7

PERMUTASI DAN DETERMINAN

Pengantar

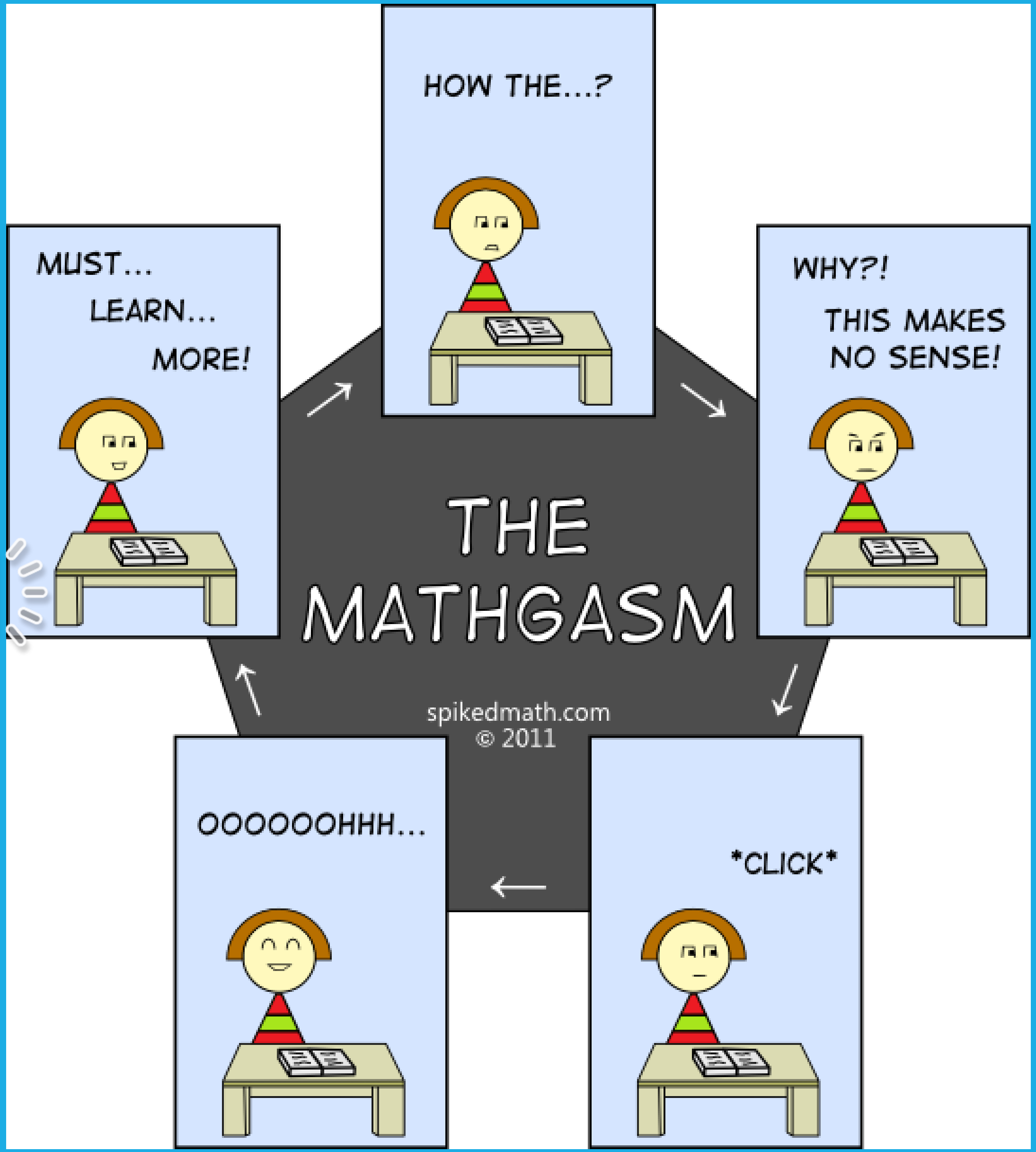
Definisi ● Cara Menghitung ● Sifat-Sifat

MATERI

- Definisi Permutasi dan Determinan
- Menghitung Determinan
  - Sarrus
  - Kofaktor
- Sifat-sifat Determinan

TUJUAN

Mahasiswa dapat memahami determinan dan cara menghitungnya.



