VEKTOR

MATA KULIAH: MATRIKS DAN RUANG VEKTOR

PERTEMUAN: 1

MATERI

- Definisi Vektor
- Penyajian Vektor
- Operasi Vektor
- Sifat-sifat Operasi

TUJUAN

Mahasiswa dapat memahami dan mengenali definisi, penyajian, operasi serta sifat-sifat operasi vektor.

OBYEK

- Definisi : adalah suatu yang menjadi pokok pembicaraan, bisa benda mati (misalnya mobil atau buku) atau benda hidup (misalnya hewan atau manusia)
- Contoh : Obyek Mobil

  Memiliki : berat, kecepatan, kelistrikan, warna, harga beli, nama pemilik dan lain-lain
- Berat → ton atau kg,

  Kecepatan → km/jam, dll.

BESARAN

- Definisi : salah satu ciri, atribut atau jatidiri obyek yang dapat diukur
- Contoh : Besaran untuk Obyek Mobil,

  volume, berat, kecepatan, muatan listrik, bahan, dan warna mobil merupakan contoh dari besaran-besaran yang ada pada mobil tersebut

NILAI

- Definisi : sesuatu yang diberikan oleh seseorang untuk menggambarkan tingkatan, intensitas atau besarnya besaran tersebut
- Contoh :

  Nilai untuk besaran Kecepatan → 10 km/jam

  Nilai untuk Besaran Berat → 1 ton

SATUAN

- Definisi : ukuran dari suatu besaran
- Contoh :

