

Pendahuluan

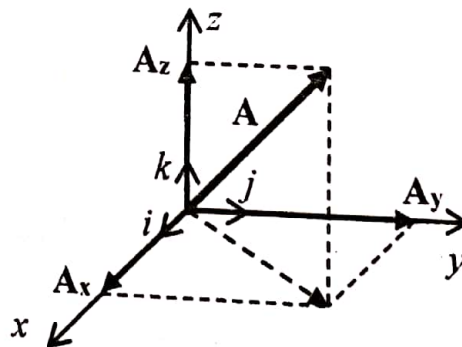
Pada pembahasan kali ini vektor dinyatakan dalam bentuk koordinat kartesian. Vektor yang dinyatakan dalam koordinat kartesian mempunyai keuntungan sendiri yaitu, mudah untuk melakukan operasi penjumlahan, pengurangan, perkalian dengan skalar ataupun perkalian antar vektor baik perkalian titik maupun perkalian silang. Banyak sekali permasalahan dalam fisika yang menggunakan operasi ini contohnya adalah momentum merupakan perkalian skalar dengan vektor. Usaha merupakan contoh operasi perkalian titik antara dua vektor. Gaya Lorentz adalah contoh kasus perkalian antara dua vektor.

2.1 Vektor Dalam Koordinat Kartesian

Dalam sistem koordinat kartesius, sumbu x , y dan z pada arah positif mempunyai vektor satuan i , j , k . Sehingga penulisan vektor A dalam ruang 3-D dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$A = A_x i + A_y j + A_z k$$

2-1



Gambar 2-1: Vektor A dinyatakan dalam koordinat kartesius

A_x adalah komponen vektor A dalam arah sumbu- x
 A_y adalah komponen vektor A dalam arah sumbu- y
 A_z adalah komponen vektor A dalam arah sumbu- z

Panjang anak panah yang menggambarkan vektor A disebut panjang, magnitudo atau besar dari A (atau sering ditulis sebagai $|A|$ atau A). Sesuai dalil Pythagoras: Besar vektor A adalah :

$$|A| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \quad 2-2$$

Vektor satuan " a " adalah vektor yang besarnya 1 arahnya sama dengan arah vektor A dan dinyatakan sebagai

$$a = \frac{A}{|A|} \quad 2-3$$

Contoh 2-1

Seekor Kuda ditarik oleh dua orang dengan gaya masing-masing 120 N dan 80N. Gaya pertama membentuk sudut 60° terhadap sumbu-x positif dan gaya kedua membentuk sudut 75° terhadap sumbu-x negative. Tentukan :

- Gaya tunggal yang ekuivalen dengan kedua gaya tersebut
- Gaya yang dikerjakan oleh orang ketiga, yang membuat resultan gaya menjadi nol

Jawab:

(a) Kita mencari Resultan $R = F_1 + F_2$

$$F_{1x} = F_1 \cos 60^\circ = (120 \text{ N}) (0.50) = 60 \text{ N}$$

$$F_{1y} = F_1 \sin 60^\circ = (120 \text{ N}) (0.866) = 104 \text{ N}$$

$$F_1 = 60 \text{ N } i + 104 \text{ N } j$$

$$F_{2x} = -F_2 \cos 75^\circ = -(80 \text{ N}) (0.260) = -20.8 \text{ N}$$

$$F_{2y} = F_2 \sin 75^\circ = (80 \text{ N}) (0.966) = 77.3 \text{ N}$$

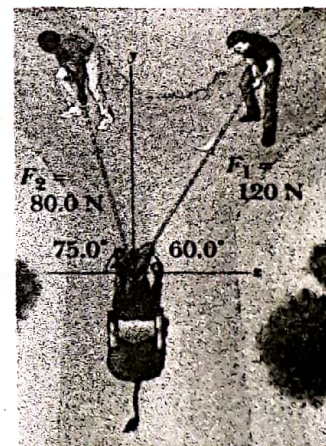
$$F_2 = -20.8 \text{ N } i + 77.3 \text{ N } j$$

$$R = F_1 + F_2$$

$$= (60 \text{ N } i + 104 \text{ N } j) + (-20.8 \text{ N } i + 77.3 \text{ N } j)$$

$$= (60 - 20.8) \text{ N } i + (104 + 77.3) \text{ N } j$$

$$= 39.2 \text{ N } i + 181.3 \text{ N } j$$



Besar resultan : $R = \sqrt{(39,2)^2 + (181,3)^2} = 186.5 \text{ N}$

Arah Resultan terhadap sumbu-x positif adalah θ :

