2019-2020 学年第 1 学期

数学分析作业

目录

第 4 周

✍ **作业题 1.1** 设 A, B 为非空有界数集, 并且 $A \subset B$, 证明

$$\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B.$$

证明 显然, $\inf A \leq \sup A$. 下证 $\inf B \leq \inf A$ 并且 $\sup A \leq \sup B$.

假设 $\inf B > \inf A$, 则 $\inf B$ 不是集合 A 的下界, 从而存在 $x_0 \in A$ 使得 $\inf B > x_0$. 另一方面, 由于 $A \subset B$，从而也有 $x_0 \in B$, 于是

$$\inf B > x_0 \geq \inf B,$$

矛盾.

假设 $\sup A > \sup B$, 则 $\sup B$ 不是集合 A 的上界, 从而存在 $x_1 \in A$ 使得 $\sup B < x_1$. 另一方面, 由于 $A \subset B$，从而也有 $x_1 \in B$, 于是

$$\sup B < x_1 \leq \sup B,$$

矛盾.

综上, $\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B$. □

✍ **作业题 1.2** 设 S 为非空有下界 (不一定有上界) 的数集, 并且 $\inf S > 0$, 证明集合

$$S^{-1} = \left\{x^{-1} \mid x \in S\right\}$$

有界并且

$$\sup S^{-1} > 0, \quad \inf S^{-1} \geq 0, \quad \sup S^{-1} = \frac{1}{\inf S}.$$

证明 Step1. 任取 $y \in S^{-1}$, 令 $x = y^{-1}$, 则 $x \in S$,

$$x \geq \inf S > 0,$$

从而

$$0 < y \leq \frac{1}{\inf S}, \quad \forall y \in S^{-1}. \tag{1.1}$$

所以 0 是 S^{-1} 的一个下界, $\frac{1}{\inf S}$ 是 S^{-1} 的一个上界, 并且

$$\sup S^{-1} > 0, \quad \inf S^{-1} \geq 0.$$

Step2. 由 Step1 可知 $\sup S^{-1} \leq \frac{1}{\inf S}$. 下面排除 $\sup S^{-1} < \frac{1}{\inf S}$ 的情况. 反证法, 假设 $\sup S^{-1} < \frac{1}{\inf S}$ 成立, 由于 $\sup S^{-1} > 0$, 则

$$0 < \inf S < \frac{1}{\sup S^{-1}}.$$

所以 $\frac{1}{\sup S^{-1}}$ 不是 S 的下界, 存在 $x \in S$ 使得

$$0 < \inf S \leq x < \frac{1}{\sup S^{-1}}.$$

令 $y = x^{-1}$, 则 $y \in S^{-1}$,

$$0 < \frac{1}{y} = x < \frac{1}{\sup S^{-1}},$$

从而

$$\sup S^{-1} < y.$$

但是另一方面, 由于 $y \in S^{-1}$, 则一定有

$$y \leq \sup S^{-1},$$

矛盾. 所以

$$\sup S^{-1} = \frac{1}{\inf S}.$$

□

作业题 1.3 证明以下等式和不等式:

(1) 设 $a, b \in \mathbb{R}$, 则

$$\big||a| - |b|\big| \leq |a - b|, \quad \frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}.$$

(2) 设 $a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_+$ 且 $n \geq 2$, 则

$$a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right),$$

(3) Bernoulli(伯努利) 不等式: 设 $h \geq -1$, $n \in \mathbb{N}_+$, 则

$$(1+h)^n \geq 1 + nh.$$

特别地, 如果还有 $h \geq 0$ 并且 $n \geq 2$, 则还成立

$$(1+h)^n > \frac{n(n-1)}{2}h^2 \geq \frac{n^2h^2}{4}.$$

(4) 算术-几何平均值不等式: 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是 n 个非负实数, 则

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n}.$$

如果 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 都是正实数, 还成立几何-调和平均值不等式:

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}.$$

(5)

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots n^2 = \tfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$
$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots n^3 = \left(\tfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

注意 $\sum_{k=1}^{n} s_k$ 表示对 $s_1, s_2, \cdots, s_n$ 按下标 k 从 1 到 n 求和, 即 $\sum_{k=1}^{n} s_k = s_1 + s_2 + \cdots + s_n$.

