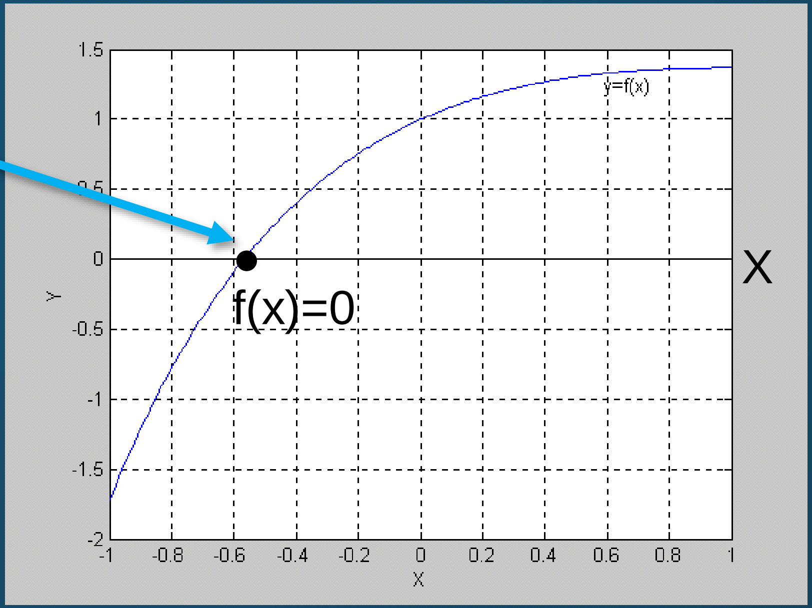
AKAR PERSAMAAN

MATA KULIAH: METODE NUMERIK

PERTEMUAN: 3

PENCARIAN AKAR PERSAMAAN

- Tujuan: menentukan akar-akar persamaan, khususnya persamaan non linier.
- Akar sebuah persamaan f(x)=0 adalah nilai-nilai x yang menyebabkan nilai f(x) sama dengan nol.
- Akar persamaan dari fungsi f(x) adalah titik potong antara kurva f(x) dan sumbu X.



PENCARIAN AKAR PERSAMAAN : METODE ANALITIK

- Penyelesaian persamaan linier (orde 1): *mx + c = 0* dimana *m* dan *c* adalah konstanta, dapat dihitung dengan :

$$mx + c = 0$$
$$x = -\frac{c}{m}$$

Contoh. Akar dari 3x-6=0 adalah x=6/3=2

- Penyelesaian persamaan kuadrat (orde 2): $ax^2 + bx + c = 0$ dapat dihitung dengan menggunakan rumus *abc:*

$$x_{12} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Contoh. Akar dari x^2-x-6=0 adalah:

$$x_{12} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-6)}}{2(1)}$$
$$= \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2}$$
$$x_1 = \frac{1-5}{2} = -2$$
$$x_2 = \frac{1+5}{2} = 3$$

- Pencarian akar secara analitik hanya cocok untuk persamaan-persamaan linier dan non-linier orde rendah (kurang dari 3).
- Persamaan-persamaan non-linier orde tinggi pada umumnya memerlukan komputasi analitik yang kompleks dan waktu komputasi yang lama. Pendekatan metode numerik dapat diterapkan untuk mengatasi problema tersebut dengan cara menemukan solusi hampiran atau akar pendekatan terbaik.

Contoh. Tentukan akar-akar persamaan polinom:

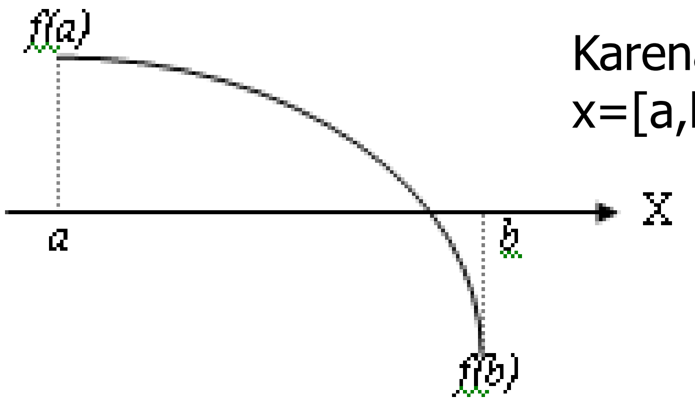
$$23.4x^7 - 1.25x^6 + 120x^4 + 15x^3 - 120x^2 - x + 100 = 0$$

