泛函分析作业题

第 5 周

作业题 1.1 设 $(X, \|\cdot\|)$ 是一个赋范空间, $x_0 \in X$, $\epsilon > 0$. 令

$$\begin{aligned} U(x_0, \epsilon) &= \{x \mid \|x - x_0\| < \epsilon\}, \\ S(x_0, \epsilon) &= \{x \mid \|x - x_0\| \leq \epsilon\}, \end{aligned}$$

则

$$\overline{U(x_0, \epsilon)} = S(x_0, \epsilon).$$

证明 由于范数 $\|\cdot\|$ 作为映射是赋范线性空间 X 上的连续映射, 则可证 $S(x_0, \epsilon)$ 是空间 X 中的闭集. 由于 $U(x_0, \epsilon) \subset S(x_0, \epsilon)$, 则 $\overline{U(x_0, \epsilon)} \subset S(x_0, \epsilon)$. 下证 $S(x_0, \epsilon) \subset \overline{U(x_0, \epsilon)}$.

令

$$D = \{x \in X \mid \|x - x_0\| = \epsilon\},$$

则 $S(x_0, \epsilon) = U(x_0, \epsilon) \cup D$. 显然, $U(x_0, \epsilon) \subset \overline{U(x_0, \epsilon)}$, 所以只需要证明 $D \subset \overline{U(x_0, \epsilon)}$.

任取 $y_0 \in D$. 对任意 $n \in \mathbb{N}$, 令

$$x_n = y_0 + \frac{x_0 - y_0}{n\|x_0 - y_0\|} = y_0 + \frac{1}{n\epsilon}(x_0 - y_0),$$ (赋范线性空间里可以做加法和数乘)

则 $x_n \in X$, 并且当 n 足够大时, 就有(下式还用到了范数的正齐次性)

$$\|x_n - x_0\| = \left\|\left(\frac{1}{n\epsilon} - 1\right)(x_0 - y_0)\right\| = \left|\frac{1}{n\epsilon} - 1\right| \|x_0 - y_0\| = \left|\frac{1}{n} - \epsilon\right| = \epsilon - \frac{1}{n} < \epsilon,$$

从而 $x_n \in U(x_0, \epsilon)$. 另一方面,

$$\|x_n - y_0\| = \left\|\frac{1}{n\epsilon}(x_0 - y_0)\right\| = \frac{1}{n\epsilon}\|x_0 - y_0\| = \frac{1}{n},$$

所以 $\lim\limits_{x \to \infty} \|x_n - y_0\| = 0$, y_0 就是 $U(x_0, \epsilon)$ 的聚点, 因此 $y_0 \in \overline{U(x_0, \epsilon)}$. 综上, $D \subset \overline{U(x_0, \epsilon)}$.

所以 $\overline{U(x_0, \epsilon)} = S(x_0, \epsilon)$. □

作业题 1.2 (内插不等式) 设 $1 \leq s \leq r \leq t < \infty$, $u \in L^s(\Omega) \cap L^t(\Omega)$, 利用 Hölder 不等式证明 $u \in L^r(\Omega)$ 并且

$$\|u\|_r \leq \|u\|_s^\theta \|u\|_t^{1-\theta},$$

其中 $\theta \in [0, 1]$ 满足

$$\frac{1}{r} = \frac{\theta}{s} + \frac{1-\theta}{t}.$$

证明 当 $r = s$ 时, 取 $\theta = 1$; 当 $r = t$ 时, 取 $\theta = 0$. 在这两种情况下, 结论都成立. 下设

$$1 \leq s < r < t < \infty.$$

若存在 $m, n > 0$ 使得 $r = \frac{s}{m} + \frac{t}{n}$, 则

$$|u|^r = |u|^{\frac{s}{m}} \cdot |u|^{\frac{t}{n}}.$$

由于 $u \in L^s(\Omega) \cap L^t(\Omega)$, 则

$$\int_\Omega \left(|u|^{\frac{s}{m}}\right)^m \mathrm{d}x \quad = \quad \int_\Omega |u|^s \,\mathrm{d}x < +\infty,$$

$$\int_\Omega \left(|u|^{\frac{t}{n}}\right)^n \mathrm{d}x = \int_\Omega |u|^t \mathrm{d}x < +\infty,$$