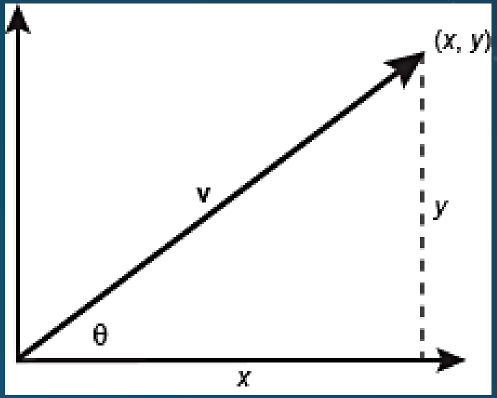
  Meter untuk panjang

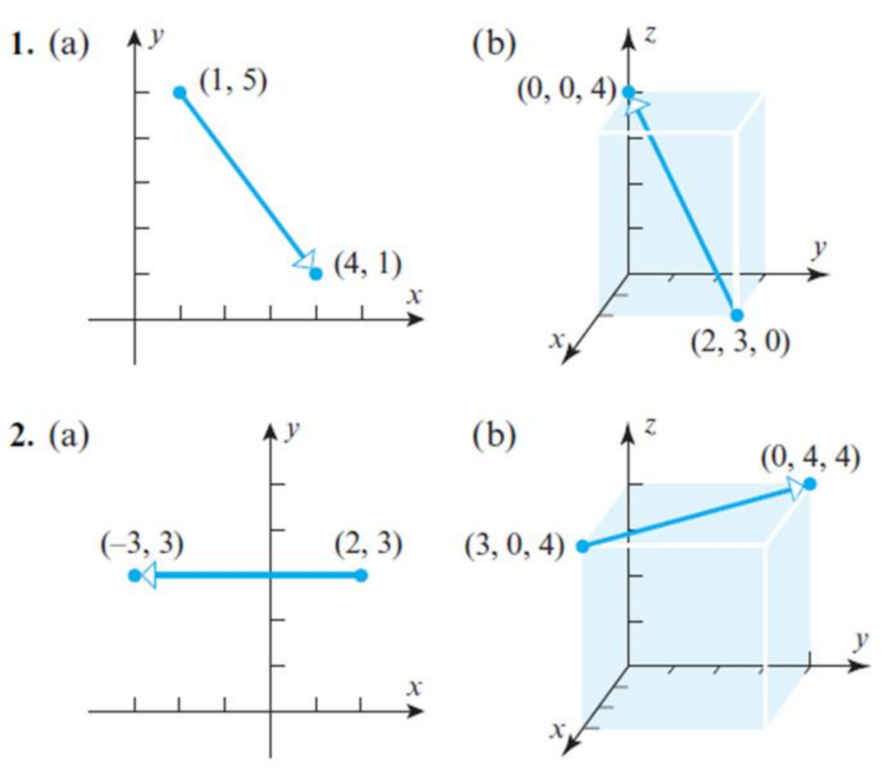
  Gram untuk massa

  Detik untuk waktu

PENDAHULUAN

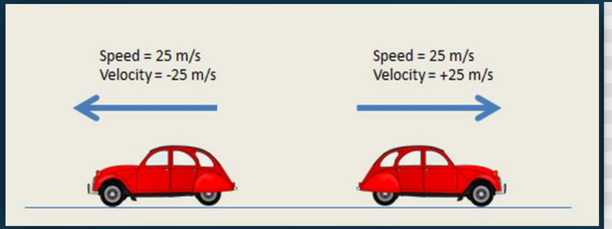
- **Vektor** adalah obyek geometri yang memiliki besaran (nilai) dan arah.
- Jika obyek geometri hanya memiliki besaran (nilai) saja, maka disebut **Skalar**.
- Vektor disajikan dalam bentuk ruas garis berarah (anak panah).
- Besaran (nilai) vektor menunjukkan panjang vektor (panjang garis) atau magnitude.
- Arah vektor menunjukkan sudut (θ) yang dibentuk dengan sumbu X positif.

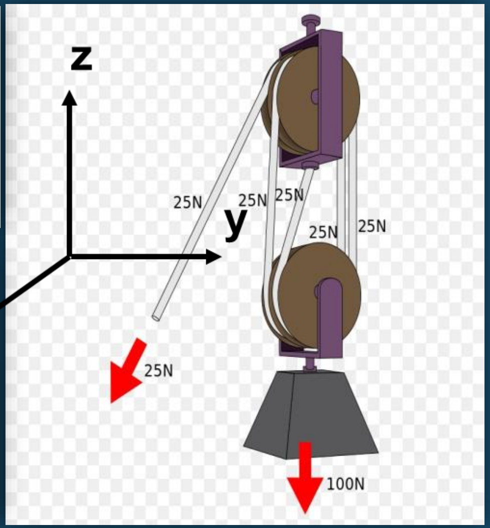


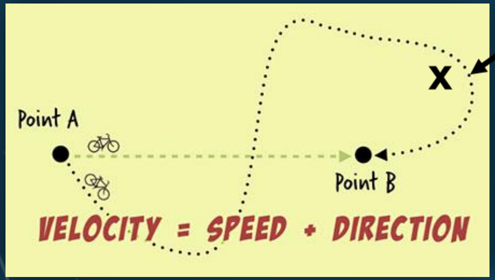


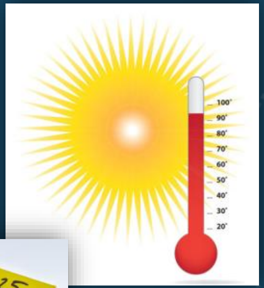
PENDAHULUAN

Vektor	Skalar
Memiliki nilai (besaran) dan arah	Hanya memiliki nilai (besaran)
Tergantung sistem koordinat	Tidak tergantung sistem koordinat
Contoh: Kecepatan, Percepatan, Gaya, dll	Contoh: Waktu, Berat, Volume, dll



