MATRIKS

TRANSFORMASI ELEMENTER DAN RANK MATRIKS

MATA KULIAH: MATRIKS DAN RUANG VEKTOR

PERTEMUAN: 5

MATERI

- Transformasi Elementer
- Ranks Matriks

TUJUAN

Mahasiswa mampu memahami dan mentransformasikan elementer baris dan kolom suatu matriks, serta mampu menghitung rank suatu matriks.

TRANSFORMASI ELEMENTER

Sebuah matriks n×n disebut matriks elementer jika matriks tersebut dapat ditemukan dari matriks identitas I_n melalui operasi baris tunggal (**operasi elementer baris**).

Misal E adalah matriks elementer yang diperoleh dari operasi elementer pada I_n. Jika operasi yang sama juga dilakukan pada matriks A maka akan menghasilkan matriks EA, yaitu hasil perkalian matriks E dengan A.

$$h(I)=E$$
$$h(A)=EA$$

Transformasi Elementer. Terdapat 3 transformasi elementer dasar pada matriks A, yaitu:

- Menukar 2 baris

$$h_{ij}(A)=H_{ij}A$$

- Mengalikan baris dengan konstanta k≠0.

$$h_i^{(k)}(A)=H_i^{(k)}A$$

- Menambahkan perkalian baris ke baris lain.

$$h_{ij}^{(k)}(A)=H_{ij}^{(k)}A$$

TRANSFORMASI ELEMENTER

Contoh.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 6 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{H_{13}A} \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 6 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Menukar baris ke-1 dengan baris ke-3 pada matriks A

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{h_{13}(I)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Menukar baris ke-1 dengan baris ke-3 pada matriks I

$$h_{13}(A) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 6 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 6 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = H_{13}A$$

Tampak bahwa operasi atau transformasi elementer pada matriks A memberikan hasil yang sama dengan operasi elementer pada matriks I yang dikalikan dengan matriks A.

$h_{13}(I)(A)=H_{13}(A)$ atau $h_{13}I(A)=H_{13}(A)$

TRANSFORMASI ELEMENTER

1. Penukaran baris ke-i dengan baris ke-j (baris ke-i dijadikan baris ke-j dan baris ke-j dijadikan baris ke-i), ditulis $H_{ij}(A)$.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 6 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{H_{13}(A)} \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 6 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Menukar baris ke-1 dengan baris ke-3 pada matriks A

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 6 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{H_{23}(A)} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 6 \end{bmatrix}$$

Menukar baris ke-2 dengan baris ke-3 pada matriks A

2. Penukaran kolom ke-i dengan kolom ke-j (kolom ke-i dijadikan kolom ke-j dan kolom ke-j dijadikan kolom ke-i), ditulis $K_{ij}(A)$.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 6 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{K_{13}(A)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 6 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Menukar kolom ke-1 dengan kolom ke-3 pada matriks A

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 6 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{K_{23}(A)} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 6 & -3 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Menukar kolom ke-2 dengan kolom ke-3 pada matriks A

TRANSFORMASI ELEMENTER

3. Mengalikan baris ke-i dengan skalar $\lambda \neq 0$, ditulis $H_i^{\lambda}(A)$.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 6 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{H_2^{3}(A)} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -9 & 18 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Mengalikan baris ke-2 dengan skalar 3

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 6 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{H_3^{(-2)}(A)} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 6 \\ -6 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

Mengalikan baris ke-3 dengan skalar -2

4. Mengalikan kolom ke-i dengan skalar $\lambda \neq 0$, ditulis $K_i^{\lambda}(A)$.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 6 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{K_2^{3}(A)} \begin{bmatrix} 0 & 6 & 1 \\ 1 & -18 & 6 \\ 3 & 6 & -1 \end{bmatrix}$$

Mengalikan kolom ke-2 dengan skalar 3

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 6 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{K_1^{(-3)}(A)} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -3 & -3 & 6 \\ -9 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Mengalikan kolom ke-1 dengan skalar -3

TRANSFORMASI ELEMENTER

5. Menambah baris ke-i dengan λ kali baris ke-j ditulis $H_{ij}^{\lambda}(A)$.

$$A=\begin{bmatrix}0 & 2 & 1\\ 1 & -3 & 6\\ 3 & 2 & -1\end{bmatrix} \xrightarrow{H_{13}^{(2)}(A)} \begin{bmatrix}2 & -4 & 13\\ 1 & -3 & 6\\ 3 & 2 & -1\end{bmatrix}$$

