2019-2020 学年第 1 学期

数学分析作业

目录

第 5 周

✍ **作业题 5.1** 设 A, B 为非空有界数集, 并且 $A \subset B$, 证明

$$\inf B \le \inf A \le \sup A \le \sup B.$$

证明 显然, $\inf A \le \sup A$. 下证 $\inf B \le \inf A$ 并且 $\sup A \le \sup B$.

假设 $\inf B > \inf A$, 则 $\inf B$ 不是集合 A 的下界, 从而存在 $x_0 \in A$ 使得 $\inf B > x_0$. 另一方面, 由于 $A \subset B$，从而也有 $x_0 \in B$, 于是

$$\inf B > x_0 \ge \inf B,$$

矛盾.

假设 $\sup A > \sup B$, 则 $\sup B$ 不是集合 A 的上界, 从而存在 $x_1 \in A$ 使得 $\sup B < x_1$. 另一方面, 由于 $A \subset B$，从而也有 $x_1 \in B$, 于是

$$\sup B < x_1 \le \sup B,$$

矛盾.

综上, $\inf B \le \inf A \le \sup A \le \sup B$. □

✍ **作业题 5.2** 设 S 为非空有下界 (不一定有上界) 的数集, 并且 $\inf S > 0$, 证明集合

$$S^{-1} = \{x^{-1} \mid x \in S\}$$

有界并且

$$\sup S^{-1} > 0, \quad \inf S^{-1} \ge 0, \quad \sup S^{-1} = \frac{1}{\inf S}.$$

证明 Step1. 任取 $y \in S^{-1}$, 令 $x = y^{-1}$, 则 $x \in S$,

$$x \ge \inf S > 0,$$

从而

$$0 < y \le \frac{1}{\inf S}, \quad \forall y \in S^{-1}. \tag{5.1}$$

所以 0 是 S^{-1} 的一个下界, $\frac{1}{\inf S}$ 是 S^{-1} 的一个上界, 并且

$$\sup S^{-1} > 0, \quad \inf S^{-1} \ge 0.$$

Step2. 由 Step1 可知 $\sup S^{-1} \le \frac{1}{\inf S}$. 下面排除 $\sup S^{-1} < \frac{1}{\inf S}$ 的情况. 反证法, 假设 $\sup S^{-1} < \frac{1}{\inf S}$ 成立, 由于 $\sup S^{-1} > 0$, 则

$$0 < \inf S < \frac{1}{\sup S^{-1}}.$$

所以 $\frac{1}{\sup S^{-1}}$ 不是 S 的下界, 存在 $x \in S$ 使得

$$0 < \inf S \le x < \frac{1}{\sup S^{-1}}.$$

令 $y = x^{-1}$, 则 $y \in S^{-1}$,

$$0 < \frac{1}{y} = x < \frac{1}{\sup S^{-1}},$$

从而

$$\sup S^{-1} < y.$$

但是另一方面, 由于 $y \in S^{-1}$, 则一定有

$$y \le \sup S^{-1},$$

矛盾. 所以

$$\sup S^{-1} = \frac{1}{\inf S}.$$

□

作业题 5.3 证明以下等式和不等式:

(1) 设 $a, b \in \mathbb{R}$, 则

$$\big||a| - |b|\big| \le |a - b|, \quad \frac{|a+b|}{1+|a+b|} \le \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}.$$

(2) 设 $a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_+$ 且 $n \ge 2$, 则

$$a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right),$$

(3) Bernoulli(伯努利) 不等式: 设 $h \ge -1$, $n \in \mathbb{N}_+$, 则

$$(1+h)^n \ge 1 + nh.$$

特别地, 如果还有 $h \ge 0$ 并且 $n \ge 2$, 则还成立

$$(1+h)^n > \frac{n(n-1)}{2}h^2 \ge \frac{n^2h^2}{4}.$$

(4) 算术-几何平均值不等式: 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是 n 个非负实数, 则

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n}.$$

如果 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 都是正实数, 还成立几何-调和平均值不等式:

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}.$$

(5)

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots n^2 = \tfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$
$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots n^3 = \left(\tfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

注意 $\sum\limits_{k=1}^{n} s_k$ 表示对 $s_1, s_2, \cdots, s_n$ 按下标 k 从 1 到 n 求和, 即 $\sum\limits_{k=1}^{n} s_k = s_1 + s_2 + \cdots + s_n$.

