


泛函分析作业题

第 2 周

 **作业题 1.1** 设 $P_r[a, b]$ 是定义在闭区间 $[a, b]$ 上的所有有理系数多项式函数的全体. 显然, $(P_r[a, b], d)$ 是连续函数空间 $(C[a, b], d)$ 的距离子空间, 其中

$$d(f, g) = \max_{t \in [a, b]} |f(t) - g(t)|, \quad \forall f, g \in C[a, b].$$

证明: $P_r[a, b]$ 是 $C[a, b]$ 的可数稠密子集, 从而 $C[a, b]$ 可分.

证明

Step1. 对任意 $n \in \mathbb{N}$, 设 $P_r^n[a, b]$ 是定义在 $[a, b]$ 上的所有有理系数 n 次多项式函数的全体, 则 $P_r^n[a, b]$ 是可数集. 由于

$$P_r[a, b] = \bigcup_{n=0}^{\infty} P_r^n[a, b],$$

则 $P_r[a, b]$ 也是可数集.

Step2. 下证 $P_r[a, b]$ 按距离 d 在 $P[a, b]$ 中稠密.

任取 $h \in P[a, b]$,

$$h(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n, \quad t \in [a, b],$$

其中 $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. 令

$$M = \max_{1 \leq k \leq n} \max_{t \in [a, b]} |t|^k > 0.$$

根据有理数集 \mathbb{Q} 在实数集 \mathbb{R} 中的稠密性, 对任意 $\epsilon > 0$, 存在 $q_0, q_1, \dots, q_n \in \mathbb{Q}$ 使得

$$|a_0 - q_0| < \frac{1}{n+1} \epsilon, \quad |a_1 - q_1| < \frac{1}{(n+1)M} \epsilon, \quad \dots, \quad |a_n - q_n| < \frac{1}{(n+1)M} \epsilon.$$

令

$$g(t) = q_0 + q_1 t + \cdots + q_n t^n, \quad t \in [a, b],$$

则 $g \in P_r[a, b]$, 并且对任意 $t \in [a, b]$ 都有

$$\begin{aligned} & |h(t) - g(t)| \\ & \leq |a_0 - q_0| + |a_1 - q_1| \cdot |t| + \cdots + |a_n - q_n| \cdot |t|^n \\ & \leq |a_0 - q_0| + |a_1 - q_1| M + \cdots + |a_n - q_n| M \\ & < \epsilon, \end{aligned}$$

从而

$$\max_{t \in [a, b]} |h(t) - g(t)| < \epsilon.$$

综上, 对任意 $h \in P[a, b]$ 以及任意 $\epsilon > 0$, 存在 $g \in P_r[a, b]$ 使得

$$d(h, g) = \max_{t \in [a, b]} |h(t) - g(t)| < \epsilon,$$

所以 $P_r[a, b]$ 按距离 d 在 $P[a, b]$ 中稠密.

Step3. 根据 Weierstrauss 逼近定理, $P[a, b]$ 按距离 d 在 $C[a, b]$ 中稠密, 则对任意 $\epsilon > 0$ 以及任意 $f \in C[a, b]$, 存在 $h \in P[a, b]$ 使得

$$d(f, h) < \frac{1}{2} \epsilon.$$

由 Step2 可知, 存在 $g \in P_r[a, b]$ 使得

$$d(h, g) < \frac{1}{2}\epsilon,$$

从而 $d(f, g) \leq d(f, h) + d(h, g) < \epsilon$.


综上, $P_r[a, b]$ 是 $C[a, b]$ 的可数稠密子集, 从而 $C[a, b]$ 可分. □

作业题 1.2 按以下步骤证明

定理 1.1. Riemann-Lebesgue 引理

$f \in L[a, b]$, 对应的 Fourier 系数为

$$a_n = \int_a^b f(x) \sin nx dx, \quad b_n = \int_a^b f(x) \cos nx dx, \quad n \in \mathbb{N},$$

则 $a_n, b_n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$. 

Step1 若 f 是 $[a, b]$ 上的简单函数 (P80 定义 3), 证明上述结论成立.

