泛函分析作业

1 第 2 周

问题 1.1. 设 $P_r[a,b]$ 是定义在闭区间 $[a,b]$ 上的所有有理系数多项式函数的全体. 显然, $(P_r[a,b],d)$ 是连续函数空间 $(C[a,b],d)$ 的距离子空间, 其中

$$d(f,g)=\max_{t\in[a,b]}|f(t)-g(t)|,\quad \forall f,g\in C[a,b].$$

证明: $P_r[a,b]$ 是 $C[a,b]$ 的可数稠密子集, 从而 $C[a,b]$ 可分.

证明 Step1. 对任意 $n\in\mathbb{N}$, 设 $P_r^n[a,b]$ 是定义在 $[a,b]$ 上的所有**有理系数** n **次多项式函数**的全体, 则 $P_r^n[a,b]$ 是可数集. 由于

$$P_r[a,b]=\bigcup_{n=0}^{\infty}P_r^n[a,b],$$

则 $P_r[a,b]$ 也是可数集.

Step2. 下证 $P_r[a,b]$ 按距离 d 在 $P[a,b]$ 中稠密.

任取 $h\in P[a,b]$,

$$h(t)=a_0+a_1t+a_2t^2+\cdots+a_nt^n,\quad t\in[a,b],$$

其中 $a_0,a_1,\cdots,a_n\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$. 令

$$M=\max_{1\le k\le n}\max_{t\in[a,b]}|t|^k>0.$$

根据有理数集 $\mathbb{Q}$ 在实数集 $\mathbb{R}$ 中的稠密性, 对任意 $\epsilon>0$, 存在 $q_0,q_1,\cdots,q_n\in\mathbb{Q}$ 使得

$$|a_0-q_0|<\frac{1}{n+1}\epsilon,\quad |a_1-q_1|<\frac{1}{(n+1)M}\epsilon,\quad \cdots,\quad |a_n-q_n|<\frac{1}{(n+1)M}\epsilon.$$

令

$$g(t)=q_0+q_1t+\cdots+q_nt^n,\quad t\in[a,b],$$

则 $g\in P_r[a,b]$, 并且对任意 $t\in[a,b]$ 都有

$$\begin{aligned}
&|h(t)-g(t)|\\
\le\ &|a_0-q_0|+|a_1-q_1|\cdot|t|+\cdots+|a_n-q_n|\cdot|t|^n\\
\le\ &|a_0-q_0|+|a_1-q_1|M+\cdots+|a_n-q_n|M\\
<\ &\epsilon,
\end{aligned}$$

从而

$$\max_{t\in[a,b]}|h(t)-g(t)|<\epsilon.$$

综上, 对任意 $h \in P[a,b]$ 以及任意 $\epsilon > 0$, 存在 $g \in P_r[a,b]$ 使得

$$d(h,g) = \max_{t\in[a,b]} |h(t) - g(t)| < \epsilon,$$

所以 $P_r[a,b]$ 按距离 d 在 $P[a,b]$ 中稠密.

Step3. 根据 Weierstrauss 逼近定理, $P[a,b]$ 按距离 d 在 $C[a,b]$ 中稠密, 则对任意 $\epsilon > 0$ 以及任意 $f \in C[a,b]$, 存在 $h \in P[a,b]$ 使得

$$d(f,h) < \frac{1}{2}\epsilon.$$

由 Step2 可知, 存在 $g \in P_r[a,b]$ 使得

$$d(h,g) < \frac{1}{2}\epsilon,$$

从而 $d(f,g) \le d(f,h) + d(h,g) < \epsilon$.

综上, $P_r[a,b]$ 是 $C[a,b]$ 的可数稠密子集, 从而 $C[a,b]$ 可分. □

问题 1.2. 按以下步骤证明

定理 1.1 (Riemann-Lebesgue 引理). 设 $f \in L[a,b]$, 对应的 Fourier 系数为

$$a_n = \int_a^b f(x)\sin nx\mathrm{d}x, \quad b_n = \int_a^b f(x)\cos nx\mathrm{d}x, \quad n \in \mathbb{N},$$

则 $a_n, b_n \to 0 \quad (n \to \infty)$.

Step1. 若 f 是 $[a,b]$ 上的简单函数 (P80 定义 3), 证明上述结论成立.

