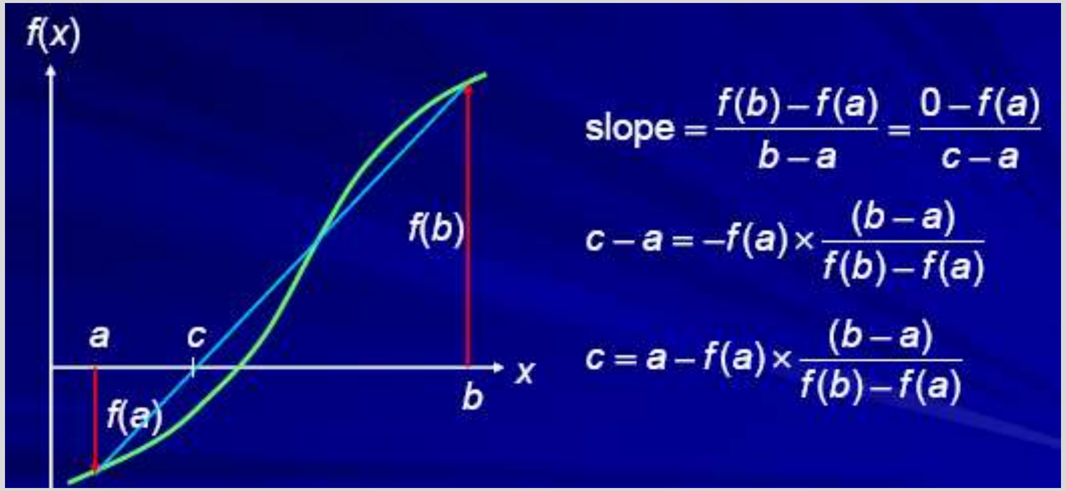
AKAR PERSAMAAN

MATA KULIAH: METODE NUMERIK

PERTEMUAN: 4

METODE REGULA FALSI

- Metode pencarian akar persamaan dengan memanfaatkan kemiringan dan selisih tinggi dari dua titik batas range.
- Dua titik a dan b pada fungsi f(x) digunakan untuk mengestimasi posisi c dari akar interpolasi linier.
- Metode ini juga dikenal dengan metode False Position

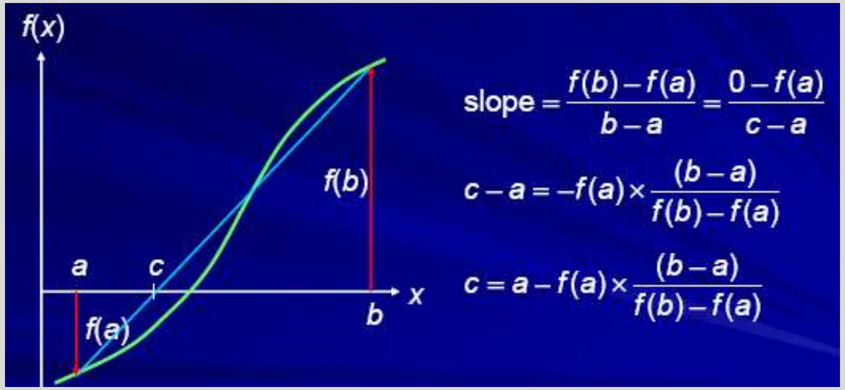


$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f(b)-0}{b-x}$$

$$x = b - \frac{f(b)(b-a)}{f(b)-f(a)}$$

$$x = \frac{af(b)-bf(a)}{f(b)-f(a)}$$

METODE REGULA FALSI



$$\frac{f(b) - f(a)}{b-a} = \frac{f(b) - 0}{b-x}$$

$$x = b - \frac{f(b)(b-a)}{f(b) - f(a)}$$

$$x = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}$$

Algoritma

1. definisikan fungsi f(x)
2. Tentukan batas bawah (a) dan batas atas (b)
3. Tentukan toleransi error (e) dan iterasi maksimum (n)
4. Hitung Fa = f(a) dan Fb = f(b)
5. Untuk iterasi I = 1 s/d n atau error > e
   - $x = \dfrac{Fb.a - Fa.b}{Fb - Fa}$
   - Hitung Fx = f(x)
   - Hitung error = |Fx|
   - Jika Fx.Fa <0 maka b = x dan Fb = Fx jika tidak a = x dan Fa = Fx.
6. Akar persamaan adalah x.