$\tan \theta = R_y / R_x = 181.3 / 39.2 = 4.65 \quad \theta = 78^\circ$

(b) Agar resultan gaya menjadi nol maka :

$$R = F_1 + F_2 + F_3 = 0$$

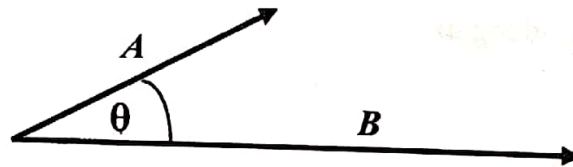
$$F_3 = -F_1 - F_2 = -(F_1 + F_2) = -(39.2 \text{ N } i + 181.3 \text{ N } j)$$

Arah F_3 terhadap sumbu-x positif adalah : $\beta = 180^\circ + 78^\circ = 258^\circ$

2.2 Operasi Vektor

Misalkan diketahui dua buah vektor A dan B yang keduanya saling membentuk sudut θ :

$$A = A_x i + A_y j + A_z k \quad \text{dan} \quad B = B_x i + B_y j + B_z k$$



Gambar 2-2: Dua buah vektor A dan B saling membentuk sudut θ

2.2.1 Penjumlahan dan Pengurangan Vektor

Penjumlahan/pengurangan vektor dalam bentuk kartesian dilakukan dengan cara menjumlahkan/mengurangkan komponen-komponen vektor yang sejenis.

$$A + B = (A_x + B_x)i + (A_y + B_y)j + (A_z + B_z)k \quad 2-4(a)$$

$$A - B = (A_x - B_x)i + (A_y - B_y)j + (A_z - B_z)k \quad 2-4(b)$$

Contoh 2-2

Sebuah perahu berlayar di lautan lepas dengan kecepatan $v_P = (5i + 10j - 6k) \text{ m/s}$. Gelombang air laut saat itu mempunyai kecepatan $v_A = (10i - 5j + 4k) \text{ m/s}$. Hitunglah :

- a) $v_P + v_A$ b) $v_P - v_A$

Jawab:

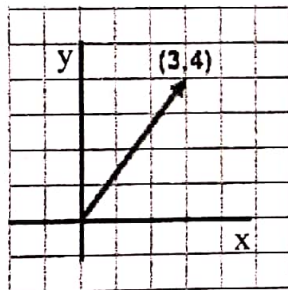
$$a) v_P + v_A = (5+10)i + (10-5)j + (-6+4)k = (15i + 5j - 2k) \text{ m/s}$$

$$b) v_P - v_A = (5-10)i + (10+5)j + (-6-4)k = (-5i + 15j - 10k) \text{ m/s}$$

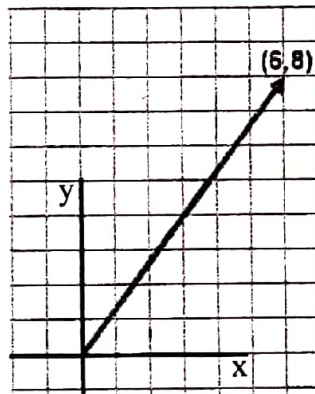
2.2.2 Perkalian Vektor Dengan Skalar

Jika k suatu skalar bilangan riil, A suatu vektor, maka perkalian skalar kA menghasilkan suatu vektor yang panjangnya $|k|$ kali panjang A , dan arahnya sama dengan arah A bila k positif dan berlawanan dengan A bila k negatif. Bila $k = 0$ maka $kA = 0$, disebut vektor nol yaitu vektor yang titik awal dan titik ujungnya berimpit. Misalkan diketahui vektor : $A = 3i + 4j$, maka $2A = 6i + 8j$.

$$A = 3i + 4j$$



$$2A = 6i + 8j$$



Contoh 2-3

Momentum adalah besaran vektor yang didefinisikan oleh $P = mv$. Sebuah massa 10 kg bergerak dengan kecepatan $v = (5i + 6j - 20k) \text{ m/s}$. Tentukan momentum yang dimiliki oleh massa tersebut.

