AKAR PERSAMAAN

MATA KULIAH: METODE NUMERIK

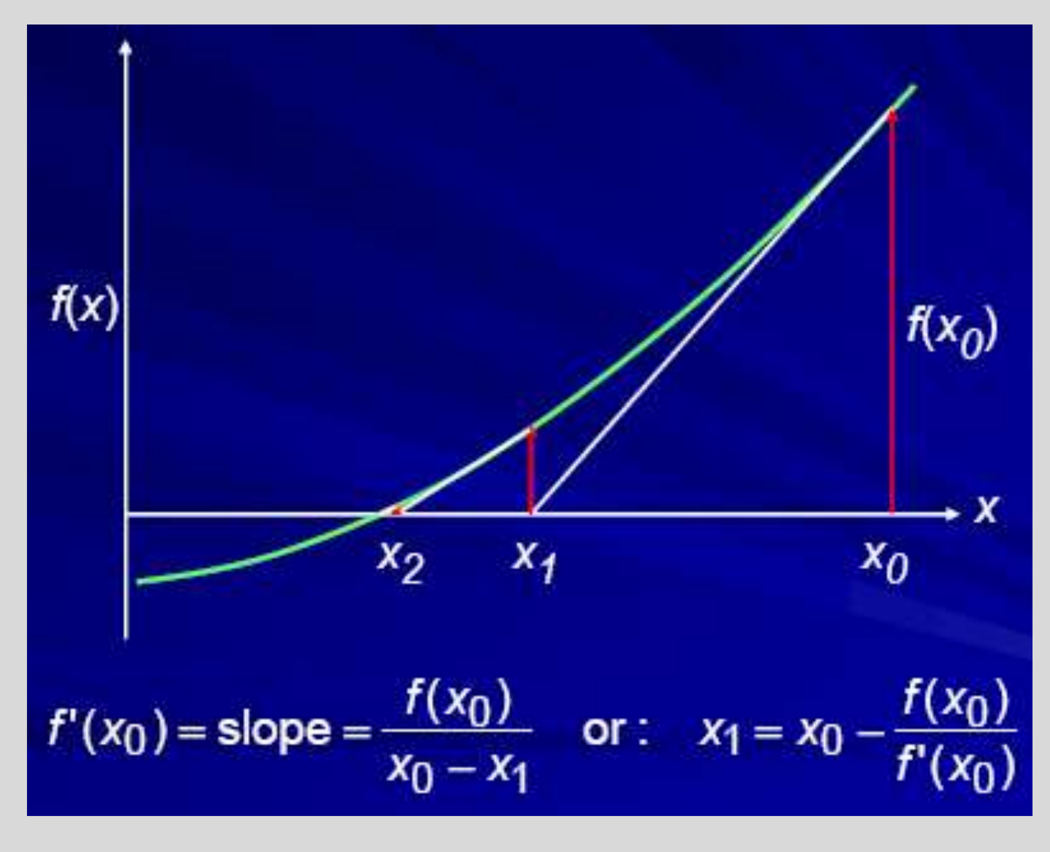
PERTEMUAN: 5

METODE NEWTON RAPHSON

- Metode pencarian akar persamaan f(x) yang memanfaatkan titik potong garis singgung pada f(x) di titik x_0 dengan sumbu x.
- Metode pencarian akar dilakukan secara iteratif melalui pencarian garis singgung dan titik potong x baru berdasarkan garis singgung dan titik potong sebelumnya.
- Akar pendekatan iteratif diturunkan dari persamaan garis sebagai berikut:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

dimana $f'(x_n)$ adalah turunan pertama fungsi f(x) di $x = x_n$ atau gradient dari garis singgung pada f(x) di $x = x_0$.