PENCARIAN AKAR PERSAMAAN : METODE NUMERIK

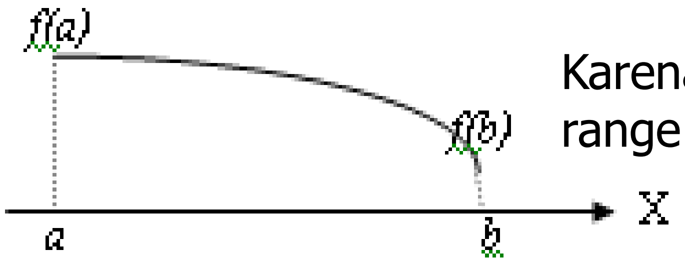
- **Metode Tertutup** →
  - Metode Tabel
  - Metode Biseksi
  - Metode Regula Falsi
  - Mencari akar pada range [a,b] tertentu
  - Dalam range [a,b] dipastikan terdapat satu akar
  - Hasil selalu konvergen → disebut juga metode konvergen
- **Metode Terbuka** →
  - Metode Newton-Raphson
  - Metode Secant
  - Metode Iterasi Sederhana
  - Diperlukan tebakan awal (akar awal)
  - x_n dipakai untuk menghitung x_{n+1}
  - Hasil dapat konvergen atau divergen

METODE TERTUTUP

- Suatu interval x=[a,b] mempunyai akar bila f(a) dan f(b) berlawanan tanda atau memenuhi **f(a).f(b)<0** (lihat ilustrasi pada gambar pertama).
- Sebaliknya, suatu interval x=[a,b] tidak mempunyai akar bila f(a) dan f(b) bertanda sama atau memenuhi **f(a).f(b)>0** (lihat ilustrasi pada gambar kedua).
- Pada sesi ini akan dibahas 3 metode tertutup: metode tabel, biseksi dan regula falsi.



Karena f(a).f(b)<0 maka pada range x=[a,b] terdapat akar.



Karena f(a).f(b)>0 maka pada range x=[a,b] tidak terdapat akar.

METODE TABEL

- Disebut juga metode pembagian area.
- Dimana untuk x di antara a dan b dibagi sebanyak N bagian dan pada masing-masing bagian dihitung nilai f(x) sehingga diperoleh tabel :

x	f(x)
$x_0=a$	$f(a)$
x_1	$f(x_1)$
x_2	$f(x_2)$
x_3	$f(x_3)$
……	……
$x_n=b$	$f(b)$

Algoritma

(1) Defisikan fungsi f(x)

(2) Tentukan range untuk x yang berupa batas bawah x_{bawah} dan batas atas x_{atas}.

(3) Tentukan jumlah pembagian N

(4) Hitung step pembagi h

$$H = \frac{x_{atas} - x_{bawah}}{N}$$

(5) Untuk i = 0 s/d N, hitung

$x_i = x_{bawah} + i.h$

$y_i = f(x_i)$

(6) Untuk I = 0 s/d N dicari k dimana

*. Bila $f(x_k) = 0$ maka x_k adalah penyelesaian

*. Bila $f(x_k).f(x_{k+1}) < 0$ maka :

- Bila $|f(x_k)| <|f(x_{k+1})$ maka x_k adalah penyelesaian
- Bila tidak x_{k+1} adalah penyelesaian atau dapat dikatakan penyelesaian berada di antara x_k dan x_{k+1}.