Jawab:

$$\begin{aligned} P &= mv \\ &= 10(5i + 6j - 20k) \\ &= (50i + 60j - 200k) \text{ kg.m/s} \end{aligned}$$

2.2.3 Perkalian Titik (Skalar) Dari Dua Buah Vektor

Perkalian titik antar vektor A dan B ditulis $(A \cdot B)$ didefinisikan sebagai besaran skalar yang nilainya sama dengan besarnya vektor A kali besarnya vektor B kali cosinus sudut θ , di mana θ adalah sudut yang dibentuk oleh vektor A dan B .

$$A \cdot B = |A||B|\cos\theta$$

2-5(a)

Akan sangat berguna untuk menyatakan perkalian titik antara dua buah vektor dengan komponen-komponennya. Berdasarkan definisi perkalian titik didapatkan

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = |\mathbf{i}| |\mathbf{i}| \cos 0^\circ = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1 \text{ dan sama dengan } \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = 1, \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1$$

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = |\mathbf{i}| |\mathbf{j}| \cos 90^\circ = 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0 \text{ dan sama dengan } \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = 0$$

Maka

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}) \cdot (B_x \mathbf{i} + B_y \mathbf{j} + B_z \mathbf{k})$$

Atau

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

2-5(b)

Contoh 2-4

Usaha didefinisikan sebagai $W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}$ dimana \mathbf{F} adalah gaya dan \mathbf{r} adalah perpindahan. Jika terdapat sebuah gaya $\mathbf{F} = (15\mathbf{i} + 10\mathbf{j} - 5\mathbf{k})$ N bekerja pada sebuah benda, sehingga benda mengalami perpindahan $\mathbf{r} = (5\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 20\mathbf{k})$ m, berapa usaha yang dilakukan oleh gaya tersebut dan berapa sudut yang dibentuk oleh gaya dan perpindahan ?

Jawab:

$$\begin{aligned} W &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{r} \\ &= (15\mathbf{i} + 10\mathbf{j} - 5\mathbf{k}) \cdot (5\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 20\mathbf{k}) \\ &= (15 \cdot 5 + 10 \cdot 6 - 5 \cdot 20) \\ &= (75 + 60 - 100) \\ &= 35 \text{ Joule} \end{aligned}$$

usaha yang dilakukan oleh gaya tersebut 35 Joule

$$|\mathbf{F}| = \sqrt{15^2 + 10^2 + (-5)^2} = \sqrt{350}$$

$$|\mathbf{r}| = \sqrt{5^2 + 6^2 + 20^2} = \sqrt{461}$$

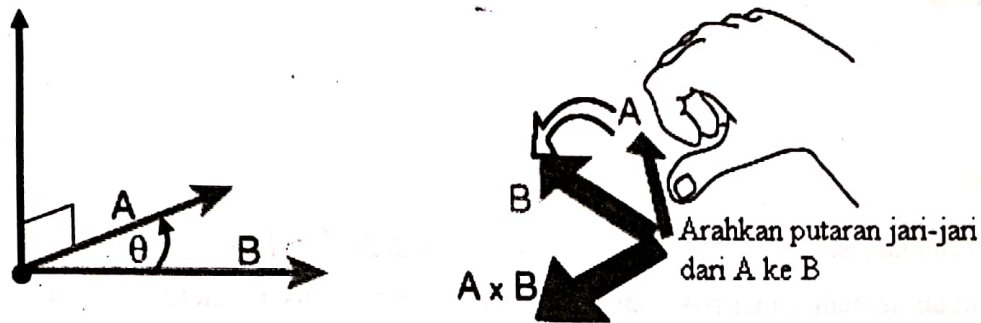
$$\cos \theta = \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{r}}{|\mathbf{F}| |\mathbf{r}|}$$

$$\rightarrow \cos \theta = \frac{35}{\sqrt{350} \cdot \sqrt{461}}$$

$$\rightarrow \theta = 85^\circ$$

sudut yang dibentuk oleh gaya dan perpindahan adalah $\theta = 85^\circ$

2.2.4 Perkalian Vektor Dari Dua Buah Vektor



Gambar 2-3: Kaidah tangan kanan untuk menentukan arah vektor $A \times B$. Vektor $A \times B$ arahnya tegak lurus dengan vektor A maupun B

Kaidah tangan kanan

Perhatikan Gambar 2-3, Arah perkalian vektor bisa divisualisasi menggunakan tangan kanan. Jika jari-jari tangan kanan diputar sedemikian rupa sehingga berputar dari vektor A ke vektor B , maka ibu jari menunjukkan arah dari hasil perkalian tersebut.