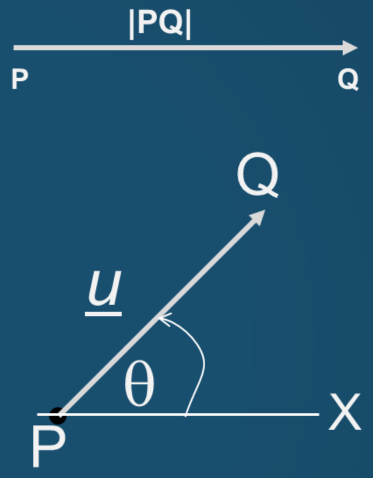


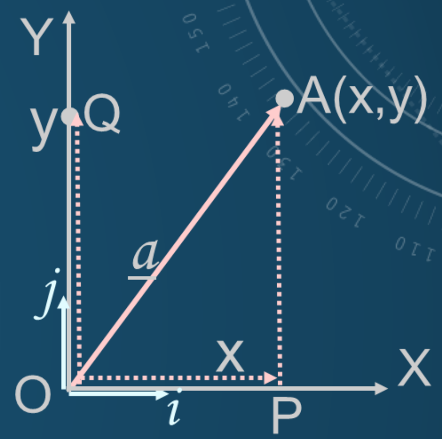




PENDAHULUAN

- **Vektor** secara grafis disajikan dalam bentuk garis berarah.
- Besaran vektor ditunjukkan oleh panjang garis.
- Arah vektor ditunjukkan oleh anak panah.
- Garis berarah memiliki titik pangkal dan ujung.





Titik P	:	Titik pangkal vektor
Titik Q	:	Ujung vektor
Tanda panah	:	Arah vektor
Panjang PQ = |PQ|	:	Besarnya (panjang) vektor (menggunakan tanda mutlak)
θ	:	sudut vektor terhadap sumbu X
i,j vektor basis	:	vektor satuan yang searah sumbu X dan Y

NOTASI DAN CARA PENULISAN

- Menuliskan titik-titik pangkal dan ujung dengan tanda panah (biasanya menggunakan huruf besar).

$$\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{PQ},\ \ldots$$

- Menuliskan nama/label vektor (biasanya menggunakan huruf kecil).

$$\vec{u},\ \underline{u},\ \mathbf{u},\ \ldots$$

Pada mata kuliah ini, nama/label vektor menggunakan huruf kecil.

Contoh penulisan vektor:

- Dalam bentuk vektor kolom:

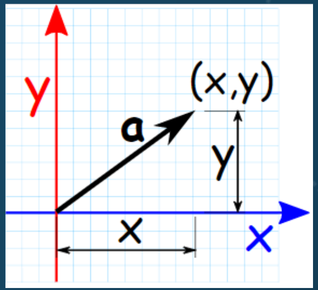
$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad u = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

- Dalam bentuk vektor baris:

$$\overrightarrow{AB} = (3,4); \quad v=(2,-1,2)$$

- Dalam bentuk kombinasi vektor basis:

$$\underline{a} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 7\mathbf{k};\ \underline{v} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$$



$$\underline{a} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$$

$$\underline{a} = (x,y)$$

$$a = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

KESAMAAN DUA BUAH VEKTOR

"Dua buah vektor dikatakan sama, jika panjang dan arahnya sama".

Arah sama artinya mempunyai garis pembawa yang berimpit atau sejajar dengan arah panah sama.

Misalkan u = (a,b) dan v = (c,d).

Jika u = v, maka |u| = |v| dan arah u = arah v. Kondisi tersebut akan terpenuhi jika a=c dan b=d.

Contoh:

Diketahui vektor: u=(2,b) dan v=(a,6). Tentukan a dan b jika u=v.
Karena u=v maka (2,b)=(a,6). Sehingga a=2 dan b=6.

