VEKTOR

MATA KULIAH: MATRIKS DAN RUANG VEKTOR

PERTEMUAN: 2

MATERI

- Panjang Vektor
- Dot Product
- Cross Product
- Kombinasi Linier
- Bebas dan Bergantung Linier

TUJUAN

Mahasiswa dapat memahami panjang vektor dalam berbagai ruang, dot product, cross product, kombinasi linier, serta vektor yang bebas dan bergantung linier.

PANJANG VEKTOR

- **Panjang Vektor** disebut juga dengan Norm atau Magnitude.
- Jika diketahui vektor v ∈ R^n dimana $v=(v_1,v_2,\ldots,v_n)$ maka panjang vektor dari v adalah:

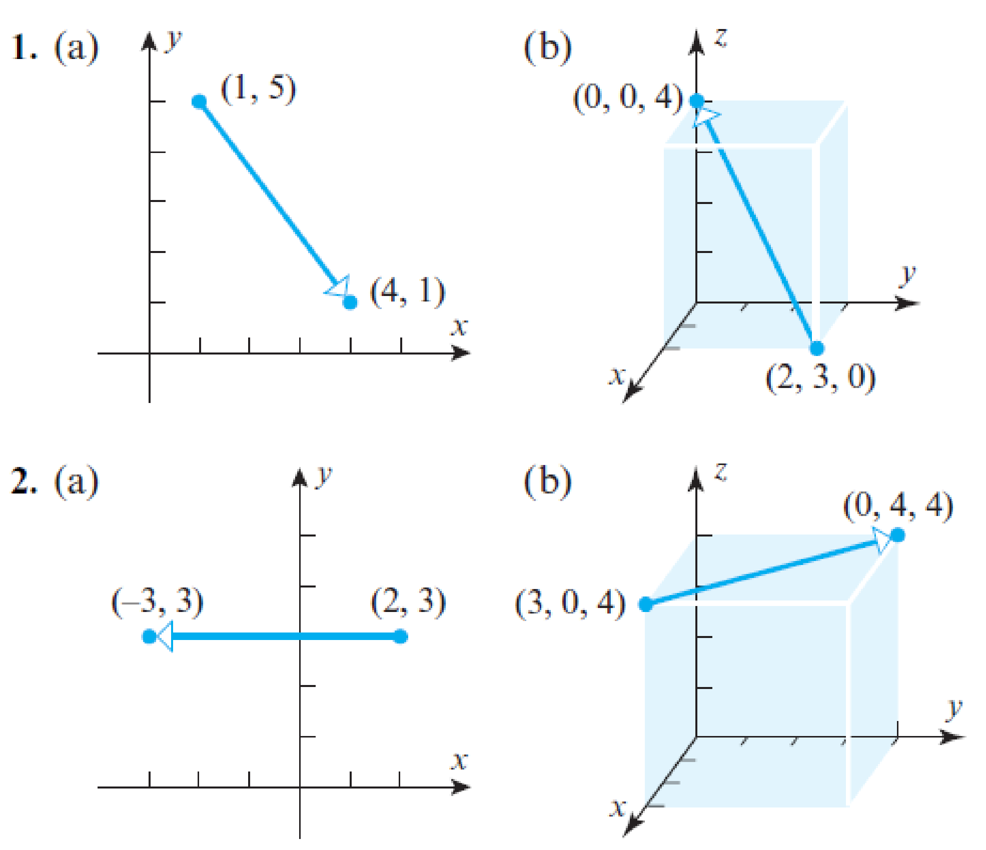
$$|v| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2}$$

Contoh. Diketahui u = (4,−1), v = (0, 5,1), dan w = (−3,−3,2,1) dimana $u \in R^2$, $v \in R^3$, dan $u \in R^4$. Panjang masing-masing vektor adalah:

$$|u| = \sqrt{4^2 + (-1)^2} = \sqrt{16+1} = \sqrt{17}$$

$$|v| = \sqrt{0^2 + 5^2 + 1^2} = \sqrt{0+25+1} = \sqrt{26}$$

$$|w| = \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{9+9+4+1} = \sqrt{23}$$



Hitung panjang masing-masing vektor di atas.