METODE TABEL: CONTOH

- Tentukan akar dari persamaan : $x+e^x = 0$ yang terletak pada range x = [-1, 0]
- Untuk mendapatkan penyelesaian dari persamaan di atas range x = [-1, 0] dibagi menjadi beberapa bagian atau interval kecil, misal sebanyak 10 bagian (lihat tabel).

Dari tabel diperoleh informasi bahwa akar dari f(x) berada di antara –0.6 dan –0.5 dengan nilai f(x) masing-masing: -0.05119 dan 0.10653. Sehingga dapat diambil keputusan penyelesaiannya di x=-0.6 (f(x) yang terdekat dengan 0).

$f(x)=x+e^x$

x	f(x)
-1.0	-0.63212
-0.9	-0.49343
-0.8	-0.35067
-0.7	-0.20341
-0.6	-0.05119
-0.5	0.10653
-0.4	0.27032
-0.3	0.44082
-0.2	0.61873
-0.1	0.80484
0.0	1.00000

f(x)=0

METODE TABEL: CONTOH

- Selesaikan persamaan : $x+e^x = 0$ dengan range x = [-1; 0]
- Untuk mendapatkan penyelesaian dari persamaan di atas range x = [-1; 0] dibagi menjadi beberapa bagian atau interval kecil, misal sebanyak 10 bagian (lihat tabel).

Dari tabel diperoleh informasi bahwa akar dari f(x) berada di antara –0,6 dan –0,5 dengan nilai f(x) masing-masing: -0,05119 dan 0,10653. Sehingga akat terbaik dari f(x) adalah x=-0,6 (f(x) yang terdekat dengan 0).

Perbaikan

Untuk memperoleh akar yang lebih baik (lebih akurat), tabel yang memuat akar dapat dibagi lagi ke dalam interval yang lebih kecil. Misal, pada range x = [-0,6;-0,5] dibagi 10 maka diperoleh akar f(x) terbaik (terdekat dengan nol) di interval [-0,57;-0,56] yaitu x = -0,57 dengan f(x)=-0,00447. Perbaikan berikutnya dapat dilakukan dengan cara yang sama, dengan membagi interval [-0,57;-0,56] menjadi interval-interval yang lebih kecil.

$f(x)=x+e^x$

x	f(x)
-0,60	-0,05119
-0,59	-0,03567
-0,58	-0,02010
-0,57	-0,00447
-0,56	0,01121
-0,55	0,02695
-0,54	0,04275
-0,53	0,05860
-0,52	0,07452
-0,51	0,09050
-0,50	0,10653

f(x)=0

METODE TABEL

- Metode tabel ini secara umum sulit mendapatkan penyelesaian dengan error yang kecil, karena itu metode ini sering tidak digunakan dalam mencari akar penyelesaian persamaan non linier.
- Tetapi metode ini digunakan sebagai taksiran awal mengetahui area penyelesaian yang benar sebelum menggunakan metode yang lebih baik dalam menentukan penyelesaian.