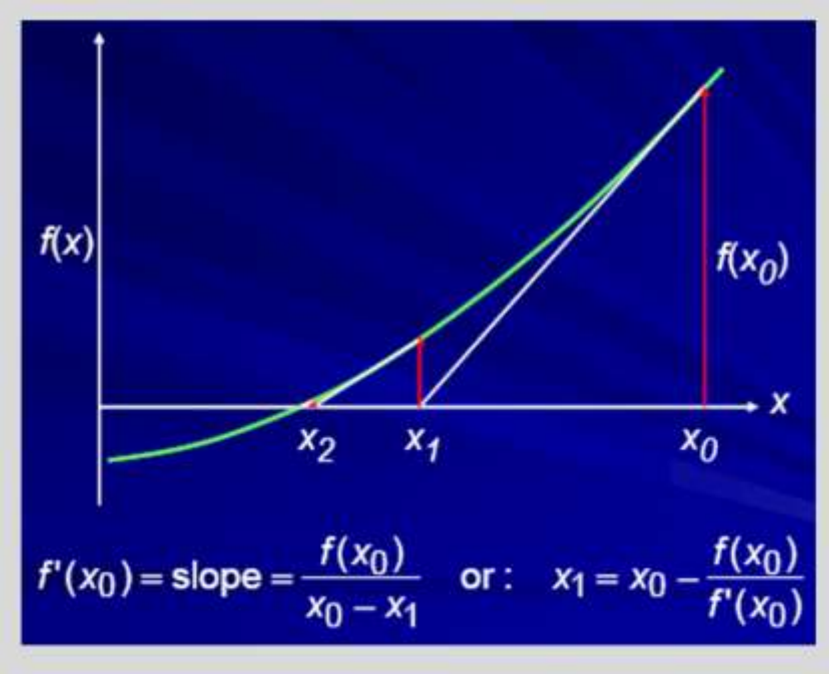
METODE NEWTON RAPHSON

Algoritma:

1. Definisikan fungsi f(x) dan $f^1(x)$
2. Tentukan toleransi error (e) atau iterasi maksimum (n)
3. Tentukan nilai akar awal x_0
4. Hitung $f(x_0)$ dan $f'(x_0)$
5. Untuk iterasi i = 1 s/d n atau $|f(x_i)| > e$, hitung $f(x_i)$ dan $f^1(x_i)$ berdasarkan nilai:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

6. Akar persamaan dari f(x) adalah nilai x_i yang terakhir diperoleh.



METODE NEWTON RAPHSON

Cari salah satu akar dari $x-e^{-x}=0$ dengan akar awal $x_0=0$ menggunakan metode Newton Raphson. Lakukan pencarian akar sampai 3 iterasi.

$f(x)=x-e^{-x}$
$f'(x)=1-(-e^{-x})=1+e^{-x}$

Iterasi 1:

- $x_0=0 \rightarrow f(x_0)=(0)-e^{-(0)}=0-1=-1$
- $x_0=0 \rightarrow f'(x_0)=1+e^{-(0)}=1+1=2$
- $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0 - \frac{-1}{2}=0,5$

Iterasi 2:

- $x_1=0,5 \rightarrow f(x_1)=(0,5)-e^{-(0,5)}=-0,10653$
- $x_1=0,5 \rightarrow f'(x_1)=1+e^{-(0,5)}=1,60653$
- $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 0,5 - \frac{-0,10653}{1,60653}=0,56631$

Iterasi 3:

- $x_2=0,56631 \rightarrow f(x_2)=-0,00130$
- $x_2=0,56631 \rightarrow f'(x_2)=1,56762$
- $x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} =0,56714$

Sampai dengan iterasi ke-3 diperoleh akar $x_3=0,56714$

METODE NEWTON RAPHSON

Cari salah satu akar dari $x + e^{-x} \cos x - 2=0$ dengan akar awal $x_0=1$ menggunakan metode Newton Raphson. Lakukan pencarian akar sampai 3 iterasi.

$f(x)= x + e^{-x} \cos x - 2$
$f'(x)= 1 - e^{-x} \cos x - e^{-x} \sin x$

Iterasi 1:
- $x_0=1 \rightarrow f(x_0)=-0{,}80123$
- $x_0=1 \rightarrow f'(x_0)=0{,}49167$
- $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 2{,}62960$