(6) 若 $0 < x < \frac{\pi}{2}$, 则 $\sin x < x < \tan x$. 若 $x \in \mathbb{R}$, 则 $|\sin x| \le |x|$.

证明 (1) 对任意 $a, b \in \mathbb{R}$, 由绝对值不等式可得

$$\begin{aligned} |a-b| &\ge |a| - |b|, \\ |a-b| &= |b-a| \ge |b| - |a|, \end{aligned}$$

综合上述两式可得

$$-|a-b| \le |a| - |b| \le |a-b|,$$

所以

$$\big||a| - |b|\big| \le |a-b|.$$

由于

$$f(t) = \frac{t}{1+t}, \quad t > 0$$

是严格增函数, 并且

$$|a+b| \le |a| + |b|,$$

则 $f(|a+b|) \le f(|a| + |b|)$, 从而

$$\begin{aligned} \frac{|a+b|}{1+|a+b|} &\le \frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|} \\ &= \frac{|a|}{1+|a|+|b|} + \frac{|b|}{1+|a|+|b|} \\ &\le \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}. \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} & (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right) \\ = & \left(a^n + a^{n-1}b + \cdots + a^2b^{n-2} + ab^{n-1}\right) \\ & - \left(a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \cdots + ab^{n-1} + b^n\right) \\ = & a^n - b^n. \end{aligned}$$

(3) 当 $n = 1$ 时, $(1+h)^1 = 1 + 1 \cdot h$, 结论成立.
假设当 $n = k$ 时, 成立

$$(1+h)^k \ge 1 + kh.$$

由于 $h \ge -1$, 则当 $n = k+1$ 时,

$$\begin{aligned} & (1+h)^{k+1} = (1+h)^k \cdot (1+h) \ge (1+kh) \cdot (1+h) \\ = & 1 + (k+1)h + kh^2 \ge 1 + (k+1)h. \end{aligned}$$

综上, 对任意 $n \in \mathbb{N}_+$ 以及任意 $h \ge -1$ 都有

$$(1+h)^n \ge 1 + nh.$$

当 $n \geq 2$ 时, 有

$$\frac{n(n-1)}{2} \geq \frac{n^2}{4},$$

从而对任意 $h \geq 0$ 都有

$$\begin{aligned}(1+h)^n &= 1+nh+\frac{n(n-1)}{2}h^2+\cdots+h^n \\ &> \frac{n(n-1)}{2}h^2 \geq \frac{n^2h^2}{4}.\end{aligned}$$

(4) 如果 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中有一个是 0, 则算术-几何平均值不等式成立. 下设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 都是正的实数.

当 $n=1$ 时, 两个不等式显然都成立.

假设当 $n=k$ 时, 有

$$\frac{a_1+\cdots+a_k}{k} \geq \sqrt[k]{a_1\cdot\cdots\cdot a_k}.$$

当 $n=k+1$ 时,

$$\begin{aligned}&\frac{a_1+\cdots+a_k+a_{k+1}}{k+1} \\ =\ & \frac{a_1+\cdots+a_k}{k}+\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k}\right)(a_1+\cdots+a_k)+\frac{a_{k+1}}{k+1} \\ =\ & \frac{a_1+\cdots+a_k}{k}+\frac{ka_{k+1}-(a_1+\cdots+a_k)}{k(k+1)}.\end{aligned}$$

令

$$A=\frac{a_1+\cdots+a_k}{k}, \quad B=\frac{ka_{k+1}-(a_1+\cdots+a_k)}{k(k+1)},$$