Sumber: shorturl.at/msJSX

PENGERTIAN PERMUTASI

Contoh:

Permutasi dari {1,2,3} adalah:
(1,2,3),(1,3,2), (2,1,3),(2,3,1), (3,1,2), dan (3,2,1)

Banyaknya inversi dari (6,4,5,3,1,2) adalah:
Hitung dari kiri ke kanan.
6 mendahului 4,5,3,1,2 = 5 inversi
4 mendahului 3,1,2 = 3 inversi
5 mendahului 3,1,2 = 3 inversi
3 mendahului 1,2 = 2 inversi
1 tidak mendahului = 0 inversi
Jadi total ada 5+3+3+2+0=13 inversi

- **Permutasi** adalah susunan yang mungkin dibuat dari bilangan-bilangan dengan urutan berbeda tanpa pengulangan.
- **Inversi** dalam permutasi adalah jika dalam permutasi bilangan yang lebih besar mendahului yang lebih kecil.
- Untuk menghitung jumlah inversi dari permutasi $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ adalah sebagai berikut:
- Untuk a_1, berapa banyaknya bilangan dari $a_j, j = 2,3, \ldots, n$ yang lebih kecil dari a_1.
- Untuk a_2, berapa banyaknya bilangan dari $a_j, j = 3,4, \ldots, n$ yang lebih kecil dari a_2.

PERMUTASI

Contoh:

(6,1,3,4,5,2)
Banyaknya inversi 5+0+1+1+1=8 inversi, disebut permutasi genap

(1,2,3,4)
Banyaknya inversi 0+0+0=0 inversi, disebut permutasi genap

(2,4,1,3)
Banyaknya inversi 1+2+0=3 inversi, disebut permutasi ganjil

- **Permutasi genap** adalah permutasi yang jumlah inversinya genap
- **Permutasi ganjil** adalah permutasi yang jumlah inversinya ganjil

PENGERTIAN DETERMINAN

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

det A = $a.d$ – $b.c$

Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

det A = 2.5 – 4.7=10-28 = - 18

- Dalam aljabar linear, **determinan** adalah nilai yang dapat dihitung dari unsur suatu matriks persegi.
- **Determinan** matriks A ditulis dengan tanda $\det(A)$, det A, atau |A|.
- Jika determinan suatu matriks bernilai 0, maka matriks tersebut singular atau tidak mempunyai invers.
- Jika determinan suatu matriks tidak bernilai 0, maka matriks tersebut nonsingular atau mempunyai invers.

METODE SARRUS

Contoh:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \\ 7 & -8 & 9 \end{pmatrix}$$

Perluasan matriks menggunakan kolom 1 dan 2

$$\det A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} + & + & + & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ -4 & 5 & 6 & -4 & 5 \\ 7 & -8 & 9 & 7 & -8 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccccc} - & - & - & & \end{array} \end{array}$$

$$= \{(1.5.9)+(2.6.7)+(3.-4.-8)\}-\{(2.-4.9)+(1.6.-8)+(3.5.7)\}$$

$$= (45)+(84)+(96)+(105)-(-48)-(-72)$$

$$= 240$$

- Determinan matriks 2 × 2 ataupun 3 × 3 di samping dapat dimengerti dengan mudah jika menggunakan metode Sarrus.
- Metode Sarrus menggunakan perkalian matriks secara diagonal
- Perkalian elemen matriks pada diagonal turun (dari kiri atas ke kanan bawah) diberi tanda positif (+) sedangkan perkalian elemen matriks pada diagonal naik (dari kanan atas ke kiri bawah) diberi tanda negatif (-)

METODE KOFAKTOR

Ekspansi baris pertama

$$\begin{pmatrix} a1 & b1 & c1 \\ a2 & b2 & c2 \\ a3 & b3 & c3 \end{pmatrix} = a1\begin{vmatrix} b2 & c2 \\ b3 & c3 \end{vmatrix} - b1\begin{vmatrix} a2 & c2 \\ a3 & c3 \end{vmatrix} + c1\begin{vmatrix} a2 & b2 \\ a3 & b3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & 6 & 7 \\ 2 & 9 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & 6 & 7 \\ 2 & 9 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & 6 & 7 \\ 2 & 9 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & 6 & 7 \\ 2 & 9 & 2 \end{pmatrix} = 3\begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 9 & 2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 9 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= 3(6.2-9.7)-2(4.2-2.7)+5(4.9-2.6) \\ &= 3(-51)-2(-6)+5(24) \\ &= -153+12+120 \\ &= -21 \end{aligned}$$

- Seperti yang telah dijelaskan pada slide sebelumnya, kofaktor bisa juga kita pakai dalam mencari determinan suatu matriks.
- Jika pada metode sarrus, kita hanya bisa mencari determinan suatu matriks sampai pada ordo 3×3, tetapi kalau menggunakan metode kofaktor, kita bisa mencari determinan suatu matriks sampai ordo $n \times n$.
- Dalam melakukan ekspansi baris/kolom, kita bisa menggunakan **matriks plus-minus** berikut untuk membantu perhitungan.