(6) 若 $0 < x < \frac{\pi}{2}$, 则 $\sin x < x < \tan x$. 若 $x \in \mathbb{R}$, 则 $|\sin x| \leq |x|$.

证明 (1) 对任意 $a, b \in \mathbb{R}$, 由绝对值不等式可得

$$\begin{aligned} |a-b| &\geq |a| - |b|, \\ |a-b| &= |b-a| \geq |b| - |a|, \end{aligned}$$

综合上述两式可得

$$-|a-b| \leq |a| - |b| \leq |a-b|,$$

所以

$$\big||a| - |b|\big| \leq |a-b|.$$

由于

$$f(t) = \frac{t}{1+t}, \quad t > 0$$

是严格增函数, 并且

$$|a+b| \leq |a| + |b|,$$

则 $f(|a+b|) \leq f(|a|+|b|)$, 从而

$$\begin{aligned} \frac{|a+b|}{1+|a+b|} &\leq \frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|} \\ &= \frac{|a|}{1+|a|+|b|} + \frac{|b|}{1+|a|+|b|} \\ &\leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}. \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} & (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right) \\ =\ & \left(a^n + a^{n-1}b + \cdots + a^2b^{n-2} + ab^{n-1}\right) \\ & - \left(a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \cdots + ab^{n-1} + b^n\right) \\ =\ & a^n - b^n. \end{aligned}$$

(3) 当 $n=1$ 时, $(1+h)^1=1+1\cdot h$, 结论成立.

假设当 $n=k$ 时, 成立
$$(1+h)^k\geq 1+kh.$$
由于 $h\geq -1$, 则当 $n=k+1$ 时,
$$\begin{aligned} & (1+h)^{k+1}=(1+h)^k\cdot(1+h)\geq(1+kh)\cdot(1+h) \\ = \quad & 1+(k+1)h+kh^2\geq 1+(k+1)h. \end{aligned}$$
综上, 对任意 $n\in\mathbb{N}_+$ 以及任意 $h\geq -1$ 都有
$$(1+h)^n\geq 1+nh.$$

当 $n\geq 2$ 时, 有
$$\frac{n(n-1)}{2}\geq\frac{n^2}{4},$$
从而对任意 $h\geq 0$ 都有
$$\begin{aligned} (1+h)^n &= 1+nh+\frac{n(n-1)}{2}h^2+\cdots+h^n \\ &> \frac{n(n-1)}{2}h^2\geq\frac{n^2h^2}{4}. \end{aligned}$$

(4) 如果 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中有一个是 0, 则算术-几何平均值不等式成立. 下设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 都是正的实数.

当 $n=1$ 时, 两个不等式显然都成立.

假设当 $n=k$ 时, 有
$$\frac{a_1+\cdots+a_k}{k}\geq\sqrt[k]{a_1\cdot\cdots\cdot a_k}.$$
当 $n=k+1$ 时,
$$\begin{aligned} & \frac{a_1+\cdots+a_k+a_{k+1}}{k+1} \\ = \quad & \frac{a_1+\cdots+a_k}{k}+\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k}\right)(a_1+\cdots+a_k)+\frac{a_{k+1}}{k+1} \\ = \quad & \frac{a_1+\cdots+a_k}{k}+\frac{ka_{k+1}-(a_1+\cdots+a_k)}{k(k+1)}. \end{aligned}$$

令
$$A=\frac{a_1+\cdots+a_k}{k},\quad B=\frac{ka_{k+1}-(a_1+\cdots+a_k)}{k(k+1)},$$
则 $A>0$, $A+B>0$. 再令 $h=\frac{B}{A}$, 则 $1+h>0$, $h>-1$, 利用 Bernoulli 不等式可得
$$\begin{aligned} & \left(\frac{a_1+\cdots+a_k+a_{k+1}}{k+1}\right)^{k+1} \\ = \quad & (A+B)^{k+1}=A^{k+1}\left(1+\frac{B}{A}\right)^{k+1}=A^{k+1}(1+h)^{k+1} \\ \geq \quad & A^{k+1}[1+(k+1)h]=A^{k+1}\left[1+\frac{(k+1)B}{A}\right]=A^k[A+(k+1)B] \\ = \quad & A^k\cdot a_{k+1}. \end{aligned}$$
根据 $n=k$ 时的假设条件, 有
$$A^k=\left(\frac{a_1+\cdots+a_k}{k}\right)^k\geq a_1\cdot\cdots\cdot a_k,$$