Step2 设 $S[a, b]$ 是定义在闭区间 $[a, b]$ 上的简单函数的全体. 显然, $S[a, b]$ 是 $L[a, b]$ 的距离子空间, 其中距离

$$d(f, g) = \int_a^b |f(t) - g(t)| dt, \quad \forall f, g \in L[a, b].$$

证明: $S[a, b]$ 是 $L[a, b]$ 的稠密子集.

Step3 利用稠密性, 证明 Riemann-Lebesgue 引理成立.

证明

Step0. 设 h 是 $[a, b]$ 上的一个阶梯函数,

$$h(x) = \begin{cases} c_1, & x \in (a_1, b_1), \\ c_2, & x \in (a_2, b_2), \\ \cdots & \cdots \\ c_k, & x \in (a_k, b_k), \\ 0, & x \in [a, b] \setminus \bigcup_{i=1}^k (a_i, b_i), \end{cases}$$

其中 c_1, c_2, \dots, c_k 为常数, $(a_1, b_1), \dots, (a_k, b_k)$ 是 $[a, b]$ 中互不相交的非空开区间. 于是,

$$\begin{aligned} & \int_a^b h(x) \sin nx dx \\ &= \sum_{i=1}^k c_i \int_{a_i}^{b_i} \sin nx dx \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k c_i (\cos na_i - \cos nb_i) \\ &\rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

同理可证

$$\int_a^b h(x) \cos nx dx \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Step1. 设 E 是 $[a, b]$ 中的可测子集, χ 是 E 的特征函数, 即

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & x \in E, \\ 0, & x \in [a, b] \setminus E, \end{cases}$$

下证

$$\int_a^b \chi(x) \sin nx dx \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

令 $\tilde{E} = E \cap (a, b)$, 则 \tilde{E} 也可测并且 $m(E \setminus \tilde{E}) = 0$. 对任意 $\epsilon > 0$, 存在开集 $G \subset [a, b]$ 使得 $\tilde{E} \subset G$ 并且

$$m(G \setminus \tilde{E}) < \frac{1}{2}\epsilon.$$

另一方面, 根据 \mathbb{R}^1 中开集的构造定理 (P44), G 可表为

$$G = \bigcup_{i=1}^{\infty} O_i,$$

其中 $O_i = (a_i, b_i)$ 是 G 的构成区间, 从而

$$\sum_{i=1}^{\infty} (b_i - a_i) = mG \leq b - a < +\infty.$$

于是, 对上述 $\epsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}_+$ 使得

$$\sum_{i=N+1}^{\infty} (b_i - a_i) < \frac{1}{2}\epsilon.$$

令 $V = \bigcup_{i=1}^N (a_i, b_i)$, 并定义阶梯函数

$$h(x) = \begin{cases} 1, & x \in V, \\ 0, & x \in [a, b] \setminus V, \end{cases}$$

则

$$\begin{aligned} & \int_a^b |\chi(x) - h(x)| dx \\ &= \left(\int_{E \setminus V} + \int_{V \setminus \tilde{E}} + \int_{[a, b] \setminus (E \cup V)} \right) |\chi(x) - h(x)| dx \\ &= \left(\int_{\tilde{E} \setminus V} + \int_{V \setminus \tilde{E}} + \int_{[a, b] \setminus (\tilde{E} \cup V)} \right) |\chi(x) - h(x)| dx \\ &= \int_{\tilde{E} \setminus V} |1 - 0| dx + \int_{V \setminus \tilde{E}} |0 - 1| dx + \int_{[a, b] \setminus (\tilde{E} \cup V)} |0 - 0| dx \\ &= m(\tilde{E} \setminus V) + m(V \setminus \tilde{E}) \\ &\leq m(G \setminus V) + m(G \setminus \tilde{E}) \\ &< \frac{1}{2}\epsilon + \frac{1}{2}\epsilon = \epsilon, \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}
 0 &\leq \left| \int_a^b \chi(x) \sin nx dx \right| \\
 &\leq \left| \int_a^b (\chi(x) - h(x)) \sin nx dx \right| + \left| \int_a^b h(x) \sin nx dx \right| \\
 &\leq \int_a^b |\chi(x) - h(x)| |\sin nx| dx + \left| \int_a^b h(x) \sin nx dx \right| \\
 &\leq \int_a^b |\chi(x) - h(x)| dx + \left| \int_a^b h(x) \sin nx dx \right| \\
 &< \epsilon + \left| \int_a^b h(x) \sin nx dx \right|.
 \end{aligned}$$

