2019-2020 学年第 1 学期泛函分析

学生之友

作者：孙奉龙
组织：曲阜师范大学 数学科学学院

时间：October 13, 2019

版本：1

Victory won't come to us unless we go to it. — M. Moore

目　　录

7　度量空间和赋范线性空间 **1**

7.1　教学计划 1

7.2　习题 2

8　有界线性算子和连续线性泛函 **30**

9　内积空间和 Hilbert 空间 **31**

10 Banach 空间中的基本定理 **32**

11 线性算子的谱 **33**

12 补充专题 **34**

第 7 章　度量空间和赋范线性空间

7.1 教学计划

1. 导引.
   $\boxed{\text{距离空间的定义}}$.
   距离空间的一些具体例子.
   验证距离的要点: Step 1. 验证 $d(x, y)$ 定义合理; Step 2. 验证正定性; Stpe 3. 验证三角不等式.
   补充: 通过球极投影在扩充复平面 C_∞ 上定义距离, 来源: GTM11, Functions of One Complex Variable, 2nd ed., John B.Conway.
2. 有了距离就可以定义邻域 $U(x_0, \epsilon) = \{x \in X \mid d(x, x_0) < \epsilon\}$, 特别强调 $x \in X$. 有了邻域既可以定义开集闭集等拓扑概念, 又可以引出收敛的概念.
   专题：度量空间中的拓扑概念. 从抽象距离空间的角度重新梳理教材第二章 2-3 节的概念和结论. 补充开集、闭集的等价定义 (重要!), 距离子空间和相对拓扑的概念和结论. 离散度量空间中任何子集既开又闭. 本章课后题第 1 题.
3. $\boxed{\text{点列收敛的定义}}$.
   收敛点列的性质: (极限) 唯一性、有界性、子列性质. 度量空间中有界集的定义及等价定义.
   收敛点列的具体例子: 各种不同的具体例子里不同形式的收敛都可以用统一的框架——度量空间中的点列收敛——来考察.
4. $\boxed{\text{稠密子集}}$和$\boxed{\text{可分空间}}$的定义.
   稠密子集和可分空间的具体例子. $P[a, b]$, $C[a, b]$, $L[a, b]$ 稠密性的关系.
   不可分空间的一种判别方法.
5. $\boxed{\text{Cauchy 点列}}$和$\boxed{\text{完备度量空间}}$的定义. Cauchy 点列和收敛点列的关系.
   完备度量空间和不完备度量空间的具体例子.
   度量空间之间的$\boxed{\text{等距同构}}$, 不完备空间的$\boxed{\text{完备化定理}}$(Cauchy 等价类方法, 证明略).
6. $\boxed{\text{(列) 紧集的定义}}$
   (列) 紧集和有界 (闭) 集的关系. 紧集的拓扑定义——有限覆盖条件.
   $C[a, b]$ 中列紧集的判别方法——Ascoli-Arezela 定理 (A-A 定理).
7. 连续映射

- “在某点连续”: $\boxed{\epsilon-\delta \text{ 定义}}$, 点列定义, 邻域定义. 等价性证明.
- “在空间上连续”, 一般定义, $\boxed{\text{拓扑定义}}$. 等价性证明.

连续映射的具体例子: Lipschitz 连续映射, Hölder 连续映射等.

