实习答辩

王尔卓

2024 年 9 月 17 日

西安交通大学

实习企业简介

我的实习公司是北京市青创赢科技教育有限公司，有一个别称是“工橙院”。

我们公司的主要业务是给北京、杭州等地区的小学、初中、高中的国际学校学生提供计算机留学背景提升的服务，准确来说，是组织学生参加一些计算机相关的项目和编程竞赛，由于申请过程中外方学校还会看中数学相关的竞赛，因此还会组织一些有认可度的数学竞赛的培训。

实习企业简介

国际科技创新大赛项目:

1. CS+ 计算机跨学科文理兼修科研项目
2. Microsoft Imagine Cup Junior 微软创新杯
3. Kaggle 人工智能数据科学挑战赛
4. 中国青少年科技创新大赛

国际数学竞赛:

1. CCC 加拿大计算机竞赛
2. USACO 美国计算机奥赛
3. Gauss 加拿大高斯数学竞赛
4. Euclid 加拿大欧几里得数学竞赛(每年四月中旬)
5. AMC8/10/12 美国数学竞赛()

AMC 比赛简介

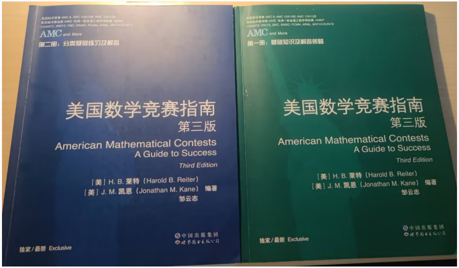
	AMC 8	AMC 10	AMC 12
年级	≤ 8	≤ 10	≤ 12
开始时间	每年 1 月	每年 11 月	每年 11 月
形式	25 道题	25 道题	25 道题
用时	40 分钟	75 分钟	75 分钟
总分	25	150	150
判分方法	(1,0,0)	(6,1.5,0)	(6,1.5,0)

- (x, y, z) 为对一个题 x 分, 不填 y 分, 答错 z 分.

- 代数: 解方程, 不等式, 数列, 阶乘, 比率.
- 组合: 概率, 组合数
- 几何: 三角形, 圆形, 矩形, 面积, 角度
- 数列: 奇数偶数, 整除, 最大公约数, 唯一因子分解

实习内容简介

暑假期间总共带了两个学生, 均为一对一上课, 其中一个学生上了 9 次课, 一个学生上了 6 次, 每节课均为两个小时。还有几次试听课, 总时长大约为 35 个小时, 大约从教学方式为线上网课, 所选教材为《美国数学竞赛指南。



In the section, we will study four kinds of arithmetic functions(算术函数/数论函数). They are

- $\tau(n)$ = the number of positive divisors of n.(除数函数)
- $\sigma(n)$ = the sum of the positive divisors of n.(除数和函数)
- $\phi(n)$ = the number of positive integers less than n that are relatively prime to n.(欧拉函数)
- $\nu_p(n)$ = the exponent of the largest power of p.(n 唯一因子分解中 p 的幂次)

$\sigma(n)$

If the positive integer n has the prime factorization $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_m^{k_m}$, then the sum of the positive divisors of n is given by

$$\sigma(n) = \frac{p_1^{k_1+1} - 1}{p_1 - 1} \cdot \frac{p_2^{k_2+1} - 1}{p_2 - 1} \cdot \frac{p_3^{k_3+1} - 1}{p_3 - 1} \cdots \frac{p_m^{k_m+1} - 1}{p_m - 1}$$

$\tau(n)$

Theorem

If the positive integer n has the prime factorization $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_m^{k_m}$, then the number of positive divisors of n is given by

$$\tau(n) = (k_1 + 1)(k_2 + 1) \cdots (k_m + 1).$$

Exercise

How many ordered positive integer pairs (a, b) satisfying $ab = 100$?
有多少个正整数 (a, b) 对满足 $ab = 100$.

Proposition

$\tau(n)$ is odd if and only if n is a perfect quare.

