



SISTEM PERSAMAAN LINIER SERENTAK

MATA KULIAH: METODE NUMERIK
PERTEMUAN: 7



MATERI

- Metode Eliminasi Gauss-Jordan
- Metode Iterasi Gauss-Seidel

TUJUAN

- Mahasiswa mampu mengetahui, memahami dan memecahkan model system persamaan linier serentak.
- Mahasiswa mampu memahami dan menyelesaikan sistem persamaan linier serentak dengan menggunakan Metode Numerik.

METODE ELIMINASI GAUSS-JORDAN

- Metode ini merupakan pengembangan metode eliminasi Gauss, hanya saja augmented matrik, pada sebelah kiri diubah menjadi matrik diagonal

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} & b_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & d_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & d_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & d_n \end{bmatrix}$$

- Penyelesaian dari persamaan linier simultan diatas adalah nilai $d_1, d_2, d_3, \dots, d_n$ dan atau:

$$x_1 = d_1, x_2 = d_2, x_3 = d_3, \dots, x_n = d_n$$

CONTOH

- Selesaikan pers linier serentak:

$$x_1 + x_2 = 3$$

$$2x_1 + 4x_2 = 8$$

- Augmented matrik dari persamaan linier simultan

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

- Penyelesaian persamaan linier simultan :

$$x_1 = 2 \text{ dan } x_2 = 1$$

- Lakukan operasi baris elementer

$$B_2 - 2b_1 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B_2 / 2 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_1 - B_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

CONTOH

$$\begin{array}{r} x + y + 2z = 9 \\ 2x + 4y - 3z = 1 \\ 3x + 6y - 5z = 0 \end{array}$$

$B_2 - 2B_1$



$$\begin{array}{r} x + y + 2z = 9 \\ 2y - 7z = -17 \\ 3x + 6y - 5z = 0 \end{array}$$

$B_3 - 3B_1$



$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

$B_2 - 2B_1$



$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

$B_3 - 3B_1$



EXAMPLE 3: USING ELEMENTARY ROW OPERATION (2/4)

$$x + y + 2z = 9$$

$$2y - 7z = -17$$

$$3y - 11z = -27$$

$\frac{1}{2} B_2$



$$x + y + 2z = 9$$

$$y - \frac{7}{2}z = -\frac{17}{2}$$

$$3y - 11z = 0$$

$B_3 - 3B_2$



$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix}$$

$\frac{1}{2} B_2$



$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix}$$

$B_3 - 3B_2$



EXAMPLE 3: USING ELEMENTARY ROW OPERATION (3/4)

$$\begin{aligned}x + y + 2z &= 9 \\ y - \frac{7}{2}z &= -\frac{17}{2} \\ -\frac{1}{2}z &= -\frac{3}{2}\end{aligned}$$

$-2 B_3$



$$\begin{aligned}x + y + 2z &= 9 \\ y - \frac{7}{2}z &= -\frac{17}{2} \\ z &= 3\end{aligned}$$

$B_1 - B_2$



$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

$-2 B_3$



$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$B_1 - B_2$



EXAMPLE 3: USING ELEMENTARY ROW OPERATION (4/4)

$$\begin{aligned}x + \frac{11}{2}z &= \frac{35}{2} \\ y - \frac{7}{2}z &= -\frac{17}{2} \\ z &= 3\end{aligned}$$

$$B_2 + 7/2 B_3$$



$$B_1 - 11/2 B_3$$

$$\begin{aligned}x &= 1 \\ y &= 2 \\ z &= 3\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{11}{2} & \frac{35}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B_2 + 7/2 B_3$$



