MATRIKS

MATA KULIAH: MATRIKS DAN RUANG VEKTOR

PERTEMUAN: 4

MATERI

- Pengertian Matriks
- Jenis-jenis Matriks khusus
- Operasi-operasi pada Matriks

TUJUAN

Mahasiswa mampu memahami pengertian matriks, jenis- jenis matriks khusus, dan operasi-operasi dasar pada matriks.

PENDAHULUAN

- Matriks adalah : kumpulan bilangan yang disusun menurut baris dan kolom.
- Bilangan-bilangan yang tersusun tersebut disebut **elemen – elemen** atau **komponen – komponen** matriks.
- Nama sebuah matriks pada umumnya dinyatakan dengan huruf besar, misal A, B, X, dsb.
- Ukuran atau ordo matriks dituliskan dengan menyebutkan jumlah baris dan jumlah kolom.
- Jika matriks A memiliki m baris dan n kolom, maka ukuran atau ordo matriks A ditulis sebagai A_{mxn}.
- Elemen matriks pada umumnya dinyatakan dengan huruf kecil dengan menyertakan posisinya, misal a_{12} adalah elemen matriks A pada baris 1 kolom 2.

Penulisan Matriks

Secara umum matriks dapat dituliskan sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Dalam hal ini a_{ij} disebut elemen matriks pada baris ke i dan kolom ke j, dimana:

i=1,2,…,m (baris)

j=1,2,…,m (kolom)

PENDAHULUAN

Contoh

$$\begin{array}{cc} A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 4 \\ 2 & 0 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 4 & 7 \end{bmatrix} & \begin{matrix} \text{baris 1} \\ \text{baris 2} \\ \text{baris 3} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{kolom 1} & \text{kolom 2} & \text{kolom 3} & \text{kolom 4} \end{matrix} & \end{array}$$

Matriks A tersebut terdiri dari 3 baris dan 4 kolom. Matriks A tersebut disebut berordo 3 x 4, atau dapat ditulis dengan A_{3x4}. Matriks A memiliki 12 elemen, yaitu:

$a_{11}=1$; $a_{12}=2$; $a_{13}=5$; $a_{14}=4$;
$a_{21}=2$; $a_{22}=0$; $a_{23}=5$; $a_{24}=6$;
$a_{31}=3$; $a_{32}=6$; $a_{33}=4$; $a_{34}=7$;

JENIS-JENIS MATRIKS

Matriks Nol (Zeros). Matriks dengan semua elemennya bernilai nol (0).

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriks Diagonal. Matriks bujur sangkar yang semua elemen di luar eleman utamanya bernilai nol.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Matriks Satu (Ones). Matriks dengan semua elemennya bernilai satu (1).

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriks Bujur Sangkar. Matriks dengan jumlah baris sama dengan jumlah kolom.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 6 \\ 7 & 9 & 3 & 4 \\ 3 & 8 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

JENIS-JENIS MATRIKS

Matriks Identitas. Matriks skalar yang elemen-elemen pada diagonal utamanya bernilai satu.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Matriks Segitiga Bawah. Matriks bujur sangkar yang elemen-elemen diatas diagonal utamanya nol.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 0 \\ 6 & 9 & 7 & 4 \end{bmatrix}$$

Matriks Skalar. Matriks diagonal yang elemen-elemen pada diagonal utamanya bernilai sama.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Matriks Segitiga Atas. Matriks bujur sangkar yang elemen-elemen dibawah diagonal utamanya nol.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

OPERASI-OPERASI PADA MATRIKS

1. Penjumlahan dan Pengurangan

Syarat Operasi

- Ukuran matriks harus sama

Sifat Operasi

- **A+B=B+A (Komutatif)**
- **A-B ≠ B-A (Tidak Komutatif)**

Penjumlahan dan Pengurangan. Dua buah matriks (A dan B) dapat dijumlahkan atau dikurangkan apabila kedua matriks ber-ordo atau berukuran sama. Jika ukuran kedua matriks tidak sama, maka operasi penjumlahan dan pengurangan tidak dapat dilakukan atau tidak berlaku.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$A \pm B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & \cdots & a_{1n} \pm b_{1n} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & \cdots & a_{2n} \pm b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} \pm b_{m1} & a_{m2} \pm b_{m2} & \cdots & a_{mn} \pm b_{mn} \end{bmatrix}$$

Penjumlahan atau pengurangan matriks dilakukan secara langsung pada elemen-elemen matriks pada posisi yang sama.