8. 一种特殊的 Lipschitz 连续映射——$\boxed{\text{压缩映射}}$.
   $\boxed{\text{压缩映射原理}}$(又称 Banach 不动点定理).
   应用：证明隐函数定理, 证明常微分方程解的存在唯一性定理——Picard 定理.
9. 线性空间, 线性组合, 线性包, 线性无关等代数概念.
   线性无关集与$\boxed{\text{Hamel 基}}$.
   专题：半序关系、半序集与 Zorn 引理.
   应用 Zorn 引理证明 Hamel 基的存在性. 证明一个线性空间上的不同 Hamel 基都是对等 (等势) 的, 从而可以定义线性空间的维数.
   无穷维线性空间的例子——$P[a,b]$.
10. $\boxed{\text{范数与赋范线性空间的定义.}}$
    范数与距离的关系, 默认赋范空间上的距离为范数导出的距离. 按范数收敛, 抽象级数收敛的定义. 按范数导出的距离完备的赋范线性空间——$\boxed{\text{Banach 空间}}$.
    证明一个具体的空间是 Banach 空间: Step1. 验证是线性空间; Step2. 验证 $\|\cdot\|$ 是范数. Step3. 验证完备性.
    具体的 Banach 空间的例子: $C[a,b]$, $L^(\Omega)$ $(1 \le p \le \infty)$, l^p $(1 \le p \le \infty)$. 重要不等式: Young 不等式, 积分 (或无穷级数, 或有限和) 形式的 Hölder 不等式和 Minkowski 不等式.
11. 专题：有限维赋范线性空间.
    范数等价和$\boxed{\text{拓扑同构}}$——(i) 一个有限维赋范线性空间上不同的范数彼此等价; (ii) 具有相同维数的有限维赋范空间彼此拓扑同构; (iii) 有限维赋范线性空间都是 Banach 空间.
    有限维赋范线性空间上的最佳逼近问题——最佳逼近元存在.
    赋范空间 X 中的任何有界闭集都是紧集当且仅当 X 是有限维空间.

7.2 习题

练习 7.1 设 (X,d) 是一个度量空间, $x_0 \in X, \epsilon > 0$. 令

$$\begin{aligned} U(x_0,\epsilon) &= \{x \mid d(x,x_0) < \epsilon\}, \\ S(x_0,\epsilon) &= \{x \mid d(x,x_0) \le \epsilon\}, \end{aligned}$$

问 $U(x_0,\epsilon)$ 的闭包是否等于 $S(x_0,\epsilon)$?

解 当 X 是一般的距离空间时, 结论不一定成立.

反例 1. 设 X 是离散度量空间, $\epsilon = 1$. 任取 $x_0 \in X$, 有

$$U(x_0, 1) = \{x \mid x \in X,\ d(x, x_0) < 1\} = \{x_0\},$$
$$S(x_0, 1) = \{x \mid x \in X,\ d(x, x_0) \le 1\} = X.$$

易证, 离散度量空间中的任何点都是孤立点, 从而任何一个单点集 $\{x\}$ 的导集都是空集, 所以任何单点集 $\{x\}$ 都是闭集. 这样,

$$\overline{U(x_0, 1)} = \overline{\{x_0\}} = \{x_0\} \neq S(x_0, 1).$$

反例 2. 取 $X = [0, 1] \cup [2, 3]$, $d(x, y) = |x - y|$, 显然, X 在 $d(x, y)$ 下成距离空间. 由于 $[0, 1]$ 是空间 $(\mathbb{R}, d)$ 中的闭集, 并且

$$[0, 1] = [0, 1] \cap X,$$

则 $[0, 1]$ 也是 (X, d) 中的开集 (参看点集拓扑教材里的拓扑子空间、相对开集、相对闭集的有关结论). 由于

$$U(1, 1) = \{x \in X \mid d(1, x) < 1\} = (0, 1] \subset [0, 1],$$

所以 $\overline{U(1, 1)} \subset \overline{[0, 1]} = [0, 1]$. 但是,

$$S(1, 1) = \{x \in X \mid d(1, x) \le 1\} = [0, 1] \cap \{2\} \neq \overline{U(1, 1)}.$$

注 当 X 是赋范线性空间时, 结论成立.

练习 7.2 设 $C^\infty[a, b]$ 是区间 $[a, b]$ 上无限次可微函数的全体, 定义

$$d(f, g) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{2^r} \max_{a \le t \le b} \frac{\left|f^{(r)} - g^{(r)}(t)\right|}{1 + \left|f^{(r)} - g^{(r)}(t)\right|}.$$

证明 $C^\infty[a, b]$ 按 $d(f, g)$ 成度量空间.