从而 $|u|^{\frac{s}{m}} \in L^m(\Omega)$, $|u|^{\frac{t}{n}} \in L^n(\Omega)$. 于是, 当 m, n 满足

$$\begin{cases} m, n > 0, \\ \frac{s}{m} + \frac{t}{n} = r, \\ \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = 1, \end{cases}$$

即 $m = \frac{t-s}{t-r}$, $n = \frac{t-s}{r-s}$ 时, 利用 Hölder 不等式可得

$$\int_\Omega |u|^r \mathrm{d}x = \int_\Omega |u|^{\frac{s}{m}} \cdot |u|^{\frac{t}{n}} \mathrm{d}x \le \left[\int_\Omega \left(|u|^{\frac{s}{m}}\right)^m \mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{m}} \cdot \left[\int_\Omega \left(|u|^{\frac{t}{n}}\right)^n \mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{n}}$$
$$= \left(\int_\Omega |u|^s \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{m}} \cdot \left(\int_\Omega |u|^t \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}} = \|u\|_s^{\frac{s}{m}} \cdot \|u\|_t^{\frac{t}{n}} < \infty,$$

所以 $u \in L^r(\Omega)$, 并且

$$\|u\|_r^r = \int_\Omega |u|^r \mathrm{d}x \le \|u\|_s^{\frac{s}{m}} \cdot \|u\|_t^{\frac{t}{n}}.$$

令 $\theta = \frac{s}{rm}$, 则 $\theta \in (0,1)$, $\frac{t}{rn} = 1 - \theta$,

$$\frac{\theta}{s} + \frac{1-\theta}{t} = \frac{1}{rm} + \frac{1}{rm} = \frac{1}{r},$$

并且

$$\|u\|_r \le \|u\|_s^\theta \|u\|_t^{1-\theta}.$$

□

作业题 1.3 ($L^p(\Omega)$ 与 $L^\infty(\Omega)$ 的联系) 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的可测集并且 $m(\Omega) < +\infty$, 证明

(1) 若 p, q 满足 $1 \le p < q \le \infty$, 则

$$L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega),$$

并且存在与 $m(\Omega), p$ 和 q 相关的正常数 C 使得

$$\|f\|_p \le C\|f\|_q, \quad \forall f \in L^q(\Omega).$$

(2) 对任意 $f \in L^\infty(\Omega)$, 都有

$$\lim_{p \to +\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty.$$

证明 (1) Step1. 任取 $f \in L^\infty(\Omega)$, 下证

$$f \in L^p(\Omega), \quad \forall p \ge 1.$$

由于 $f \in L^\infty(\Omega)$, 则存在 $E_0 \subset \Omega$ 使得 $m(E_0) = 0$ 并且

$$|f(x)|^p \le \|f\|_\infty^p, \quad \forall x \in \Omega \setminus E_0, \quad \forall p \ge 1.$$

于是

$$\int_\Omega |f(x)|^p \mathrm{d}x = \int_{\Omega \setminus E_0} |f(x)|^p \mathrm{d}x + \int_{E_0} |f(x)|^p \mathrm{d}x$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{\Omega\setminus E_0} |f(x)|^p \,\mathrm{d}x \\
&\leq \int_{\Omega\setminus E_0} \|f\|_\infty^p \,\mathrm{d}x \\
&\leq m(\Omega)\|f\|_\infty^p < +\infty,
\end{aligned}
$$

所以 $f \in L^p(\Omega)$ 并且

$$\|f\|_p \leq [m(\Omega)]^{\frac{1}{p}} \|f\|_\infty. \tag{1}$$

□

Step2. 下证当 p, q 满足

$$1 \leq p < q < \infty$$

时结论成立.