Tanda +/- menyesuaikan

$$A = \begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$$

METODE KOFAKTOR MATRIKS 3 × 3

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 5 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$$

Ekspansi baris ketiga

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\det A = 4\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= 4.0 - 4.0 + 5.6 = 30$$

Ekspansi kolom ketiga

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\det A = 0\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} - 0\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= 0 - 0 + 5.6 = 30$$

- Ekspansi baris/kolom berapapun akan menghasilkan nilai determinan yang sama.

METODE KOFAKTOR MATRIKS 4×4

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & -1 & 4 \\ 3 & 6 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{bmatrix}$$

Gunakan bantuan matriks plus-minus

Ekspansi baris pertama

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & -1 & 4 \\ 3 & 6 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Di matriks 3×3, kita bisa menggunakan metode sarrus untuk mencari determinan

$$\det A = 2\begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 4 \\ 6 & 0 & 5 \end{bmatrix} - 0\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix} + (-3)\begin{bmatrix} 0 & 5 & 3 \\ -2 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 5 \end{bmatrix} - 0\begin{bmatrix} 0 & 5 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 3 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= 2[(-25 + 48 + 0) - (-18 + 0 + 30)] - 0 + (-3)[(0 + 60 - 36) - (27 + 0 - 50)] - 0$$

$$= 2[11] - 0 - 3[47] + 0$$

$$= 22 - 141 = -119$$

SIFAT-SIFAT DETERMINAN

Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

det A = 6.0 – 5.2= - 10

$$A^T = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$$

det A^T = 6.0 – 2.5= - 10

SIFAT 1

- Nilai determinan tidak berubah jika semua baris diubah menjadi kolom atau semua kolom diubah menjadi baris, dengan kata lain:
- det (A)= det (A^T)

SIFAT-SIFAT DETERMINAN

Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 15 & 10 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 15 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 75 & 74 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$$

det A = 6.0 – 2.5= - 10

det B = 10.0 – 4.15= - 60

det AB = 75.8 – 74.0= 600

det A det B = -10. –60= 600

SIFAT 2

- det (AB)= det (A) det (B)

SIFAT-SIFAT DETERMINAN

Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = H_{12}(A) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = K_{12}(A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

det (A)=$0.\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 0.\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 1.\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2$

det (B)=$2.\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 0.\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 0.\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2$

det (C)=$0.\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 0.\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1.\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2$

SIFAT 3

- Jika dua baris/kolom ditukar tempatnya, maka tanda determinannya berubah.

SIFAT-SIFAT DETERMINAN

Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Baris pertama dan kedua sama, maka $|A| = 0$

SIFAT 4

- Jika terdapat 2 baris atau 2 kolom yang identik, maka determinannya 0.

SIFAT-SIFAT DETERMINAN

Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = H_{13}^{(-2)}(A) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = K_{21}^{(3)}(A) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 2 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = 0.\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 0.\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 1.\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

$$\det(B) = 0.\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 0.\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 1.\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

$$\det(C) = 0.\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} - 0.\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 1.\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = -2$$

SIFAT 5

- Nilai determinan tidak berubah, jika elemen-elemen sebuah baris/kolom ditambah atau dikurangi dengan suatu kelipatan nilai real dari elemen-elemen dari baris/kolom lain.

SIFAT-SIFAT DETERMINAN

Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = H_3^{(2)}(A) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$C = K_1^{(2)}(A) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

det (A)=$0.\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 0.\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}+1.\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2$

det (B)=$0.\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 0.\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}+2.\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -4$

det (C)=$0.\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 0.\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}+1.\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -4$

SIFAT 6

- Besar determinan menjadi β kalinya, jika suatu baris/kolom dikalikan dengan skalar β.

SIFAT-SIFAT DETERMINAN

Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

maka $|A| = 0.3 - 2.0 = 0$

SIFAT 7

- Apabila semua unsur dalam satu baris/kolom =0, maka nilai determinannya 0.

SIFAT-SIFAT DETERMINAN

Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$ maka $|A| = 2.3.2 = 12$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 7 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$ maka $|A| = 2.3.2 = 12$

SIFAT 8

- Jika suatu matris merupakan matriks segitiga atas atau bawah, maka hasil determinannya merupakan hasil kali dari elemen-elemen yang terletak pada diagonal utamanya.

SOAL LATIHAN

1. Tentukan nilai determinan pada matriks berikut dengan metode Sarrus.

$$a)\ \ A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$b)\ \ A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 3 & -5 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Tentukan determinan matriks berikut dengan metode ekspansi baris dan kolom (kofaktor)

$$a)\ \ A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 6 & 7 \\ 3 & 2 & 4 & 5 \\ 4 & 4 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$b)\ \ A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

TERIMA KASIH