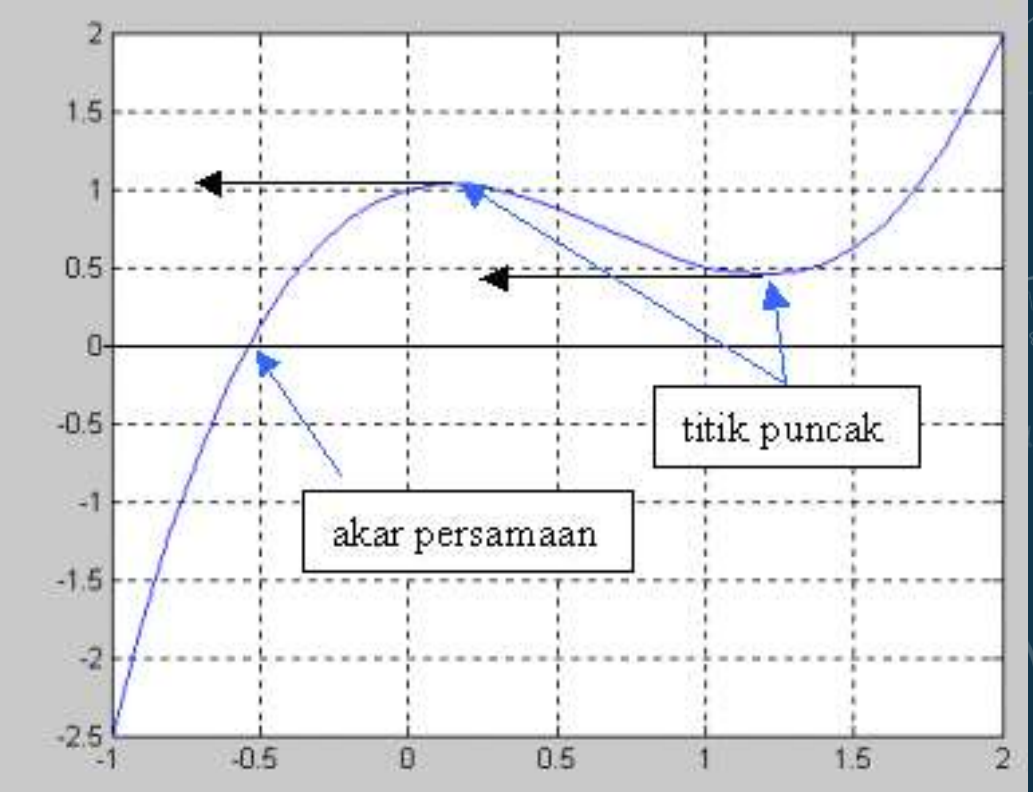
Iterasi 2:
- $x_1=2{,}62960 \rightarrow f(x_1)=0{,}56674$
- $x_1=2{,}62960 \rightarrow f'(x_1)=1{,}02753$
- $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} =2{,}07805$

Iterasi 3:
- $x_2=2{,}07805 \rightarrow f(x_2)=0{,}01724$
- $x_2=2{,}07805 \rightarrow f'(x_2)=0{,}95139$
- $x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} =2{,}05993$