任取 $f \in L^q(\Omega)$, 令 $t = \frac{q}{p}$, $s = \frac{t}{t-1}$, 则 $t, s > 0$, $\frac{1}{t} + \frac{1}{s} = 1$, 并且

$$\int_\Omega (|f(x)|^p)^t \,\mathrm{d}x = \int_\Omega |f(x)|^q \,\mathrm{d}x < \infty,$$

即 $|f|^p \in L^t(\Omega)$. 定义

$$g(x) \equiv 1, \quad x \in \Omega,$$

则 $g \in L^s(\Omega)$. 利用 Hölder 不等式可得

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega |f(x)|^p \,\mathrm{d}x \\
= &\int_\Omega 1 \cdot |f(x)|^p \,\mathrm{d}x \\
\leq &\left(\int_\Omega 1^s \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{s}} \left(\int_\Omega (|f(x)|^p)^t \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{t}} \\
= &[m(\Omega)]^{\frac{1}{s}} \left(\int_\Omega |f(x)|^q \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{t}} \\
= &[m(\Omega)]^{\frac{q-p}{q}} \|f\|_q^p < +\infty,
\end{aligned}
$$

所以 $f \in L^p(\Omega)$, 并且

$$\|f\|_p \leq [m(\Omega)]^{\frac{q-p}{pq}} \|f\|_q.$$

(2) 当 $\|f\|_\infty = 0$ 时, 由 (1) 部分的结论可知 $\|f\|_p \equiv 0$, $\forall p > 1$, 此时结论显然成立. 下设 $\|f\|_\infty > 0$.

一方面, 由(1)可得

$$\varlimsup_{p\to+\infty} \|f\|_p \leq \varlimsup_{p\to+\infty} [m(\Omega)]^{\frac{1}{p}} \|f\|_\infty = \|f\|_\infty. \tag{2}$$

另一方面, 对任意 $\epsilon \in (0, \|f\|_\infty)$, 令

$$E_\epsilon = \{x \in \Omega \mid |f(x)| \geq \|f\|_\infty - \epsilon\},$$

下证 $m(E_\epsilon) > 0$. 反证法, 假设 $m(E_\epsilon) = 0$, 由 $\|f\|_\infty$ 的定义可得

$$\sup_{x\in\Omega\setminus E_\epsilon} |f(x)| \geq \inf_{\substack{E_0\subset\Omega \\ m(E_0)=0}} \left(\sup_{x\in\Omega\setminus E_0} |f(x)|\right) = \|f\|_\infty. \tag{3}$$

但是另一方面，对任意 $x \in \Omega \setminus E_\epsilon$, 有 $|f(x)| \le \|f\|_\infty - \epsilon$, 从而

$$\sup_{x \in \Omega \setminus E_\epsilon} |f(x)| \le \|f\|_\infty - \epsilon,$$

这与(3)矛盾. 所以 $m(E_\epsilon) > 0$. 于是

$$\begin{aligned} \int_\Omega |f(x)|^p \, dx &\ge \int_{E_\epsilon} |f(x)|^p \, dx \\ &\ge \int_{E_\epsilon} (\|f\|_\infty - \epsilon)^p \, dx \\ &= m(E_\epsilon) \left(\|f\|_\infty - \epsilon \right)^p, \end{aligned}$$

进而

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \ge [m(E_\epsilon)]^{\frac{1}{p}} \left(\|f\|_\infty - \epsilon \right),$$

$$\begin{aligned} \varliminf_{p \to +\infty} \|f\|_p &\ge \varliminf_{p \to +\infty} [m(E_\epsilon)]^{\frac{1}{p}} \left(\|f\|_\infty - \epsilon \right) \\ &= \|f\|_\infty - \epsilon. \end{aligned}$$

由 $\epsilon > 0$ 的任意性可知

$$\varliminf_{p \to +\infty} \|f\|_p \ge \|f\|_\infty. \tag{4}$$

综合(2)与(4)式, 可得

$$\lim_{p \to +\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty.$$

作业题 1.4 (Brezis-Lieb 引理) 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的可测集, $1 \le p < \infty$. 若 $L^p(\Omega)$ 中的函数列 $\{u_n\}$ 满足

(1) $\{u_n\}$ 是 $L^p(\Omega)$ 中的有界点列;

(2) $u_n(x) \to u(x)$ $a.e. x \in \Omega \quad (n \to \infty)$.