METODE REGULA FALSI

Cari salah satu akar dari $xe^{-x}+1=0$ pada interval x= [-1,0] dengan metode Regula Falsi. Lakukan pencarian sampai 10 iterasi.

$f(x)=xe^{-x}+1$; e=2,71828

Iterasi 1:

- a=-1 → $f(a)=(-1)e^{-(-1)}+1=-1{,}71828$; f(a)<0
- b=0 → $f(b)=(0)e^{-(0)}+1=1$; f(b)>0

$$x_1=\frac{af(b)-bf(a)}{f(b)-f(a)}=\frac{(-1)(1)-(0)(-1{,}71828)}{1-(-1{,}71828)}=\frac{-1}{2{,}71828}=-0{,}36788$$

$$x_1=-0{,}36788\to f(x_1)=(-0{,}36788)e^{-(-0{,}36788)}+1=0{,}468536$$

$f(x_1)>0$, berbeda tanda dengan f(a)<0, maka interval baru untuk iterasi berikutnya adalah $[a, x_1]$ atau [-1;-0,36788]

Iterasi 2:

- a=-1 → f(a)=-1,71828; f(a)<0
- b=-0,36788 → f(b)=0,468536; f(b)>0

$$x_2=\frac{(-1)(0{,}468536)-(-0{,}36788)(-1{,}71828)}{0{,}468536-(-1{,}71828)}=\frac{-1{,}10066}{2{,}71828}=-0{,}50331$$

$$x_2=-0{,}50331\to f(x_1)=(-0{,}50331)e^{-(-0{,}50331)}+1=0{,}16742$$

$f(x_2)>0$, berbeda tanda dengan f(a), maka interval baru untuk iterasi berikutnya adalah $[a, x_2]$ atau [-1;-0,50331]

METODE REGULA FALSI

Dengan cara yang sama (lihat iterasi 1 dan iterasi 2), diperoleh:

Iterasi 3:

- a=-1 → f(a)=-1,71828; f(a)<0
- b=-0,50331 → f(b)=0,16742; f(b)>0

$x_3 = -0,54741$ $f(x_3) = 0,05365$

$f(x_3)>0$, berbeda tanda dengan f(a)<0, maka interval baru untuk iterasi berikutnya adalah [a, x_3] atau [-1; -0,54741]

Iterasi 4:

- a=-1 → f(a)=-1,71828; f(a)<0
- b=-0,54741→ f(b)=0,05365; f(b)>0

$x_4 = -0,56112$ $f(x_4) = 0,01658$

$f(x_4)>0$, berbeda tanda dengan f(a)<0, maka interval baru untuk iterasi berikutnya adalah [a, x_4] atau [-1; -0,56112]

Iterasi 5:

- a=-1 → f(a)=-1,71828; f(a)<0
- b=-0,56112→ f(b)=0,01658; f(b)>0

$x_5 = -0,56531$ $f(x_5) = 0,00506$

$f(x_5)>0$, berbeda tanda dengan f(a)<0, maka interval baru untuk iterasi berikutnya adalah [a, x_5] atau [-1; -0,56531]

Iterasi 6:

- a=-1 → f(a)=-1,71828; f(a)<0
- b=-0,56531→ f(b)=0,00506; f(b)>0

$x_6 = -0,56659$ $f(x_6) = 0,00154$

$f(x_6)>0$, berbeda tanda dengan f(a)<0, maka interval baru untuk iterasi berikutnya adalah [a, x_6] atau [-1; -0,56659]

METODE REGULA FALSI

Iterasi 7:

- a=-1 → f(a)=-1,71828; f(a)<0
- b=-0,56659 → f(b)=0,00154; f(b)>0

$x_7 = -0,56697$ $f(x_7) = 0,00047$

$f(x_7)>0$, berbeda tanda dengan f(a)<0, maka interval baru untuk iterasi berikutnya adalah [a, x_7] atau [-1; -0,56697]

Iterasi 8:

- a=-1 → f(a)=-1,71828; f(a)<0
- b=-0,56697 → f(b)=0,00047; f(b)>0

$x_8 = -0,56709$ $f(x_8) = 0,00014$

$f(x_8)>0$, berbeda tanda dengan f(a)<0, maka interval baru untuk iterasi berikutnya adalah [a, x_8] atau [-1; -0,56709]

Iterasi 9:

- a=-1 → f(a)=-1,71828; f(a)<0
- b=-0,56709 → f(b)=0,00014; f(b)>0

$x_9 = -0,56713$ $f(x_9) = 0,00004$

$f(x_9)>0$, berbeda tanda dengan f(a)<0, maka interval baru untuk iterasi berikutnya adalah [a, x_9] atau [-1; -0,56713]

Iterasi 10:

- a=-1 → f(a)=-1,71828; f(a)<0
- b=-0,56713→ f(b)=0,00004; f(b)>0

$x_{10} = -0,56714$ $f(x_6) = 0,00001$

Iterasi berhenti, karena hanya diminta hingga iterasi ke-10. Hingga iterasi ke-10 ini diperoleh akar terbaik x_{10}=-0,56714 dengan $f(x_{10})=0,00001 \cong 0$.
Iterasi dapat dilanjutkan lagi untuk memperoleh akar yang lebih baik, dengan menggunakan interval [a, x_{10}] atau [-1; -0,56714]

METODE REGULA FALSI

Ringkasan hasil perhitungan contoh di atas adalah sebagai berikut:

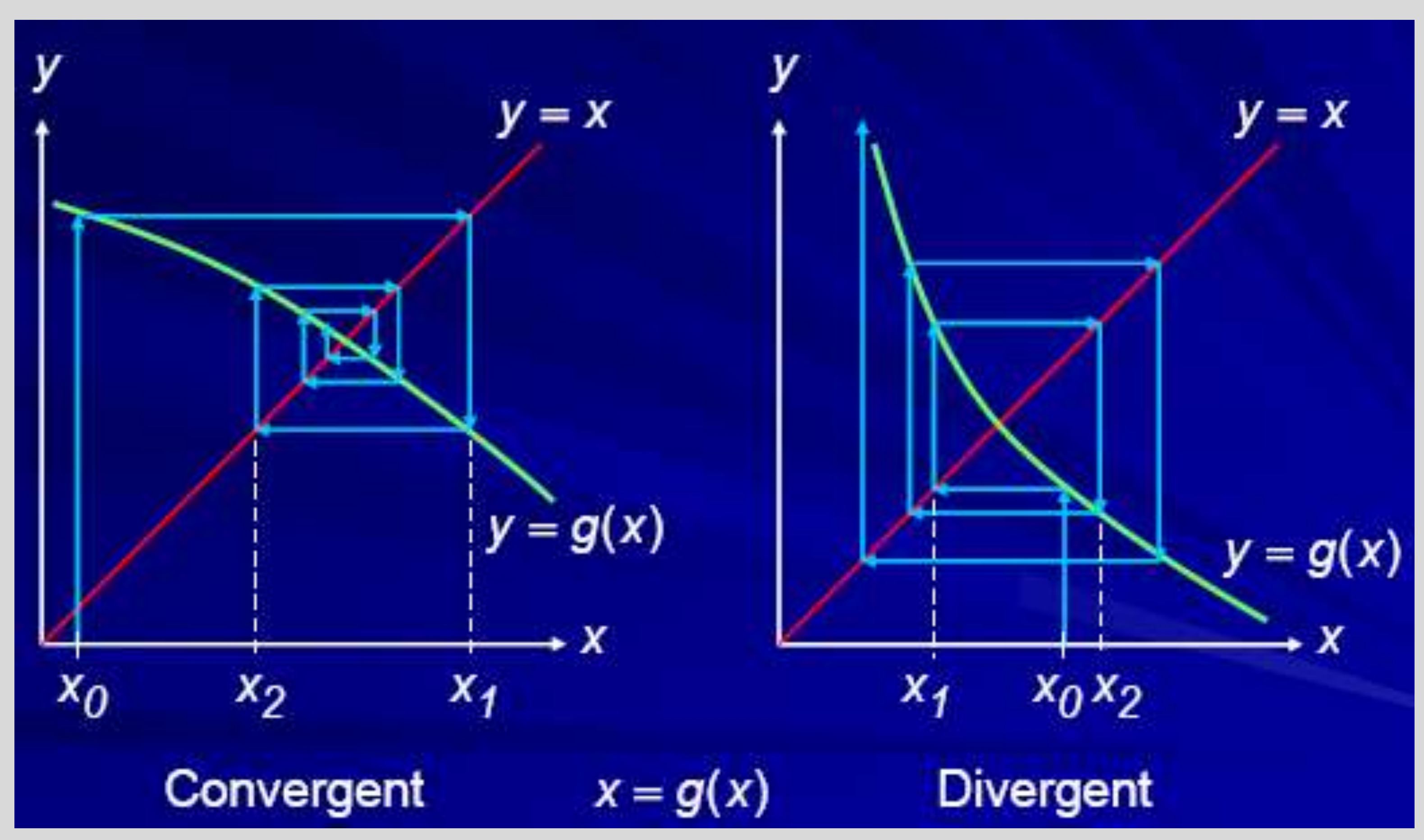
akar dari f(x)

