# 泛函分析作业

## 1 第 3 周

**问题 1.1.** 设 $(X,d)$ 是度量空间, $\{x_n\}$ 是 $(X,d)$ 中的 Cauchy 点列, 证明: $\{x_n\}$ 收敛当且仅当 $\{x_n\}$ 存在收敛子列.

**证明** 必要性是显然的.

下证充分性. 设 Cauchy 点列 $\{x_n\}$ 存在收敛子列 $\{x_{n_k}\}$ 使得 $x_{n_k} \to x\ (k \to \infty)$. 任取 $\epsilon > 0$. 一方面, 由于 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 点列, 则存在 $N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}_+$, 使得

$$d(x_n, x_m) < \frac{1}{2}\epsilon, \quad \forall m, n > N. \tag{1.1}$$

另一方面, 由于 $x_{n_k} \to x\ (k \to \infty)$, 则存在 $K = K(\epsilon) \in \mathbb{N}_+$ 使得

$$n_k > N \quad \text{并且} \quad d(x_{n_k}, x) < \frac{1}{2}\epsilon, \quad \forall k > K. \tag{1.2}$$

综上, 由 (1.1)-(1.2) 式, 对任意 $n > N$, 取 $k = K + 1$, 就有

$$d(x_n, x) \le d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x) < \frac{1}{2}\epsilon + \frac{1}{2}\epsilon = \epsilon,$$

所以 $x_n \to x\ (n \to \infty)$. □

**问题 1.2.** 设 $f$ 是度量空间 $(X,d)$ 到 $\mathbb{R}$ 的连续映射, $M$ 是 $X$ 中的紧集, 证明: 连续映射 $f$ 在紧集 $M$ 上能够取到最值, 即存在 $x_0, x_1 \in M$ 使得

$$f(x_0) = \min_{x \in M} f(x), \quad f(x_1) = \max_{x \in M} f(x).$$

**证明** Step1. 设

$$l = \inf_{x \in M} f(x).$$

下证 $l \in \mathbb{R}$.

反证法, 假设 $l = -\infty$, 则对任意 $n \in \mathbb{N}_+$, 存在 $x_n \in M$ 使得

$$f(x_n) < -n,$$

于是

$$f(x_n) \to -\infty \quad (n \to \infty). \tag{1.3}$$

另一方面, 由于 $\{x_n\} \subset M$ 并且 $M$ 是紧集, 则存在 $\{x_n\}$ 的子列 $\{x_{n_k}\}$ 以及 $x \in M$ 使得

$$x_{n_k} \to x \quad (k \to \infty).$$

根据映射 $f$ 的连续性, 就有

$$f(x_{n_k}) \to f(x) \in \mathbb{R} \quad (k \to \infty).$$

这与 (1.3) 式矛盾. 所以 $l \in \mathbb{R}$.

Step2. 根据下确界的定义, 存在 $\{x_n\} \subset M$(称为极小化序列) 使得

$$f(x_n) \to l \quad (n \to \infty).$$

由于 $M$ 是紧集, 则存在 $\{x_n\}$ 的子列 $\{x_{n_k}\}$ 以及 $x \in M$ 使得

$$x_{n_k} \to x \quad (k \to \infty).$$

根据映射 $f$ 的连续性, 就有

$$\inf_{x \in M} f(x) = l = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f\left(\lim_{k\to\infty} x_{n_k}\right) = f(x).$$

所以连续映射 $f$ 在紧集 $M$ 上可以取到最小值.

同理可证, 连续映射 $f$ 在紧集 $M$ 上可以取到最大值. □

## 问题 1.3.

**定义 1.1 (Hölder 连续函数).** 设 $\alpha \in (0,1]$. 若 $f \in C[a,b]$ 满足

$$[f]_\alpha = \sup_{\substack{x,y\in[a,b],\\ x\neq y}} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha} < +\infty,$$

则称 $f$ 是 $[a,b]$ 上具有指数 $\alpha$ 的 Hölder 连续函数. $C[a,b]$ 中所有具有指数 $\alpha$ 的 Hölder 连续函数的全体记为 $C^{0,\alpha}[a,b]$.

(1) 令

$$\bar{d}(f,g) = \max_{t\in[a,b]} |f(t)-g(t)| + [f-g]_\alpha, \quad \forall f,g \in C^{0,\alpha}[a,b],$$

证明 $(C^{0,\alpha}[a,b], \bar{d})$ 是一个度量空间.