PANJANG VEKTOR

- **Panjang Vektor** disebut juga dengan Norm atau Magnitude.
- Jika diketahui vektor v $\in R^n$ dimana $v=(v_1,v_2,\ldots,v_n)$ maka panjang vektor dari v adalah:

$$|v|=\sqrt{v_1^2+v_2^2+\ldots+v_n^2}$$

Contoh. Diketahui u = (4,−1), v = (0, 5,1), dan w = (−3,−3,2,1) dimana $u\in R^2$, $v\in R^3$, dan $w\in R^4$. Panjang masing-masing vektor adalah:

$$|u|=\sqrt{4^2+(-1)^2}=\sqrt{16+1}=\sqrt{17}$$

$$|v|=\sqrt{0^2+5^2+1^2}=\sqrt{0+25+1}=\sqrt{26}$$

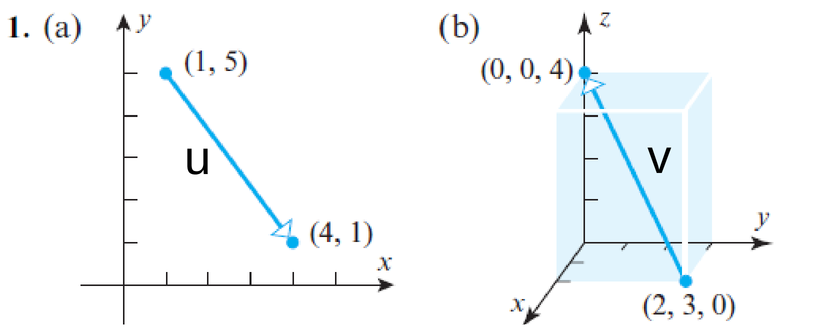
$$|w|=\sqrt{(-3)^2+(-3)^2+2^2+1^2}=\sqrt{9+9+4+1}=\sqrt{23}$$

Contoh. Diketahui u =3i+4j dan v = -i+2j-3k, dimana $u\in R^2$, dan $v\in R^3$. Panjang masing-masing vektor adalah:

$$|u|=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$$

$$|v|=\sqrt{(-1)^2+2^2+(-3)^2}=\sqrt{1+4+9}=\sqrt{14}$$

Hitung panjang masing-masing vektor di gambar berikut.



$$u=(4-1,1-5)=(3,-4);$$

$$|u|=\sqrt{3^2+(-4)^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$$

$$v=(0-2,0-3,4-0)=(-2,-3,4);$$

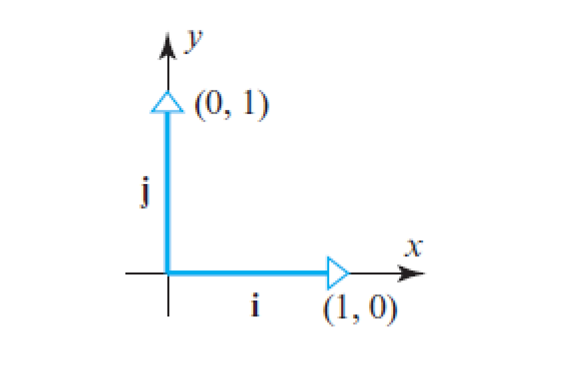
$$|v|=\sqrt{(-2)^2+(-3)^2+(4)^2}=\sqrt{4+9+16}=\sqrt{29}$$

VEKTOR UNIT

- **Vektor unit atau vektor satuan** adalah vektor dengan panjang 1. Vektor unit dari vektor v adalah:

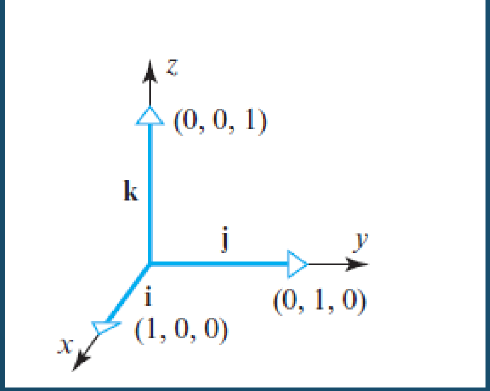
$$\frac{\mathrm{v}}{|\mathrm{v}|}$$

- Vektor unit standar (disebut juga vektor basis) adalah vektor satuan yang searah dengan sumbu koordinat.