Sampai dengan iterasi ke-3 diperoleh akar $x_3=2{,}05993$

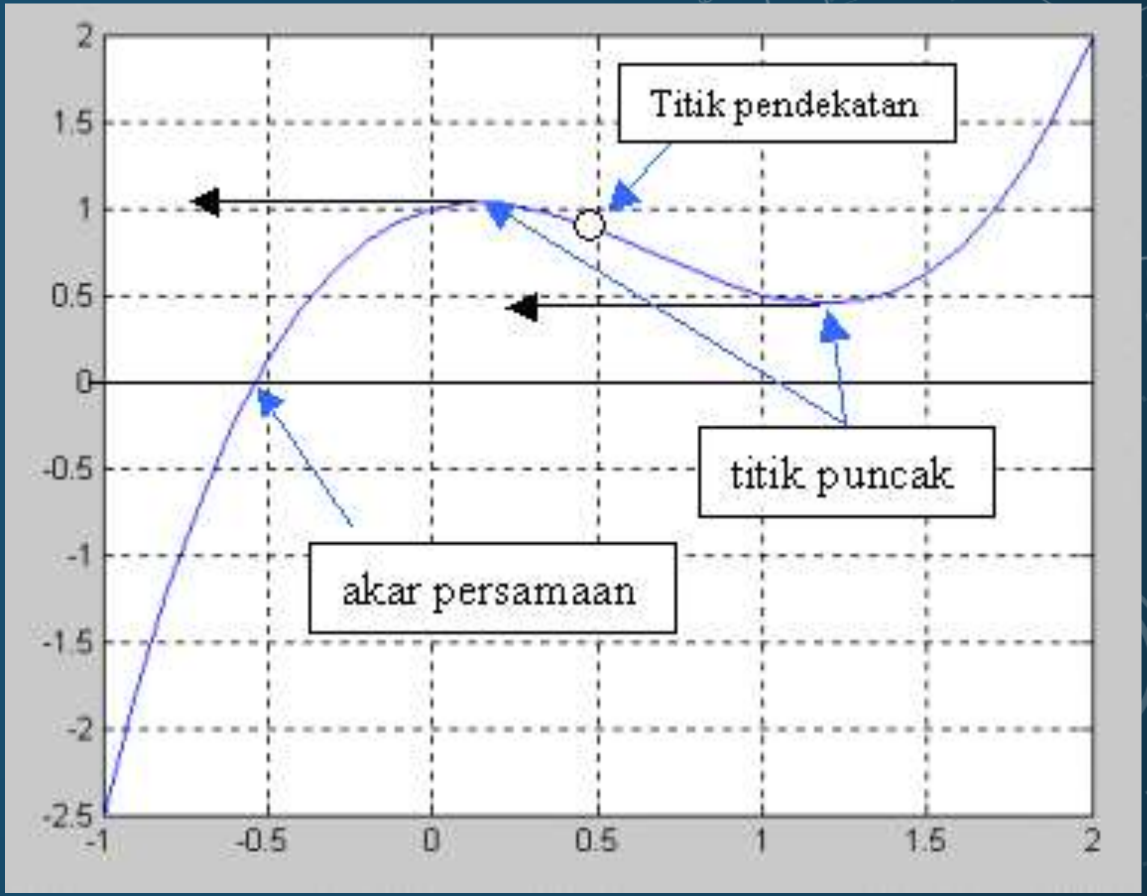
METODE NEWTON RAPHSON: PERMASALAHAN

- Metode ini tidak dapat digunakan ketika titik pendekatannya berada pada titik ekstrim atau titik puncak, karena pada titik ini nilai f'(x) = 0 sehingga nilai penyebut dari $\frac{f(x)}{f'(x)}$ sama dengan nol (tidak terdefinisi). Secara grafis dapat dilihat pada gambar disamping.
- Bila titik pendekatan berada pada titik puncak, maka titik selanjutnya akan berada di tak berhingga.