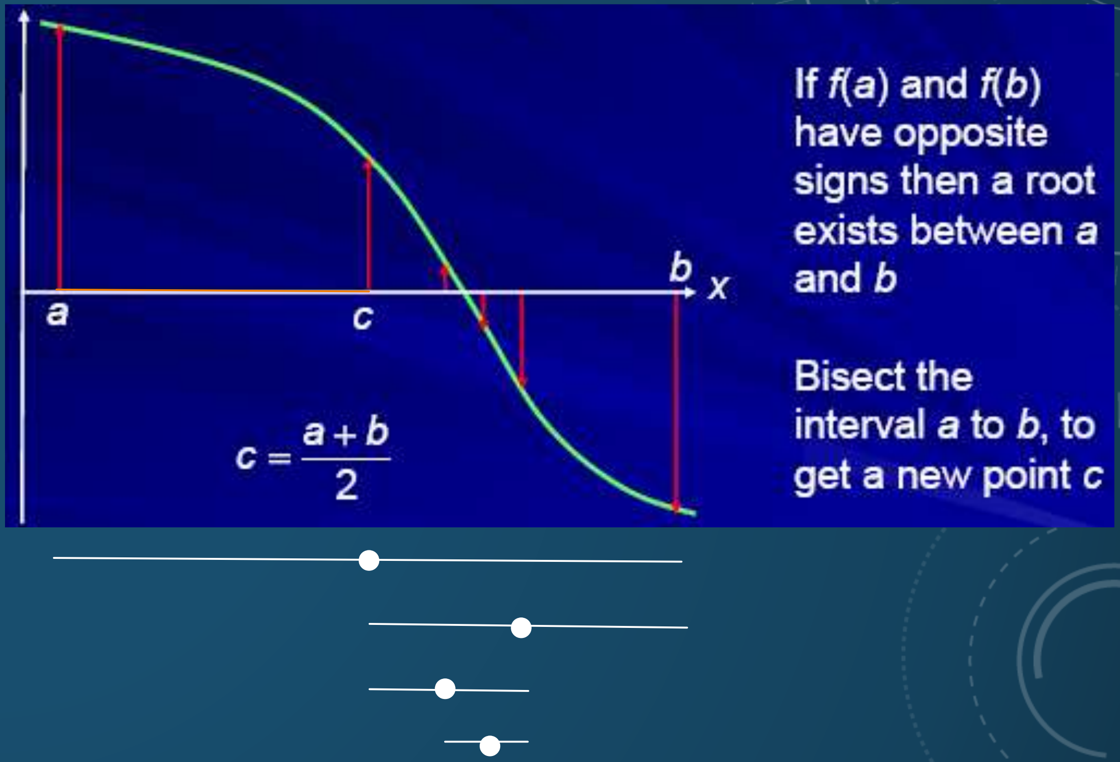
x	f(x)
x_0=a	f(a)
x_1	$f(x_1)$
x_2	
x_3	
......	
x_n=b	

x	f(x)
-1.0	-0.6321
-0.9	-0.4934
-0.8	-0.3506
-0.7	-0.2034
-0.6	-0.0511
-0.5	0.1065
-0.4	0.2703
-0.3	0.4408
-0.2	0.6187
-0.1	0.8048
0.0	1.0000

x	f(x)
-0,60	-0,05119
-0,59	-0,03567
-0,58	-0,02010
-0,57	-0,00447
-0,56	0,01121
-0,55	0,02695
-0,54	0,04275
-0,53	0,05860
-0,52	0,07452
-0,51	0,09050
-0,50	0,10653

METODE BISEKSI

- Ide awal metode ini adalah metode table, dimana area dibagi menjadi N bagian.
- Hanya saja metode biseksi ini membagi range menjadi 2 bagian, dari dua bagian ini dipilih bagian mana yang mengandung dan bagian yang tidak mengandung akar dibuang. Hal ini dilakukan berulang-ulang hingga diperoleh akar persamaan.



METODE BISEKSI

Untuk menggunakan metode biseksi, terlebih dahulu ditentukan batas bawah (*a*) dan batas atas (*b*).Kemudian dihitung nilai tengah :

$$x = \frac{a+b}{2}$$

Dari nilai x ini perlu dilakukan pengecekan keberadaan akar. Secara matematik, suatu range terdapat akar persamaan bila f(a) dan f(b) berlawanan tanda atau dituliskan :

$$f(a) \,.\, f(b) < 0$$

Setelah diketahui dibagian mana terdapat akar, maka batas bawah dan batas atas di perbaharui sesuai dengan range dari bagian yang mempunyai akar.

Algoritma Metode Biseksi

(1) Definisikan fungsi $f(x)$ yang akan dicari akarnya
(2) Tentukan nilai a dan b
(3) Tentukan torelansi e dan iterasi maksimum N
(4) Hitung $f(a)$ dan $f(b)$
(5) Jika $f(a).f(b)>0$ maka proses dihentikan karena tidak ada akar, bila tidak dilanjutkan
(6) Hitung x= $\frac{a+b}{2}$
(7) Hitung $f(x)$
(8) Bila $f(x).f(a)<0$ maka $b=x$ dan $f(b)=f(x)$, bila tidak $a=x$ dan $f(a)=f(x)$
(9) Jika |b-a|<e atau iterasi>iterasi maksimum maka proses dihentikan dan didapatkan akar = x, dan bila tidak, ulangi langkah 6.