Step2. 设 $S[a,b]$ 是定义在闭区间 $[a,b]$ 上的简单函数的全体. 显然, $S[a,b]$ 是 $L[a,b]$ 的距离子空间, 其中距离

$$d(f,g) = \int_a^b |f(t) - g(t)|\mathrm{d}t, \quad \forall f,g \in L[a,b].$$

证明: $S[a,b]$ 是 $L[a,b]$ 的稠密子集.

Step3. 利用稠密性, 证明 Riemann-Lebesgue 引理成立.

证明 Step0. 设 h 是 $[a,b]$ 上的一个阶梯函数,

$$h(x) = \begin{cases} c_1, & x \in (a_1,b_1), \\ c_2, & x \in (a_2,b_2), \\ \cdots & \cdots \\ c_k, & x \in (a_k,b_k), \\ 0, & x \in [a,b] \setminus \cup_{i=1}^k (a_i,b_i), \end{cases}$$

其中 $c_1, c_2, \cdots, c_k$ 为常数, $(a_1,b_1), \cdots, (a_k,b_k)$ 是 $[a,b]$ 中互不相交的非空开子区间. 于是,

$$\begin{aligned} &\int_a^b h(x)\sin nx dx \\ =&\sum_{i=1}^k c_i \int_{a_i}^{b_i} \sin nx dx \\ =&\frac{1}{n}\sum_{i=1}^k c_i(\cos na_i - \cos nb_i) \\ \to&0 \quad (n \to \infty). \end{aligned}$$

同理可证
$$\int_a^b h(x)\cos nx dx \to 0 \quad (n\to\infty).$$

Step1. 设 E 是 $[a,b]$ 中的可测子集, χ 是 E 的特征函数, 即
$$\chi(x)=\begin{cases} 1, & x\in E, \\ 0, & x\in [a,b]\setminus E, \end{cases}$$

下证
$$\int_a^b \chi(x)\sin nx dx \to 0 \quad (n\to\infty).$$

令 $\tilde{E}=E\cap(a,b)$, 则 $\tilde{E}$ 也可测并且 $m(E\setminus\tilde{E})=0$. ** 对任意 $\epsilon>0$**, 存在开集 $G\subset[a,b]$ 使得 $\tilde{E}\subset G$ 并且
$$m(G\setminus\tilde{E})<\frac{1}{2}\epsilon.$$
另一方面, 根据 $\mathbb{R}^1$ 中开集的构造定理 (P44), G 可表为
$$G=\bigcup_{i=1}^{\infty} O_i,$$
其中 $O_i=(a_i,b_i)$ 是 G 的构成区间, 从而
$$\sum_{i=1}^{\infty}(b_i-a_i)=mG\le b-a<+\infty.$$
于是, 对上述 $\epsilon>0$, 存在 $N\in\mathbb{N}_+$ 使得
$$\sum_{i=N+1}^{\infty}(b_i-a_i)<\frac{1}{2}\epsilon.$$
令 $V=\cup_{i=1}^N(a_i,b_i)$, 并定义阶梯函数
$$h(x)=\begin{cases} 1, & x\in V, \\ 0, & x\in [a,b]\setminus V, \end{cases}$$
则
$$\begin{aligned}
&\int_a^b|\chi(x)-h(x)|dx \\
=&\left(\int_{E\setminus V}+\int_{V\setminus E}+\int_{[a,b]\setminus(E\cup V)}\right)|\chi(x)-h(x)|dx \\
=&\left(\int_{\tilde{E}\setminus V}+\int_{V\setminus \tilde{E}}+\int_{[a,b]\setminus(\tilde{E}\cup V)}\right)|\chi(x)-h(x)|dx \\
=&\int_{\tilde{E}\setminus V}|1-0|dx+\int_{V\setminus\tilde{E}}|0-1|dx+\int_{[a,b]\setminus(\tilde{E}\cup V)}|0-0|dx \\
=&m(\tilde{E}\setminus V)+m(V\setminus\tilde{E}) \\
\le&m(G\setminus V)+m(G\setminus\tilde{E}) \\
<&\frac{1}{2}\epsilon+\frac{1}{2}\epsilon=\epsilon,
\end{aligned}$$