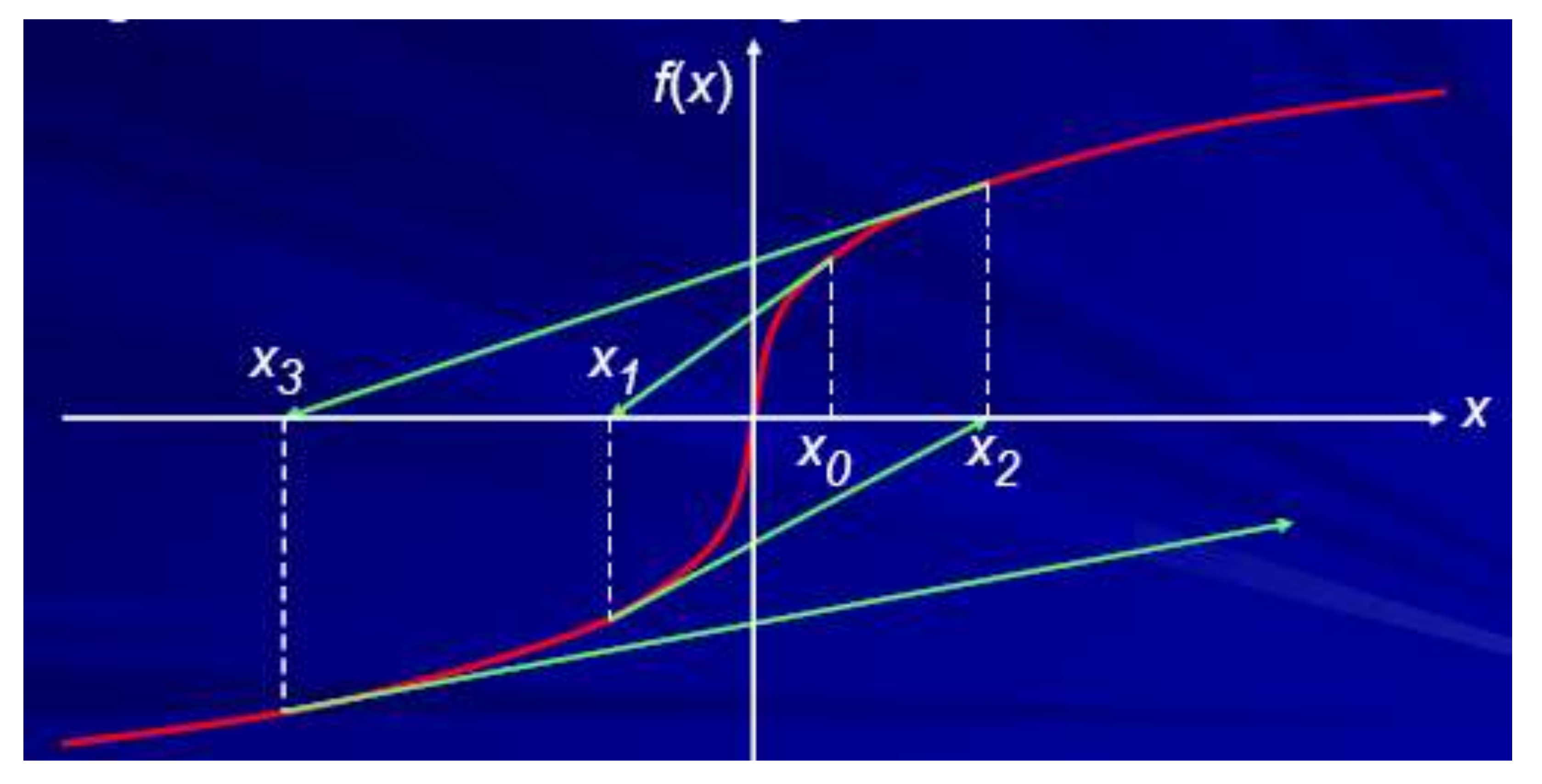
METODE NEWTON RAPHSON: PERMASALAHAN

- Selain itu, metode ini menjadi sulit atau lama mendapatkan penyelesaian ketika titik pendekatannya berada di antara dua titik stasioner.
- Bila titik pendekatan berada pada dua tiitik puncak akan dapat mengakibatkan hilangnya penyelesaian (*divergensi*).
- Hal ini disebabkan titik selanjutnya berada pada salah satu titik puncak atau arah pendekatannya berbeda.



METODE NEWTON RAPHSON: PERMASALAHAN

Contoh pencarian akar yang divergen



METODE NEWTON RAPHSON: SOLUSI PERMASALAHAN

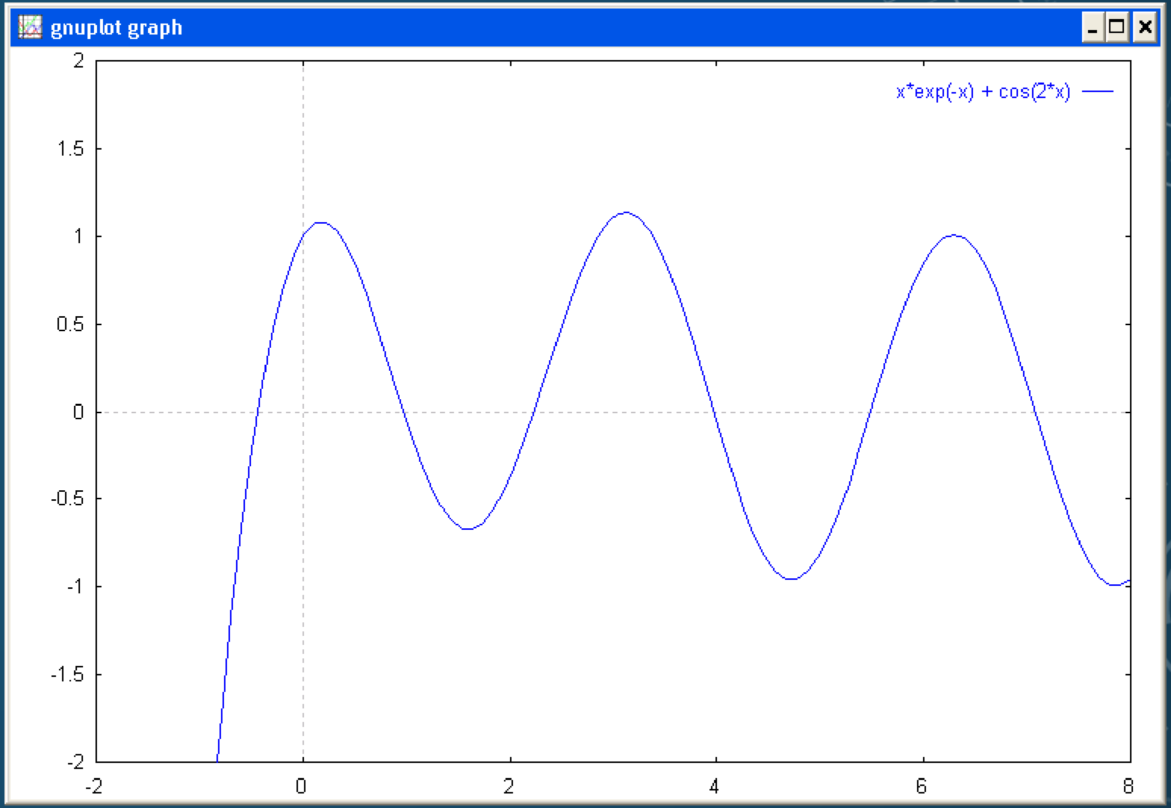
1. Bila titik pendekatan berada pada titik puncak maka titik pendekatan tersebut harus di geser sedikit, $x_i = x_i + \delta$ dimana δ adalah konstanta yang ditentukan sedemikian sehingga $f'(x) \neq 0$ dan metode Newton Raphson tetap dapat dioperasionalkan.
2. Untuk menghindari titik-titik pendekatan yang berada jauh, sebaiknya pemakaian metode newton raphson ini didahului oleh metode tabel, sehingga dapat di jamin konvergensi dari metode newton raphson.

