SISTEM PERSAMAAN LINIER SERENTAK

MATA KULIAH: METODE NUMERIK

PERTEMUAN: 6

MATERI

- Definisi SPL Serentak
- Metode Eliminasi Gauss
- Metode Eliminasi Gauss-Jordan
- Metode Iterasi Gauss-Seidel

TUJUAN

- Mahasiswa mampu mengetahui, memahami dan memecahkan model system persamaan linier serentak.
- Mahasiswa mampu memahami dan menyelesaikan sistem persamaan linier serentak dengan menggunakan Metode Numerik.

DEFINISI SPL SERENTAK

- Persamaan Linier Serentak adalah suatu bentuk persamaan-persamaan yang secara bersama-sama menyajikan banyak variabel bebas
- Bentuk Persamaan Linier Serentak dengan *m* persamaan dan *n* variabel bebas

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\
&a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n = b_3 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m
\end{aligned}
$$

- a_{ij} untuk i=1 s/d m dan j=1 s/d n adalah koefisien atau persamaan serentak
- x_i untuk i=1 s/d n adalah variabel bebas pada persamaan serentak

MODEL SPL SERENTAK

- Penyelesaian Persamaan Linier Serentak adalah penentuan nilai x_i untuk semua i=1 s/d n yang memenuhi semua persamaan yang diberikan.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}$$

- AX = B

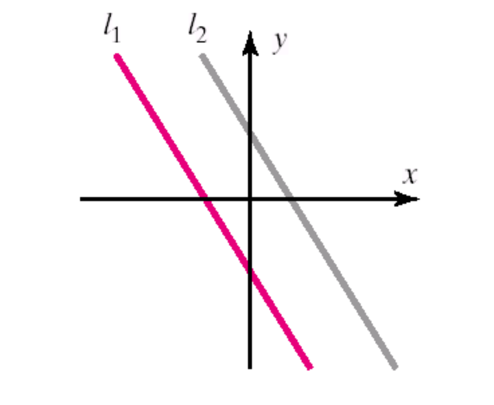
  Matrik **A** = Matrik Koefisien/ Jacobian.

  Vektor **X** = vektor variabel

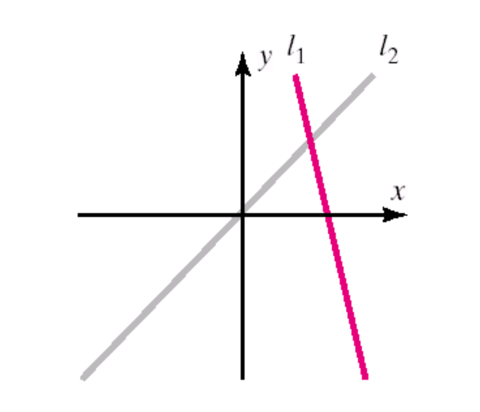
  vektor **B** = vektor konstanta.

SISTEM PERSAMAAN LINIER SERENTAK

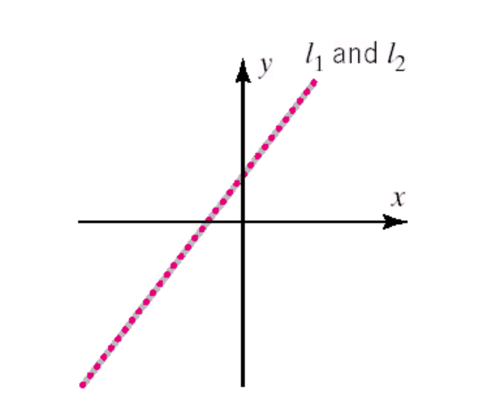
- Persamaan Linier Serentak atau Sistem Persamaan Linier mempunyai kemungkinan solusi :
  - **Tidak mempunyai solusi**
  - **Tepat satu solusi**
  - **Banyak solusi**



(a) No solution



(b) One solution



(c) Infinitely many solutions

AUGMENTED MATRIX

- Matrik yang merupakan perluasan matrik A dengan menambahkan vector B pada kolom terakhirnya, dan dituliskan:
- **Augmented (A) = [A B]**

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

THEOREMA

- Suatu persamaan linier simultan mempunyai penyelesaian tunggal bila memenuhi syarat-syarat sebagai berikut:
  - **Ukuran persamaan linier simultan bujursangkar, dimana jumlah persamaan sama dengan jumlah variable bebas.**
  - **Persamaan linier simultan non-homogen dimana minimal ada satu nilai vector konstanta B tidak nol atau ada bn $\neq$ 0.**
  - **Determinan dari matrik koefisien persamaan linier simultan tidak sama dengan nol.**

SOLUSI SPL SERENTAK

Metode Analitik:

- Metode grafis
- Aturan Crammer
- Invers matrik

Metode Numerik:

- Metode Eliminasi Gauss
- Metode Eliminasi Gauss-Jordan
- Metode Iterasi Gauss-Seidel

METODE ELIMINASI GAUSS

- Metode Eliminasi Gauss merupakan metode yang dikembangkan dari metode eliminasi, yaitu menghilangkan atau mengurangi jumlah variable sehingga dapat diperoleh nilai dari suatu variable bebas
- Matrik diubah menjadi augmented matrik:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} & b_n \end{array}\right]$$

METODE ELIMINASI GAUSS

- Ubah matrik menjadi matrik segitiga atas atau segitiga bawah dengan menggunakan **OBE** (**Operasi Baris Elementer**).

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} & b_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & c_{22} & c_{23} & \dots & c_{2n} & d_2 \\ 0 & 0 & c_{33} & \dots & c_{3n} & d_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c_{nn} & d_n \end{bmatrix}$$

OPERASI BARIS ELEMENTER

- Metode dasar untuk menyelesaikan Sistem Persamaan Linier adalah mengganti sistem yang ada dengan sistem yang baru yang mempunyai himp solusi yang sama dan lebih mudah untuk diselesaikan
- Sistem yang baru diperoleh dengan serangkaian step yang menerapkan 3 tipe operasi. Operasi ini disebut Operasi Baris Elementer

1. Multiply an equation through by an nonzero constant.
2. Interchange two equation.
3. Add a multiple of one equation to another.

METODE ELIMINASI GAUSS

- Sehingga penyelesaian dapat diperoleh dengan:

$$x_n = \frac{d_n}{c_{nn}}$$

$$x_{n-1} = \frac{1}{c_{n-1,n-1}}\left(-c_{n-1,n}x_n + d_{n-1}\right)$$

....

$$x_2 = \frac{1}{c_{22}}\left(d_2 - c_{23}x_3 - c_{24}x_4 - \ldots - c_{2n}x_n\right)$$

$$x_1 = \frac{1}{c_{11}}\left(d_1 - c_{12}x_2 - c_{13}x3 - \ldots - c_{1n}x_n\right)$$

CONTOH

Selesaikan sistem persamaan berikut:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 6$$
$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 2$$
$$2x_1 + x_2 + 2x_3 = 10$$

Augmented matrik dari persamaan linier serentak tersebut:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 10 \end{bmatrix}$$

CONTOH

- Lakukan operasi baris elementer

$$\begin{matrix} B_2 - B_1 \\ B_3 - 2B_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad B_3 + B_2 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \end{bmatrix}$$

- Penyelesaian:

$$x_3 = \frac{-6}{-2} = 3$$

$$x_2 = \frac{1}{1}\left(-4-(2)3\right) = 2$$

$$x_1 = \frac{1}{1}\left(6-2-3\right) = 1$$

ALGORITHMA METODE ELIMINASI GAUSS

(1) Masukkan matrik A, dan vektor B beserta ukurannya n

(2) Buat augmented matrik [A|B] namakan dengan A

(3) Untuk baris ke i dimana i=1 s/d n, perhatikan apakah nilai $a_{i,i}$ sama dengan nol :

Bila ya :

pertukarkan baris ke i dan baris ke i+k≤n, dimana $a_{i+k,i}$ tidak sama dengan nol, bila tidak ada berarti perhitungan tidak bisa dilanjutkan dan proses dihentikan dengan tanpa penyelesaian.

Bila tidak : lanjutkan

(4) Untuk baris ke j, dimana j = i+1 s/d n

Lakukan operasi baris elementer:

- Hitung $c = \dfrac{a_{j,i}}{a_{i,i}}$
- Untuk kolom k dimana k=1 s/d n+1

  hitung $a_{j,k} = a_{j,k} - c.a_{i,k}$

(5) Hitung akar, untuk i = n s/d 1 (bergerak dari baris ke n sampai baris pertama)

$$x_i = \frac{1}{a_{i,i}}\left(b_i - a_{i,i+1}x_{i+1} - a_{i,i+2}x_{i+2} - \ldots - a_{i,n}x_n\right)$$

dimana nilai i+k≤n

CONTOH / LATIHAN

Selesaikan dg Eliminasi Gauss

1. $x1 + x2 + 2x3 = 8$
   $-x1 – 2x1 + 3x3 = 1$
   $3x1 – 7x2 + 4x3 = 10$
2. $x – y + 2z – w = -1$
   $2x + y - 2z -2w = -2$
   $-x + 2y – 4z + w = 1$
   $3x \quad - 3w = -3$
3. $x + y + 2z = 9$
   $2x + 4y - 3z = 1$
   $3x + 6y - 5z = 0$