几个级数的计算

王尔卓
强基数学 2101

1 命题及其推论

我们已经通过傅里叶分析的方法证明了:

Lemma 1.

$$\cot \alpha\pi = \frac{1}{\pi}(\frac{1}{\alpha} + \sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{\alpha+n}) + \frac{1}{\alpha-n})), \quad \alpha \notin \mathbb{Z}$$

接下来我们用上述引理证明几个级数的表达式.

Exercise 2. 证明在 0 的充分小的去心邻域内有:

$$\cot \alpha = \frac{1}{\alpha} - 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\zeta(2k)}{\pi^{2k}}\alpha^{2k-1}$$

Proof: 由引理在 0 充分小的去心邻域内有:

$$\begin{aligned}\cot \alpha &= \frac{1}{\pi}(\frac{\pi}{\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{\frac{\alpha}{\pi}+n} + \frac{1}{\frac{\alpha}{\pi}-n})) = \frac{1}{\alpha} + \frac{2\alpha}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\frac{1}{(\frac{\alpha}{n\pi})^2-1}\\ &= \frac{1}{\alpha} - \frac{2\alpha}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{\alpha}{n\pi})^{2k} = \frac{1}{\alpha} - \frac{2\alpha}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}(\frac{\alpha}{n\pi})^{2k}\\ &= \frac{1}{\alpha} - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{2\alpha}{\pi^2}(\frac{\alpha}{\pi})^{2k}\zeta(2k+2) = \frac{1}{\alpha} - 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha^{2k-1}}{\pi^{2k}}\zeta(2k)\end{aligned}$$

证毕.

Corollary 3.

$$\zeta(2k) = \frac{(-1)^{k+1}B_{2k}(2\pi)^{2k}}{2(2k)!}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}_{>0}$$

Proof: 考虑函数 $f(z) = \cot z - \frac{1}{z}$, 由于 $\cot z$ 在 0 处为留数为 1 的一阶极点, 因此 $f(z)$ 可以看作 0 处局部的全纯函数, 由全纯函数的唯一性定理, 在 0 局部有:

$$\cot z - \frac{1}{z} = -2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\zeta(2k)}{\pi^{2k}}z^{2k-1}$$

又因为:

$$\cot z - \frac{1}{z} = i\frac{e^{2iz}+1}{e^{2iz}-1} - \frac{1}{z} = i(1+\frac{2}{e^{2iz}-1}) - \frac{1}{z} = i(1-i\frac{2iz}{z(e^{2iz}-1)}) - \frac{1}{z}$$
$$= i(1-i\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}(2iz)^n) - \frac{1}{z} = i + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_n}{n!}(2i)^n z^{n-1}$$

对比系数得到:

$$\frac{B_{2k}}{2k!}(2i)^{2k} = -2\frac{\zeta(2k)}{\pi^{2k}}$$

从而有:

$$\zeta(2k) = \frac{(-1)^{k+1}B_{2k}(2\pi)^{2k}}{2(2k)!}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}_{>0}$$

Corollary 4 (Bernoulli 数绝对值的渐进公式)**.**

$$|B_{2n}| \sim 4\sqrt{\pi n}(\frac{n}{\pi e})^{2n} \quad 当 n \to \infty$$

Proof: 注意到对实数 $s > 1$:

$$1 \le \zeta(s) \le 1 + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^s} \le 1 + \int_1^{\infty}\frac{1}{x^s}\mathrm{d}x = 1 + \mathcal{O}(\frac{1}{s})$$

因此 $\zeta(2n) \to 1$, 再由斯特林公式以及 Corollary 3 得到:

$$|B_{2n}| \sim \frac{2(2n)!}{(2\pi)^{2n}} \sim 4\sqrt{\pi n}(\frac{n}{\pi e})^{2n}$$

证毕!

Exercise 5.

$$\sin \pi x = \pi x \prod_{n=1}^{\infty}(1-\frac{x^2}{n^2}) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Proof: 考虑整函数 $\sin \pi z$ 的 Hadamard 分解:

$$\sin \pi z = e^{P(z)} z \prod_{n=-\infty, n\neq 0}^{\infty}(1-\frac{z}{n})e^{\frac{z}{n}} = e^{P(z)} z \prod_{n=1}^{\infty}(1-\frac{z^2}{n^2})$$

其中 $\deg P(z) \le 1$, 设为 $P(z) = az + b$, 则由于 $\sin(\pi z) = -\sin(-\pi z)$, 对任意 $z \notin \mathbb{Z}$, 有 $e^{P(z)} = e^{P(-z)}$ 从而得到:

$$a = 0$$

从而:

$$\sin \pi z = e^b z \prod_{n=1}^{\infty}(1-\frac{z^2}{n^2})$$

将 z 除至左侧取 $z \to 1$ 的极限得到 $e^b = \pi$, 从而:

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{n=1}^{\infty}(1-\frac{z^2}{n^2})$$

Exercise 6.

$$\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi x} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(x+n)^2} \quad x \notin \mathbb{Z}$$

Proof: 用傅里叶分析的方法是直接对 Lemma 1 求导，接下来我们用复变的方法将这个等式推广为

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(\tau+n)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi\tau} \quad \tau \in \mathbb{C}-\mathbb{Z}$$

首先我们考虑 $Im(\tau) > 0$ 的情况, 此时考虑函数 $f(z) = \dfrac{1}{(\tau+x)^k}, k \geq 2$，在上半平面和下半平面分别构造半圆形曲线，由留数定理计算 f 的傅里叶变换得:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(z)e^{-2\pi ix\xi}\mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{(-2\pi i\xi)^{k-1}}{(k-1)!}2\pi ie^{2\pi i\tau\xi} & \xi > 0 \\ 0 & \xi \leq 0 \end{cases}$$

由 Poisson 求和公式得到:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(\tau+n)^k} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2\pi in)^{k-1}}{(k-1)!}2\pi ie^{2\pi i\tau n}$$

令 $k=2$ 得到:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(\tau+n)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} 4\pi^2 ne^{2\pi i\tau n} = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi\tau)}$$

最后一个等号是对函数

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{2\pi i\tau n} = \frac{e^{2\pi i\tau}}{1-e^{2\pi i\tau}}$$

求导得到的，从而 $Im(\tau) > 0$ 的情况得证，$Im(\tau) < 0$ 的情况同理可得. 从而我们得到了 $\tau \in \mathbb{C}-\mathbb{Z}$ 时结论成立.

2 总结

通过上面几个级数的计算，我们可以看出，傅里叶分析中得到的公式可以通过复变函数的工具进行推广，得到一些形式优美的结论。