OPERASI-OPERASI PADA MATRIKS

1. Penjumlahan dan Pengurangan

Syarat Operasi

- Ukuran matriks harus sama

Sifat Operasi

- **A+B=B+A (Komutatif)**
- **A-B ≠ B-A (Tidak Komutatif)**

Penjumlahan dan Pengurangan. Dua buah matriks (A dan B) dapat dijumlahkan atau dikurangkan apabila kedua matriks ber-ordo atau berukuran sama. Jika ukuran kedua matriks tidak sama, maka operasi penjumlahan dan pengurangan tidak dapat dilakukan atau tidak berlaku.

Contoh. Diketahui matriks-matriks berikut:

$$A=\begin{bmatrix}9 & 2 & 3\\ 4 & 7 & 8\end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix}3 & 6 & 1\\ 2 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

Tentukan: a. A+B ; b. A-B ; c. B+A; d. B-A.

$$\text{a. } A+B=\begin{bmatrix}9 & 2 & 3\\ 4 & 7 & 8\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3 & 6 & 1\\ 2 & 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9+3 & 2+6 & 3+1\\ 4+2 & 7+1 & 8+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}12 & 8 & 4\\ 6 & 8 & 8\end{bmatrix}$$

$$\text{b. } A-B=\begin{bmatrix}9 & 2 & 3\\ 4 & 7 & 8\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3 & 6 & 1\\ 2 & 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9-3 & 2-6 & 3-1\\ 4-2 & 7-1 & 8-0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & -4 & 2\\ 2 & 6 & 8\end{bmatrix}$$

$$\text{c. } B+A=\begin{bmatrix}3 & 6 & 1\\ 2 & 1 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}9 & 2 & 3\\ 4 & 7 & 8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3+9 & 6+2 & 1+3\\ 2+4 & 1+7 & 0+8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}12 & 8 & 4\\ 6 & 8 & 8\end{bmatrix}$$

$$\text{d. } B-A=\begin{bmatrix}3 & 6 & 1\\ 2 & 1 & 0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}9 & 2 & 3\\ 4 & 7 & 8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3-9 & 6-2 & 1-3\\ 2-4 & 1-7 & 0-8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-6 & 4 & -2\\ -2 & -6 & -8\end{bmatrix}$$

OPERASI-OPERASI PADA MATRIKS

1. Penjumlahan dan Pengurangan

Syarat Operasi

- Ukuran matriks harus sama

Sifat Operasi

- **A+B=B+A (Komutatif)**
- **A-B ≠ B-A (Tidak Komutatif)**

Penjumlahan dan Pengurangan. Dua buah matriks (A dan B) dapat dijumlahkan atau dikurangkan apabila kedua matriks ber-ordo atau berukuran sama. Jika ukuran kedua matriks tidak sama, maka operasi penjumlahan dan pengurangan tidak dapat dilakukan atau tidak berlaku.

Contoh. Diketahui matriks-matriks berikut:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 5\\ 4 & 6 & 9\end{bmatrix};\ B=\begin{bmatrix}10 & 12 & 13\\ 15 & 17 & 21\end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\end{bmatrix};\quad D=\begin{bmatrix}-4 & 11\\ 7 & -8\end{bmatrix}$$