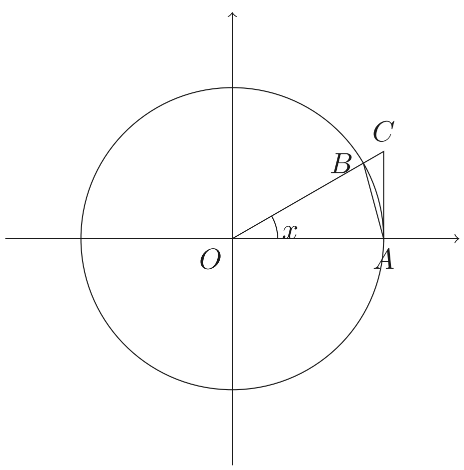
从而
$$\frac{a_1+\cdots+a_k+a_{k+1}}{k+1}\geq a_1\cdot\cdots\cdot a_k\cdot a_{k+1}.$$
综上, 算术-几何平均值不等式
$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geq\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_n}$$
成立.

利用算术-几何平均值不等式可得
$$\frac{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}{n}\geq\sqrt[n]{\frac{1}{a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_n}}>0,$$
对上式取倒数, 就得到几何-调和平均值不等式:
$$\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_n}\geq\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}.$$

(5) 当 $n=1$ 时, 两不等式显然都成立.

假设当 $n=l$ 时,
$$\sum_{k=1}^{l}k^2=\frac{l(l+1)(2l+1)}{6},$$
$$\sum_{k=1}^{l}k^3=\left(\frac{l(l+1)}{2}\right)^2.$$
当 $n=l+1$ 时就有
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{l+1}k^2&=\sum_{k=1}^{l}k^2+(l+1)^2\\&=\frac{l(l+1)(2l+1)}{6}+\frac{6(l+1)^2}{6}\\&=\frac{(l+1)[(l+1)+1][2(l+1)+1]}{6},\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{l+1}k^3&=\sum_{k=1}^{l}k^3+(l+1)^3\\&=\left(\frac{l(l+1)}{2}\right)^2+(l+1)^3\\&=\left[\frac{(l+1)(l+2)}{2}\right]^2.\end{aligned}$$
综上, 两等式恒成立.

(6)



在以上单位圆周中, 角的弧度 x 满足 $0 < x < \frac{\pi}{2}$, 三角形 OAB 的面积

$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB \cdot \sin x = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin x = \frac{1}{2} \sin x,$$

扇形 $\widehat{OAB}$ 的面积

$$S_2 = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB \cdot x = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot x = \frac{1}{2} x,$$

直角三角形 OAC 的两条直角边的长度分别为

$$OA = 1, \quad AC = \tan x,$$

所以直角三角形 OAC 的面积为

$$S_3 = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \tan x = \frac{1}{2} \tan x.$$

显然, $S_1 < S_2 < S_3$, 从而

$$0 < \sin x < x < \tan x.$$

当 $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ 时, 由上述结论可知

$$|\sin x| \le |x|.$$

当 $x > 1$ 时, 总有

$$|\sin x| \le 1 < x = |x|.$$

于是,

$$|\sin x| \le |x|, \quad \forall x \in [0, +\infty).$$

当 $x < 0$ 时, $-x \in (0, +\infty)$, 由以上结论可得

$$|\sin x| = |\sin(-x)| \le |-x| = |x|.$$

综上,

$$|\sin x| \le |x|, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

□

总结:

