泛函分析作业

1 第 4 周

问题 1.1. 设 X 是完备的度量空间, T 是 X 到 X 中的映射, 如果存在正整数 $m \in \mathbb{N}_+$ 以及常数 $\alpha \in [0,1)$ 使得对所有的 $x, y \in X$, 都有

$$d(T^m x, T^m y) \le \alpha\, d(x,y),$$

其中 T^m 表示映射 T 作用 m 次, 则 T 在 X 中有且只有一个不动点 x^*, 特别地, 迭代点列

$$x_0,\ x_1 = Tx_0, \cdots, x_n = Tx_{n-1}, \cdots,$$

在 (X,d) 中收敛于不动点 x^*.

证明 由条件可知映射 $T^m : X \to X$ 是压缩映射, 由于 X 完备, 根据压缩映射原理, T^m 在 X 上存在唯一的不动点 x^*, 即

$$x^* = T^m x^*. \tag{1.1}$$

下证 x^* 也是映射 T 在 X 上的唯一的不动点.

由(1.1)式可得

$$Tx^* = T\left(T^m x^*\right) = T^{m+1} x^* = T^m\left(Tx^*\right),$$

所以 Tx^* 也是 T^m 的不动点. 根据 T^m 的不动点的唯一性, 就有 $Tx^* = x^*$, 所以 x^* 也是映射 T 的不动点. 若 $x \in X$ 也是映射 T 的不动点, 则

$$x = Tx,\ x = Tx = T(Tx) = T^2 x, \cdots, x = T^m x,$$

即 x 也是 T^m 的不动点. 根据 T^m 的不动点的唯一性, 就有 $x^* = x$. 所以 x^* 是映射 T 在 X 上的唯一的不动点.

任取 $x_0 \in X$. 通过映射 T 构造迭代点列

$$x_0,\ x_1 = Tx_0,\ x_2 = Tx_1, \cdots, x_n = Tx_{n-1}, \cdots.$$

任取

$$s \in \{0, 1, 2, \cdots, m-1\},$$

令

$$\begin{aligned}
&y_0 = T^s x_0 = x_s,\\
&y_1 = T^m y_0 = x_{m+2},\\
&y_2 = T^m y_1 = x_{2m+s},\\
&\cdots,\\
&y_n = T^m y_{n-1} = x_{nm+s},\\
&\cdots.
\end{aligned}$$

根据由于 T^m 是压缩映射, X 完备, 则迭代点列 y_n 收敛于 T^m 的不动点 x^*, 即

$$\lim_{n\to\infty} x_{nm+s} = x^*, \quad \forall s \in \{0,1,2,\cdots,m-1\}.$$

于是对任意 $\epsilon > 0$, 以及任意 $s \in \{0,1,2,\cdots,m-1\}$, 邻域 $U(x^*,\epsilon)$ 之外只含有点列 $\{x_{nm+s}\}_{n=0}^{\infty}$ 中的有限多项, 将这些项的集合记为 A_s. 由于

$$\bigcup_{s=0}^{m-1}\bigcup_{n=0}^{\infty}\{x_{nm+s}\} = \bigcup_{n=0}^{\infty}\bigcup_{s=0}^{m-1}\{x_{nm+s}\} = \bigcup_{n=0}^{\infty}\{x_n\},$$

于是点列 $\{x_n\}$ 在邻域 $U(x^*,\epsilon)$ 之外的项的全体为有限集

$$\bigcup_{s=0}^{m-1} A_s,$$

所以

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x^*.$$

□

注 1.1. 该题中的映射 T 自身不一定是压缩映射. 证明过程后半部分用到了点列收敛的另外一种等价定义:

> 任给 $\epsilon > 0$, 若点列 $\{x_n\}$ 在邻域 $U(x,\epsilon)$ 之外至多只有有限多项, 则称点列 $\{x_n\}$ 收敛于 x.

点列极限与其子列极限的转化思路, 可参考华东师大《数学分析(第四版·上册)》P27 例 8 和 P35-P36 习题 7(2) 的证明.