$$B_1 - 11/2 B_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

■ Solusi $x = 1$, $y=2$ dan $z=3$

ALGORITHMMA METODE ELIMINASI GAUSS-JORDAN

- (1) Masukkan matrik A, dan vektor B beserta ukurannya n
- (2) Buat augmented matrik $[A|B]$ namakan dengan A
- (4) Untuk baris ke i dimana $i=1$ s/d n
 - (a) Perhatikan apakah nilai $a_{i,i}$ sama dengan nol :
Bila ya :
 pertukarkan baris ke i dan baris ke $i+k \leq n$, dimana $a_{i+k,i}$ tidak sama dengan nol, bila tidak ada berarti perhitungan tidak bisa dilanjutkan dan proses dihentikan dengan tanpa penyelesaian.
Bila tidak : lanjutkan
 - (b) Jadikan nilai diagonalnya menjadi satu, dengan cara untuk setiap kolom k
 dimana $k=1$ s/d $n+1$, hitung $a_{i,k} = \frac{a_{i,k}}{a_{i,i}}$
- (6) Untuk baris ke j, dimana $j = i+1$ s/d n
 Lakukan operasi baris elementer: untuk kolom k dimana $k=1$ s/d n
 Hitung $c = a_{j,i}$
 Hitung $a_{j,k} = a_{j,k} - c.a_{i,k}$
- (7) Penyelesaian, untuk $i = n$ s/d 1 (bergerak dari baris ke n sampai baris pertama)
 $x_i = a_{i,n+1}$

METODE ELIMINASI GAUSS-SEIDEL

- Metode iterasi Gauss-Seidel adalah metode yang menggunakan proses iterasi hingga diperoleh nilai-nilai yang berubah.
- Bila diketahui persamaan linier serentak:

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc} a_{11} & x_1 & + & a_{12} & x_2 & + & a_{13} & x_3 & + & \dots & + & a_{1n} & x_n & = & b_1 \\ a_{21} & x_1 & + & a_{22} & x_2 & + & a_{23} & x_3 & + & \dots & + & a_{2n} & x_n & = & b_2 \\ a_{31} & x_1 & + & a_{32} & x_2 & + & a_{33} & x_3 & + & \dots & + & a_{3n} & x_n & = & b_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & x_1 & + & a_{n2} & x_2 & + & a_{n3} & x_3 & + & \dots & + & a_{nn} & x_n & = & b_n \end{array}$$

METODE ELIMINASI GAUSS-SEIDEL

- Berikan nilai awal dari setiap x_i ($i=1$ s/d n) kemudian persamaan linier simultan diatas dituliskan menjadi:

$$x_1 = \frac{1}{a_{11}} (b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \dots - a_{1n}x_n)$$

$$x_2 = \frac{1}{a_{22}} (b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - \dots - a_{2n}x_n)$$

.....

$$x_n = \frac{1}{a_{nn}} (b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \dots - a_{nn-1}x_{n-1})$$

METODE ELIMINASI GAUSS-SEIDEL

- Dengan menghitung nilai-nilai x_i ($i=1$ s/d n) menggunakan persamaan-persamaan di atas secara terus-menerus hingga nilai untuk setiap x_i ($i=1$ s/d n) sudah sama dengan nilai x_i pada iterasi sebelumnya maka diperoleh penyelesaian dari persamaan linier simultan tersebut.
- Atau dengan kata lain proses iterasi dihentikan bila selisih nilai x_i ($i=1$ s/d n) dengan nilai x_i pada iterasi sebelumnya kurang dari nilai toleransi error yang ditentukan.
- Untuk mengecek kekonvergenan:

$$\varepsilon_{a,i} = \left| \frac{x_i^k - x_i^{k-1}}{x_i^k} \right| \times 100\%$$

CATATAN

- Hati-hati dalam menyusun sistem persamaan linier ketika menggunakan metode iterasi Gauss-Seidel ini.
- Perhatikan setiap koefisien dari masing-masing x_i pada semua persamaan di diagonal utama (a_{ii}).
- Letakkan nilai-nilai terbesar dari koefisien untuk setiap x_i pada diagonal utama.
- Masalah ini adalah '**masalah pivoting**' yang harus benar-benar diperhatikan, karena penyusun yang salah akan menyebabkan iterasi menjadi divergen dan tidak diperoleh hasil yang benar.