Tentukan: a. A + B ; b. A + C; c. B – A; g. D - B

$$\text{a. } A+B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 5\\ 4 & 6 & 9\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}10 & 12 & 13\\ 15 & 17 & 21\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11 & 14 & 18\\ 19 & 23 & 30\end{bmatrix}$$

$$\text{b. } A+C=\begin{bmatrix}1 & 2 & 5\\ 4 & 6 & 9\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\end{bmatrix}$$ Tidak bisa dioperasikan

$$\text{c. } B-A=\begin{bmatrix}10 & 12 & 13\\ 15 & 17 & 21\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 2 & 5\\ 4 & 6 & 9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9 & 10 & 8\\ 11 & 11 & 12\end{bmatrix}$$

$$\text{d. } D-B=\begin{bmatrix}-4 & 11\\ 7 & -8\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}10 & 12 & 13\\ 15 & 17 & 21\end{bmatrix}$$ Tidak bisa dioperasikan

OPERASI-OPERASI PADA MATRIKS

2. Perkalian Matriks dengan Skalar

Perkalian Matriks dengan Skalar. Perkalian matriks A dengan skalar k akan menghasilkan matriks yang semua elemen–elemennya merupakan hasil perkalian skalar dengan semua elemen matriks tersebut.

Sifat Operasi

- kA = Ak (Komutatif)
- k(A + B) = kA + kB (Distributif)
- K(A – B) = kA – kB (Distributif)
- K(lA) = (kl)A; I matriks Identitas
- (k+l)A=kA + lA; I matriks Identitas
- 1A = A
- (-1)A = -A

$$kA = k\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{bmatrix}$$

Contoh. $A = 2\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 4 & 6 & 9 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 2 \\ 2 & 6 & -8 \end{bmatrix}$

$$\text{a. } 2A = 2\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 4 & 6 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 10 \\ 8 & 12 & 18 \end{bmatrix}$$

$$\text{b. } 3A - \frac{1}{2}B = 3\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 4 & 6 & 9 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -4 & 0 & 2 \\ 2 & 6 & -8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 6 & 15 \\ 12 & 18 & 27 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 6 & 14 \\ 11 & 15 & 31 \end{bmatrix}$$

OPERASI-OPERASI PADA MATRIKS

3. Perkalian Antar Matriks

Syarat Operasi:

- Jumlah kolom matriks A harus sama dengan jumlah baris matriks B

$$\underset{m\,x\,n}{A} \times \underset{n\,x\,p}{B} = \underset{m\,x\,p}{C}$$

Sifat Operasi

- Tidak komutatif : $AB \neq BA$
- Asosiatif : AB(C)=A(BC)
- Perkalian matriks bersifat Distributif.
  - Distribusi kiri : A(B+C)=AB+AC
  - Distribusi kanan : (B+C)A=BA+CA
- Dalam perkalian matriks yang hanya memuat matriks-matriks persegi dengan ordo yang sama, terdapat sebuah matriks Identitas yakni matriks satuan I, yang bersifat : AI=IA=A
- Jika AB=AC maka belum tentu B=C
- Jika AB=0 maka belum tentu A=0 atau B=0
- Jika p dan q skalar maka (pA) (qB)= (pq)(AB)

Perkalian Antar Matriks. Dua buah matriks (A dan B) dapat dikalikan (A x B) jika banyaknya kolom pada matriks A sama dengan banyaknya baris pada matriks B.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{bmatrix}$$

$$C = AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mp} \end{bmatrix}$$

Dimana:

$$\begin{aligned} c_{11} &= a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1n}b_{n1}; \\ c_{12} &= a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + \cdots + a_{1n}b_{n2}; \\ c_{13} &= a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + \cdots + a_{1n}b_{n3}; \\ &\vdots \\ c_{ij} &= a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{1m}b_{mj}; \end{aligned}$$

OPERASI-OPERASI PADA MATRIKS

3. Perkalian Antar Matriks

Syarat Operasi:

- Jumlah kolom matriks A harus sama dengan jumlah baris matriks B

$$\underset{m\,x\,n}{A} \times \underset{n\,x\,p}{B} = \underset{m\,x\,p}{C}$$

Sifat Operasi

- Tidak komutatif : $AB \neq BA$
- Asosiatif : AB(C)=A(BC)
- Perkalian matriks bersifat Distributif.
  - Distribusi kiri : A(B+C)=AB+AC
  - Distribusi kanan : (B+C)A=BA+CA
- Dalam perkalian matriks yang hanya memuat matriks-matriks persegi dengan ordo yang sama, terdapat sebuah matriks Identitas yakni matriks satuan I, yang bersifat : AI=IA=A
- Jika AB=AC maka belum tentu B=C
- Jika AB=0 maka belum tentu A=0 atau B=0
- Jika p dan q skalar maka (pA) (qB)= (pq)(AB)