iterasi	a	b	f(a)	f(b)	af(b)	bf(a)	af(b)-bf(a)	f(b)-f(a)	x	f(x)
1	-1	0	-1,71828	1	-1	0	-1	2,71828	-0,36788	0,46854
2	-1	-0,36788	-1,71828	0,46854	-0,46854	0,63212	-1,10066	2,18682	-0,50331	0,16742
3	-1	-0,50331	-1,71828	0,16742	-0,16742	0,86484	-1,03226	1,88570	-0,54741	0,05365
4	-1	-0,54741	-1,71828	0,05365	-0,05365	0,94061	-0,99426	1,77193	-0,56112	0,01658
5	-1	-0,56112	-1,71828	0,01658	-0,01658	0,96415	-0,98073	1,73486	-0,56531	0,00506
6	-1	-0,56531	-1,71828	0,00506	-0,00506	0,97136	-0,97642	1,72334	-0,56659	0,00154
7	-1	-0,56659	-1,71828	0,00154	-0,00154	0,97355	-0,97509	1,71982	-0,56697	0,00047
8	-1	-0,56697	-1,71828	0,00047	-0,00047	0,97422	-0,97469	1,71875	-0,56709	0,00014
9	-1	-0,56709	-1,71828	0,00014	-0,00014	0,97442	-0,97457	1,71842	-0,56713	0,00004
10	-1	-0,56713	-1,71828	0,00004	-0,00004	0,97448	-0,97453	1,71832	-0,56714	0,00001

Akar terbaik

METODE TERBUKA

- Metode terbuka merupakan metode pencarian akar persamaan berdasarkan 1 atau lebih akar awal tertentu tanpa harus mengetahui interval dimana akar tsb. berada.
- Jadi jika diketahui akar awal x_i maka perbaikan akar berikutnya (x_{i+1}) dilakukan menggunakan x_i tersebut.
- Berbeda dengan metode tertutup yang sebagian besar dilakukan secara iteratif untuk memperoleh akar yang konvergen, pada metode terbuka dimungkinkan terjadinya pencarian akar yang konvergen atau divergen.
- Pada sesi ini akan dibahas 3 metode terbuka: **metode iterasi, Newton-Raphson, dan secant**.



METODE ITERASI SEDERHANA

Contoh: Tentukan salah satu akar dari x^2-x-6=0 dengan metode iterasi, jika diketahui akar awal nya adalah 2,5.