Vektor Basis di R^2

i=(1,0) dan j=(0,1)



Vektor Basis di R^3

i=(1,0,0), j=(0,1,0) dan k=(0,0,1)

Contoh. Diketahui u = (4,−1) dan v = (0, 5,1). Tentukan vektor unit w yang searah dengan vektor u dan v.

$$|\mathrm{u}| = \sqrt{4^2 + (-1)^2} = \sqrt{17}$$
$$|\mathrm{v}| = \sqrt{0^2 + 5^2 + 1^2} = \sqrt{26}$$

- Vektor unit w dari u adalah:

$$w = \frac{\mathrm{u}}{|\mathrm{u}|} = \frac{(4,-1)}{\sqrt{17}}; |w| = 1$$

- Vektor unit w dari v adalah:

$$w = \frac{\mathrm{v}}{|\mathrm{v}|} = \frac{(0,5,1)}{\sqrt{26}}; |w| = 1$$

Sembarang vektor v di ruang R^n dapat dituliskan sebagai kombinasi linier dari vektor basis.
Contoh.
u=(4,-1)=4i-j
v=(1,-5,2)=1i+(-5)j+2k=i-5j+2k
w=(2,1,3,5)=2i+j+3k+5l

JARAK ANTAR DUA VEKTOR

Jika diketahui vektor-vektor u,v $\in R^n$ dimana $u=(u_1,u_2,\ldots,u_n)$ dan $v=(v_1,v_2,\ldots,v_n)$ maka jarak antara vektor u dan v adalah:

$$d(u,v) = |u-v|$$
$$= \sqrt{(u_1-v_1)^2+(u_2-v_2)^2+\ldots+(u_n-v_n)^2}$$

Contoh.
u = (1, 3, 7) and v = (0, 7, 2) maka:

$$d(u,v) = \sqrt{(1-0)^2+(3-7)^2+(7-2)^2}$$
$$= \sqrt{1+16+25}$$
$$= \sqrt{42}$$

Contoh.
u = (1, 3) and v = (0, 7) maka:

$$d(u,v) = \sqrt{(1-0)^2+(3-7)^2}$$
$$= \sqrt{1+16}$$
$$= \sqrt{17}$$

Contoh.
u = (1, 3, −2, 7) and v = (0, 7, 2, 2) maka:

$$d(u,v) = \sqrt{(1-0)^2+(3-7)^2+(-2-2)^2+(7-2)^2}$$
$$= \sqrt{1+16+16+25}$$
$$= \sqrt{58}$$

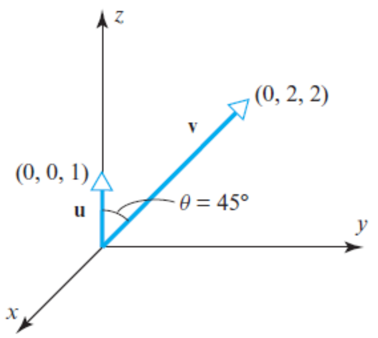
DOT PRODUCT

- Jika u,v adalah vektor-vektor bukan nol dan θ adalah sudut antara u dan v, maka dot product antara u dan v didefinisikan sebagai:

$$u \bullet v = |u||v|\cos\theta$$

- Vektor u dan v saling tegak lurus (orthogonal) jika u●v=0
- Dot Product (disebut juga Euclidean Inner Product) biasanya digunakan untuk menganalisis sudut antar vektor.