Contoh. Diketahui matriks-matriks berikut:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 1 & -4 \\ 11 & 6 \end{bmatrix} ; B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 6 \\ -2 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 1 & -4 \\ 11 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 6 \\ -2 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (-3)(3)+(0)(-2) & (-3)(0)+(0)(5) & (-3)(6)+(0)(-1) \\ (1)(3)+(-4)(-2) & (1)(0)+(-4)(5) & (1)(6)+(-4)(-1) \\ 11(3)+(6)(-2) & (11)(0)+(6)(5) & (11)(6)+(6)(-1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -9 & 0 & -18 \\ 11 & -20 & 10 \\ 21 & 30 & 60 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 6 \\ -2 & 5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 1 & -4 \\ 11 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (3)(-3)+(0)(1)+(6)(11) & (3)(0)+(0)(-4)+(6)(6) \\ (-2)(-3)+(5)(1)+(-1)(11) & (-2)(0)+(5)(-4)+(-1)(6) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 57 & 36 \\ 0 & -26 \end{bmatrix}$$

OPERASI-OPERASI PADA MATRIKS

3. Perkalian Antar Matriks

Syarat Operasi:

- Jumlah kolom matriks A harus sama dengan jumlah baris matriks B

$$\underset{m\,x\,n}{A} \times \underset{n\,x\,p}{B} = \underset{m\,x\,p}{C}$$

Sifat Operasi

- Tidak komutatif : AB≠BA
- Asosiatif : AB(C)=A(BC)
- Perkalian matriks bersifat Distributif.
  - Distribusi kiri : A(B+C)=AB+AC
  - Distribusi kanan : (B+C)A=BA+CA
- Dalam perkalian matriks yang hanya memuat matriks-matriks persegi dengan ordo yang sama, terdapat sebuah matriks Identitas yakni matriks satuan I, yang bersifat : AI=IA=A
- Jika AB=AC maka belum tentu B=C
- Jika AB=0 maka belum tentu A=0 atau B=0
- Jika p dan q skalar maka (pA) (qB)= (pq)(AB)

Contoh. Diketahui matriks-matriks berikut:

$$A=\begin{bmatrix}-3 & 0\\ 1 & -4\\ 4 & 6\end{bmatrix}; B=\begin{bmatrix}3 & 0 & 6\\ -2 & 5 & -1\end{bmatrix}; C=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 3\end{bmatrix}; D=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & -2\\ 2 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

$$BA-2C=\begin{bmatrix}3 & 0 & 6\\ -2 & 5 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3 & 0\\ 1 & -4\\ 4 & 6\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}15 & 36\\ 7 & -26\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2 & 0\\ -2 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}13 & 36\\ 9 & -32\end{bmatrix}$$

$$D+AB=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & -2\\ 2 & 0 & -1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-3 & 0\\ 1 & -4\\ 4 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 0 & 6\\ -2 & 5 & -1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & -2\\ 2 & 0 & -1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-9 & 0 & -18\\ 11 & -20 & 10\\ 0 & 30 & 18\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-8 & 2 & -15\\ 14 & -19 & 8\\ 2 & 30 & 17\end{bmatrix}$$

OPERASI-OPERASI PADA MATRIKS

4. Transpose Matriks

Transpose Matriks (A^T). Operasi untuk mengubah struktur dan elemen baris menjadi kolom dan kolom menjadi baris. Jika ukuran A adalah mxn maka ukuran dari A^T adalah nxm

$$\text{Jika } A_{mxn} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ maka } A^T_{nxm} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Sifat Operasi

- $(A^T)^T = A$
- $(A+B)^T = A^T + B^T$
- $(kA)^T = k(A)^T$ untuk skalar k
- $(AB)^T = B^T A^T$

Contoh.