由于 h 是阶梯函数, 综合 Step0, 数列极限的迫敛性以及 $\epsilon > 0$ 的任意性, 可得

$$\int_a^b \chi(x) \sin nx dx \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

设 f 是 $[a, b]$ 上的简单函数,

$$f(x) = \sum_{i=1}^k c_i \chi_i(x),$$

其中

- (i) $[a, b] = \cup_{i=1}^k E_i$, E_1, E_2, \dots, E_k 是 $[a, b]$ 中互不相交的可测子集;
- (ii) c_1, c_2, \dots, c_k 是非负常数;
- (iii) $\chi_i(x)$ 是 E_i 的特征函数, 即

$$\chi_i(x) = \begin{cases} 1, & x \in E_i, \\ 0, & x \in [a, b] \setminus E_i. \end{cases}$$

由前面的结论可知

$$\int_a^b f(x) \sin nx dx = \sum_{i=1}^k c_i \int_a^b \chi_i(x) \sin nx dx \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

同理可证

$$\int_a^b f(x) \cos nx dx \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Step2. (P118) 设 $f \in L[a, b]$, 则 f^+ 和 f^- 也是 $[a, b]$ 上的非负 L 可积函数, 从而, 根据非负可测函数 L 积分的定义 (P102, 定义 1), 对任意 $\epsilon > 0$, 存在 $[a, b]$ 上的简单函数 ϕ_1, ϕ_2 , 使得

$$0 \leq \phi_1(x) \leq f^+(x), \quad 0 \leq \phi_2(x) \leq f^-(x), \quad \forall x \in [a, b],$$

并且

$$\begin{aligned}
 \int_a^b f^+(x) dx - \frac{\epsilon}{2} &\leq \int_a^b \phi_1(x) dx \leq \int_a^b f^+(x) dx, \\
 \int_a^b f^-(x) dx - \frac{\epsilon}{2} &\leq \int_a^b \phi_2(x) dx \leq \int_a^b f^-(x) dx.
 \end{aligned}$$

令 $\phi(x) = \phi_1(x) - \phi_2(x)$, 则 ϕ 也是 $[a, b]$ 上的简单函数, 并且

$$\begin{aligned} d(f, \phi) &= \int_a^b |f(x) - \phi(x)| dx \\ &= \int_a^b |f^+(x) - f^-(x) - \phi_1(x) + \phi_2(x)| dx \\ &\leq \int_a^b |f^+(x) - \phi_1(x)| dx + \int_a^b |f^-(x) - \phi_2(x)| dx \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

综上, $S[a, b]$ 是 $L[a, b]$ 的稠密子集.

Step3. 由 Step2, 对任意 $f \in L[a, b]$ 以及任意 $\epsilon > 0$, 存在 $g \in S[a, b]$, 使得

$$d(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx < \epsilon,$$

从而

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left| \int_a^b f(x) \sin nx dx \right| \\ &\leq \left| \int_a^b (f(x) - g(x)) \sin nx dx \right| + \left| \int_a^b g(x) \sin nx dx \right| \\ &\leq \int_a^b |f(x) - g(x)| |\sin nx| dx + \left| \int_a^b g(x) \sin nx dx \right| \\ &\leq \int_a^b |f(x) - g(x)| dx + \left| \int_a^b g(x) \sin nx dx \right| \\ &< \epsilon + \left| \int_a^b g(x) \sin nx dx \right|. \end{aligned}$$

另一方面, 根据 Step1, 就有

$$\int_a^b g(x) \sin nx dx \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

综上, 由以上两式, 结合数列极限的迫敛性以及 $\epsilon > 0$ 的任意性, 可得

$$\int_a^b f(x) \sin nx dx \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

同理可证

$$\int_a^b f(x) \cos nx dx \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

□