Contoh. Diketahui vektor u=(0,0,1) dan v=(0,2,2). Jika sudut antara u dan v adalah 45°, tentukan u●v.



$$|u| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} = 1$$

$$|v| = \sqrt{0^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\text{Cos}(45) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$u \bullet v = |u||v|\text{Cos}(\theta)$$

$$= (1)(2\sqrt{2})\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= 2$$

DOT PRODUCT

Jika diketahui vektor-vektor u,v $\in R^n$ dimana $u=(u_1,u_2,\ldots,u_n)$ dan $v=(v_1,v_2,\ldots,v_n)$ maka u●v dapat ditulis sebagai kombinasi linier antar komponen vektor:

$$u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \ldots + u_n v_n$$

Sifat Operasi

1. u●v = v●u
2. u●(v+w) = u●v+u●w
3. k(u●v) = (ku)●v = u●(kv)
4. 0●v = v●0 = 0

Contoh.

1. Jika u=(0,0,1) dan v=(0,2,2) maka:
   u●v=(0)(0)+(0)(2)+(1)(2)=0+0+2=2.

2. Jika u=(1,2) dan v=(-3,2) maka:
   u●v=(1)(-3)+(2)(2) =-3+4=1.

3. Jika u=(1,2,-3,2) dan v=(-3,2,1,0) maka:
   u●v=(1)(-3)+(2)(2)+(-3)(1)+(2)(0)=-3+4-3+0=-2.

4. Jika u =3i+4j dan v = -i+2j maka:
   u●v=(3)(-1)+(4)(2)=-3+8=5.

5. Jika u =3i+4j-k dan v = -i+2j+2k maka:
   u●v=(3)(-1)+(4)(2)+(-1)(2)=-3+8-2=3.

DOT PRODUCT

Sudut antara vektor u dan v dapat ditulis sebagai:

$$\cos\theta = \frac{u \bullet v}{|u||v|} = \frac{u \bullet v}{\sqrt{u \bullet u}\sqrt{v \bullet v}}$$

Contoh.
Jika u=(0,0,1) dan v=(0,2,2) maka sudut antara u dan v:
u●v=(0)(0)+(0)(2)+(1)(2)=2
u●u=(0)(0)+(0)(0)+(1)(1)=1
v●v=(0)(0)+(2)(2)+(2)(2)=8

$$\cos\theta = \frac{u \bullet v}{|u||v|} = \frac{2}{\sqrt{1}\sqrt{8}} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\theta = arc\cos(\frac{1}{\sqrt{2}}) = 45^o$$

Contoh. Jika u =3i+4j dan v = -i+2j maka sudut antara u dan v:
u●v=(3)(-1)+(4)(2)=-3+8=5
u●u=(3)(3)+(4)(4)=9+16=25.
v●v=(-1)(-1)+(2)(2)=1+4=5.

$$\cos\theta = \frac{u \bullet v}{|u||v|} = \frac{5}{\sqrt{25}\sqrt{5}} = \frac{5}{5\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\theta = arc\cos(\frac{1}{\sqrt{5}})$$

Contoh. Jika u =3i+4j-k dan v = -i+2j+2k maka:
u●v=(3)(-1)+(4)(2)+(-1)(2)=-3+8-2=3
u●u=(3)(3)+(4)(4)+(-1)(-1)=9+16+1=26
v●v=(-1)(-1)+(2)(2)+(2)(2)=1+4+4=9.

$$\cos\theta = \frac{u \bullet v}{|u||v|} = \frac{3}{\sqrt{26}\sqrt{9}} = \frac{3}{3\sqrt{26}} = \frac{1}{\sqrt{26}}$$

$$\theta = arc\cos(\frac{1}{\sqrt{26}})$$

CROSS PRODUCT

- Hanya berlaku di R^3.
- Jika diketahui vektor-vektor u,v $\in R^3$ dimana $u=(u_1,u_2,u_3)$ dan $v=(v_1,v_2,v_3)$ maka $u \times v$ didefinisikan sebagai:

$$u \times v = (u_2v_3 - u_3v_2,\ u_3v_1 - u_1v_3,\ u_1v_2 - u_2v_1)$$

- $u \times v$ menghasilkan vektor. sedangkan u●v menghasilkan skalar.