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 1 & -4 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 6 \\ -2 & 5 & -1 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}; D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 1 & -4 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 0 & -4 & 6 \end{bmatrix}$$

$$B^T = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 6 \\ -2 & 5 & -1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 5 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$$

$$C^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$D^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

OPERASI-OPERASI PADA MATRIKS

Matriks Simetris

Matriks bujur sangkar A disebut symmetric jika $A = A^T$

Matriks Skew-symmetric

Matriks bujur sangkar A disebut skew-symmetric jika $A^T = -A$

Contoh.

Jika $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & 4 & 5 \\ b & c & 6 \end{bmatrix}$ simetri, tentukan nilai a, b dan c.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & 4 & 5 \\ b & c & 6 \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 2 & 4 & c \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A = A^T \Rightarrow a = 2, b = 3, c = 5$$

OPERASI-OPERASI PADA MATRIKS

5. Kesamaan Matriks

Kesamaan Matriks. Dua buah matriks $A=(a_{ij})$ dan $B=(b_{ij})$ dikatakan sama atau A=B, jika ukurannya sama dan berlaku aij=bij.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{bmatrix}$$

$$A=B \text{ jika } a_{11}=b_{11}, a_{12}=b_{12}, a_{13}=a_{13}, \cdots, a_{ij}=b_{ij}$$

Contoh.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}; B=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}; C=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

maka $A=B, A\neq C, B\neq C$

Contoh.

$$A=\begin{bmatrix} -1 & y-2 & 1 \\ 2 & 4 & z \\ x & 1 & -3 \end{bmatrix}; B=\begin{bmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & x+y \\ -3 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Tentukan x, y dan z agar A=B

$$* x=-3$$

$$* y-2=4 \text{ atau } y=6$$

$$* z=x+y \text{ atau } z=(-3)+6=3$$

SOAL LATIHAN

1. Tentukan x, y, z dan w yang memenuhi:

a. $\begin{bmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 2 & x & 6 \\ -1 & 2 & y+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z+1 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 0.5w \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 3x & 0.5y \\ 2z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y+1 \\ 5 & z+1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 2+y \\ 0.25z & 4 \end{bmatrix}$

2. Diketahui matriks-matriks berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & -5 & 1 \\ 3 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 2 & 3 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 8 & -2 \\ 6 & 10 & 0 & -6 \\ 8 & 4 & 4 & 12 \\ 3 & 6 & -12 & 2 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 & 9 \\ -2 & 2 & 1 & 10 \\ 4 & 6 & 7 & -5 \\ -3 & 7 & 8 & 2 \end{bmatrix}$$

Tentukan:

a. 3A+0.5B-2C
b. 2A-4B+3C
c. 4A+(3B-C)
d. (A-B)-(2B+C)
e. 2A-BC
f. AB-C
g. A(B+C)

SOAL LATIHAN

3. Diketahui matriks-matriks berikut:

$$A=\begin{bmatrix}4&1&0&2\\-3&2&-5&1\\3&-2&3&2\\1&5&2&3\end{bmatrix};B=\begin{bmatrix}2&-4&8&-2\\6&10&0&-6\\8&4&4&12\\3&6&-12&2\end{bmatrix};C=\begin{bmatrix}3&4&0&9\\-2&2&1&10\\4&6&7&-5\\-3&7&8&2\end{bmatrix}$$

Tentukan:

a. (2A+0.5B)(B-2C)
b. $(A^T-3B^T)(A+C)$
c. $(4A^2+B^2)(2B^T-3C^T)$
d. $(A-B)^T-(2B^T+C)$
e. $2A^T-(BC)^T$
f. $AB-C^T$
g. $A^T(B^T+C^T)$

4. Diketahui matriks-matriks berikut:

$$A=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix};B=\begin{bmatrix}1&0&2\\1&2&0\end{bmatrix};C=\begin{bmatrix}1&1&1\\2&2&3\end{bmatrix}$$

Tentukan:

a. B+C
b. AB+AC
c. A(B+C)
d. $(AB)^T$ dan $(AC)^T$
e. B^TA^T dan $(AC)^T$