1. 作业不要抄袭. 字迹要清楚.
2. 以上参考答案保证正确, 但是不一定是最优的.
3. 确界相关的题目, 一定要紧扣确界的定义, 不要想当然的用一些错误结论. 上确界、下确界不一定是集合的最大值、最小值, 上确界、下确界也不一定属于集合. 大家自行总结课堂上、教材和作业中和确界有关的结论和题目, 分为**一般集合的确界问题**和**函数相关的确界问题**. 这些结论我们今后会用到.
4. 不了解数学归纳法的同学, 请自学.
5. 本次作业完成的比较好的同学: 王芹.
6. 各位同学要在学习上多花时间, 多动笔练习, 勤于思考, 多与其它同学讨论. 课前一定要预习教材内容, 课后及时复习.
7. 各位同学要积极找我答疑. 请提前通过 qq 联系我预约时间, 原则上我只当面答疑, 不接受在线答疑. 我的办公室是系楼 303 办公室后门 A 格, 走西面的门 (前门), 直接推门进入, 不要敲门.

第 6 周

欢度国庆！

第 7 周

✍ **作业题 7.1** 证明: 对任意 $p > 0$ 以及任意 $a > 1$, 都有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^p}{a^n} = 0.$$

证明 方法 1. 令 $k = [p] + 1$, $h = a - 1 > 0$, 则当 $n > k$ 时,

$$\begin{aligned} a^n &= (1+h)^n \\ &= 1 + nh + \frac{n(n-1)}{2}h^2 + \cdots + C_n^k h^k + \cdots + h^n \\ &\geq C_n^k h^k = \left(\frac{n}{k} \cdot \frac{n-1}{k-1} \cdot \cdots \cdot \frac{n-k+1}{1}\right) h^k. \end{aligned}$$

由于 $n > k$, 则易证

$$\frac{n}{k}, \frac{n-1}{k-1}, \cdots, \frac{n-k+1}{1} \geq \frac{n}{k},$$

从而

$$\begin{aligned} a^n &= (1+h)^n \\ &\geq \left(\frac{n}{k} \cdot \frac{n-1}{k-1} \cdot \cdots \cdot \frac{n-k+1}{1}\right) h^k \\ &\geq \frac{n^k}{k^k} h^k. \end{aligned}$$

于是当 $n > k = [p] + 1$ 时,

$$0 \leq \frac{n^p}{a^n} \leq \frac{k^k}{h^k} \cdot \frac{1}{n^{k-p}}.$$

由于 $k - p > 0$, 则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{k-p}} = 0,$$

由数列极限的迫敛性可知

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^p}{a^n} = 0.$$

方法 2. 令 $b = a^{\frac{1}{p}}$, 则 $b > 1$, $b^p = a$ 并且

$$\frac{n^p}{a^n} = \left(\frac{n}{b^n}\right)^p.$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{b^n} = 0$, 则对任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N, 使得对任意 $n > N$, 都有

$$\left|\frac{n}{b^n}\right| < \varepsilon^{\frac{1}{p}},$$

从而

$$\left|\frac{n^p}{a^n} - 0\right| = \left|\frac{n}{b^n}\right|^p < \varepsilon, \quad \forall n > N,$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^p}{a^n}=0.$$

□

✍ **作业题 7.2** 证明: 当 $a>0$ 且 $a\neq 1$ 时, 有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log_a n}{n}=0.$$

证明 当 $a>1$, 对任意 $\varepsilon\in(0,1)$, 有

$$a^{-\varepsilon}<1<a^{\varepsilon}.$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$, 则根据数列极限的保号性, 存在正整数 N, 使得对任意 $n>N$, 都有

$$a^{-\varepsilon}<(n)^{\frac{1}{n}}<a^{\varepsilon},$$

对上式取底数为 a 的对数可得

$$-\varepsilon<\frac{\log_a n}{n}<\varepsilon,$$

即

$$\left|\frac{\log_a n}{n}\right|<\varepsilon.$$

根据数列极限的 $\varepsilon-N$ 定义可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log_a n}{n}=0.$$

当 $0<a<1$ 时, 对任意 $\varepsilon\in(0,1)$, 有

$$a^{\varepsilon}<1<a^{-\varepsilon}.$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$, 则根据数列极限的保号性, 存在正整数 N, 使得对任意 $n>N$, 都有

$$a^{\varepsilon}<(n)^{\frac{1}{n}}<a^{-\varepsilon},$$

对上式取底数为 a 的对数可得

$$-\varepsilon<\frac{\log_a n}{n}<\varepsilon,$$

即

$$\left|\frac{\log_a n}{n}\right|<\varepsilon.$$

根据数列极限的 $\varepsilon-N$ 定义可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log_a n}{n}=0.$$

□

✍ **作业题 7.3** 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{a_n}=\sqrt[3]{a}$.