从而

$$
\begin{aligned}
0 \le & \left|\int_a^b \chi(x)\sin nx dx\right| \\
\le & \left|\int_a^b \big(\chi(x)-h(x)\big)\sin nx dx\right| + \left|\int_a^b h(x)\sin nx dx\right| \\
\le & \int_a^b |\chi(x)-h(x)|\,|\sin nx| dx + \left|\int_a^b h(x)\sin nx dx\right| \\
\le & \int_a^b |\chi(x)-h(x)|\, dx + \left|\int_a^b h(x)\sin nx dx\right| \\
< & \epsilon + \left|\int_a^b h(x)\sin nx dx\right|.
\end{aligned}
$$

由于 h 是阶梯函数, 综合 Step0, 数列极限的迫敛性以及 $\epsilon > 0$ 的任意性, 可得

$$\int_a^b \chi(x)\sin nx dx \to 0 \quad (n\to\infty).$$

设 f 是 $[a,b]$ 上的简单函数,

$$f(x) = \sum_{i=1}^k c_i\chi_i(x),$$

其中

(i) $[a,b] = \cup_{i=1}^k E_i$, $E_1, E_2, \cdots, E_k$ 是 $[a,b]$ 中互不相交的可测子集;

(ii) $c_1, c_2, \cdots, c_k$ 是非负常数;

(iii) $\chi_i(x)$ 是 E_i 的特征函数, 即

$$\chi_i(x) = \begin{cases} 1, & x\in E_i, \\ 0, & x\in [a,b]\setminus E_i. \end{cases}$$

由前面的结论可知

$$\int_a^b f(x)\sin nx dx = \sum_{i=1}^k c_i \int_a^b \chi_i(x)\sin nx dx \to 0 \quad (n\to\infty).$$

同理可证

$$\int_a^b f(x)\cos nx dx \to 0 \quad (n\to\infty).$$

Step2. (P118) 设 $f\in L[a,b]$, 则 f^+ 和 f^- 也是 $[a,b]$ 上的非负 L 可积函数, 从而, 根据非负可测函数 L 积分的定义 (P102, 定义 1), 对任意 $\epsilon > 0$, 存在 $[a,b]$ 上的简单函数 ϕ_1, ϕ_2, 使得

$$0\le \phi_1(x) \le f^+(x), \quad 0\le \phi_2(x)\le f^-(x), \quad \forall x\in[a,b],$$

并且

$$\int_a^b f^+(x)dx - \frac{\epsilon}{2} \le \int_a^b \phi_1(x)dx \le \int_a^b f^+(x)dx,$$

$$\int_a^b f^-(x)dx - \frac{\epsilon}{2} \le \int_a^b \phi_2(x)dx \le \int_a^b f^-(x)dx.$$

令 $\phi(x) = \phi_1(x) - \phi_2(x)$, 则 ϕ 也是 $[a,b]$ 上的简单函数, 并且

$$\begin{aligned}
d(f,\phi) &= \int_a^b |f(x) - \phi(x)|dx \\
&= \int_a^b |f^+(x) - f^-(x) - \phi_1(x) + \phi_2(x)|dx \\
&\le \int_a^b |f^+(x) - \phi_1(x)|dx + \int_a^b |f^-(x) - \phi_2(x)|dx \\
&< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.
\end{aligned}$$

综上, $S[a,b]$ 是 $L[a,b]$ 的稠密子集.

Step3. 由 Step2, 对任意 $f \in L[a,b]$ 以及任意 $\epsilon > 0$, 存在 $g \in S[a,b]$, 使得

$$d(f,g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx < \epsilon,$$

从而

$$\begin{aligned}
0 &\le \left|\int_a^b f(x)\sin nx dx\right| \\
&\le \left|\int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\sin nx dx\right| + \left|\int_a^b g(x)\sin nx dx\right| \\
&\le \int_a^b |f(x) - g(x)|\,|\sin nx|dx + \left|\int_a^b g(x)\sin nx dx\right| \\
&\le \int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx + \left|\int_a^b g(x)\sin nx dx\right| \\
&< \epsilon + \left|\int_a^b g(x)\sin nx dx\right|.
\end{aligned}$$

另一方面, 根据 Step1, 就有

$$\int_a^b g(x)\sin nx dx \to 0 \quad (n \to \infty).$$

综上, 由以上两式, 结合数列极限的迫敛性以及 $\epsilon > 0$ 的任意性, 可得

$$\int_a^b f(x)\sin nx dx \to 0 \quad (n \to \infty).$$

同理可证

$$\int_a^b f(x)\cos nx dx \to 0 \quad (n \to \infty).$$

□