CONTOH

$$x_1 + x_2 = 5$$

$$2x_1 + 4x_2 = 14$$

- Berikan nilai awal : $x_1 = 0$ dan $x_2 = 0$
- Susun persamaan menjadi:

$$x_1 = 5 - x_2$$

$$x_2 = \frac{1}{4}(14 - 2x_1)$$

	$x_1 = 5 - 0 = 5$
iterasi 1 :	$x_2 = \frac{1}{4}(14 - 2 \cdot 5) = 1$
	$x_1 = 5 - 1 = 4$
iterasi 2 :	$x_2 = \frac{1}{4}(14 - 2 \cdot 4) = \frac{3}{2}$
	$x_1 = 5 - \frac{3}{2} = \frac{7}{2}$
iterasi 3 :	$x_2 = \frac{1}{4}\left(14 - 2 \cdot \frac{7}{2}\right) = \frac{7}{4}$

$$(5,1)$$

$$(4,3/2)$$

$$(7/2,7/4)$$

CONTOH

$$\begin{aligned} \text{iterasi 4 :} \quad & x_1 = 5 - \frac{7}{4} = \frac{13}{4} \\ & x_2 = \frac{1}{4} \left(14 - 2 \cdot \frac{13}{4} \right) = \frac{15}{8} \\ & x_1 = 5 - \frac{15}{8} = \frac{25}{8} \\ \text{iterasi 5 :} \quad & x_2 = \frac{1}{4} \left(14 - 2 \cdot \frac{25}{8} \right) = \frac{31}{16} \\ & x_1 = 5 - \frac{31}{16} = \frac{49}{16} \\ \text{iterasi 6 :} \quad & x_2 = \frac{1}{4} \left(14 - 2 \cdot \frac{49}{16} \right) = \frac{63}{32} \\ & x_1 = 5 - \frac{63}{32} = \frac{97}{32} \\ \text{iterasi 7 :} \quad & x_2 = \frac{1}{4} \left(14 - 2 \cdot \frac{97}{32} \right) = \frac{127}{64} \end{aligned}$$

$$(13/4, 15/8)$$

$$(25/8, 31/16)$$

$$(49/16, 63/32)$$

$$(97/32, 127/64)$$

CONTOH

- Selesaikan sistem persamaan berikut:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 6$$

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 2$$

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 = 10$$

- Augmented matrik dari persamaan linier simultan tersebut:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 10 \end{bmatrix}$$

HASIL DIVERGEN

```
C:\ "D:\Beban_Mengajar_2005\MetNum\METODE NUMERIK 2006\Praktikum_20... - □ X
Nama File Matrik :input.txt
Masukkan Error yang diinginkan = 0.1
Iterasi Maksimum = 20

Ukuran Matrik = 3
| 1 1 1 | 6
| 1 2 -1 | 2
| 2 1 2 | 10

0      0      0      0
1      6      -2      0      6      2      0
2      8      -3      -1.5      2      1      1.5
3     10.5     -5      -3      2.5      2      1.5
4     14      -7.5     -5.25      3.5      2.5      2.25
5     18.75    -11     -8.25      4.75      3.5      3
6     25.25    -15.75   -12.375      6.5      4.75      4.125
7     34.125   -22.25   -18      8.875      6.5      5.625
8     46.25    -31.125  -25.6875     12.125      8.875      7.6875
9     62.8125  -43.25   -36.1875     16.5625     12.125     10.5
10    85.4375  -59.8125  -50.5313     22.625     16.5625     14.3438
11   116.344  -82.4375  -70.125     30.9063     22.625     19.5938
12   158.563  -113.344  -96.8906     42.2188     30.9063     26.7656
13   216.234  -155.563  -133.453     57.6719     42.2188     36.5625
14   295.016  -213.234  -183.398     78.7813     57.6719     49.9453
15   402.633  -292.016  -251.625    107.617     78.7813     68.2266
16   549.641  -399.633  -344.824    147.008    107.617     93.1992
17   750.457  -546.641  -472.137    200.816    147.008    127.313
18  1024.78   -747.457  -646.049    274.32     200.816    173.912
19  1399.51  -1021.78   -883.617    374.729     274.32     237.568
Press any key to continue
```