$\tau(n)$ 是奇数当且仅当 n 是完全平方数.

Proposition

$\tau(n)$ is odd if and only if n is a perfect quare.
$\tau(n)$ 是奇数当且仅当 n 是完全平方数.

Proof: A natural number n has an odd number of divisors exactly when n is a perfect square. Indeed, if n has prime factorization $p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_m^{k_m}$, then $\tau(n) = (k_1+1)(k_2+1)\cdots(k_m+1)$ is odd only if each of its factors is odd, and this happens exactly when each of the exponents $k_1, k_2, \ldots k_m$ are even. That means that n is a perfect square.

$\phi(n)$

Theorem

If the positive integer n has prime factorization $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_m^{k_m}$, then the number of positive integers less than n that are relatively prime to n is given by

$$\begin{aligned}\phi(n) &= n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_m}\right)\\ &= \left(p_1^{k_1}-p_1^{k_1-1}\right)\left(p_2^{k_2}-p_2^{k_2-1}\right)\cdots\left(p_m^{k_m}-p_m^{k_m-1}\right)\end{aligned}$$

Example

For example, $\phi(7) = 6, \phi(10) = 4$, and $\phi(p) = p - 1$ if p is prime.

floor function(高斯函数)

Definition

$\lfloor x \rfloor =$ 不超过 x 的最大整数.

Proposition

m 是一个正整数, $1, 2, 3 \ldots, n$ 中恰有 $\left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor$ 个数被 m 整除.

Example

$1, 2, 3 \ldots, 100$ 中恰有 $\left\lfloor \frac{100}{3} \right\rfloor = 33$ 个数被 3 整除.

Theorem

For any prime number p and any positive integer n, let $\nu_p(n)$ be the exponent of the largest power of p that divides n (that is, the p-adic valuation of n). Then

$$\nu_p(n!) = \sum_{i=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor$$

where $\lfloor x \rfloor$ is the floor function.

Exercise

Question (AMC 8, 2017-19)

For any positive integer M, the notation $M!$ denotes the product of the integers 1 through M . What is the largest integer n for which 5^n is a factor of the sum $98! + 99! + 100!$?

计算 $\nu_5(98! + 99! + 100!)$.

Question (AMC 8, 2017-19)

For any positive integer M, the notation $M!$ denotes the product of the integers 1 through M . What is the largest integer n for which 5^n is a factor of the sum $98! + 99! + 100!$?

计算 $\nu_5(98! + 99! + 100!)$.

Proof: Factoring out $98! + 99! + 100!$, we have $98!(1 + 99 + 99 \times 100)$, which is $98!(10000)$. And 98! has $\left\lfloor \frac{98}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{98}{25} \right\rfloor = 19 + 3 = 22$ factors of 5.

Question (AMC 8, 2018-18)

How many positive factors does 23,232 have?

23232 有多少个正因子?

Question (AMC 10, 2005A-15)

How many positive cubes divide 3!5!7!?

有多少个完全立方数 (形如 $n = k^3, k \geq 1$) 能整除 3!5!7!.

Question

What's is the largest power of 2 that divides the number $K = 75! - 71!$.

计算 $\nu_2(75! - 71!)$.

实习的收获

经过这十几节课 AMC8 的教学经历, 我主要有以下几点收获:

1. 教学时, 要使用通俗易懂的语言讲解。尤其是对抽象能力比较差的学生, 对他们而言讲解一个公式用一堆符号和字母来叙述不如使用具体的数字来讲。
2. 制作课件时, 如何合理安排习题和讲课的内容, 如何避免内容制作过多或者偏少的问题。要根据不同学生的能力来制作课件, 如果内容过难容易让学生产生畏难心理, 望而生畏, 从而打击学生学习积极性。
3. 与家长沟通时, 要注意沟通方式, 及时消除误解, 不要因为教学上一些细节为向家长解释清楚从而退费。比如, 家长可能会对教学方式是不是过于抽象, 以及解法是否简单易懂, 以及内容安排是否合理产生疑问, 这个时候要及时和家长沟通来解决。