


泛函分析作业题

第 4 周

 **作业题 1.1** 设 X 是完备的度量空间, T 是 X 到 X 中的映射, 如果存在正整数 $m \in \mathbb{N}_+$ 以及常数 $\alpha \in [0, 1)$ 使得对所有的 $x, y \in X$, 都有

$$d(T^m x, T^m y) \leq \alpha d(x, y),$$

其中 T^m 表示映射 T 作用 m 次, 则 T 在 X 中有且只有一个不动点 x^* , 特别地, 迭代点列

$$x_0, x_1 = Tx_0, \dots, x_n = Tx_{n-1}, \dots,$$

在 (X, d) 中收敛于不动点 x^* .

证明 由条件可知映射 $T^m : X \rightarrow X$ 是压缩映射, 由于 X 完备, 根据压缩映射原理, T^m 在 X 上存在唯一的不动点 x^* , 即

$$x^* = T^m x^*. \quad (1)$$

下证 x^* 也是映射 T 在 X 上的唯一的不动点.

由(1)式可得

$$Tx^* = T(T^m x^*) = T^{m+1} x^* = T^m(Tx^*),$$

所以 Tx^* 也是 T^m 的不动点. 根据 T^m 的不动点的唯一性, 就有 $Tx^* = x^*$, 所以 x^* 也是映射 T 的不动点. 若 $x \in X$ 也是映射 T 的不动点, 则

$$x = Tx, x = Tx = T(Tx) = T^2x, \dots, x = T^m x,$$

即 x 也是 T^m 的不动点. 根据 T^m 的不动点的唯一性, 就有 $x^* = x$. 所以 x^* 是映射 T 在 X 上的唯一的不动点.

任取 $x_0 \in X$. 通过映射 T 构造迭代点列

$$x_0, x_1 = Tx_0, x_2 = Tx_1, \dots, x_n = Tx_{n-1}, \dots.$$

任取

$$s \in \{0, 1, 2, \dots, m-1\},$$

令

$$\begin{aligned} y_0 &= T^s x_0 = x_s, \\ y_1 &= T^m y_0 = x_{m+2}, \\ y_2 &= T^m y_1 = x_{2m+s}, \\ &\dots, \\ y_n &= T^m y_{n-1} = x_{nm+s}, \\ &\dots. \end{aligned}$$

根据由于 T^m 是压缩映射, X 完备, 则迭代点列 y_n 收敛于 T^m 的不动点 x^* , 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{nm+s} = x^*, \quad \forall s \in \{0, 1, 2, \dots, m-1\}.$$

于是对任意 $\epsilon > 0$, 以及任意 $s \in \{0, 1, 2, \dots, m-1\}$, 邻域 $U(x^*, \epsilon)$ 之外只含有点列 $\{x_{nm+s}\}_{n=0}^{\infty}$ 中的有限多项, 将这些项的集合记为 A_s . 由于

$$\bigcup_{s=0}^{m-1} \bigcup_{n=0}^{\infty} \{x_{nm+s}\} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcup_{s=0}^{m-1} \{x_{nm+s}\} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \{x_n\},$$

于是点列 $\{x_n\}$ 在邻域 $U(x^*, \epsilon)$ 之外的项的全体为有限集

$$\bigcup_{s=0}^{m-1} A_s,$$

所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*.$$

□

注 该题中的映射 T 自身不一定是压缩映射. 证明过程后半部分用到了点列收敛的另外一种等价定义:

任给 $\epsilon > 0$, 若点列 $\{x_n\}$ 在邻域 $U(x, \epsilon)$ 之外至多只有有限多项, 则称点列 $\{x_n\}$ 收敛于 x .

点列极限与其子列极限的转化思路, 可参考华东师大《数学分析 (第四版 · 上册)》P27 例 8 和 P35-P36 习题 7(2) 的证明.