Diketahui vektor: a = i + xj - 3k dan b = (x – y)i - 2j - 3k. Jika a = b, maka x + y = ...
a = i + xj - 3k = 1i + xj - 3k
b = (x – y)i - 2j - 3k
Karena a=b, maka:

- 1=x-y
- x=-2

1=(-2)-y atau y=-2-1; y=-3 dan x=-2.
Maka x+y = -2+(-3) = -5

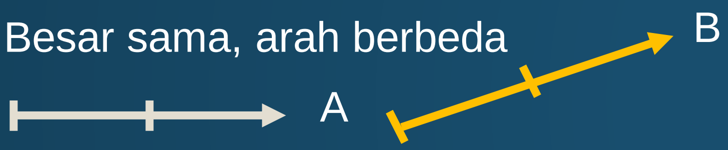
KESAMAAN DUA BUAH VEKTOR

a. Dua vektor sama jika arah dan besarnya sama

$A = B$

b. Dua vektor dikatakan tidak sama jika:

1. Besar sama, arah berbeda



$A \neq B$

2. Besar tidak sama, arah sama

$A \neq B$

3. Besar dan arahnya berbeda

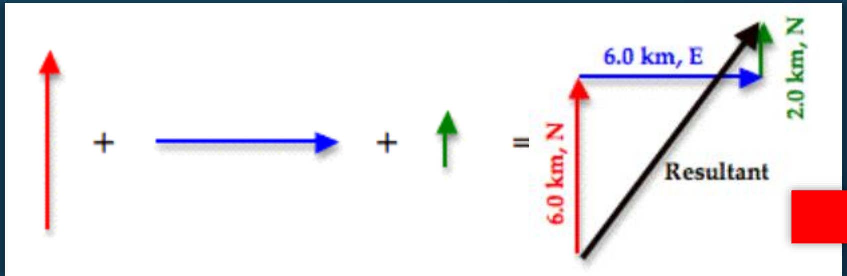
$A \neq B$

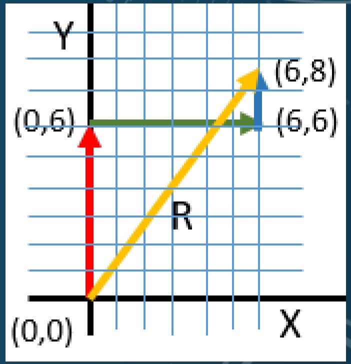
OPERASI-OPERASI PADA VEKTOR

Penjumlahan dan Pengurangan

- Hasil penjumlahan/pengurangan vektor disebut dengan vektor resultan (R)
- Resultan menghubungkan titik awal (head) dengan titik akhir (tail) dari penjumlahan/pengurangan.
- Resultan tidak menunjukkan total panjang lintasan seluruh vektor, tapi hanya menunjukkan panjang lintasan dari titik awal (vektor pertama) ke ujung vektor (vektor terakhir)

Contoh: Viktor melakukan *jogging* sejauh 6 km ke utara (N), lalu belok kanan sejauh 6 km ke timur (E). Setelah itu belok kiri sejauh 2 km ke utara (N) dan berhenti. Gambarkan resultan dari *jogging* Viktor, dan hitung berapa panjangnya.





Panjang resultan R dapat dihitung menggunakan rumus segitiga Pythagoras:

$R^2 = X^2 + Y^2$

$= 6^2 + 8^2$

$= 36 + 64$

$= 100$

$R = \sqrt{100} = 10$

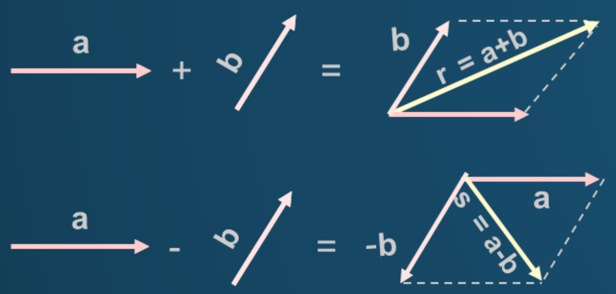
Perhatikan:
Total lintasan *jogging* Viktor=14 km
Resultan *jogging* Viktor=10 km