问题 1.2 (Volterra 型线性积分方程解的存在唯一性问题). 设 $f \in C[a,b]$, 二元函数 $k(t,s)$ 在 $[a,b]\times[a,b]$ 上连续. 利用上题的结论证明, 对任意 $\lambda \in \mathbb{R}$, 积分方程

$$\phi(t) - \lambda\int_0^t k(t,s)\phi(s)\,\mathrm{d}s = f(t), \quad t \in [a,b] \tag{1.2}$$

总存在唯一的连续函数解 $\phi \in C[a,b]$.

证明 任取 $\phi \in C[a,b]$, 定义 $[a,b]$ 上的函数 $T\phi$:

$$(T\phi)(t) = f(t) + \lambda\int_a^t k(t,s)\phi(s)\,\mathrm{d}s, \quad t \in [a,b]. \tag{1.3}$$

由于 $\phi, f \in C[a,b]$, $k(t,s)$ 在 $[a,b]\times[a,b]$ 上连续, 由上式可知 $T\phi \in C[a,b]$. 由此得到映射

$$\begin{aligned} T:\ C[a,b] &\to C[a,b],\\ \phi &\mapsto T\phi. \end{aligned}$$

显然, 积分方程(1.2)在 $[a,b]$ 上的连续函数解等价于映射 T 在空间 $C[a,b]$ 中的不动点.

(下面验证 T 是否是压缩映射, 若不是, 继续验证 T^m 是否是压缩映射)

对任意 $\phi_1,\phi_2 \in C[a,b]$ 以及任意 $t \in [a,b]$, 由(1.3)可得

$$|(T\phi_1)(t) - (T\phi_2)(t)|$$

$$
\begin{aligned}
&= |\lambda| \cdot \left| \int_a^t k(t,s)\,[\phi_1(s) - \phi_2(s)]\,\mathrm{d}s \right| \\
&\leq |\lambda| \cdot \int_a^t \max_{\substack{a\leq t\leq b\\ a\leq s\leq b}} |k(t,s)| \cdot \max_{t\in[a,b]} |\phi_1(s) - \phi_2(s)|\,\mathrm{d}s \\
&= M|\lambda|(t-a)\cdot d(\phi_1,\phi_2),
\end{aligned}
$$

其中

$$
M = \max_{\substack{a\leq t\leq b\\ a\leq s\leq b}} |k(t,s)| \geq 0.
$$

(这样看 T 不一定是压缩映射)
利用上述结果, 继续计算可得

$$
\begin{aligned}
&\left|(T^2\phi_1)(t) - (T^2\phi_2)(t)\right| \\
=\ & |\lambda| \cdot \left| \int_a^t k(t,s)\,[(T\phi_1)(s) - (T\phi_2)(s)]\,\mathrm{d}s \right| \\
\leq\ & |\lambda| \cdot \int_a^t M \cdot |(T\phi_1)(s) - (T\phi_2)(s)|\,\mathrm{d}s \\
\leq\ & M^2|\lambda|^2 \int_a^t (s-a)\cdot d(\phi_1,\phi_2)\,\mathrm{d}s \\
=\ & \frac{\big[M|\lambda|(t-a)\big]^2}{2} d(\phi_1,\phi_2).
\end{aligned}
$$

一直做下去, 对任意 $m \in \mathbb{N}_+$ 就有

$$
|(T^m\phi_1)(t) - (T^m\phi_2)(t)| \leq \frac{\big[M|\lambda|(t-a)\big]^m}{m!} d(\phi_1,\phi_2), \quad \forall t \in [a,b],
$$

上式两端对 $t \in [a,b]$ 取最大值可得

$$
d\left(T^m\phi_1, T^m\phi_2\right) \leq \frac{\big[M|\lambda|(b-a)\big]^m}{m!} d(\phi_1,\phi_2).
$$

对任意 $a \in \mathbb{R}$, 都有 $\lim_{m\to\infty} \frac{a^m}{m!} = 0$, 由该事实可知, 存在充分大的一个正整数 m 使得

$$
\alpha = \frac{\big[M|\lambda|(b-a)\big]^m}{m!} \in [0,1),
$$

此时 T^m 就是完备度量空间 $C[a,b]$ 上的压缩映射. 根据上一个问题的结论, 映射 T 在 $C[a,b]$ 中存在唯一的不动点, 所以积分方程(1.2)在 $[a,b]$ 上存在唯一的连续函数解. □