HASIL KONVERGEN

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 = 10$$

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 2$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 6$$

```
"D:\Beban_Mengajar_2005\MetNum\METODE NUMERIK 2006\Praktikum_20...
Nama File Matrik :input.txt
Masukkan Error yang diinginkan = 0.1
Iterasi Maksimum = 10

Ukuran Matrik = 3
| 2 1 2 | 10
| 1 2 -1 | 2
| 1 1 1 | 6

0      0      0      0
1      5      -1.5    2.5    5    1.5    2.5
2      3.25    0.625    2.125    1.75    2.125    0.375
3      2.5625    0.78125    2.65625    0.6875    0.15625    0.53125
4      1.95313    1.35156    2.69531    0.609375    0.570313    0.0390625
5      1.62891    1.5332    2.83789    0.324219    0.181641    0.142578
6      1.39551    1.72119    2.8833    0.233398    0.187988    0.0454102
7      1.2561    1.8136    2.9303    0.139404    0.0924072    0.0469971
8      1.1629    1.8837    2.9534    0.0932007    0.0700989    0.0231018
Press any key to continue_
```

ALGORITHMMA METODE ELIMINASI GAUSS-SEIDEL

(1) Masukkan matrik A , dan vektor B beserta ukurannya n

(2) Tentukan batas maksimum iterasi max_iter

(3) Tentukan toleransi error ϵ

(4) Tentukan nilai awal dari x_i , untuk $i=1$ s/d n

(5) Simpan x_i dalam s_i , untuk $i=1$ s/d n

(6) Untuk $i=1$ s/d n hitung :

$$x_i = \frac{1}{a_{i,i}} \left(b_i - \sum_{j \neq i} a_{i,j} x_j \right)$$

$$e_i = |x_i - s_i|$$

(7) iterasi \leftarrow iterasi+1

(8) Bila iterasi lebih dari max_iter atau tidak terdapat $e_i < \epsilon$ untuk $i=1$ s/d n maka proses dihentikan dari penyelesaiannya adalah x_i untuk $i=1$ s/d n . Bila tidak maka ulangi langkah (5)

CONTOH

Selesaikan dg Eliminasi Gauss-Jordan

1. $x_1 + x_2 + 2x_3 = 8$
 $-x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1$
 $3x_1 - 7x_2 + 4x_3 = 10$
2. $x - y + 2z - w = -1$
 $2x + y - 2z - 2w = -2$
 $-x + 2y - 4z + w = 1$
 $3x - 3w = -3$
3. $x + y + 2z = 9$
 $2x + 4y - 3z = 1$
 $3x + 6y - 5z = 0$

LATIHAN

Selesaikan dg Gauss Seidel

1. $5x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 0$

$-2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0$

2. $x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 = 1$

$x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 2$

$x_1 - 12x_2 - 11x_3 - 16x_4 = 5$

CONTOH PENYELESAIAN PERMASALAHAN PERS LINIER SERENTAK

Mr.X membuat 2 macam boneka A dan B. Boneka A memerlukan bahan 10 blok B1 dan 2 blok B2, sedangkan boneka B memerlukan bahan 5 blok B1 dan 6 blok B2. Berapa jumlah boneka yang dapat dihasilkan bila tersedia 80 blok bahan B1 dan 36 blok bahan B2.

Model Sistem Persamaan Linier :

- **Variabel yang dicari adalah jumlah boneka, anggap:**
 - x_1 adalah jumlah boneka A
 - x_2 adalah jumlah boneka B
- **Perhatikan dari pemakaian bahan :**
 - B1: 10 bahan untuk boneka A + 5 bahan untuk boneka B = 80
 - B2: 2 bahan untuk boneka A + 6 bahan untuk boneka B = 36
- Diperoleh model sistem persamaan linier
$$10x_1 + 5x_2 = 80$$
$$2x_1 + 6x_2 = 36$$