METODE NEWTON RAPHSON: SOLUSI PERMASALAHAN

Contoh

- $x \cdot e^{-x} + \cos(2x) = 0 \rightarrow x_0 = 0{,}176281$
- $f(x) = x \cdot e^{-x} + \cos(2x)$
- $f1(x) = (1-x)\, e^{-x} - 2 \sin(2x)$
- $f(x_0) = 1{,}086282$
- $f^1(x_0) = -0{,}000015$

iterasi	x	f(x)	f'(x)
0	0,17628	1,086282	-1,52216E-05
1	71364,89	0,594134	-1,608732696
2	71365,26	-0,10227	-1,989513691
3	71365,2	0,00036	-1,99999987
4	71365,2	-2,9E-11	-2
5	71365,2	3,13E-13	-2
6	71365,2	3,13E-13	-2



Diperoleh akar x = 71365.2 padahal dalam range 0 sampai dengan 1 terdapat akar di sekitar 0.5 s/d 1.

METODE NEWTON RAPHSON: SOLUSI PERMASALAHAN

Untuk menghindari hal tersebut di atas sebaiknya digunakan grafik atau tabel sehingga dapat diperoleh pendekatan awal yang baik. Misal, digunakan pendekatan awal x_0=0.5

Iterasi	x	f(x)	f'(x)
0	0,5	0,843568	-1,37967664
1	1,111424	-0,24106	-1,626349133
2	0,963203	0,019463	-1,86082504
3	0,973662	5,61E-05	-1,849946271
4	0,973692	4,98E-10	-1,849913417
5	0,973692	0	-1,849913417
6	0,973692	0	-1,849913417

Diperoleh akar x = 0,973692 yang berada pada interval 0.5 s/d 1.

METODE NEWTON RAPHSON: SOLUSI PERMASALAHAN

Hasil dari penyelesaian akar persamaan dari:
x * exp(-x) + cos(2x) = 0
pada range [0,5]

Iterasi	x	f(x)	f' (x)
0	0.5	0.843568	-1.37968
1	1.11142	-0.24106	-1.62635
2	0.963203	0.0194632	-1.86083
3	0.973662	5.6107e-005	-1.84995
4	0.973692	4.98195e-010	-1.84991

Akar terletak di x = 0.973692

Iterasi	x	f(x)	f' (x)
0	2	-0.382973	1.37827
1	2.27787	0.0774688	1.84452
2	2.23587	0.000671812	1.81025
3	2.23549	6.74538e-008	1.80989

Akar terletak di x = 2.23549

Iterasi	x	f(x)	f' (x)
0	3.5	0.859593	-1.38947
1	4.11865	-0.307004	-1.90559
2	3.95754	0.0145632	-2.05279
3	3.96464	7.5622e-006	-2.05059

Akar terletak di x = 3.96464

METODE NEWTON RAPHSON: MODIFIKASI TABEL

Algoritma Metode Newton Raphson dengan modifikasi tabel :

1. Definisikan fungsi F(x)
2. ambil range nilai $x = [a, b]$ dengan jumlah pembagi n
3. Masukkan torelansi error (e) dan masukkan iterasi n
4. Gunakan algoritma tabel diperoleh titik pendekatan awal x_0 dari :