$x^2-x-6=0$ dapat diubah menjadi :

- $x^2=x+6$ atau $x = \sqrt{x+6}$
- $x=x^2-6$

Misal dipilih $x=x^2-6$ dan dibentuk fungsi iterasi $x_{i+1}=x_i^2-6$, dimana i=0,1,2,…,n. Selanjutnya, secara iteratif akar persamaan dapat ditaksir sebagai berikut:

Iterasi 1: i=0; $x_0=2,5$

$x_1=x_0^2-6=(2,5)^2-6=(6,25-6)=0,25$

Iterasi 2: i=1; $x_1=0,25$

$x_2=x_1^2-6=(0,25)^2-6=(0,0625-6)=-5,9375$

Iterasi 3: i=2; $x_2=-5,9375$

$x_3=x_2^2-6=(-5,9375)^2-6=29,25391$

Iterasi 4: i=3; $x_3=29,25391$

$x_4=x_3^2-6=(29,25391)^2-6=8549,791$

Iterasi 5: i=4; $x_4=8549,791$

$x_5=x_4^2-6=(8549,791)^2-6=722138,8$

Dan seterusnya.

Hingga iterasi ke-5 tampak bahwa akar persamaan yang dicari ternyata divergen (menjauh dari nilai yang seharusnya). Secara analitik, akar sesungguhnya dari $x^2-x-6=0$ adalah x=3 atau x=-2.

Ini berarti penyusunan fungsi $x=g(x)=x^2-6$ kurang tepat.

METODE ITERASI SEDERHANA

Sekarang, akan dicoba menggunakan x=$\sqrt{x+6}$
Dibentuk fungsi iterasi x_{i+1}=$\sqrt{x_i+6}$, dimana i=0,1,2,…,n.

Iterasi 1: i=0; x_0=2,5

x_1=$\sqrt{x_0+6}$ =$\sqrt{2{,}5+6}$ = 2,9155

Iterasi 2: i=1; x_1=2,9155

x_2=$\sqrt{x_1+6}$ =$\sqrt{2{,}9155+6}$ = 2,9859

Iterasi 3: i=2; x_2=2,9859

x_3=$\sqrt{x_2+6}$ =$\sqrt{2{,}9859+6}$ = 2,9976

Iterasi 4: i=3; x_3=2,9976

x_4=$\sqrt{x_3+6}$ =$\sqrt{2{,}9976+6}$ = 2,9996

Iterasi 5: i=4; x_4=2,9996

x_5=$\sqrt{x_4+6}$ =$\sqrt{2{,}9996+6}$ = 2,9999

Iterasi 6: i=5; x_5=2,9999

x_6=$\sqrt{x_5+6}$ =$\sqrt{2{,}9999+6}$ = 3

Iterasi 7: i=6; x_6=3

x_7=$\sqrt{x_6+6}$ =$\sqrt{3+6}$ = 3

Iterasi 8: i=7; x_7=3

x_8=$\sqrt{x_7+6}$ =$\sqrt{3+6}$ = 3

Dengan ketelitian hitungan 4 digit desimal, hingga iterasi ke-8 diperoleh akar persamaan x=3 dan tampak sudah stabil dan konvergen ke nilai x=3.

Konvergensi atau divergensi pencarian akar pada metode iterasi sangat tergantung pada fungsi iteratif yang dipilih/disusun untuk penaksiran akar.

SOAL LATIHAN

Tentukan salah satu akar dari fungsi berikut menggunakan metode Regula Falsi:

1. $-0{,}6x^2+2.4x+5{,}5=0$ pada interval [5 ; 10]
2. $4x^3-6x^2+7x-2{,}3=0$ pada interval [0 ; 1]
3. $-26+85x-91x^2+44x^3-8x^4+x^5=0$ pada interval [0,5 ; 1,0]
4. $x^{3{,}5}=80$ pada interval [2 ; 5]
5. $-2x^6 - 1.6x^4 + 12x + 1 = 0$ pada interval [0 ; 1]

Tentukan salah satu akar dari fungsi berikut menggunakan metode iterasi sederhana:

1. $x^2-2x-3=0$ dengan akar awal $x_0=4$
2. $e^{-x}-x=0$ dengan akar awal $x_0=0$
3. $-x^2 + 1.8x + 2.5=0$ dengan akar awal $x_0=5$
4. $0{,}95x^3-5{,}9x^2 +10{,}9x-6=0$ dengan akar awal $x_0=3{,}5$
5. $2 \sin(\sqrt{x}) - x$ dengan akar awal $x_0=0{,}5$

Catatan: Lakukan komputasi soal-soal di atas masing-masing 5 iterasi dengan ketelitian hitungan 4 digit desimal.

is there any question?