Contoh.
Tentukan hasil **u×v dan** u●v, jika **u** = (1, 2,−2) dan **v** = (3, 0, 1).

$$\begin{aligned}
u \times v &= (u_2v_3 - u_3v_2,\ u_3v_1 - u_1v_3,\ u_1v_2 - u_2v_1) \\
&= ((2)(1) - (-2)(0),\ (-2)(3) - (1)(1),\ (1)(0) - (2)(3)) \\
&= (2-0, -6-1, 0-6) \\
&= (2, -7, -6) \\
u \bullet v &= (1)(3) + (2)(0) + (-2)(1) \\
&= 3 + 0 - 2 \\
&= 1
\end{aligned}$$

CROSS PRODUCT

Contoh. Jika u =3i+4j-k dan v = -i+2j+2k maka: u=(3,4,-1) dan v=(-1,2,2). Sehingga

$$
\begin{aligned}
u \times v &= (u_2v_3 - u_3v_2,\, u_3v_1 - u_1v_3,\, u_1v_2 - u_2v_1) \\
&= ((4)(2)-(-1)(2),\, (-1)(-1)-(3)(2),\, (3)(2)-(4)(-1)) \\
&= (8-(-2), 1-6, 4-(-4)) \\
&= (10,-5,8) \text{ atau} \\
&= 10i - 5j + 8k \\
u \bullet v &= (3)(-1)+(4)(2)+(-1)(2) \\
&= -3+8-2 \\
&= 3
\end{aligned}
$$

Sekali lagi …

- u×v menghasilkan vektor
- u●v menghasilkan skalar

RUANG VEKTOR DAN KOMBINASI LINIER

Jika V adalah himpunan tidak kosong berisikan vektor-vektor dan berlaku: (1) operasi penjumlahan dan (2) perkalian vektor dengan skalar, maka V disebut ruang vektor jika diketahui vektor-vektor u,v,w $\in$ V maka operasi-operasi berikut dipenuhi di V:

1. Jika u,v $\in$ V maka u+v $\in$ V
2. u+v=v+u
3. (u+v)+w=(u+v)+w
4. 0+u=u+0=u
5. u+(-u)=(-u)+u=0
6. Untuk skalar k maka ku $\in$ V
7. k(u+v)=ku+kv
8. (k+m)u=ku+mu untuk skalar m
9. k(mu)=(km)u
10. 1u=u

Vektor w disebut sebagai kombinasi linier dari vektor u dan v jika terdapat skalar k_1 dan k_2 sedemikian sehingga memenuhi:

$$w=k_1u+k_2v$$

Contoh.
Jika u=(1,2) dan v=(-3,2) maka vektor w=(-1,6) adalah kombinasi linier dari u dan v, sebab w dapat dinyatakan sebagai w=2u+v.

- 2u+v=2(1,2)+(-3,2)=(2,4)+(-3,2)=(-1,6).
- w=2u+v artinya terdapat skalar k_1=2 dan k_1=1 sedemikian sehingga w=k_1u +k_2v.

RUANG VEKTOR, BEBAS DAN BERGANTUNG LINIER

Contoh.

Jika u=(-1,3) dan v=(2,1), selidiki apakah vektor w=(-4,8) adalah kombinasi linier dari u dan v.

Misal w adalah kombinasi linier dari u dan v maka $w=k_1u+k_2v$

$(-4,8)=k_1(-1,3)+k_2(2,1)$

$(-4,8)=(-k_1,3k_1)+(2k_2, k_2)$

$(-4,8)=(-k_1+2k_2,3k_1+k_2)$

$-k_1+2k_2=-4$ $\quad$ $-k_1+2k_2=-4$

$3k_1+k_2=8$ $\quad$ $6k_1+2k_2=16$

---------------- -

$-7k_1 = -20$ atau $k_1=20/7$

$k_2=8-3k_1=8-3(20/7)=8-(60/7)=-4/7$

Berarti w merupakan kombinasi linier dari u dan v, yaitu:

$w=k_1u+k_2v$

$w=(20/7)\ u - (4/7)\ v$

Contoh.