证明 (因为 $d(f, g)$ 是通过无穷级数来定义的, 所以在一开始有必要验证级数收敛, 从而保证 $d(f, g)$ 有意义) 对任意 $f, g \in C^\infty[a, b]$, 由于

$$0 \le \frac{1}{2^r} \max_{a \le t \le b} \frac{\left|f^{(r)}(t) - g^{(r)}(t)\right|}{1 + \left|f^{(r)}(t) - g^{(r)}(t)\right|} \le \frac{1}{2^r},$$

所以级数

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{2^r} \max_{a \le t \le b} \frac{\left|f^{(r)}(t) - g^{(r)}(t)\right|}{1 + \left|f^{(r)}(t) - g^{(r)}(t)\right|}$$

收敛, 从而 $d(f, g)$ 有意义.

显然, $d(f, g) \ge 0$. 若 $d(f, g) = 0$, 则对任意自然数 $r \in \mathbb{N}$, 都有

$$\max_{a \le t \le b} \frac{\left|f^{(r)}(t) - g^{(r)}(t)\right|}{1 + \left|f^{(r)}(t) - g^{(r)}(t)\right|} = 0,$$

从而 $\left|f^{(r)}(t)-g^{(r)}(t)\right|=0$ 对任意 $t\in[a,b]$ 都成立, 于是 $f^{(r)}=g^{(r)}$, 特别地, $f=g\in C^{\infty}[a,b]$. 反之, 若 $f=g\in C^{\infty}[a,b]$, 则对任意自然数 $r\in\mathbb{N}$ 以及任意 $t\in[a,b]$, 都有 $f^{(r)}(t)=g^{(r)}(t)$, 从而

$$\max_{a\le t\le b}\left|f^{(r)}(t)-g^{(r)}(t)\right|=0,$$

$$d(f,g)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{2^r}\max_{a\le t\le b}\frac{\left|f^{(r)}(t)-g^{(r)}(t)\right|}{1+\left|f^{(r)}(t)-g^{(r)}(t)\right|}=0.$$

设 $h\in C^{\infty}[a,b]$, 则对任意自然数 $r\in\mathbb{N}$ 以及任意 $t\in[a,b]$, 都有

$$\left|f^{(r)}(t)-g^{(r)}(t)\right|\le\left|f^{(r)}(t)-h^{(r)}(t)\right|+\left|g^{(r)}(t)-h^{(r)}(t)\right|,$$

从而,

$$\begin{aligned}
&\frac{\left|f^{(r)}(t)-g^{(r)}(t)\right|}{1+\left|f^{(r)}(t)-g^{(r)}(t)\right|}\\
\le\ &\frac{\left|f^{(r)}(t)-h^{(r)}(t)\right|+\left|g^{(r)}(t)-h^{(r)}(t)\right|}{1+\left|f^{(r)}(t)-h^{(r)}(t)\right|+\left|g^{(r)}(t)-h^{(r)}(t)\right|}\\
=\ &\frac{\left|f^{(r)}(t)-h^{(r)}(t)\right|}{1+\left|f^{(r)}(t)-h^{(r)}(t)\right|+\left|g^{(r)}(t)-h^{(r)}(t)\right|}+\frac{\left|g^{(r)}(t)-h^{(r)}(t)\right|}{1+\left|f^{(r)}(t)-h^{(r)}(t)\right|+\left|g^{(r)}(t)-h^{(r)}(t)\right|}\\
\le\ &\frac{\left|f^{(r)}(t)-h^{(r)}(t)\right|}{1+\left|f^{(r)}(t)-h^{(r)}(t)\right|}+\frac{\left|g^{(r)}(t)-h^{(r)}(t)\right|}{1+\left|g^{(r)}(t)-h^{(r)}(t)\right|}.
\end{aligned}$$

由此可得

$$\begin{aligned}
d(f,g)&=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{2^r}\max_{a\le t\le b}\frac{\left|f^{(r)}(t)-g^{(r)}(t)\right|}{1+\left|f^{(r)}(t)-g^{(r)}(t)\right|}\\
&\le\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{2^r}\max_{a\le t\le b}\frac{\left|f^{(r)}(t)-h^{(r)}(t)\right|}{1+\left|f^{(r)}(t)-h^{(r)}(t)\right|}+\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{2^r}\max_{a\le t\le b}\frac{\left|h^{(r)}(t)-g^{(r)}(t)\right|}{1+\left|h^{(r)}(t)-g^{(r)}(t)\right|}\\
&=d(f,h)+d(g,h).
\end{aligned}$$