则 $A>0$, $A+B>0$. 再令 $h=\frac{B}{A}$, 则 $1+h>0$, $h>-1$, 利用 Bernoulli 不等式可得

$$\begin{aligned}&\left(\frac{a_1+\cdots+a_k+a_{k+1}}{k+1}\right)^{k+1} \\ =\ & (A+B)^{k+1}=A^{k+1}\left(1+\frac{B}{A}\right)^{k+1}=A^{k+1}(1+h)^{k+1} \\ \geq\ & A^{k+1}[1+(k+1)h]=A^{k+1}\left[1+\frac{(k+1)B}{A}\right]=A^k[A+(k+1)B] \\ =\ & A^k\cdot a_{k+1}.\end{aligned}$$

根据 $n=k$ 时的假设条件, 有

$$A^k=\left(\frac{a_1+\cdots+a_k}{k}\right)^k \geq a_1\cdot\cdots\cdot a_k,$$

从而

$$\frac{a_1+\cdots+a_k+a_{k+1}}{k+1} \geq a_1\cdot\cdots\cdot a_k\cdot a_{k+1}.$$

综上, 算术-几何平均值不等式

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_n}$$

成立.

利用算术-几何平均值不等式可得

$$\frac{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}{n} \geq \sqrt[n]{\frac{1}{a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_n}}>0,$$

对上式取倒数, 就得到几何-调和平均值不等式:

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}.$$

(5) 当 $n=1$ 时, 两不等式显然都成立.
假设当 $n=l$ 时,

$$\sum_{k=1}^{l} k^2 = \frac{l(l+1)(2l+1)}{6},$$
$$\sum_{k=1}^{l} k^3 = \left(\frac{l(l+1)}{2}\right)^2.$$

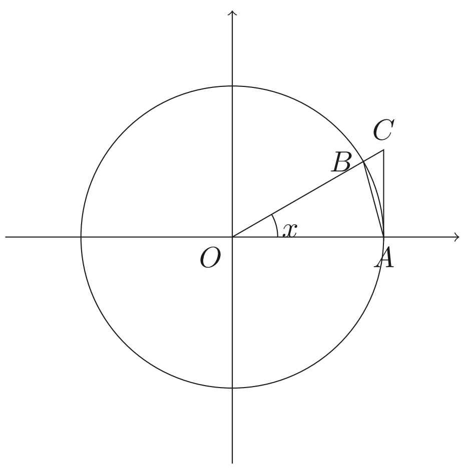
当 $n=l+1$ 时就有

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{l+1} k^2 &= \sum_{k=1}^{l} k^2 + (l+1)^2 \\
&= \frac{l(l+1)(2l+1)}{6} + \frac{6(l+1)^2}{6} \\
&= \frac{(l+1)[(l+1)+1][2(l+1)+1]}{6},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{l+1} k^3 &= \sum_{k=1}^{l} k^3 + (l+1)^3 \\
&= \left(\frac{l(l+1)}{2}\right)^2 + (l+1)^3 \\
&= \left[\frac{(l+1)(l+2)}{2}\right]^2.
\end{aligned}$$

综上, 两等式恒成立.

(6)



在以上单位圆周中, 角的弧度 x 满足 $0<x<\frac{\pi}{2}$, 三角形 OAB 的面积

$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB \cdot \sin x = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin x = \frac{1}{2} \sin x,$$

扇形 $\widehat{OAB}$ 的面积

$$S_2 = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB \cdot x = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot x = \frac{1}{2} x,$$

直角三角形 OAC 的两条直角边的长度分别为

$$OA = 1, \quad AC = \tan x,$$

所以直角三角形 OAC 的面积为

$$S_3 = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \tan x = \frac{1}{2} \tan x.$$

显然, $S_1 < S_2 < S_3$, 从而

$$0 < \sin x < x < \tan x.$$

当 $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ 时, 由上述结论可知

$$|\sin x| \le |x|.$$

当 $x > 1$ 时, 总有

$$|\sin x| \le 1 < x = |x|.$$

于是,

$$|\sin x| \le |x|, \quad \forall x \in [0, +\infty).$$

当 $x < 0$ 时, $-x \in (0, +\infty)$, 由以上结论可得

$$|\sin x| = |\sin(-x)| \le |-x| = |x|.$$

综上,

$$|\sin x| \le |x|, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

□