Euler-Maclaurin 公式及其简单应用

王尔卓

1 Bernoulli 数与 Bernoulli 多项式

1.1 递推公式

考虑函数

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x} & x \neq 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

其在 $\mathbb{R}$ 上有幂级数展开，

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}$$

且首项不为 0，因此 $\dfrac{1}{f(x)}$ 在 0 的某个邻域内也有幂级数展开，设为：

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n$$

我们将 B_n 称为 Bernoulli 数,Bernoulli 数有如下递推公式：$B_0 = 1, B_1 = -\frac{1}{2}$,$B_n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} B_j$
Proof: 由定义：

$$\begin{aligned} x &= (\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n)(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{i+j=n} \frac{B_i}{i!} \frac{x^{i+j}}{j!} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{i+j=n} \frac{B_i}{n!} \binom{n}{i} x^n \end{aligned}$$

比较两端系数得到：

$$B_n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} B_j$$

1.2 奇数点取值

令

$$g(x) = \frac{x}{e^x - 1}$$

$$g(x) - g(-x) = \frac{x}{e^x - 1} - \frac{-x}{e^{-x} - 1} = -x$$

因此

$$g(x) + \frac{x}{2}$$

为偶函数，进而

$$(\frac{1}{f(x)})^{(3)}$$

为奇函数，从而

$$B_{2n+1} = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}_{>0}$$

1.3 Bernoulli 多项式

我们再给出 Bernoulli 多项式的定义：

$$\begin{aligned}
&B_n(x)\text{以 1 为周期} \\
&B_0(x) = 1, \forall x \in [0, 1) \\
&B'_{n+1}(x) = (n+1)B_n(x) \quad \forall n \geq 0 \\
&\int_0^1 B_n(x)\mathrm{d}x = 0 \quad \forall n \geq 1
\end{aligned}$$

则在 $t = 0$ 的某个去心邻域内有：

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} t^n \quad \text{收敛于} \quad \frac{te^{tx}}{e^t - 1} \quad \forall x \in [0, 1) \tag{1}$$

Proof: 计算易得：

$$B_1(x) = \{x\} - \frac{1}{2}$$

$$B_2(x) = \{x\}^2 - \{x\} + \frac{1}{6}$$

$$B_3(x) = \{x\}^3 - \frac{2}{3}\{x\}^2 + \frac{1}{2}\{x\}$$

我们想归纳证明：

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k(0) \{x\}^{n-k} \tag{2}$$

假设对所有 $\leq n$ 的数成立，则对 $n + 1$ 有

$$B'_{n+1}(x) = (n+1) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k(0) \{x\}^{n-k}$$

对上式在 0 到 x 上积分有：

$$
\begin{aligned}
B_{n+1}(x) - B_{n+1}(0) &= \int_0^x (n+1)B_n(x) \\
&= \sum_{k=0}^{n} (n+1)\frac{n!}{k!(n-k)!} B_k(0)\left\{x\right\}^{n-k+1} \frac{1}{n-k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n} B_k(0)\binom{n+1}{k}\left\{x\right\}^{n-k+1}
\end{aligned} \tag{3}
$$

进而:

$$
B_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n+1} B_k(0)\binom{n+1}{k}\left\{x\right\}^{n-k+1}
$$

其次我们想证明:

$$
|B_n(0)| \leq n! \tag{4}
$$

(3) 式在 0 到 1 上积分有:

$$
0 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k(0)\frac{1}{n-k+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} B_k(0)\frac{1}{n+1}
$$

从而:

$$
(n+1)B_n(0) = \sum_{k=0}^{n-1} -\binom{n+1}{k} B_k(0)
$$

我们对 (5) 采用归纳法，不难验证 $n = 1, 2, 3$ 时结论成立, 假设对所有 $\leq n-1$ 的数成立，则对 n 有

$$
\begin{aligned}
|(n+1)B_n(0)| = |\sum_{k=0}^{n-1} -\binom{n+1}{k} B_k(0)| &\leq 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n+1}{k} k! \\
&\leq 1 + (n+1)! \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \\
&\leq 1 + (n+1)!(e-2) \leq (n+1)!
\end{aligned}
$$

进而:

$$
|B_n(0)| \leq n!
$$

通过上面的结论我们进一步归纳证明:

$$
|B_n(x)| \leq n \times n! \tag{5}
$$

$n = 1, 2, 3$ 显然成立，假设对所有 $\leq n$ 的数成立，由 (4)

$$
|B_{n+1}(x)| \leq (n+1)! + (n+1)n \times n! \leq (n+1)(n+1)!
$$

有了上述对 Bernoulli 数和 Bernoulli 多项式的上界估计，我们来证明原命题，考虑任意的 $|t| \leq \frac{1}{2}$, 由 Weierstrass 判别法，

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} t^n$$

在 $x \in \mathbb{R}$ 上一致收敛, 因此可以逐项积分，设和函数为 $f(x)$

又因为

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n'(x)}{n!} t^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nB_{n-1}(x)}{n!} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} t^{n+1}$$