综上, $C^{\infty}[a,b]$ 按 $d(f,g)$ 成度量空间. □

✍ **练习 7.3** 设 B 是度量空间 X 中的闭集, 证明必有一列开集 $O_1,O_2,\cdots,O_n,\cdots$ 包含 B, 而且

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}O_n=B.$$

证明 对任意正整数 n, 令

$$O_n=\bigcup_{x\in B}U\left(x,\frac{1}{n}\right)=\left\{y\in X\,\middle|\,\text{存在 }x\in B\text{使得 }d(x,y)<\frac{1}{n}\right\},$$

显然, O_n 是开集并且 $B \subset O_n$, 所以

$$B \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} O_n.$$

接下来, 我们证明 $\cap_{n=1}^{\infty} O_n = B$. 利用反证法, 假设存在 $y \in X$ 满足 $y \in \cap_{n=1}^{\infty} O_n$ 但 $y \notin B$. 根据 O_n 的定义, 对任意 n, 存在 $x_n \in B$ 使得 $d(x_n, y) < \frac{1}{n}$. 由此可知, y 是集合 B 的聚点, 即 $y \in B'$. 但是, 由于 B 是闭集, 所以 $B \supset B' \ni y$, 这与假设 $y \notin B$ 矛盾. □

✍ **练习 7.4** 设 $d(x, y)$ 为空间 X 上的距离, 证明

$$\tilde{d}(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

也是 X 上的距离.

证明 对任意的 $x, y \in X$, 显然 $\tilde{d}(x, y) \geq 0$. 并且, $\tilde{d}(x, y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} = 0$等价于 $d(x, y) = 0$, 进而等价于 $x = y$.

任给 $z \in X$, 由距离 $d(x, y)$ 的三点不等式可知

$$d(x, y) \leq d(x, z) + \mathrm{d}(y, z),$$

从而

$$\begin{aligned}
\tilde{d}(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} &\leq \frac{d(x, z) + d(y, z)}{1 + d(x, z) + d(y, z)} \\
&= \frac{d(x, z)}{1 + d(x, z) + d(y, z)} + \frac{d(y, z)}{1 + d(x, z) + d(y, z)} \\
&\leq \frac{d(x, z)}{1 + d(x, z)} + \frac{d(y, z)}{1 + d(y, z)} \\
&= \tilde{d}(x, z) + \tilde{d}(y, z).
\end{aligned}$$

综上, $\tilde{d}(x, y)$ 也是空间 X 上的距离. □

✍ **练习 7.5** 证明点列 $\{f_n\}$ 练习题 7.2 中距离收敛于 $f \in C^{\infty}[a, b]$ 的充分必要条件为 f_n 的各阶导数在 $[a, b]$ 上一致收敛于 f 的各阶导数.

证明 (必要性) 设 $\{f_n\} \subset C^{\infty}[a, b]$, $f \in C^{\infty}[a, b]$ 并且 $\lim_{n\to\infty} d(f_n, f) = 0$. 由于对任意的自然数 $r \in \mathbb{N}$, 都有

$$0 \leq \max_{a \leq t \leq b} \frac{\left|f_n^{(r)}(t) - f^{(r)}(t)\right|}{1 + \left|f_n^{(r)}(t) - f^{(r)}(t)\right|} \leq 2^r d(f_n, f),$$

从而

$$\lim_{n\to\infty} \max_{a \leq t \leq b} \frac{\left|f^{(r)}(t) - g^{(r)}(t)\right|}{1 + \left|f^{(r)}(t) - g^{(r)}(t)\right|} = 0.$$

按照极限的 $\epsilon - \delta$ 定义, 对任意 $\epsilon > 0$, 存在只依赖于 ϵ 和自然数 r 的正数 $N = N(\epsilon, r) > 0$,

使得当 $n > N$ 时,

$$0 \leq \frac{\left|f_n^{(r)}(t) - f^{(r)}(t)\right|}{1 + \left|f_n^{(r)}(t) - f^{(r)}(t)\right|} \leq \max_{a \leq s \leq b} \frac{\left|f_n^{(r)}(s) - f^{(r)}(s)\right|}{1 + \left|f_n^{(r)}(s) - f^{(r)}(s)\right|} < \frac{\epsilon}{1+\epsilon}$$

对任意 $t \in [a,b]$ 都成立. 于是, 当 $n > N$ 时,

$$\left|f_n^{(r)}(t) - f^{(r)}(t)\right| < \epsilon$$

对任意 $t \in [a,b]$ 都成立. 所以函数列 $\{f_n^{(r)}\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f^{(r)}$.