Menambah baris ke-1 dengan 2 kali baris ke-3 pada matriks A atau b1+2(b3)

$$A=\begin{bmatrix}0 & 2 & 1\\ 1 & -3 & 6\\ 3 & 2 & -1\end{bmatrix} \xrightarrow{H_{21}^{(-2)}(A)} \begin{bmatrix}0 & 2 & 1\\ 1 & -7 & 4\\ 3 & 2 & -1\end{bmatrix}$$

Menambah baris ke-2 dengan -2 kali baris ke-1 pada matriks A atau b2+(-2)(b1)

6. Menambah kolom ke-i dengan λ kali kolom ke-j ditulis $K_{ij}^{\lambda}(A)$.

$$A=\begin{bmatrix}0 & 2 & 1\\ 1 & -3 & 6\\ 3 & 2 & -1\end{bmatrix} \xrightarrow{K_{13}^{(2)}(A)} \begin{bmatrix}2 & 2 & 1\\ 13 & -3 & 6\\ 1 & 2 & -1\end{bmatrix}$$

Menambah kolom ke-1 dengan 2 kali kolom ke-3 pada matriks A atau k1+2(k3)

$$A=\begin{bmatrix}0 & 2 & 1\\ 1 & -3 & 6\\ 3 & 2 & -1\end{bmatrix} \xrightarrow{K_{23}^{(0.5)}(A)} \begin{bmatrix}0 & 2.5 & 1\\ 1 & 0 & 6\\ 3 & 1.5 & -1\end{bmatrix}$$

Menambah kolom ke-2 dengan 0.5 kali kolom ke-3 pada matriks A atau k2+(0.5)(k3)

TRANSFORMASI ELEMENTER

7. Menambah μ kali baris ke-i dengan λ kali baris ke-j ditulis $H_i{}^{\mu}{}_j{}^{\lambda}(A)$.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 6 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{H_1{}^3{}_3{}^{(2)}(A)} \begin{bmatrix} 6 & 10 & 1 \\ 1 & -3 & 6 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Menambah 3 kali ke-1 dengan 2 kali baris ke-3 pada matriks A atau 3b1+2(b3)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 6 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{H_2{}^2{}_3{}^{(-1)}(A)} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & -8 & 13 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Menambah 2 kali ke-2 dengan -1 kali baris ke-3 pada matriks A atau 2b2+(-1)(b3)

8. Menambah μ kali kolom ke-i dengan λ kali kolom ke-j ditulis $K_i{}^{\mu}{}_j{}^{\lambda}(A)$.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 6 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{K_1{}^3{}_3{}^{(2)}(A)} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 15 & -3 & 6 \\ 7 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Menambah 3 kolom ke-1 dengan 2 kali kolom ke-3 pada matriks A atau 3k1+2(k3)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 6 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{K_2{}^2{}_3{}^{(-1)}(A)} \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & -12 & 6 \\ 3 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

Menambah 2 kolom ke-2 dengan -1 kali kolom ke-3 pada matriks A atau 2k2+(-1)(k3)

MATRIKS EKWIVALEN

- Matriks A disebut ekuivalen dengan B ditulis A ~ B, bila matriks A dapat diperoleh dari B atau matriks B dapat diperoleh dari matriks A dengan transformasi elementer.
- Bila transformasi elementer hanya dilakukan pada baris saja, dikatakan ekuivalen baris. Sedangkan bila transformasi elementer pada kolom saja disebut ekuivalen kolom.

Contoh. Perhatikan contoh transformasi elementer berikut

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 6 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{H_{13}^{(2)}(A)} \begin{bmatrix} 2 & -4 & 13 \\ 1 & -3 & 6 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} = B. \text{ Maka } A \sim B.$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 6 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{K_{13}^{(2)}(A)} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 13 & -3 & 6 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} = B. \text{ Maka } A \sim B.$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 6 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{H_{1}{}^{3}{}_{3}{}^{(2)}(A)} \begin{bmatrix} 6 & 10 & 1 \\ 1 & -3 & 6 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} = B. \text{ Maka } A \sim B.$$

MATRIKS EKWIVALEN

- Matriks A disebut ekuivalen dengan B ditulis A ~ B, bila matriks A dapat diperoleh dari B atau matriks B dapat diperoleh dari matriks A dengan transformasi elementer.
- Bila transformasi elementer hanya dilakukan pada baris saja, dikatakan ekuivalen baris. Sedangkan bila transformasi elementer pada kolom saja disebut ekuivalen kolom.