因此可以逐项求导，且

$$f'(x) = tf(x)$$

解微分方程组可知:

$$f(x) = e^{tx} g(t)$$

两端对 x 在 0 到 1 上积分有:

$$g(t)h(t) = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{B_n(x)}{n!} t^n = 1$$

$$h(t) = \begin{cases} \dfrac{e^t - 1}{t} & t \neq 0 \\ 1 & t = 0 \end{cases}$$

因此

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{te^{tx}}{e^t - 1} & \forall t \in [-\frac{1}{2}, 0) \cup (0, \frac{1}{2}] \\ 1 & t = 1 \end{cases} \tag{6}$$

在 (7) 中令 $x = 0$ 可以得到多项式满足

$$B_n(0) = B_n$$

其中 B_n 为 Bernoulli 数

2 Euler-Maclaurin 公式

Theorem 1. $a, b \in \mathbb{Z}$，$f \in C^{k+1}([a,b])$,$k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, 则

$$\sum_{a<n\leq b} f(n) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^j \frac{B_j}{j!} (f^{(j-1)}(a) - f^{(j-1)}(b)) \\ + \frac{(-1)^k}{(k+1)!} \int_a^b B_{k+1}(x) f^{(k+1)}(x)\mathrm{d}x \tag{7}$$

Proof: 由欧拉求和公式, 并不断分部积分

$$\begin{aligned}
\sum_{a<n\leq b} f(n) &= \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b f'(x)B_1(x)\mathrm{d}x + (f(a)-f(b))B_1(0) \\
&= \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_a^b B_2(x)f^{(2)}(x)\mathrm{d}x + (f(a)-f(b))B_1(0) \\
&+ \frac{1}{2}(f'(b)-f'(a))B_2(0) \\
&= \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \frac{1}{2}(\frac{B_3(b)f^{(2)}(b)-B_3(a)f^{(2)}(a)}{3} - \int_a^b \frac{B_3(x)}{3}f^{(3)}(x)\mathrm{d}x) \\
&+ (f(a)-f(b))B_1(0) + \frac{1}{2}(f'(b)-f'(a))B_2(0) \\
&= \cdots = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \sum_{j=1}^{k+1}(-1)^j\frac{B_j}{j!}(f^{(j-1)}(a)-f^{(j-1)}(b)) \\
&+ \frac{(-1)^k}{(k+1)!}\int_a^b B_{k+1}(x)f^{(k+1)}(x)\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

3 调和级数部分和估计

Theorem 2. 当 $N \geq 10$ 时，存在 $\theta \in [0,1]$，使得：

$$\sum_{n\leq N}\frac{1}{n} = \log N + \gamma + \frac{1}{2N} - \frac{1}{2N^2} + \frac{\theta}{60N^4} \tag{8}$$

Proof: 令

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

，由欧拉麦克劳林公式：

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leq n\leq N}\frac{1}{n} &= 1 + \log N + \frac{1}{2}(\frac{1}{N}-1) - \frac{1}{12}(\frac{1}{N^2}-1) + \frac{1}{120}(\frac{1}{N^4}-1) \\
&+ \int_1^N -\frac{1}{x^5}B_4(x)\mathrm{d}x \\
&= 1 + \log N + \frac{1}{2}(\frac{1}{N}-1) - \frac{1}{12}(\frac{1}{N^2}-1) + \frac{1}{120}(\frac{1}{N^4}-1) \\
&+ \int_1^{+\infty} -\frac{1}{x^5}B_4(x)\mathrm{d}x + \int_N^{+\infty}\frac{1}{x^5}B_4(x)\mathrm{d}x \\
&= 1 + \log N + \frac{1}{2}(\frac{1}{N}-1) - \frac{1}{12}(\frac{1}{N^2}-1) + \frac{1}{120}(\frac{1}{N^4}-1) \\
&+ \int_1^{+\infty} -\frac{1}{x^5}B_4(x)\mathrm{d}x + \int_N^{+\infty}\frac{1}{x^5}(\{x\}^4 - 2\{x\}^3 + \{x\}^2 - \frac{1}{30})\mathrm{d}x \\
&= \log N + \frac{1}{2N} - \frac{1}{12N^2} + \frac{69}{120} + \int_1^{+\infty} -\frac{1}{x^5}B_4(x)\mathrm{d}x + \int_N^{+\infty}\frac{1}{x^5}(\{x\}^4 - 2\{x\}^3 + \{x\}^2)\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

又因为

$$
\begin{aligned}
0 &\le \int_N^{+\infty} \frac{1}{x^5}(\{x\}^4 - 2\{x\}^3 + \{x\}^2)\mathrm{d}x = \sum_{n=N}^{+\infty} \int_n^{n+1} \frac{\{x\}^2(\{x\}-1)^2}{x^5}\mathrm{d}x \\
&\le \sum_{n=N}^{+\infty} \frac{1}{30n^5}
\end{aligned}
$$

考虑当 $x \ge 10$ 时

$$
\begin{aligned}
g(x) &= x((x+1)^4 - x^4) - 2(x+1)^4 \\
&= 2x^4 - 2x^3 - 8x^2 - 7x - 2 \ge 0
\end{aligned}
$$