(充分性) 假设对任意自然数 $r \in \mathbb{N}$, 函数列 $\{f_n^{(r)}\} \subset C[a,b]$ 在闭区间 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f^{(r)} \in C[a,b]$. 任给 $\epsilon > 0$. 一方面, 由于 $\sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{2^r}$ 收敛并且

$$0 \leq \max_{a \leq t \leq b} \frac{\left|f_n^{(r)}(t) - f^{(r)}(t)\right|}{1 + \left|f_n^{(r)}(t) - f^{(r)}(t)\right|} < 1,$$

则存在正整数 $R \in \mathbb{N}_+$ 使得

$$\sum_{r=R}^{\infty} \frac{1}{2^r} \max_{a \leq t \leq b} \frac{\left|f_n^{(r)}(t) - f^{(r)}(t)\right|}{1 + \left|f_n^{(r)}(t) - f^{(r)}(t)\right|} \leq \sum_{r=R}^{\infty} \frac{1}{2^r} < \frac{1}{2}\epsilon.$$

另一方面, 当 $r \in \{0, 1, \cdots, R-1\}$ 时, 函数列 $\{f_n^{(r)}\} \subset C[a,b]$ 在闭区间 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f^{(r)} \in C[a,b]$. 根据函数列一致收敛的定义, 存在只依赖于 ϵ 和自然数 r 的正数 $N(\epsilon, r) > 0$, 使得当 $n > N(\epsilon, r)$ 时,

$$0 \leq \frac{\left|f_n^{(r)}(t) - f^{(r)}(t)\right|}{1 + \left|f_n^{(r)}(t) - f^{(r)}(t)\right|} < \frac{1}{4}\epsilon$$

对任意 $t \in [a,b]$ 都成立, 即

$$\max_{a \leq t \leq b} \frac{\left|f_n^{(r)}(t) - f^{(r)}(t)\right|}{1 + \left|f_n^{(r)}(t) - f^{(r)}(t)\right|} < \frac{1}{4}\epsilon.$$

令 $N(\epsilon) = \max\{N(\epsilon, 0), N(\epsilon, 1), \cdots, N(\epsilon, R-1)\}$, 则 $N(\epsilon)$ 只依赖于 ϵ, 并且当 $n > N(\epsilon)$ 时, 有

$$\sum_{r=0}^{R-1} \frac{1}{2^r} \max_{a \leq t \leq b} \frac{\left|f_n^{(r)}(t) - f^{(r)}(t)\right|}{1 + \left|f_n^{(r)}(t) - f^{(r)}(t)\right|} < \sum_{r=0}^{R-1} \frac{1}{2^r} \frac{\epsilon}{4} < \frac{1}{2}\epsilon.$$

于是, 当 $n > N(\epsilon)$ 时, 我们最终有

$$\begin{aligned} d(f_n, f) &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{2^r} \max_{a\le t\le b} \frac{\left|f_n^{(r)}(t) - f^{(r)}(t)\right|}{1 + \left|f_n^{(r)}(t) - f^{(r)}(t)\right|} \\ &= \left(\sum_{r=0}^{R-1} + \sum_{r=R}^{\infty}\right) \frac{1}{2^r} \max_{a\le t\le b} \frac{\left|f_n^{(r)}(t) - f^{(r)}(t)\right|}{1 + \left|f_n^{(r)}(t) - f^{(r)}(t)\right|} \\ &< \epsilon. \end{aligned}$$

所以点列 $\{f_n\}$ 按距离收敛于 f. □

练习 7.6 设 $B \subset [a,b]$, 证明度量空间 $C[a,b]$ 中的集

$$\{f \mid 当 t \in B时,\ f(t) = 0\}$$

为 $C[a,b]$ 中的闭集, 而集

$$A = \{f \mid 当 t \in B时,\ |f(t)| < \alpha\} \quad (\alpha > 0)$$

为开集的充要条件是 B 为闭集.