(2) 证明 $(C^{0,\alpha}[a,b], \bar{d})$ 是完备的度量空间.

(3) 利用 Ascoli-Arezela 定理证明, 若 $M$ 是 $(C^{0,\alpha}[a,b], \bar{d})$ 中的有界集, 则 $M$ 是 $(C[a,b], d)$ 中的列紧集, 其中 $d$ 是最大值距离, 即

$$d(f,g) = \max_{t\in[a,b]} |f(t)-g(t)|, \quad \forall f,g \in C[a,b].$$

**证明** (1) 任取 $f,g \in C^{0,\alpha}[a,b]$, 对任意 $x,y \in [a,b]$ 且 $x \neq y$, 都有

$$\begin{aligned}
&\frac{|(f-g)(x)-(f-g)(y)|}{|x-y|^\alpha} \\
\leq\ & \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha} + \frac{|g(x)-g(y)|}{|x-y|^\alpha} \\
\leq\ & [f]_\alpha + [g]_\alpha < +\infty,
\end{aligned}$$

从而

$$[f-g]_\alpha = \sup_{\substack{x,y\in[a,b],\\ x\neq y}} \frac{|(f-g)(x)-(f-g)(y)|}{|x-y|^\alpha} \leq [f]_\alpha + [g]_\alpha < +\infty.$$

所以 $\bar{d}(f,g)$ 的定义是合理的.

(i) 显然 $\bar{d}(f,g)\geq 0$. 由于 $d(f,g)\leq \bar{d}(f,g)$, 根据 $d(f,g)$ 的正定性可知, $\bar{d}(f,g)=0$ 等价于

$$f(t)=g(t),\quad \forall t\in[a,b],$$

从而等价于 $f=g$.

(ii) 设 $f,g,h\in C^{0,\alpha}[a,b]$, 则

$$d(f,g)\leq d(f,h)+d(h,g).$$

另一方面, 对任意 $x,y\in[a,b]$ 且 $x\neq y$, 都有

$$\begin{aligned}
&\frac{|(f-g)(x)-(f-g)(y)|}{|x-y|^\alpha}\\
=\ &\frac{\big|[(f-h)+(h-g)](x)-[(f-h)+(h-g)](y)\big|}{|x-y|^\alpha}\\
\leq\ &\frac{|(f-h)(x)-(f-h)(y)|}{|x-y|^\alpha}+\frac{|(h-g)(x)-(h-g)(y)|}{|x-y|^\alpha},
\end{aligned}$$

从而

$$[f-g]_\alpha\leq[f-h]_\alpha+[h-g]_\alpha.$$

综上,

$$\bar{d}(f,g)\leq\bar{d}(f,g)+\bar{d}(h,g).$$

所以 $(C^{0,\alpha}[a,b],\bar{d})$ 是一个度量空间.

(2) 设 $\{f_n\}$ 是空间 $(C^{0,\alpha}[a,b],\bar{d})$ 中的 Cauchy 点列. 由于 $C^{0,\alpha}[a,b]\subset C[a,b]$ 并且

$$0\leq d(f,g)\leq\bar{d}(f,g),\quad \forall f,g\in C^{0,\alpha}[a,b],$$

易证 $\{f_n\}$ 也是 $(C[a,b],d)$ 中的 Cauchy 点列. 根据 $(C[a,b],d)$ 的完备性, 存在 $f\in C[a,b]$ 使得

$$d(f_n,f)\to 0\quad (n\to\infty).$$

下证 $f\in C^{0,\alpha}[a,b]$ 并且

$$\bar{d}(f_n,f)\to 0\quad (n\to\infty).$$

由于 $\{f_n\}$ 是空间 $(C^{0,\alpha}[a,b],\bar{d})$ 中的 Cauchy 点列, 从而是 $(C^{0,\alpha}[a,b],\bar{d})$ 中的有界点列 (p219 第 14 题), 于是存在 $M>0$ 使得对任意 $x,y\in[a,b]$ 并且 $x\neq y$ 都有

$$\frac{|f_n(x)-f_n(y)|}{|x-y|^\alpha}\leq[f_n]_\alpha=[f_n-0]_\alpha\leq\bar{d}(f_n,0)\leq M,\quad \forall n\in\mathbb{N}_+. \tag{1.4}$$

由于函数列 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f$, 那么也逐点收敛于 $f$, 即对任意 $x\in[a,b]$, 都有

$$f_n(x)\to f(x)\quad (n\to\infty). \tag{1.5}$$

因此, 在 (1.4) 两端令 $n\to\infty$, 可得

$$\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha}\leq M,\quad \forall x,y\in[a,b],\ x\neq y,$$

从而 $[f]_\alpha<+\infty$, $f\in C^{0,\alpha}[a,b]$.

