不可约说明有两个不同的复根:

$$(\mathrm{Tr}(A)\pm\sqrt{\mathrm{tr}(A)^2-4\det(A)})/2$$

这两个复根模长均为 $\sqrt{|\det(A)|}$. 又因为:

$$\max\left\{||\begin{bmatrix} a_n+b_n \\ c_n+d_n \end{bmatrix}||,||\begin{bmatrix} a_n-b_n \\ c_n-d_n \end{bmatrix}||\right\}\le C\max\{|a_n|,|b_n|,|c_n|,|d_n|\}, C>0\text{常数}$$

设特征多项式两个根为 λ_1,λ_2, 对 A 作对角化 $A^n=\begin{bmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{bmatrix}=P\begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{bmatrix}P^{-1}$. 从而, $\max\{|a_n|,|b_n|,|c_n|,|d_n|\}=\mathcal{O}(|\lambda_1|^n+|\lambda_2|^n)=\mathcal{O}(|\det(A)|^{n/2})$

Question 4. (1): 考虑递推数列 $a_{n+1} = a_n/n, a_1 = 2$. 则 $(a_1, \ldots, a_{2d+1})$ 为该线性变换服从特征值 d 的特征向量. 这是因为该线性变换在 v_i 这组基下矩阵 A 为一个三对角矩阵, 对角线上元素为 0, 对角线斜上方一行为 $(i-1)(2d+2-i)/2, i = 2, \ldots, 2d+1$, 斜下方一行为 $1/2$.

故只需证明 $(a_1, \ldots, a_{2d+1})$ 为 $A - dI$ 对应方程组的解, 这等价于验证:

$$1/2a_k - da_{k+1} + ((k+1)(2d-k)/2)a_{k+2} = 0, k = 1, \ldots, 2d-1$$

和

$$(1/2)a_{2d} = da_{2d+1}$$

用递推关系拆开验证即可, 对于找特征值 $-d$ 的特征向量, 令 $b_{n+1} = -b_n/n, b_1 = 2$, 同理验证 $(b_1, \ldots, b_{2d+1})$ 为特征向量. 因此 $\pm d$ 为 A 的特征值

Question 5.

Question 6. (1): 考虑实数 a,b, 对 $(a+b)^n,(-a+b)^n$ 用二项式定理得到:

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k}$$

$$(-a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}a^kb^{n-k}$$

两式相加有:

$$(a+b)^n+(-a+b)^n=2\sum_{k\text{ even}}\binom{n}{k}a^kb^{n-k}$$

带入 $a=1/3,b=2/3$ 得到:

$$\mathbb{P}(X_n\text{为偶数})=\frac{1+(1/3)^n}{2}$$

令 $n\to\infty$ 得答案为 $1/2$

(2): 记 $\mathbb{P}\left(X_{2n}^{(i)},i=1,2,\cdots,5\text{ 全部为偶数}\right)=S_n$, 考虑函数

$$\cosh(z)=\frac{e^z+e^{-z}}{2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{(2n)!},\quad z\in\mathbb{C}$$

令 $f_i(z)=\cosh(p_iz),i=1,2,3,4,5$, 则

$$f_i(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{p_1^{2n}}{(2n)!}z^{2n}$$

则考虑这些函数乘积 $f(z)$ 的幂级数展开:

$$f(z)=\prod_{i=1}^{5}f_i(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$$

其中:

$$a_{2n}=\frac{1}{(2n)!}\sum_{2(k_1+\cdots+k_5)=2n}\frac{(2n)!}{(2k_1)!\dots(2k_5)!}p_1^{2k_1}\dots p_5^{2k_5}=\frac{1}{(2n)!}S_n$$

从而

$$f(z)=\prod_{i=1}^{5}f_i(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{S_n}{(2n)!}z^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n$$

又因为

$$f(z)=\frac{(e^{p_1z}+e^{-p_1z})\dots(e^{p_5z}+e^{-p_5z})}{32}=\frac{e^z+e^{-z}+\sum_j e^{a_jz}}{32}$$

其中 a_j 是一些绝对值小于 1 的实数, 因此除了 e^z 和 e^{-z} 以外, 其余项 e^{a_jz} 在 $z=0$ 处的 n 阶导数会随着 n 趋于无穷而趋于 0, 从而

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{32}(e^z+e^{-z})^{(2n)}|_{z=0}=\frac{1}{16}$$

Question 7.

Question 8.