证明 $u \in L^p(\Omega)$ 并且

$$\lim_{n \to \infty} \left(\|u_n\|_p^p - \|u_n - u\|_p^p \right) = \|u\|_p^p.$$

证明 Step1. 由于 $\{u_n\}$ 在 $L^p(\Omega)$ 中有界, 则存在 $M > 0$, 使得

$$\|u_n\|_p \le M, \quad \forall n \in \mathbb{N}_+.$$

由于

$$u_n(x) \to u(x) \ a.e. x \in \Omega \quad (n \to \infty),$$

则

$$|u_n(x)|^p \to |u(x)|^p \ a.e. x \in \Omega \quad (n \to \infty).$$

由 Fatou 引理 (P107) 可得

$$\int_\Omega |u(x)|^p \, dx = \int_\Omega \varliminf_{n \to \infty} |u_n(x)|^p \, dx \le \varliminf_{n \to \infty} \int_\Omega |u_n(x)|^p \, dx = \varliminf_{n \to \infty} \|u_n\|_p^p \le M^p < +\infty,$$

所以 $u \in L^p(\Omega)$.

Step2. (为什么要有这一步? 从下面的(7)式最后一步估计可以看到端倪) 任取 $\epsilon > 0$. 下证存在只与 ϵ 和 p 有关的正常数 $C > 0$ 使得

$$\Big||a+b|^p - |a|^p\Big| \le \epsilon |a|^p + C|b|^p, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

事实上, 当 $p = 1$ 时,

$$\Big||a+b| - |a|\Big| \le |(a+b) - a| = |b| \le \epsilon |a| + |b|,$$

结论成立. 当 $p > 1$ 时, 由微分中值定理, 存在 $\theta \in [0,1]$ 使得

$$\begin{aligned}
& \Big||a+b|^p - |a|^p\Big| \\
= & \Big|p|\theta a + (1-\theta)b|^{p-2}(\theta a + (1-\theta)b)b\Big| \\
= & p|\theta a + (1-\theta)b|^{p-1}|b| \\
\le & p2^{p-1}\left(|\theta a|^{p-1} + |(1-\theta)b|^{p-1}\right)|b| \\
\le & p2^{p-1}\left(|a|^{p-1} + |b|^{p-1}\right)|b| \\
= & p2^{p-1}|a|^{p-1}|b| + p2^{p-1}|b|^p.
\end{aligned} \tag{5}$$

令 $q = \frac{p}{p-1}$, 则 $p > 1$ 且 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. 由 Young 不等式可得

$$\begin{aligned}
& p2^{p-1}|a|^{p-1}|b| \\
= & \left[(q\epsilon)^{\frac{1}{q}}|a|^{p-1}\right] \cdot \left[(q\epsilon)^{-\frac{1}{q}}p2^{p-1}|b|\right] \\
\le & \frac{\left[(q\epsilon)^{\frac{1}{q}}|a|^{p-1}\right]^q}{q} + \frac{\left[(q\epsilon)^{-\frac{1}{q}}p2^{p-1}|b|\right]^p}{p} \\
= & \epsilon|a|^p + \left(\frac{2^p(p-1)}{\epsilon}\right)^{p-1}|b|^p
\end{aligned} \tag{6}$$

令

$$C = \left(\frac{2^p(p-1)}{\epsilon}\right)^{p-1} + p2^{p-1},$$

再将(6)式代入到(5)中可得

$$\Big||a+b|^p - |a|^p\Big| \le \epsilon|a|^p + C|b|^p.$$

Step3. 下证

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\left(\|u_n\|_p^p - \|u_n - u\|_p^p\right) - \|u\|_p^p\Big) = 0.$$