因此

$$
\frac{1}{x^5} \le \frac{1}{2}(\frac{1}{x^4} - \frac{1}{(x+1)^4}) \tag{9}
$$

由 (10)，当 $N \ge 10$ 时

$$
\sum_{n=N}^{+\infty} \frac{1}{30n^5} \le \sum_{n=N}^{+\infty} \frac{1}{60}(\frac{1}{n^4} - \frac{1}{(n+1)^4}) \le \frac{1}{60N^4} \tag{10}
$$

因此当 $N \ge 10$ 时，存在 $\theta \in [0,1]$，使得：

$$
\int_N^{+\infty} \frac{1}{x^5}(\{x\}^4 - 2\{x\}^3 + \{x\}^2)\mathrm{d}x = \frac{\theta}{60N^4}
$$

同时不难看出：

$$
\frac{69}{120} + \int_1^{+\infty} -\frac{1}{x^5}B_4(x)\mathrm{d}x = \gamma
$$

其中 γ 为欧拉常数

因此我们得到：当 $N \ge 10$ 时，存在 $\theta \in [0,1]$，使得：

$$
\sum_{n \le N} \frac{1}{n} = \log N + \gamma + \frac{1}{2N} - \frac{1}{12N^2} + \frac{\theta}{60N^4} \tag{11}
$$

4 Riemann Zeta 函数的延拓

4.1 延拓的手段

Theorem 3. $k \in \mathbb{Z}_{>0}, \forall s > 1$

$$
\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2} + \sum_{j=2}^{k+1} \binom{s+j-2}{j-1} \frac{B_j(0)}{j} - \binom{s+k}{k+1} \int_1^{+\infty} \frac{B_{j+1}(x)}{x^{k+s+1}}\mathrm{d}x \tag{12}
$$

并由此说明可以将 ζ 函数延拓为 $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ 上的函数

Proof: 设

$$f(x)=\frac{1}{x^s}\quad \forall s>1$$

对 $f(x)$ 求 k 阶导数:

$$f^{(k)}(x)=(-1)^k\binom{s+k-1}{k}k!\,x^{-(s+k)}\quad \forall k\in\mathbb{Z}_{>0}$$

对 $f(x)$ 应用欧拉麦克劳林公式:

$$\begin{aligned}\sum_{n\le N}\frac{1}{n^s}&=1+\sum_{1<n\le N}\frac{1}{n^s}=1+\int_1^N\frac{1}{x^s}\mathrm{d}x+\frac{1}{2}(\frac{1}{N^s}-1)\\&+\sum_{j=2}^{k+1}(-1)^j\frac{B_j(0)}{j!}(j-1)!\binom{s+j-2}{j-1}(-1)^{(j-1)}(\frac{1}{N^s}-1)\\&+\int_1^N(-1)^k\frac{1}{(k+1)!}B_{k+1}(x)(-1)^{(k+1)}(k+1)!\binom{s+k}{k+1}x^{-(x+k+1)}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{s-1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{(s-1)N^{s-1}}+\sum_{j=2}^{k+1}\frac{B_j(0)}{j}\binom{s+j-2}{j-1}(1-\frac{1}{N^s})\\&-\int_1^N B_{k+1}(x)\binom{s+k}{k+1}x^{-(x+k+1)}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

令 $n\to\infty$ 有:

$$\zeta(s)=\frac{1}{s-1}+\frac{1}{2}+\sum_{j=2}^{k+1}\binom{s+j-2}{j-1}\frac{B_j(0)}{j}-\binom{s+k}{k+1}\int_1^{+\infty}\frac{B_{j+1}(x)}{x^{k+s+1}}\mathrm{d}x \tag{13}$$

根据 Bernoulli 多项式的周期性，由 *Dirchlet* 判别法，右端

$$\int_1^{+\infty}\frac{B_{j+1}(x)}{x^{k+s+1}}\mathrm{d}x$$

在 $s+k>-1$ 均收敛，由 k 的任意性，可将 ζ 函数延拓为 $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ 上的函数

4.2 平凡零点的判定

在上述 ζ 函数的延拓中，试证明全体负偶数点取值为 0，即

$$\zeta(-2n)=0\quad \forall n\in\mathbb{Z}_{>0}$$

Proof: 取 $k = 2n+1$，应用 (1) 式以及 $B_{2n+1} = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}_{>0}$ 我们得到:

$$
\begin{aligned}
\zeta(-2n) &= \frac{1}{-2n-1} + \frac{1}{2} + \sum_{j=2}^{2n+2} \binom{-2n-2+j}{j-1} \frac{B_j}{j} \\
&= -\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2} + \sum_{j=2}^{2n+2} \frac{1}{2n+1} \binom{2n+1}{j} (-1)^{(j-1)} B_j \\
&= -\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2n+1} \sum_{j=2}^{2n+1} \binom{2n+1}{j} B_j \\
&= -\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2n+1} (B_{2n+1} - B_0 - (2n+1) B_1) \\
&= 0
\end{aligned}
$$