METODE BISEKSI

Contoh. Tentukan salah satu akar persamaan $xe^{-x}+1 = 0$, pada interval [-1,0]. Lakukan hitungan hingga 10 iterasi dengan ketelitian hitungan 5 digit dibelakang koma.

$f(x)=xe^{-x}+1$; e=2,71828
a=-1 → $f(a)=(-1)e^{-(-1)}+1=-1,71828$ (-)
b=0 → $f(b)=(0)e^{-(0)}+1=1$ (+)

Iterasi 1:
- a=-1; f(a)=-1,71828 (-); b=0; f(b)=1 (+)
- $x_1=\frac{-1+0}{2} = -0,5$
- $f(x_1)=(-0,5)e^{-(-0,5)}+1=0,17564$ (+)
- $f(x_1)$ berbeda tanda dengan f(a)
- Interval baru untuk iterasi 2 adalah [a; x_1] atau [-1;-0,5]

Iterasi 2:
- a=-1; f(a)=-1,71828 (-); b=-0,5; f(b)=0,17564 (+)
- $x_2=\frac{-1+(-0,5)}{2} = -0,75$
- $f(x_2)=(-0,75)e^{-(-0,75)}+1=-0,58775$ (-)
- $f(x_2)$ berbeda tanda dengan f(b)
- Interval baru untuk iterasi 3 adalah[x_2; b] atau [-0,75;-0,5]

Iterasi 3:
- a=-0,75; f(a)=-0,58775 (-); b=-0,5; f(b)=0,17564 (+)
- $x_3=\frac{-0,75+(-0,5)}{2} = -0,625$
- $f(x_3)=(-0,625)e^{-(-0,625)}+1=-0,16765$ (-)
- $f(x_3)$ berbeda tanda dengan f(b)
- Interval baru untuk iterasi 4 adalah [x_3; b] atau [-0,625;-0,5]

Iterasi 4:
- a=-0,625; f(a)=- 0,16765 (-); b=-0,5; f(b)=0,17564 (+)
- $x_4=\frac{-0,625+(-0,5)}{2} = -0,5625$
- $f(x_4)=(-0,5625)e^{-(-0,5625)}+1=0,01278$ (+)
- $f(x_4)$ berbeda tanda dengan f(a)
- Interval baru untuk iterasi 5 adalah [a; x_4] atau [-0,625; -0,5625]

METODE BISEKSI

Iterasi 5:

- a=-0,625; f(a)=- 0,16765 (-); b=-0,5625; f(b)=0,01278 (+)
- $x_5 = \frac{-0{,}625+(-0{,}5625)}{2} = -0{,}59375$
- $f(x_5)=(-0{,}59375)e^{-(-0{,}59375)}+1=-0{,}07514$ (-)
- $f(x_5)$ berbeda tanda dengan f(b)
- Interval baru untuk iterasi 6 adalah [x_5; b] atau [-1;-0,5625]

Iterasi 6:

- a=-59375; f(a)=-0,07514 (-); b=-0,5625; f(b)= 0,01278 (+)
- $x_6 = \frac{-0{,}59375+(-0{,}5625)}{2} = -0{,}57813$
- $f(x_6)=(-0{,}57813)e^{-(-0'57813)}+1=-0{,}03062$ (-)
- $f(x_6)$ berbeda tanda dengan f(b)
- Interval baru untuk iterasi 7 adalah[x_6; b] atau [-0,57813;-0,5625]

Iterasi 7:

- a=-0,57813; f(a)=- 0,03062 (-); b=-0,5625; f(b)= 0,01278 (+)
- $x_7 = \frac{-0{,}57813+(-0{,}5625)}{2} = -0{,}57031$
- $f(x_7)=(-0{,}57031)e^{-(-0{,}57031)}+1=-0{,}00878$ (-)
- $f(x_7)$ berbeda tanda dengan f(b)
- Interval baru untuk iterasi 8 adalah [x_8; b] atau [-0,57031;-0,5625]