Perkalian vektor antara vektor A dan B menghasilkan vektor yang besarnya

$$|A \times B| = |A||B|\sin\theta \quad 2-6(a)$$

yang arahnya tegak lurus bidang yang dibentuk oleh vektor A dan B sesuai kaidah tangan kanan. Dengan demikian untuk vektor yang saling sejajar atau sama, maka

$$A \times B = 0 \text{ jika } A \text{ dan } B \text{ paralel atau anti paralel}$$

$$A \times A = 0 \text{ untuk sebarang } A$$

Berdasarkan fakta tersebut maka diperoleh aturan yang sangat berguna yaitu bahwa

$$i \times i = j \times j = k \times k = 0$$

dan

$$i \times j = k, \quad j \times k = i, \quad k \times i = j.$$

$$j \times i = -k, \quad k \times j = -i, \quad i \times k = -j.$$

Perkalian silang antara dua vektor dapat dilakukan dengan cara determinan sebagai berikut

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

2-6(b)

Contoh 2.5

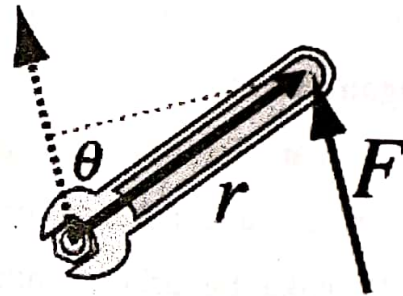
Torsi didefinisikan sebagai : $\tau = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$. Bila sebuah gaya $\mathbf{F} = (6 \mathbf{i} + 10 \mathbf{k}) \text{ N}$ dipakai untuk memutar sebuah kunci pas, dan posisi baut terhadap titik tangkap gaya adalah $\mathbf{r} = (-4 \mathbf{i} + 10 \mathbf{j}) \text{ m}$. Hitung torsi yang dilakukan gaya tersebut dan hitung pula sudut θ yang dibentuk oleh gaya dan posisi tersebut.

Jawab:

$$\tau = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -4 & 10 & 0 \\ 6 & 0 & 10 \end{vmatrix}$$

$\begin{matrix} (-) & (-) & (-) \\ \nearrow & \nearrow & \nearrow \\ \searrow & \searrow & \searrow \\ (+) & (+) & (+) \end{matrix}$

$$\tau = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -4 & 10 & 0 \\ 6 & 0 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} \\ -4 & 10 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{k} \\ -4 & 0 \\ 6 & 10 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{vmatrix}$$



$$\tau = [10.10 \mathbf{i} + 0.6 \mathbf{j} + (-4).0 \mathbf{k}] - [6.10 \mathbf{k} + 0.0 \mathbf{i} + 10.(-4) \mathbf{j}]$$

$$\tau = (100 \mathbf{i} + 40 \mathbf{j} - 60 \mathbf{k}) \text{ N.m}$$

Menghitung sudut θ :