Jika u=(1,2,-1) dan v=(6,4,2), selidiki apakah vektor w=(9,2,7) adalah kombinasi linier dari u dan v.

Misal w adalah kombinasi linier dari u dan v maka $w=k_1u+k_2v$

$(9,2,7)=k_1(1,2,-1)+k_2(6,4,2)$

$(9,2,7)=(k_1,2k_1,-k_1)+(6k_2,4k_2,2k_2)$

$(9,2,7)=(k_1+6k_2,2k_1+4k_2,-k_1+2k_2)$

$k_1+6k_2=9$ (1)

$2k_1+4k_2=2$ (2)

$-k_1+2k_2=7$ (3)

$k_1+6k_2=9$ (1) $\quad$ $k_1=9-6k_2$ $\quad$ $k_1=-3$ dan $k_2=2$

$-k_1+2k_2=7$ (3) $\quad$ $=9-6(2)$ $\quad$ memenuhi pers. (3)

--------------- + $\quad$ $=-3$ $\quad$ $2k_1+4k_2=2$

$8k_2=16$ atau $k_2=2$ $\quad$ $2(-3)+4(2)=2$ (dipenuhi)

Sehingga $k_1=-3$ dan $k_2=2$ memenuhi semua persamaan dan w merupakan kombinasi linier dari u dan v, yaitu:

$w=k_1u+k_2v$

$w=(-3)\ u + (2)\ v$ atau

$w=-3u + 2v$

RUANG VEKTOR, BEBAS DAN BERGANTUNG LINIER

Contoh.
Jika u=(1,2,-1) dan v=(6,4,2), selidiki apakah vektor w=(4,-1,8) adalah kombinasi linier dari u dan v.
Misal w adalah kombinasi linier dari u dan v maka $w=k_1u+k_2v$
$(4,-1,8)=k_1(1,2,-1)+k_2(6,4,2)$
$(4,-1,8)=(k_1,2k_1,-k_1)+(6k_2,4k_2,2k_2)$
$(4,-1,8)=(k_1+6k_2,2k_1+4k_2,-k_1+2k_2)$

$k_1+6k_2=4$ (1)
$2k_1+4k_2=-1$ (2)
$-k_1+2k_2=8$ (3)

$k_1+6k_2=4$ (1)
$-k_1+2k_2=8$ (3)
--------------- +
$8k_2=12$ atau $k_2=12/8$

$k_1=4-6k_2$
$=9-6(12/8)$
$=0$

$k_1=0$ dan $k_2=12/8$
tidak memenuhi pers (2)
$2k_1+4k_2=-1$
$2(0)+4(12/8)=6 \neq -1$

Karena tidak ditemukan k_1 dan k_2 yang memenuhi semua persamaan, maka w bukan merupakan kombinasi linier dari u dan v.

BEBAS DAN BERGANTUNG LINIER

Jika $S=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ adalah himpunan dua atau lebih vektor di ruang vektor V maka S disebut **bebas linier** jika vektor di S tidak dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari vektor-vektor lain. Sebaliknya, S disebut **bergantung linier** jika vektor di S dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari vektor-vektor lain.

Secara matematis, $S=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ himpunan vektor-vektor tidak kosong di ruang vektor V adalah **bebas linier** jika semua koefisien $k_i=0$ $(i=1,2,\ldots,r)$ dan memenuhi:

$$\mathbf{k_1v_1+k_2v_2+\ldots+k_nv_n=0}$$

Jika terdapat koefisien $ki\neq 0$ maka disebut **bergantung linier.**

Contoh.

Jika $u=(3,1,2)$, $v=(1,2,1)$, dan $w=(2,-1,1) \in R^3$, selidiki apakah u, v dan w saling bebas linier atau tidak.