OPERASI-OPERASI PADA VEKTOR

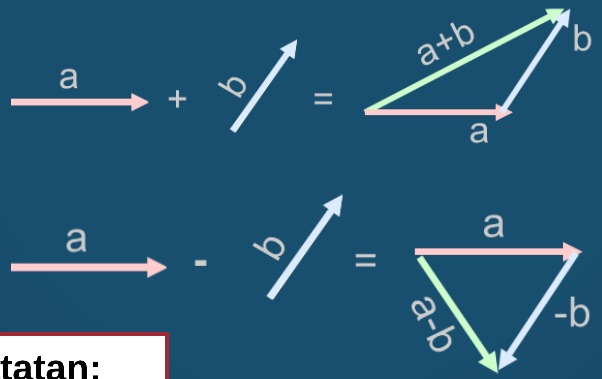
Penjumlahan dan Pengurangan

Metode Grafik

a. Metode Jajaran Genjang

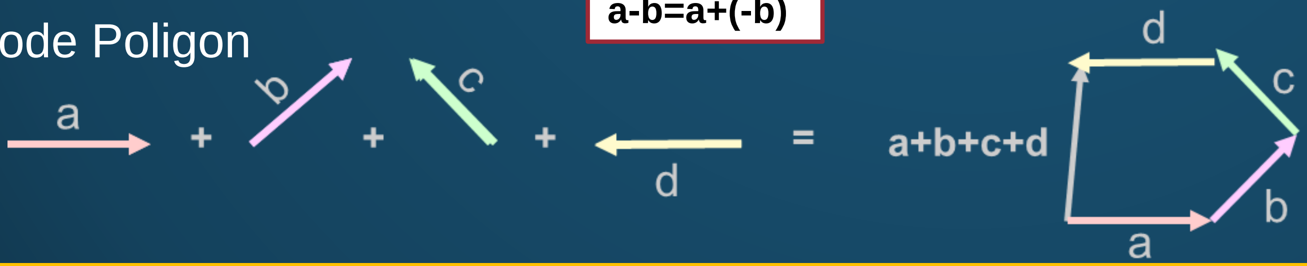


b. Metode Segitiga



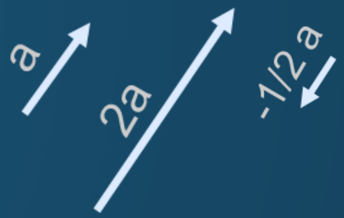
Catatan:
a-b=a+(-b)

c. Metode Poligon



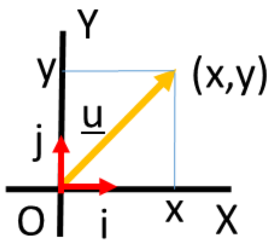
Perkalian Vektor dengan Skalar

Metode Grafik



KOMPONEN VEKTOR

Vektor di R^2	Vektor di R^3

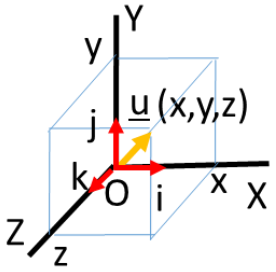


$$u = (x, y) \text{ atau } v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

u=xi+yj
i, j vektor basis
i=(1,0)
j=(0,1)

Panjang vektor

$$|u| = \sqrt{x^2 + y^2}$$



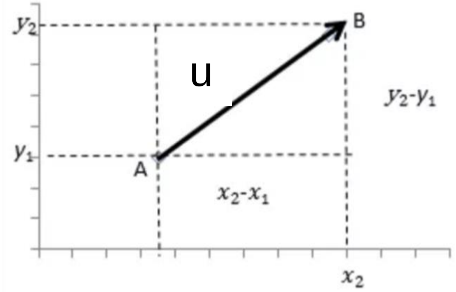
$$u = (x, y, z) \text{ atau } u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

u=xi+yj+zk
i, j, k vektor basis
i=(1,0,0)
j=(0,1,0)
k=(0,0,1)
Panjang vektor

$$|u| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Vektor dapat dinyatakan sebagai pasangan bilangan koordinat posisi vektor.