$$|F| = \sqrt{6^2 + 10^2} = \sqrt{136} \text{ N}$$

$$|r| = \sqrt{(-4)^2 + 10^2} = \sqrt{116} \text{ m}$$

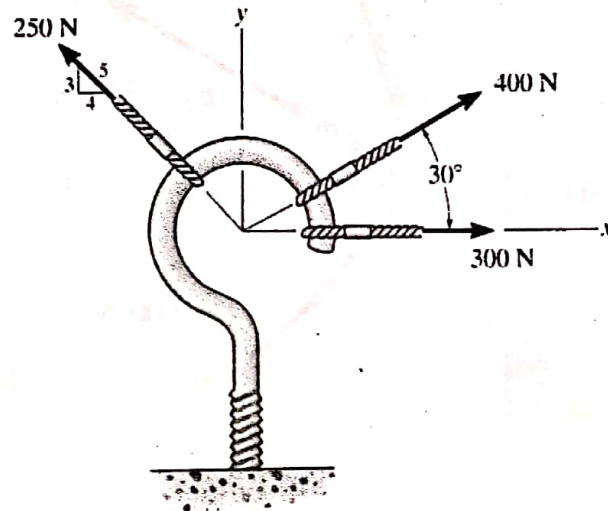
$$|\tau| = |\mathbf{r} \times \mathbf{F}| = \sqrt{100^2 + 40^2 + 60^2} = \sqrt{15200} \text{ Nm}$$

$$\sin \theta = \frac{|\mathbf{r} \times \mathbf{F}|}{|F||r|} = \frac{\sqrt{15200}}{\sqrt{136} \times \sqrt{116}}$$

$$\rightarrow \theta = 78,98^\circ$$

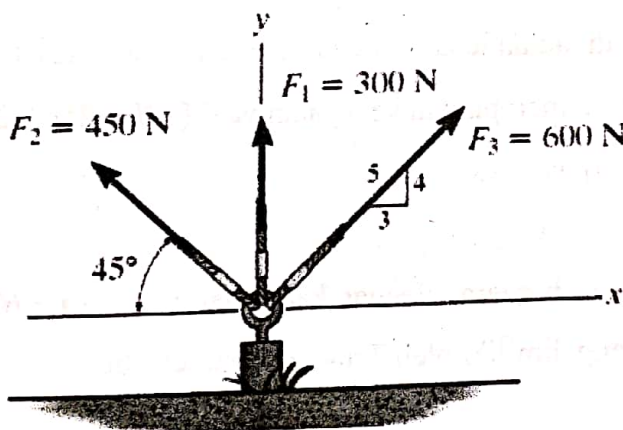
Soal-Soal Latihan

1. Tiga buah gaya $F_1 = 250\text{ N}$, $F_2 = 400\text{ N}$ dan $F_3 = 300\text{ N}$, bekerja pada sebuah sekrup. Kerangka acuan sumbu- x dan sumbu- y tampak seperti di gambar berikut.



Tentukan :

- Komponen tiap-tiap gaya dalam arah sumbu- x dan sumbu- y .
 - Resultan ketiga gaya tersebut, besar dan arahnya terhadap sumbu- x positif.
2. Sebuah kayu yang tertancap ditanah ditarik oleh tiga buah seperti gambar berikut

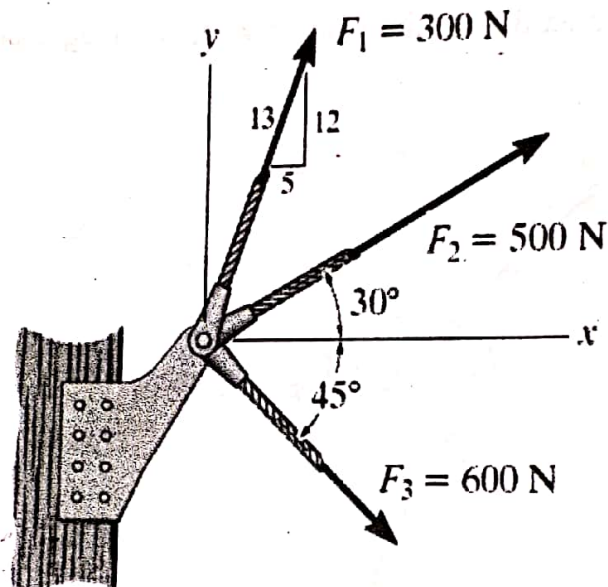


Tentukan :

- Komponen tiap-tiap gaya dalam arah sumbu- x dan sumbu- y .
- Resultan ketiga gaya tersebut, besar dan arahnya terhadap sumbu- x positif.
- Jika Gaya tancap kayu ke tanah adalah $F = (120i + 130j) \text{ N}$, apakah kayu tersebut