证明 若 $a=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, 则对任意 $\varepsilon>0$, 存在正整数 N, 使得对任意 $n>N$, 有 $|a_n|<\varepsilon^3$, 从而

$$|\sqrt[3]{a_n}-0|=|\sqrt[3]{a_n}|<\varepsilon.$$

根据数列极限的 $\varepsilon-N$ 定义就有

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{a_n}=0=\sqrt[3]{a}.$$

若 $a>0$, 则根据数列极限的保号性, 存在正整数 N 使得对任意 $n>N$ 都有 $a_n>0$, 此时

$$0 \le \left|\sqrt[3]{a_n}-\sqrt[3]{a}\right| = \frac{|a_n-a|}{\left(\sqrt[3]{a_n}\right)^2+\sqrt[3]{a_n}\cdot\sqrt[3]{a}+\left(\sqrt[3]{a}\right)^2} < \frac{|a_n-a|}{\left(\sqrt[3]{a}\right)^2}.$$

由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n-a|}{\left(\sqrt[3]{a}\right)^2}=0,$$

根据迫敛性可得

$$\lim_{n\to\infty}\left|\sqrt[3]{a_n}-\sqrt[3]{a}\right|=0,$$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{a_n}=\sqrt[3]{a}$.

若 $a<0$, 则根据数列极限的保号性, 存在正整数 N 使得对任意 $n>N$ 都有 $a_n<0$, 此时仍有

$$0 \le \left|\sqrt[3]{a_n}-\sqrt[3]{a}\right| = \frac{|a_n-a|}{\left(\sqrt[3]{a_n}\right)^2+\sqrt[3]{a_n}\cdot\sqrt[3]{a}+\left(\sqrt[3]{a}\right)^2} < \frac{|a_n-a|}{\left(\sqrt[3]{a}\right)^2}.$$

根据之前的讨论可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{a_n}=\sqrt[3]{a}$.

□

✍ **作业题 7.4** 设 $\{a_n\}$ 为正数数列并且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a>0$, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=1$ (提示: 用保号性和迫敛性).

证明 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a>0$, 根据数列极限的保号性, 存在正整数 N, 使得对任意 $n>N$ 都有

$$0<\frac{1}{2}a<a_n<\frac{3}{2}a,$$

从而

$$0<\sqrt[n]{\frac{1}{2}a}<\sqrt[n]{a_n}<\sqrt[n]{\frac{3}{2}a},\quad \forall n>N.$$

由于

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{2}a}=1=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{3}{2}a},$$

根据迫敛性, 就有

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=1.$$

□

✍ **作业题 7.5** 在某些情况下, 非正常极限也具有类似于正常极限的一些性质. 利用 (正、负) 无穷大数列的严格定义证明以下结论

1. (类似于绝对值性质) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=-\infty$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=+\infty$.
2. (类似于保号性) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=-\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=+\infty$, 则对任何实数 $c\in\mathbb{R}$, 存在正整数 N, 使得对任何 $n>N$, 都有
$$a_n<c<b_n.$$
3. (类似于加法、乘法法则) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=+\infty$, 则
$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=+\infty,\qquad \lim_{n\to\infty}a_nb_n=+\infty.$$

4. (类似于减法、乘法法则) 若 $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$, $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$, 则

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = +\infty, \quad \lim_{n\to\infty} a_n b_n = -\infty.$$

5. (类似迫敛性) 若 $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$, 数列 $\{b_n\}$ 满足

$$a_n \le b_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}_+,$$

则 $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$.