Vektor **u** yang dibentuk dari titik $A(x_1,y_1)$ menuju $B(x_2,y_2)$:



$$u = \overrightarrow{AB} = b - a \text{ atau}$$

$$u = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix} \text{ atau}$$

$$u = (x_2, y_2) - (x_1, y_1) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

KOMPONEN VEKTOR

Contoh. Tentukan vektor komponen (<u>u</u>) untuk masing-masing grafik di No. 1 dan No. 2, serta panjang nya.

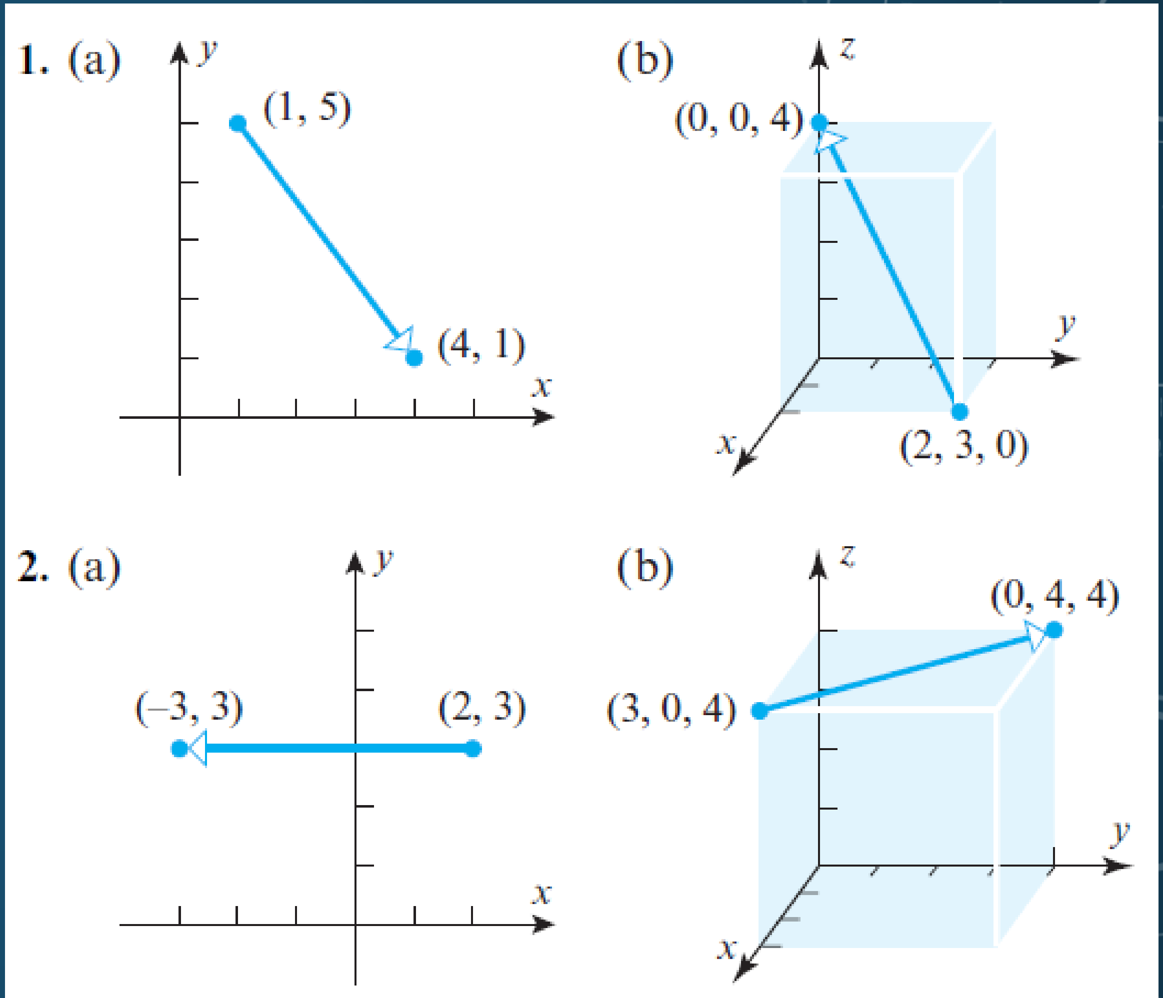
Jawab.