对任意 $\epsilon > 0$, 由于 $\{f_n\}$ 是空间 $(C^{0,\alpha}[a,b], \bar{d})$ 中的 Cauchy 点列, 则存在正整数 $N$, 使得对任意 $m, n > N$, 都有

$$\frac{\big|[f_n(x) - f_m(x)] - [f_n(y) - f_m(y)]\big|}{|x-y|^\alpha} \le [f_n - f_m]_\alpha \le \bar{d}(f_n, f_m) < \epsilon, \quad \forall x, y \in [a,b],\ x \neq y.$$

在上式中固定 $x, y$ 以及 $n > N$, 令 $m \to \infty$, 结合 (1.5) 式可得

$$\frac{\big|[f_n(x) - f(x)] - [f_n(y) - f(y)]\big|}{|x-y|^\alpha} \le \epsilon, \quad \forall n \ge N,\ \forall x, y \in [a,b],\ x \neq y,$$

所以

$$[f_n - f]_\alpha \le \epsilon, \forall n > N.$$

综上

$$[f_n - f]_\alpha \to 0 \quad (n \to \infty),$$

从而

$$\bar{d}(f_n, f) = d(f_n, f) + [f_n - f]_\alpha \to 0 \quad (n \to \alpha).$$

所以 $(C^{0,\alpha}[a,b], \bar{d})$ 是完备的度量空间.

(3) 设 $M$ 在 $(C^{0,\alpha}[a,b], \bar{d})$ 中有界. 由于 $C^{0,\alpha}[a,b] \subset C[a,b]$ 并且

$$0 \le d(f,g) \le \bar{d}(f,g), \quad \forall f, g \in C^{0,\alpha}[a,b],$$

所以 $M$ 也在 $(C[a,b], d)$ 中有界. 任取 $\{f_n\} \subset M$, 则 $\{f_n\}$ 既是 $(C^{0,\alpha}[a,b], \bar{d})$ 中的有界点列, 又是 $(C[a,b], d)$ 中的有界点列, 从而函数列 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上一致有界. 下证函数列 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上等度连续.

由于 $\{f_n\}$ 是 $(C^{0,\alpha}[a,b], \bar{d})$ 中的有界点列, 则存在 $M > 0$, 使得

$$[f_n]_\alpha = [f_n - 0]_\alpha \le \bar{d}(f_n, 0) \le M.$$

从而

$$|f_n(x) - f_n(y)| \le M|x-y|^\alpha, \quad \forall n \in \mathbb{N}_+,\ \forall x, y \in [a,b]. \tag{1.6}$$

对任意 $\epsilon > 0$, 取

$$\delta = \left(\frac{\epsilon}{M}\right)^{\frac{1}{\alpha}} > 0,$$

则对任意 $x, y \in [a,b]$ 且 $|x-y| < \delta$, 根据 $\alpha \in (0,1]$ 以及(1.6)式可得

$$|f_n(x) - f_n(y)| \le M|x-y|^\alpha < M\delta^\alpha = \epsilon, \quad \forall n \in \mathbb{N}_+,$$

因此函数列 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上等度连续.

根据 Ascoli-Arezela 定理, 点列 $\{f_n\}$ 在空间 $(C[a,b], d)$ 中有收敛子列, 由此可知集合 $M$ 是空间 $(C[a,b], d)$ 中的列紧集.

由于 $\{f_n\}$ 是 $(C^{0,\alpha}[a,b], \bar{d})$ 中的有界点列, 根据 (2) 的证明的前半部分可知, 上述收敛子列 $\{f_{n_k}\}$ 的极限 $f$ 也在 $C^{0,\alpha}[a,b]$ 中. 然而, 虽然 $\{f_{n_k}\}$ 在 $(C[a,b], d)$ 中收敛, 但是却不能保证 $\{f_{n_k}\}$ 是 $(C^{0,\alpha}[a,b], \bar{d}))$ 的 Cauchy 点列, 因此我们无法像 (2) 的证明的后半部分那样证明

$$[f_{n_k} - f]_\alpha \to 0 \quad (k \to \infty).$$

□