Iterasi 8:

- a=-0,57031; f(a)=-0,00878 (-); b=-0,5625; f(b)= 0,01278 (+)
- $x_8 = \frac{-0{,}57031+(-0{,}5625)}{2} = -0{,}56641$
- $f(x_8)=(-0{,}56641)e^{-(-0{,}56441)}+1=0{,}002035$ (+)
- $f(x_8)$ berbeda tanda dengan f(a)
- Interval baru untuk iterasi 9 adalah [a; x_8] atau [-0,57031;-0,56641]

Iterasi 9:

- a=-0,57031; f(a)=-0,00878 (-); b=-0,56641; f(b)=0,002035 (+)
- $x_9 = \frac{-0{,}57031+(-0{,}56641)}{2} = -0{,}56836$
- $f(x_9)=(-0{,}56836)e^{-(-0{,}56836)}+1=-0{,}00336$ (-)
- $f(x_9)$ berbeda tanda dengan f(b)
- Interval baru untuk iterasi 10 adalah [x_9; b] atau [-0,56836;-0,56641]

Iterasi 10:

- a=-0,56836; f(a)=-0,00336 (-); b=-0,56641; f(b)=0,002035 (+)
- $x_{10} = \frac{-0{,}56836+(-0{,}56641)}{2} = -0{,}56738$
- $f(x_{10})=(-0{,}56738)e^{-(-0{,}56738)}+1=-0{,}00066$ (-)
- Iterasi selesai / berhenti sesuai yang ditentukan (iterasi ke-10)

METODE BISEKSI

- Sampai dengan iterasi ke 10 diperoleh akar terbaik x=-0,56738 dengan f(x) = -0,00066
- Untuk memperoleh akar yang lebih baik, iterasi tersebut dapat dilanjutkan dengan prosedur yang sama dengan iterasi-iterasi sebelumnya.

- Secara umum, kriteria penghentian iterasi dapat dilakukan berdasarkan:
  - berdasarkan toleransi error yang diinginkan atau
  - iterasi maksimum yang diinginkan atau
  - Tidak ada interval yang dapat dipilih dimana semua f(a), f(b) dan f(x) memiliki tanda yang sama.

Iterasi ke-	a	b	x	f(a)	f(b)	f(x)
0	-1	0		-1,71828	1	
1	-1	0	-0,5	-1,71828	1	0,175639
2	-1	-0,5	-0,75	-1,71828	0,175639	-0,58775
3	-0,75	-0,5	-0,625	-0,58775	0,175639	-0,16765
4	-0,625	-0,5	-0,5625	-0,16765	0,175639	0,012782
5	-0,625	-0,5625	-0,59375	-0,16765	0,012782	-0,07514
6	-0,59375	-0,5625	-0,57813	-0,07514	0,012782	-0,03062
7	-0,57813	-0,5625	-0,57031	-0,03062	0,012782	-0,00878
8	-0,57031	-0,5625	-0,56641	-0,00878	0,012782	0,002035
9	-0,57031	-0,56641	-0,56836	-0,00878	0,002035	-0,00336
10	-0,56836	-0,56641	-0,56738	-0,00336	0,002035	-0,00066

SOAL LATIHAN

Tentukan salah satu akar dari fungsi berikut menggunakan metode Tabel dan metode Biseksi:

1. $-0,6x^2+2.4x+5,5=0$ pada interval [5 ; 10]
2. $4x^3-6x^2+7x-2,3=0$ pada interval [0 ; 1]
3. $-26+85x-91x^2+44x^3-8x^4+x^5=0$ pada interval [0,5 ; 1,0]
4. $x^{3,5}=80$ pada interval [2 ; 5]
5. $-2x^6 - 1.6x^4 + 12x + 1 = 0$ pada interval [0 ; 1]

Catatan: Lakukan komputasi soal-soal di atas masing-masing 5 iterasi dengan ketelitian hitungan 4 digit desimal.

is there any question?