1a. u=(4,1)-(1,5)=(3,-4); |u| = 5

b. u=(0,0,4)-(2,3,0)=(-2,-3,4); |u| = √29

2a. u=(-3,3)-(2,3)=(-5,0); |u| = 5

b. u=(0,4,4)-(3,0,4)=(-3,4,0); |u| = 5



KOMPONEN VEKTOR

Contoh. Diberikan titik-titik P_1 dan P_2. Untuk No. 3 dan 4 berikut, tentukan vektor komponennya.

3. (a) $P_1(3, 5)$, $P_2(2, 8)$ (b) $P_1(5, -2, 1)$, $P_2(2, 4, 2)$

4. (a) $P_1(-6, 2)$, $P_2(-4, -1)$ (b) $P_1(0, 0, 0)$, $P_2(-1, 6, 1)$

Jawab.

3a. u=(2,8)-(3,5)=(-1,3) b. u=(2,4,2)-(5,-2,1) =(-3,6,1)

4a. u=(-4,-1)-(-6,2)=(2,3) b. u=(-1,6,1)-(0,0,0)=(-1,6,1)

Contoh. Tentukan titik akhir dari vektor u = *(1, 2)* dengan titik awal di titik A(1,1).

Jawab.

Misal titik akhir dari vektor u adalah titik B(x,y), maka vektor u dapat ditulis:

$$u = \overrightarrow{AB}$$
$$(1,2) = (x,y) - (1,1)$$
$$(1,2) = (x-1, y-1)$$

Sehingga $x - 1 = 1$ atau $x = 2$ dan $y - 1 = 2$ atau $y = 3$.

Jadi B(2,3) atau titik akhir vektor u adalah di titik B(2,3).

Contoh. Tentukan titik awal dari vektor u = *(1, 2)* dengan titik akhir di titik B(2,0).

Jawab.

Misal titik awal dari vektor u adalah titik A(x,y), maka vektor u dapat ditulis:

$$u = \overrightarrow{AB}$$
$$(1,2) = (2,0) - (x,y)$$
$$(1,2) = (2-x, -y)$$

Sehingga $2 - x = 1$ atau $x = 1$ dan $-y = 2$ atau $y = -2$.

Jadi A(1,-2) atau titik awal vektor u adalah di titik A(1,-2).

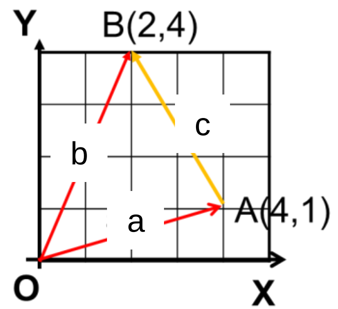
JENIS-JENIS VEKTOR

Vektor-vektor Khusus:

1. Vektor Nol (0); Vektor yang semua nilai komponen-nya nol. Panjang vektor nol = 0. Disebut juga elemen identitas.

$$0 = (0,0) \text{ atau } 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in R^2 \qquad 0 = (0,0,0) \text{ atau } 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in R^3$$

2. Vektor Satuan; Vektor yang panjangnya satu. Contoh: u=(0,1); v=(0.6, 0.8); w=(0,1,0), dst.
3. Vektor Basis; Vektor satuan yang saling tegak lurus (menempel di sumbu koordinat). Contoh: i=(1,0) dan j=(0,1) di R^2
   i=(1,0,0), j=(0,1,0), dan k=(0,0,1) di R^3
4. Vektor Posisi; Vektor yang titik awalnya di O(0,0) dan titik ujungnya berada di titik tertentu.