6. (类似于子列性质) 若 $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$, 则 $\{a_n\}$ 的任何子列 $\{a_{n_k}\}$ 都满足

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = +\infty.$$

证明

1. 设 $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$, 则对任意 $M > 0$, 存在正整数 N, 使得对任意 $n > N$, 都有

$$a_n < -M < 0,$$

从而

$$|a_n| > M,$$

所以 $\lim_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$.

2. 设 $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$, $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$, 则对任意 $c \in \mathbb{R}$, 存在正整数 N_1, N_2, 使得对任意 $n > N_1$ 都有 $a_n < c$; 对任意 $n > N_2$ 都有 $b_n > c$. 令 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 则对任意 $n > N$ 就有

$$a_n < c < b_n.$$

3. 设 $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$, $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$.

   (1) 对任意 $M > 0$, 存在正整数 N_1, N_2, 使得对任意 $n > N_1$, 都有 $a_n > \frac{1}{2}M$; 对任意 $n > N_2$, 都有 $b_n > \frac{1}{2}M$. 令 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 则对任意 $n > N$ 就有

$$a_n + b_n > \frac{1}{2}M + \frac{1}{2}M = M,$$

   所以 $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = +\infty$.

   (2) 对任意 $M > 0$, 存在正整数 N_1, N_2, 使得对任意 $n > N_1$, 都有 $a_n > \sqrt{M}$; 对任意 $n > N_2$, 都有 $b_n > \sqrt{M}$. 令 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 则对任意 $n > N$ 就有

$$a_n b_n > \sqrt{M} \cdot \sqrt{M} = M,$$

   所以 $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = +\infty$.

4. 设 $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$, $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$.

   (1) 对任意 $M > 0$, 存在正整数 N_1, N_2, 使得对任意 $n > N_1$, 都有 $a_n > \frac{1}{2}M$; 对任意 $n > N_2$, 都有 $b_n < -\frac{1}{2}M$. 令 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 则对任意 $n > N$ 就有

$$a_n - b_n > \frac{1}{2}M - \left(-\frac{1}{2}M\right) = M,$$

   所以 $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = +\infty$.

(2) 对任意 $M<0$, 存在正整数 N_1, N_2, 使得对任意 $n>N_1$, 都有 $a_n>\sqrt{-M}$; 对任意 $n>N_2$, 都有 $b_n<-\sqrt{-M}$. 令 $N=\max\{N_1,N_2\}$, 则对任意 $n>N$ 就有

$$a_nb_n<\sqrt{-M}\cdot\left(-\sqrt{-M}\right)=M,$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_nb_n)=-\infty$.

5. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$, 则对任意 $M>0$, 存在正整数 N, 使得对任意 $n>N$, 都有 $a_n>M$, 再根据条件可得

$$b_n\geq a_n>M,\quad \forall n>N.$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=+\infty$.

6. 设 $\{a_{n_k}\}$ 是 $\{a_n\}$ 的任意一个子列, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$, 则对任意 $M>0$, 存在正整数 N, 使得对任意 $n>N$ 都有 $a_n>M$. 对任意 $k>n_N$, 都有 $n_k\geq k>n_N\geq N$, 从而 $a_{n_k}>M$, 于是

$$\lim_{k\to\infty}a_{n_k}=+\infty.$$

□

✍ **作业题 7.6** 计算以下数列的极限.

1. $\left\{\sqrt[n]{n^2+1}\right\}$.
2. $a_n=\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$.
3. $\left\{(n!)^{\frac{1}{n^2}}\right\}$ (提示: 利用增长速度的顺序和迫敛性).
4. $\left\{\frac{\sqrt[3]{n^2}\sin n!}{n+1}\right\}$.
5. $\left\{\frac{1^2}{n^3}+\frac{3^2}{n^3}+\cdots+\frac{(2n-1)^2}{n^3}\right\}$ (提示: 利用第 5 周作业题中的平方和公式).
6. $a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1^3+2^3+\cdots+k^3}}$ (提示: 利用第 5 周作业题中的立方和公式).