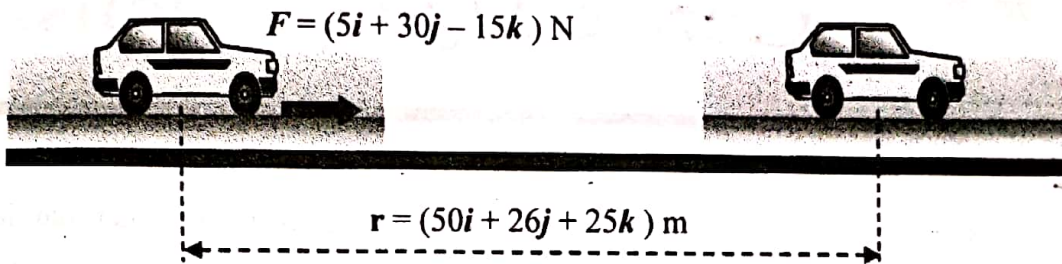
lepas dari tanah atau tidak ?

3. Sebuah lempeng besi yang ditempelkan pada dinding kayu ditarik oleh tiga buah gaya seperti gambar berikut.



Tentukan :

- Komponen tiap-tiap gaya dalam arah sumbu- x dan sumbu- y .
 - Resultan ketiga gaya tersebut, besar dan arahnya terhadap sumbu- x positif.
 - Jika Gaya lekat lempeng besi dan kayu adalah $F = (9000\mathbf{i} + 4300\mathbf{j}) \text{ N}$, apakah lempeng besi tersebut lepas dari kayu atau tidak ?
4. Sebuah perahu berlayar di lautan lepas dengan kecepatan $\mathbf{v}_P = (15\mathbf{i} + 14\mathbf{j} - 16\mathbf{k}) \text{ m/s}$. Gelombang air laut saat itu mempunyai kecepatan $\mathbf{v}_A = (18\mathbf{i} - 25\mathbf{j} + 24\mathbf{k}) \text{ m/s}$. Hitunglah : a) $\mathbf{v}_P + \mathbf{v}_A$ b) $\mathbf{v}_P - \mathbf{v}_A$
5. Sebuah Truk massa 100 kg bergerak dengan kecepatan $\mathbf{v} = (15\mathbf{i} + 60\mathbf{j} - 2\mathbf{k}) \text{ m/s}$. Tentukan momentum yang dimiliki oleh Truk tersebut tersebut.
6. Sebuah gaya $\mathbf{F} = (5\mathbf{i} + 30\mathbf{j} - 15\mathbf{k}) \text{ N}$ digunakan untuk menarik mobil, sehingga mobil bergeser sejauh $\mathbf{r} = (50\mathbf{i} + 26\mathbf{j} + 25\mathbf{k}) \text{ m}$, berapa usaha yang dilakukan oleh gaya tersebut dan berapa sudut yang dibentuk oleh gaya dan perpindahan itu ?



7. Sebuah gaya $\mathbf{F} = (2\mathbf{i} + 3\mathbf{j})$ N melakukan usaha dengan titik tangkapnya berpindah menurut $\mathbf{r} = (4\mathbf{i} + A\mathbf{j})$ m dan vektor \mathbf{i} dan \mathbf{j} berturut-turut adalah vektor satuan yang searah dengan sumbu- x dan sumbu- y pada koordinat kartesian. Bila usaha itu bernilai 26 J, maka nilai A sama dengan...
8. Diberikan dua buah vektor masing-masing:
 $\mathbf{A} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ dan $\mathbf{B} = 7\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$
 Tentukan hasil dari $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$, $|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|$, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, dan sudut antara vektor \mathbf{A} dan \mathbf{B}
9. Sebuah muatan listrik q yang bergerak dengan kecepatan \mathbf{v} didalam medan magnet \mathbf{B} akan mengalami gaya $\mathbf{F} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$. Bila besar muatan $q = 2$ C, bergerak dengan kecepatan $\mathbf{v} = (6\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 10\mathbf{k})$ m/s didalam medan magnet $\mathbf{B} = (-4\mathbf{i} + 10\mathbf{j})$ m, tentukan gaya yang dialami oleh muatan itu. dan hitung pula sudut θ yang dibentuk oleh kecepatan \mathbf{v} dan medan magnet \mathbf{B} .