$a = \overrightarrow{OA}$ atau $a = (4,1)$ adalah vektor posisi dari titik A(4,1)

$b = \overrightarrow{OB}$ atau $b = (2,4)$ adalah vektor posisi dari titik B(2,4)

$c = \overrightarrow{AB}$ vektor yang bentuk dari titik A(4,1) ke titik B(2,4)

$$c = \overrightarrow{AB} = b - a$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

OPERASI DENGAN KOMPONEN VEKTOR

Jika diketahui vektor-vektor u,v $\in R^n$ dimana $u=(u_1,u_2,\ldots,u_n)$, $v=(v_1,v_2,\ldots,v_n)$ serta k adalah skalar (bilangan riil), maka:

1. $u+v=(u_1,u_2,\ldots,u_n)+(v_1,v_2,\ldots,v_n)$
   $=(u_1+v_1,u_2+v_2,\ldots,u_n+v_n)$
2. $u-v=(u_1,u_2,\ldots,u_n)-(v_1,v_2,\ldots,v_n)$
   $=(u_1-v_1,u_2-v_2,\ldots,u_n-v_n)$
3. $k(u)=k(u_1,u_2,\ldots,u_n)$
   $=(ku_1,ku_2,\ldots,ku_n)$

SIFAT-SIFAT

Jika diketahui vektor-vektor u,v,w $\in R^n$ dimana $u=(u_1,u_2,\ldots,u_n)$, $v=(v_1,v_2,\ldots,v_n)$, $w=(w_1,w_2,\ldots,w_n)$, serta k dan m adalah skalar (bilangan riil), maka:

1. $u \pm v = v \pm u$
2. $u \pm (v \pm w) = (u \pm v) \pm w$
3. $k(u \pm v) = ku \pm kv$
4. $(k \pm m)\, u = ku \pm mu$
5. $(km)\, u = k(mu) = m(ku) = (mk)\, u$
6. $u \pm 0 = u$; $u + (-u) = 0$; 0 = vektor nol
7. $m \mid u \mid = \mid mu \mid$
8. $\mid u+v \mid \leq |u| + |v|$

OPERASI DENGAN KOMPONEN VEKTOR

Contoh. Jika u = (4,−1), v = (0, 5), dan w = (−3,−3).
Tentukan komponen vektor dari:
(a) u + w (b) v − 3u
(c) 2(u − 5w) (d) 3v − 2(u + 2w)

Jawab.
(a) u+w=(4,-1)+(-3,-3)=(1,-4)
(b) v-3u=(0,5)-3(4,-1)=(0,5)-(12,-3)=(-12,8)
(c) 2(u-5w)=2u-10w=2(4,-1)-10(-3,-3)
=(8,-2)-(-30,-30)=(38,28)
(d) 3v-2(u+2w)=3v-2u-4w
=3(0,5)-2(4,-1)-4(-3,-3)=(4,29)

Jika u = (−3, 1, 2), v = (4, 0,−8), dan w = (6,−1,−4).
Tentukan komponen vektor dari:
(a) v − w (b) 6u + 2v
(c) −3(v − 2w) (d) (2u − w) − (v + 2u)

Jawab.
(a) v-w= (4, 0,−8)-(6,−1,−4)=(-2,1,-4)
(b) 6u+2v=6(−3, 1, 2)+2(4,0,-8) = (-18,6,12)+(8,0,-16)
=(-10,6,-4)
(c) -3(v-8w)=-3((4,0,-8)-2(6,-1,-4))
=-3 ((4,0,-8)-(12,-2,-8))
=-3(-8,2,0) = (24,-6,0)
(d) 2u-w=2(-3,1,2)-(6,-1,-4)=(-6,2,4)-(6,-1,-4)=(-12,3,8);
v+2u=(4,0,-8)+2(-3,1,2)=(4,0,-8)+(-6,2,4)=(-2,2,-4);
(2u-w)-(v+2u)=(-12,3,8)-(-2,2,-4)=(-10,1,12)