作业题 1.2 (Volterra 型线性积分方程解的存在唯一性问题) 设 $f \in C[a, b]$, 二元函数 $k(t, s)$ 在 $[a, b] \times [a, b]$ 上连续. 利用上题的结论证明, 对任意 $\lambda \in \mathbb{R}$, 积分方程

$$\phi(t) - \lambda \int_0^t k(t, s)\phi(s) ds = f(t), \quad t \in [a, b] \quad (2)$$

总存在唯一的连续函数解 $\phi \in C[a, b]$.

证明 任取 $\phi \in C[a, b]$, 定义 $[a, b]$ 上的函数 $T\phi$:

$$(T\phi)(t) = f(t) + \lambda \int_a^t k(t, s)\phi(s) ds, \quad t \in [a, b]. \quad (3)$$

由于 $\phi, f \in C[a, b]$, $k(t, s)$ 在 $[a, b] \times [a, b]$ 上连续, 由上式可知 $T\phi \in C[a, b]$. 由此得到映射

$$\begin{aligned} T: C[a, b] &\rightarrow C[a, b], \\ \phi &\mapsto T\phi. \end{aligned}$$

显然, 积分方程(2)在 $[a, b]$ 上的连续函数解等价于映射 T 在空间 $C[a, b]$ 中的不动点.

(下面验证 T 是否是压缩映射, 若不是, 继续验证 T^m 是否是压缩映射)

对任意 $\phi_1, \phi_2 \in C[a, b]$ 以及任意 $t \in [a, b]$, 由(3)可得

$$\begin{aligned} & |(T\phi_1)(t) - (T\phi_2)(t)| \\ &= |\lambda| \cdot \left| \int_a^t k(t, s) [\phi_1(s) - \phi_2(s)] ds \right| \\ &\leq |\lambda| \cdot \int_a^t \max_{\substack{a \leq t \leq b \\ a \leq s \leq b}} |k(t, s)| \cdot \max_{t \in [a, b]} |\phi_1(s) - \phi_2(s)| ds \\ &= M|\lambda|(t-a) \cdot d(\phi_1, \phi_2), \end{aligned}$$

其中

$$M = \max_{\substack{a \leq t \leq b \\ a \leq s \leq b}} |k(t, s)| \geq 0.$$

(这样看 T 不一定是压缩映射)

利用上述结果, 继续计算可得

$$|(T^2\phi_1)(t) - (T^2\phi_2)(t)|$$

$$\begin{aligned}
&= |\lambda| \cdot \left| \int_a^t k(t, s) [(T\phi_1)(s) - (T\phi_2)(s)] \, ds \right| \\
&\leq |\lambda| \cdot \int_a^t M \cdot |(T\phi_1)(s) - (T\phi_2)(s)| \, ds \\
&\leq M^2 |\lambda|^2 \int_a^t (s - a) \cdot d(\phi_1, \phi_2) \, ds \\
&= \frac{[M|\lambda|(t - a)]^2}{2} d(\phi_1, \phi_2).
\end{aligned}$$

一直做下去, 对任意 $m \in \mathbb{N}_+$ 就有

$$|(T^m \phi_1)(t) - (T^m \phi_2)(t)| \leq \frac{[M|\lambda|(t - a)]^m}{m!} d(\phi_1, \phi_2), \quad \forall t \in [a, b],$$

上式两端对 $t \in [a, b]$ 取最大值可得

$$d(T^m \phi_1, T^m \phi_2) \leq \frac{[M|\lambda|(b - a)]^m}{m!} d(\phi_1, \phi_2).$$

对任意 $a \in \mathbb{R}$, 都有 $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{a^m}{m!} = 0$, 由该事实可知, 存在充分大的一个正整数 m 使得

$$\alpha = \frac{[M|\lambda|(b - a)]^m}{m!} \in [0, 1),$$

此时 T^m 就是完备度量空间 $C[a, b]$ 上的压缩映射. 根据上一个问题的结论, 映射 T 在 $C[a, b]$ 中存在唯一的不动点, 所以积分方程(2)在 $[a, b]$ 上存在唯一的连续函数解. \square