   $F(x_k) \,.\, F(x_{k+1}) < 0$ maka $x_0 = x_k$
5. Hitung $F(x_0)$ dan $F^1(x_0)$
6. Bila $F\left(abs\left(F^1(x_0)\right)\right) < e$ maka pendekatan awal x_0 digeser sebesar dx (dimasukkan)

   $x_0 = x_0 + dx$

   hitung $F(x_0)$ dan $F^1(x_0)$
7. Untuk iterasi I= 1 s/d n atau $|F(x_i)| \geq e$

   $$x_1 = x_{i-1} - \frac{F(x_{i-1})}{F^1(x_{i-1})}$$

   hitung $F(x_i)$ dan $F^1(x_i)$

   bila $|F^1(x_i)| < e$ maka

   $x_i = x_i + dx$

   hitung $F(x_i)$ dan $F^1(x_0)$

8. Akar persamaan adalah x terakhir yang diperoleh.

METODE NEWTON RAPHSON: MODIFIKASI TABEL

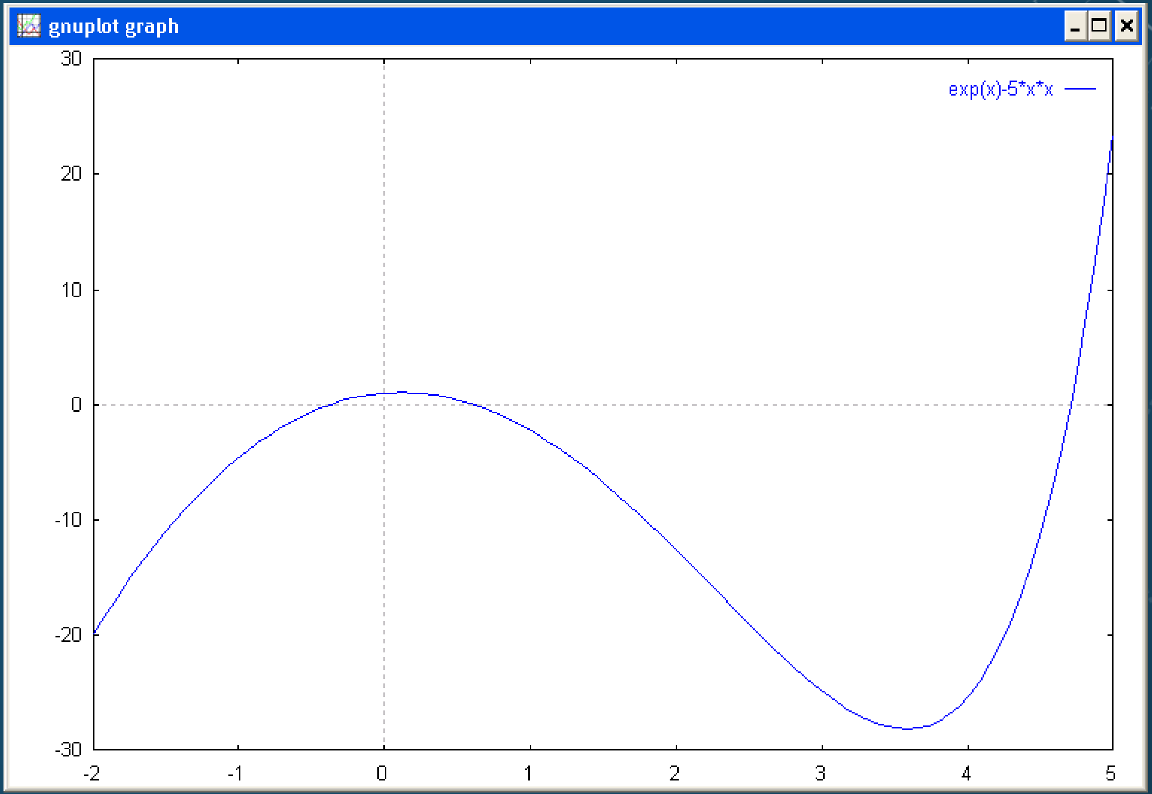
Contoh. Hitunglah akar $f(x) = e^x - 5x^2$ dengan metode Newthon Raphson. Gunakan nilai kesalahan sebesar 0.00001 dengan akar awal di $x_0 = 1$.

$$f(x) = e^x - 5x^2$$
$$f'(x) = e^x - 10x$$
$$x_{i+1} = x_i - \frac{e^x - 5x}{e^x - 10x}$$