解

1. 对任意 $n\in\mathbb{N}_+$, 都有

$$1<\sqrt[n]{n^2+1}\leq\sqrt[n]{n^2+n^2}=\sqrt[n]{2}\cdot\sqrt[n]{n}\cdot\sqrt[n]{n}.$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}=1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{2}\cdot\sqrt[n]{n}\cdot\sqrt[n]{n}\right)=1,$$

再根据数列极限的迫敛性可得

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2+1}=1.$$

2. 对任意 $n\in\mathbb{N}_+$, 都有

$$1\leq a_n=\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}\leq(\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n\text{ 项}})^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{n}.$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$, 则根据数列极限的迫敛性可得 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$.

3. 由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0,$$

根据数列极限的保号性, 存在正整数 N, 使得对任意 $n>N$ 都有

$$0<\frac{n!}{n^n}<1,$$

从而

$$1\le n!<n^n,\quad \forall n>N,$$
$$1\le (n!)^{\frac{1}{n^2}}<(n^n)^{\frac{1}{n^2}}=\sqrt[n]{n},\quad \forall n>N.$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$, 则根据数列极限的迫敛性可得

$$\lim_{n\to\infty}(n!)^{\frac{1}{n^2}}=1.$$

4. 对任意 $n\in\mathbb{N}_+$, 都有

$$0\le\left|\frac{\sqrt[3]{n^2}\sin n!}{n+1}\right|\le\frac{\sqrt[3]{n^2}}{n+1}=\frac{n^{\frac{2}{3}}}{n+1}=\frac{\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}}{1+\frac{1}{n}}.$$

由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}}{1+\frac{1}{n}}=\frac{0}{1+0}=0,$$

根据数列极限的迫敛性可得

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\sqrt[3]{n^2}\sin n!}{n+1}\right|=0,$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2}\sin n!}{n+1}=0.$$

5. 设

$$S_n=1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

则

$$\begin{aligned}
& 1^2+3^3+\cdots+(2n-1)^2\\
= & \left[1^2+2^2+3^2+\cdots+(2n)^2\right]\\
& -\left[2^2+4^2+\cdots+(2n)^2\right]\\
= & S_{2n}-2^2\left(1^2+2^2+\cdots+n^2\right)\\
= & S_{2n}-4S_n\\
= & \frac{4n^3-n}{3},
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
& \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1^2}{n^3}+\frac{3^2}{n^3}+\cdots+\frac{(2n-1)^2}{n^3}\right)\\
= & \lim_{n\to\infty}\frac{4n^3-n}{3n^3}\\
= & \frac{4}{3}.
\end{aligned}$$

6. 由于

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1^3+2^3+\cdots+k^3}} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2}} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k(k+1)} \\ &= 2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) \\ &= 2\left(1-\frac{1}{n+1}\right), \end{aligned}$$

所以

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} 2\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = 2.$$

□

总结:

1. 我们已经验证过许多极限等式: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0\ (\alpha > 0)$, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1\ (a > 0)$ 等, 这些可以直接用, 不需要再重复证明. 除非考试的时候要求你重新验证一遍.
2. 之前没有验证的极限等式, 一定要详细证明出来后才能使用. 如果你不确定是否验证过, 不妨重新验证一遍.
3. 用 $\varepsilon - N$ 定义验证极限时, 正整数 N 只能依赖于 ε, 不能依赖 n.
4. 我们课上讲的数列收敛的性质有一个大前提: $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 都收敛于实数. 在这个前提下才能使用收敛数列的性质, 例如四则运算法则. 某些特殊情况下, 无穷大数列也具有类似于收敛数列的性质, 例如本周作业第 5 大题. 但是这只是形式上类似, 并不能实质等同, 不要随便使用四则运算法则. 严格来讲, $0 \cdot \infty$, $\infty \cdot \infty$ 等都是没有意义的.
5. 除了第 5 大题给出的结论外, 还有其它涉及无穷大数列的类似结论, 各位同学自行总结和证明. 当然, 也要总结不成立的情况, 例如:
   若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$, 则不一定有

   $$\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = +\infty, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty.$$

   反例: $a_n = n = b_n$.
6. 学过的内容和题目要花大量时间反复看反复练习. 熟练之后, 原先很难的题目都会变成套路题, 就像你们现在已经熟悉的

   $$\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \cdots + \frac{2n-1}{2^n}$$

   求和这种.
7. 本次作业完成的比较好的同学, 一个也没有.