

泛函分析作业题

第 1 周


定义 1.1. 等价距离

设集合 X 上有两种距离: d_1, d_2 . 如果 X 中按距离 d_1 收敛的点列 $\{x_n\}$ 都在距离 d_2 下收敛于同一点, 并且按距离 d_2 收敛的点列 $\{x_n\}$ 都在距离 d_1 下收敛于同一点, 即

$$d_1(x_n, x) \rightarrow 0 \iff d_2(x_n, x) \rightarrow 0,$$

则称距离 d_1 和 d_2 等价.



 **作业题 1.1** 设 $d(x, y)$ 是集合 X 上的距离, 令

$$\tilde{d}(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}.$$

证明: $\tilde{d}(x, y)$ 也是 X 上的距离, 并且 \tilde{d} 与 d 等价.

证明 显然, 对任意 $x, y \in X$,

$$\tilde{d}(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} \in \mathbb{R}.$$

- (i) 由距离 $d(x, y)$ 的正定性可知 $\tilde{d}(x, y) \geq 0$, 并且 $\tilde{d}(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} = 0$ 等价于 $d(x, y) = 0$, 进而等价于 $x = y$.
- (ii) 由距离 $d(x, y)$ 的三角不等式可知, 对任意 $x, y, z \in X$, 总有

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z),$$

从而, 根据函数

$$f(t) = \frac{t}{1 + t}, \quad t \in [0, +\infty)$$

的单调递增性, 就有

$$\begin{aligned} \tilde{d}(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} &\leq \frac{d(x, z) + d(y, z)}{1 + d(x, z) + d(y, z)} \\ &= \frac{d(x, z)}{1 + d(x, z) + d(y, z)} + \frac{d(y, z)}{1 + d(x, z) + d(y, z)} \\ &\leq \frac{d(x, z)}{1 + d(x, z)} + \frac{d(y, z)}{1 + d(y, z)} \\ &= \tilde{d}(x, z) + \tilde{d}(y, z). \end{aligned}$$

综上, $\tilde{d}(x, y)$ 也是空间 X 上的距离.

注意到

$$0 \leq \tilde{d}(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} < 1,$$

于是

$$d(x, y) = \frac{\tilde{d}(x, y)}{1 - \tilde{d}(x, y)}. \quad (1)$$

若点列 $\{x_n\} \subset X$ 和点 $x \in X$ 满足

$$d(x_n, x) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

则根据数列极限的四则运算法则, 就有

$$\tilde{d}(x_n, x) = \frac{d(x_n, x)}{1 + d(x_n, x)} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

若点列 $\{x_n\} \subset X$ 和点 $x \in X$ 满足

$$\tilde{d}(x_n, x) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

同样根据 (??) 式以及数列极限的四则运算法则, 就有

$$d(x_n, x) = \frac{\tilde{d}(x_n, x)}{1 - \tilde{d}(x_n, x)} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

所以距离 d 和 \tilde{d} 等价. □

注 上述距离空间 (X, \tilde{d}) 中任何两点的距离都小于 1, 从而任何子集都是有界集. 上述结论说明, 任何距离空间上 (X, d) 上都能够找到与 d 等价的“有界”距离 \tilde{d} .

 **作业题 1.2** 在 \mathbb{R}^N 中可定义两种距离:

$$\begin{aligned} d_1(x, y) &= \sqrt{\sum_{i=1}^N |\xi_i - \eta_i|^2}, \\ d_2(x, y) &= \max_{1 \leq i \leq N} |\xi_i - \eta_i|, \end{aligned}$$

其中 $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N) \in \mathbb{R}^N$, $y = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_N) \in \mathbb{R}^N$. 证明: d_1 和 d_2 等价.

证明 对任意 $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N) \in \mathbb{R}^N$, $y = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_N) \in \mathbb{R}^N$, 都有

$$\max_{1 \leq i \leq N} |\xi_i - \eta_i|^2 \leq \sum_{i=1}^N |\xi_i - \eta_i|^2 \leq N \max_{1 \leq i \leq N} |\xi_i - \eta_i|^2,$$

从而

$$\max_{1 \leq i \leq N} |\xi_i - \eta_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^N |\xi_i - \eta_i|^2} \leq \sqrt{N} \max_{1 \leq i \leq N} |\xi_i - \eta_i|,$$

即

$$d_2(x, y) \leq d_1(x, y) \leq \sqrt{N} d_2(x, y).$$

若点列 $\{x_n\} \subset \mathbb{R}^N$ 和点 $x \in \mathbb{R}^N$ 满足

$$d_1(x_n, x) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

由 (??) 式的前半部分以及数列极限的迫敛性可知

$$d_2(x_n, x) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

若点列 $\{x_n\} \subset \mathbb{R}^N$ 和点 $x \in \mathbb{R}^N$ 满足

$$d_2(x_n, x) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

由 (??) 式的后半部分以及数列极限的迫敛性可知

$$d_1(x_n, x) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

综上, d_1 和 d_2 等价. □

注 若距离空间 X 上的两种距离 d_1 和 d_2 满足

$$C_1 d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq C_2 d_1(x, y), \quad \forall x, y \in X,$$

其中 $C_1, C_2 > 0$ 是正的常数, 则 d_1 与 d_2 一定等价.