Hasil iterasi pencarian akar:

i	x	f(x)
0	1	-2.28172
1	0.686651	-0.370399
2	0.610741	-0.0232286
3	0.605296	-0.000121011
4	0.605267	-3.35649e-009

Akar terletak di x = 0.605267



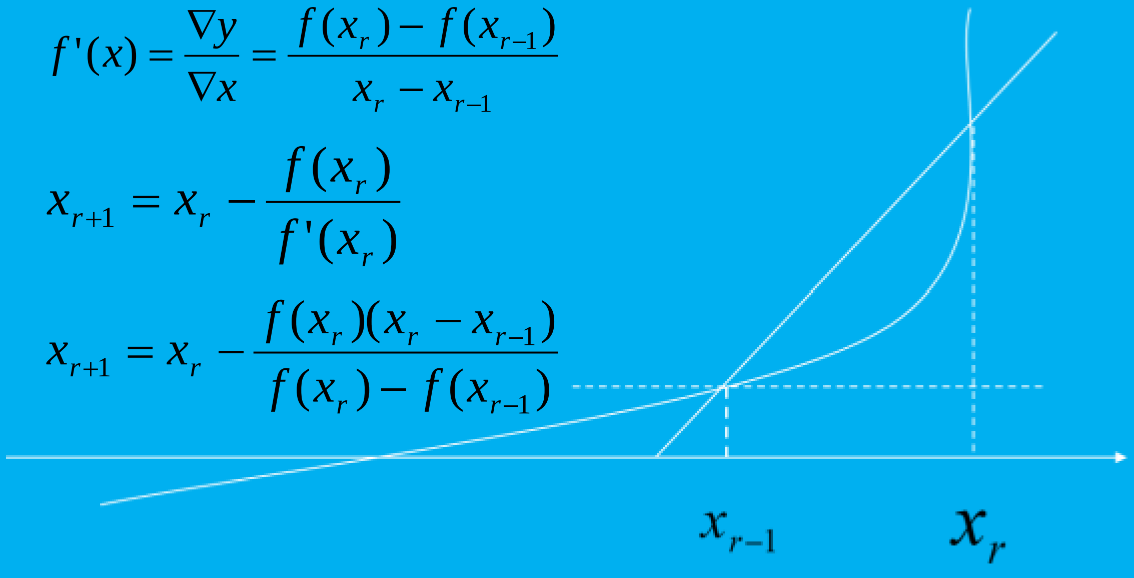
METODE SECANT

- Metode Newton Raphson memerlukan perhitungan turunan fungsi f’(x).
- Tidak semua fungsi mudah dicari turunannya terutama fungsi yang bentuknya rumit.
- Turunan fungsi dapat dihilangkan dengan cara menggantinya dengan bentuk lain yang equivalen.
- Modifikasi metode Newton Raphson dinamakan metode Secant.

$$f'(x) = \frac{\nabla y}{\nabla x} = \frac{f(x_r) - f(x_{r-1})}{x_r - x_{r-1}}$$

$$x_{r+1} = x_r - \frac{f(x_r)}{f'(x_r)}$$

$$x_{r+1} = x_r - \frac{f(x_r)(x_r - x_{r-1})}{f(x_r) - f(x_{r-1})}$$



METODE SECANT

Contoh. Tentukan akar dari $x^2 - (x + 1)\, e^{-x} = 0$, dengan akar awal di x_0=0,8 dan x_1=0,9 hingga iterasi ke-3.

ambil x_0 = 0,8 dan x_1 = 0,9 maka dapat dihitung

$$y_0 = F(x_0) = -0{,}16879$$

$$y_1 = F(x_1) = 0{,}037518$$

Iterasi Metode Secant adalah sebagai berikut :

Iterasi 1 : $x_2 = x_1 - y_1 \dfrac{x_1 - x_0}{y_1 - y_0} = 0{,}881815$

$$y_2 = 0{,}00153$$

Iterasi 2 : $x_3 = x_2 - y_2 \dfrac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} = 0{,}882528$

$$y_3 = 1{,}3.10^{-5}$$

Iterasi 3 : $x_4 = x_3 - y_3 \dfrac{x_3 - x_2}{y_3 - y_2} = 0{,}882534$

$$y_4 = 4{,}91.e^{-9}$$

Diperoleh akar x = 0,882534

is there any question?