由 Step2 可得

$$\begin{aligned}
& \Big||u_n(x)|^p - |u_n(x) - u(x)|^p - |u(x)|^p\Big| \\
\le & \Big||u_n(x)|^p - |u_n(x) - u(x)|^p\Big| + |u(x)|^p \\
= & \Big||(u_n(x) - u(x)) + u(x)|^p - |u_n(x) - u(x)|^p\Big| + |u(x)|^p \\
\le & \epsilon|u_n(x) - u(x)|^p + (C+1)|u(x)|^p.
\end{aligned} \tag{7}$$

令

$$f_n^\epsilon(x) = \Big||u_n(x)|^p - |u_n(x) - u(x)|^p - |u(x)|^p\Big| - \epsilon|u_n(x) - u(x)|^p,$$

则由条件 (ii) 可知

$$f_n^\epsilon(x) \to 0 \quad a.e.\ x \in \Omega \quad (n \to \infty),$$

同样也有 f_n^ϵ 的正部 $(f_n^\epsilon)^+$ 也满足

$$(f_n^\epsilon)^+(x) \to 0, \quad a.e.\ x \in \Omega \quad (n \to \infty). \tag{8}$$

由(7)式可得

$$0 \le (f_n^\epsilon)^+(x) \le (C+1)|u(x)|^p, \quad \forall x \in \Omega. \tag{9}$$

由于 $u \in L^p(\Omega)$, 则 $|u|^p \in L^1(\Omega)$, 综合(8)和(9), 利用 Lebesgue 控制收敛定理可得

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega (f_n^\epsilon)^+(x)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \lim_{n\to\infty} (f_n^\epsilon)^+(x)\,\mathrm{d}x = 0. \tag{10}$$

再由(7)式可得

$$\begin{aligned}
& \Big| |u_n(x)|^p - |u_n(x)-u(x)|^p - |u(x)|^p \Big| \\
= \ & f_n^\epsilon(x) + \epsilon |u_n(x)-u(x)|^p \\
\le \ & (f_n^\epsilon)^+(x) + \epsilon |u_n(x)-u(x)|^p,
\end{aligned}$$

上式两端在 Ω 上积分可得

$$\begin{aligned}
& \Big| \left(\|u_n\|_p^p - \|u_n-u\|_p^p\right) - \|u\|_p^p \Big| \\
\le \ & \int_\Omega \Big| |u_n(x)|^p - |u_n(x)-u(x)|^p - |u(x)|^p \Big| \,\mathrm{d}x \\
\le \ & \int_\Omega (f_n^\epsilon)^+(x)\,\mathrm{d}x + \epsilon \|u_n-u\|_p^p \\
\le \ & \int_\Omega (f_n^\epsilon)^+(x)\,\mathrm{d}x + \left(M^p + \|u\|_p^p\right)\epsilon,
\end{aligned}$$

在上式两端令 $n \to \infty$ 可得

$$\begin{aligned}
& \varlimsup_{n\to\infty} \Big| \left(\|u_n\|_p^p - \|u_n-u\|_p^p\right) - \|u\|_p^p \Big| \\
\le \ & \varlimsup_{n\to\infty} \int_\Omega (f_n^\epsilon)^+(x)\,\mathrm{d}x + \left(M^p + \|u\|_p^p\right)\epsilon \\
= \ & \left(M^p + \|u\|_p^p\right)\epsilon
\end{aligned}$$

再由 $\epsilon > 0$ 的任意性可得

$$\lim_{n\to\infty} \Big| \left(\|u_n\|_p^p - \|u_n-u\|_p^p\right) - \|u\|_p^p \Big| = \varlimsup_{n\to\infty} \Big| \left(\|u_n\|_p^p - \|u_n-u\|_p^p\right) - \|u\|_p^p \Big| = 0,$$

所以

$$\lim_{n\to\infty} \Big(\left(\|u_n\|_p^p - \|u_n-u\|_p^p\right) - \|u\|_p^p \Big) = 0,$$

即

$$\lim_{n\to\infty} \left(\|u_n\|_p^p - \|u_n-u\|_p^p\right) = \|u\|_p^p.$$

$\square$