$k_1v_1+k_2v_2+k_3v_3=0$
$k_1(3,1,2)+k_2(1,2,1)+k_3(2,-1,1)=(0,0,0)$
$(3k_1,k_1,2k_1)+(k_2,2k_2,k_2)+(2k_3,-k_3,k_3)=(0,0,0)$
$(3k_1+k_2+2k_3,\ k_1+2k_2-k_3,\ 2k_1+k_2+k_3)=(0,0,0)$

$3k_1+k_2+2k_3=0$ (1)
$k_1+2k_2-k_3=0$ (2)
$2k_1+k_2+k_3=0$ (3)

$3k_1+k_2+2k_3=0$ (1)
$2k_1+k_2+k_3\ =0$ (3)
--------------------- -
$k_1+k_3=0$ (4)

$6k_1+2k_2+4k_3=0$ (1)
$k_1+2k_2-k_3\ \ =0$ (2)
--------------------- -
$5k_1+5k_3=0$
$k_1+k_3=0$ (5)

Pers. (4)=(5) diperoleh $k_1=-k_3$
Pers. (2) $k_1+2k_2-k_3=0$ maka $-k_3+2k_2-k_3=0$ atau $2k_2=2k_3$ atau $k_2=k_3$
Jadi diperoleh $k_1=-k_3$ dan $k_2=k_3$ (Banyak nilai)
Misal $k_3=1$ maka $k_1=-1$ dan $k_2=1$
Misal $k_3=2$ maka $k_1=-2$ dan $k_2=2$ dan seterusnya.
Artinya terdapat koefisien $k_i\neq 0$ sehingga u, v, dan w tidak bebas linier atau bergantung linier.

BEBAS DAN BERGANTUNG LINIER

Contoh.
Jika u=(-3,0,4), v=(5,-1,2), dan w=(1,1,8) $\in R^3$, selidiki apakah u, v dan w saling bebas linier atau tidak.

$k_1v_1+k_2v_2+k_3v_3=0$
$k_1(-3,0,4)+k_2(5,-1,2)+k_3(1,1,8)=(0,0,0)$
$(-3k_1,0,4k_1)+(5k_2,-k_2,2k_2)+(k_3,k_3,8k_3)=(0,0,0)$
$(-3k_1+5k_2+k_3,\ -k_2+k_3,\ 4k_1+2k_2+8k_3)=(0,0,0)$

$-3k_1+5k_2+k_3=0$ (1)
$-k_2+k_3=0$ (2) $\rightarrow k_2=k_3$ (4)
$4k_1+2k_2+8k_3=0$ (3)

$k_2=k_3$ $\rightarrow$ (1) $-3k_1+5k_3+k_3=0$ atau $-3k_1+6k_3=0$ (5)
$\rightarrow$ (3) $4k_1+2k_3+8k_3=0$ atau $4k_1+10k_3=0$ (6)

$-3k_1+6k_3=0$ (5) atau $-12k_1+24k_3=0$
$4k_1+10k_3=0$ (6) $12k_1+30k_3=0$
------------------ +
$54k_3=0$ atau $k_3=0$
Sehingga $k_2=0$ dan $k_1=0$. Jadi $k_1=0;k_2=0;k_3=0$
Artinya u, v dan w saling bebas linier

Contoh.
Jika u=(2,3) dan v=(1,3) $\in R^2$, selidiki apakah u dan v saling bebas linier atau tidak.

$k_1v_1+k_2v_2=0$
$k_1(2,3)+k_2(1,3)=(0,0)$
$(2k_1,3k_1)+(k_2,3k_2)=(0,0)$
$(2k_1+k_2,\ 3k_1+3k_2)=(0,0)$

$2k_1+k_2=0$ (1) atau $6k_1+3k_2=0$
$3k_1+3k_2=0$ (2) $3k_1+3k_2=0$
--------------- -
$3k_1=0 \rightarrow k_1=0$
$2k_1+k_2=0 \rightarrow 2(0)+k_2=0 \rightarrow k_2=0$
Jadi $k_1=0;k_2=0$; Artinya u dan v saling bebas linier