Contoh. Matriks A dan B berikut adalah ekwivalen karena matriks B dapat diturunkan dari matriks A melalui transformasi elementer.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{H_{12}} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{K_{12}^{(1)}} \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{K_{42}^{(-1)}} \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = B$$

RANK MATRIKS

Rank matriks A, ditulis r(A) adalah dimensi suatu matriks yang menyatakan banyak maksimum vektor-vektor baris/kolom yang bebas linier (saling berkelipatan).

- Jika matriks A hanya terdiri dari dua baris, cukup diperiksa apakah kedua baris tersebut berkelipatan. Jika tidak berkelipatan maka r(A)=2, sedangkan bila berkelipatan maka r(A) = 1.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 9 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Baris-baris pada A tidak saling berkelipatan. Maka r(A)=2

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 6 & 2 & -3 \\ \frac{1}{3} & -2 & -\frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

Baris-baris pada B saling berkelipatan. Maka r(B)=1

RANK MATRIKS

Prosedur mencari Rank:

1. Tentukan elemen Pivot (pada baris/kolom), untuk mempermudah pilih elemen 1 atau –1.
2. Jadikan nol semua elemen yang sekolom/sebaris dengan pivot tersebut.
3. Sekarang kita perlu perhatikan lagi baris /kolom yang tertinggal (tanpa baris atau kolom yang terdapat pivot):
   a. apabila tinggal dua baris/kolom yang tersisa maka tinggal diperiksa apakah baris/kolom tersebut kelipatan. Jika ya maka salah satu baris/kolom tersebut dapat dijadikan nol (rank=1), jika tidak langkah selesai (rank=2).
   b. apabila masih lebih dari dua baris/kolom lakukan lagi langkah 1 di atas sampai langkah 3.a.

Contoh. Tentukan rank dari matriks $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1^* & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & 0 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{H_{21}^{(-1)}} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{H_{31}^{(-2)}} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ -1 & -7 & 0 & -7 \\ 1^* & 5 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{H_{34}^{(1)}} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 1 & 5 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{H_{23}^{(-1)}} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 1 & 5 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Sehingga R(A)=3

SOAL LATIHAN

1. Tentukan : H_{12}, K_{13}, $H_2^{(-2)}$, $K_3^{(2)}$, $H_{31}^{(1)}$, $K_{21}^{(2)}$, $H_2^{(1)}{}_3^{(2)}$ dari matriks-matriks berikut.

$$\text{a. } A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 8 & 6 & 1 \end{bmatrix}; \text{b. } A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

2. Matriks B berikut diperoleh dari hasil transformasi elementer $H_{31}^{(1)}(A)$. Tentukan matriks A.

$$\text{a. } B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 8 & 6 & 1 \end{bmatrix}; \text{b. } B = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

SOAL LATIHAN

3. Selidikilah, apakah matriks A dan B berikut ekuivalen?

$$a.\ A=\begin{bmatrix}3 & 1 & 2\\ 4 & 3 & 0\\ 1 & 3 & 1\end{bmatrix};\ B=\begin{bmatrix}3 & 1 & 2\\ 1 & 3 & 1\\ 4 & 3 & 0\end{bmatrix}$$

$$a.\ A=\begin{bmatrix}5 & 1 & 4 & 1\\ 2 & 0 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1 & 0\end{bmatrix};\ B=\begin{bmatrix}5 & 2 & 4 & 1\\ 2 & 3 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

4. Tentukan rank dari matriks-matriks berikut:

$$a.\ A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 1 & -2 & -3\\ 1 & 4 & 3 & -1 & -4\\ 2 & 3 & -4 & -7 & -3\end{bmatrix}$$

$$b.\ A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & -2\\ 5 & -1\\ -2 & 3\end{bmatrix}$$

$$c.\ A=\begin{bmatrix}3 & -1 & 2\\ 1 & 2 & -1\\ -1 & -2 & 1\end{bmatrix}$$

$$d.\ A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 1\\ 2 & 3 & 1 & 4\\ 1 & 4 & 2 & 3\\ 1 & 3 & -3 & 5\end{bmatrix}$$