数学分析作业

1 第 4 周

问题 1.1. 设 A, B 为非空有界数集, 并且 $A \subset B$, 证明

$$\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B.$$

证明 显然, $\inf A \leq \inf B$. 下证 $\inf B \leq \inf A$ 并且 $\sup A \leq \sup B$.

假设 $\inf B > \inf A$, 则 $\inf B$ 不是集合 A 的下界, 从而存在 $x_0 \in A$ 使得 $\inf B > x_0$. 另一方面, 由于 $A \subset B$，从而也有 $x_0 \in B$, 于是

$$\inf B > x_0 \geq \inf B,$$

矛盾.

假设 $\sup A > \sup B$, 则 $\sup B$ 不是集合 A 的上界, 从而存在 $x_1 \in A$ 使得 $\sup B < x_1$. 另一方面, 由于 $A \subset B$，从而也有 $x_1 \in B$, 于是

$$\sup B < x_1 \leq \sup B,$$

矛盾.

综上, $\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B$. □

问题 1.2. 设 S 为非空有下界 (不一定有上界) 的数集, 并且 $\inf S > 0$, 证明集合

$$S^{-1} = \{x^{-1} \mid x \in S\}$$

有界并且

$$\sup S^{-1} > 0, \quad \inf S^{-1} \geq 0, \quad \sup S^{-1} = \frac{1}{\inf S}.$$

证明 Step1. 任取 $y \in S^{-1}$, 令 $x = y^{-1}$, 则 $x \in S$,

$$x \geq \inf S > 0,$$

从而

$$0 < y \leq \frac{1}{\inf S}, \quad \forall y \in S^{-1}. \tag{1.1}$$

所以 0 是 S^{-1} 的一个下界, $\frac{1}{\inf S}$ 是 S 的一个上界, 并且

$$\sup S^{-1} > 0, \quad \inf S^{-1} \geq 0.$$

Step2. 由 Step1 可知 $\sup S^{-1} \leq \frac{1}{\inf S}$. 下面排除 $\sup S^{-1} < \frac{1}{\inf S}$ 的情况.
反证法, 假设 $\sup S^{-1} < \frac{1}{\inf S}$ 成立, 由于 $\sup S^{-1} > 0$, 则

$$0 < \inf S < \frac{1}{\sup S^{-1}}.$$

所以 $\frac{1}{\sup S^{-1}}$ 不是 S 的下界, 存在 $x \in S$ 使得

$$0 < \inf S \le x < \frac{1}{\sup S^{-1}}.$$

令 $y = x^{-1}$, 则 $y \in S^{-1}$,

$$0 < \frac{1}{y} = x < \frac{1}{\sup S^{-1}},$$

从而

$$y > \sup S^{-1}.$$

$\square$

问题 1.3. 证明以下等式和不等式:

(1) 设 $a, b \in \mathbb{R}$, 则

$$\big||a| - |b|\big| \le |a - b|, \quad \frac{|a+b|}{1+|a+b|} \le \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}.$$

(2) 设 $a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_+$ 且 $n \ge 2$, 则

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}),$$

(3) Bernoulli(伯努利) 不等式: 设 $h \ge -1$, $n \in \mathbb{N}_+$, 则

$$(1+h)^n \ge 1 + nh.$$

特别地, 如果还有 $h \ge 0$ 并且 $n > 2$, 则还成立

$$(1+h)^n > \frac{n(n-1)}{2} h^2 > \frac{n^2 h^2}{4}.$$

(4) 算术-几何平均值不等式: 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是 n 个非负实数, 则

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \ge \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n}.$$

如果 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 都是正实数, 还成立几何-调和平均值不等式:

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n} \ge \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}.$$

(5)

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots n^2 = \tfrac{n(n+2)(2n+1)}{6}.$$
$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots n^3 = \left(\tfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

注: $\sum\limits_{k=1}^{n} s_k$ 表示对 $s_1, s_2, \cdots, s_n$ 按下标 k 从 1 到 n 求和, 即 $\sum\limits_{k=1}^{n} s_k = s_1 + s_2 + \cdots + s_n$.

(6) 若 $0 < x < \frac{\pi}{2}$, 则 $\sin x < x < \tan x$. 若 $x \in \mathbb{R}$, 则 $|\sin x| \le |x|$.