注意 教材中此题有打印错误: 集合 A 应该改为

$$A = \left\{f \mid 当 t \in B时,\ |f(t)| < \alpha\right\} \quad (\alpha > 0).$$

证明

1. 不妨记

$$D = \{f \in C[a,b] \mid 当\ t \in B时,\ f(t) = 0\}.$$

由于 $C[a,b]$ 在距离

$$d(f,g) = \max_{a\le t\le b} |f(t) - g(t)|$$

下成完备度量空间, 所以 D 的导集 D' 包含在 $C[a,b]$ 中.

下证 $D' \subset D$. 任给 $f \in D'$, 由聚点的定义, 对任意的 $\epsilon > 0$, 存在 $g_\epsilon \in D$ 使得

$$\max_{a\le t\le b} |f(t) - g_\epsilon(t)| = d(f, g_\epsilon) < \epsilon.$$

当 $t \in B$ 时, 当然有

$$|f(t) - g_\epsilon(t)| < \epsilon.$$

另一方面, 由于 $g_\epsilon \in D$, 则对任意 $t \in B$ 时, 都有

$$|f(t)| = |f(t) - g_\epsilon(t)| < \epsilon.$$

由于 $f(t)$ 与 ϵ 无关, 由上式可知 $f(t) = 0, \forall t \in B$. 所以 $f \in D$.

2. 不妨设 B 非空.

(必要性) 设 A 为开集. 利用反证法, 假设 B 不是闭集, 即存在 B 的聚点 t_0 满足 $t_0 \in$

$[a,b]\setminus B$. 按如下形式定义闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数 f:

(i) 若 $t_0\in(a,b)$, 令

$$f(t)=\begin{cases}\frac{\alpha}{t_0-a}t+a, & t\in[a,t_0],\\ \frac{\alpha}{b-t_0}(b-t), & t\in(t_0,b].\end{cases}$$

(ii) 若 $t_0=a$, 令 $f(t)=-\frac{\alpha}{b-a}(t-\alpha)+\alpha$, $t\in[a,b]$.

(iii) 若 $t_0=b$, 令 $f(t)=\frac{\alpha}{b-a}(t-a)$, $t\in[a,b]$.

则 f 满足 $f(t_0)=\alpha>0$; 当 $t\in[a,b]\setminus\{t_0\}$ 时, $0\le f(t)<\alpha$. 特别地, 当 $t\in B$ 时, $0\le f(t)<\alpha$, 所以 $f\in A$. 另一方面, 由于 $f\in C[a,b]$, t_0 是 B 的聚点, 所以对任意的 $\epsilon>0$, 存在 $t_\epsilon\in B$, 使得 $f(t_\epsilon)>\alpha-\frac{1}{2}\epsilon$. 定义新函数 $f_\epsilon(t)=f(t)+\frac{1}{2}\epsilon$, $t\in[a,b]$, 则 $f_\epsilon\in U(f,\epsilon)$ 但是 $f_\epsilon(t_\epsilon)>\alpha$, 所以 $f_\epsilon\notin A$. 这说明 $f\in A$ 不是 A 的内点, 这与 A 为开集矛盾.

(充分性) 设 B 为闭集. 由于闭集上的连续函数一定在该闭集上取到最大值, 所以对任意 $f\in A$, 存在 $t_0\in B$, 使得 $\sup\limits_{t\in B}|f(t)|=|f(t_0)|<\alpha$. 令 $\epsilon=\alpha-\sup\limits_{t\in B}|f(t)|>0$. 下证 $U(f,\epsilon)\subset A$. 事实上, 对任意 $g\in U(f,\epsilon)$ 以及任意 $t\in[a,b]$, 都有

$$\max_{a\le t\le b}|f(t)-g(t)|=d(f,g)<\epsilon.$$

特别地, 对任意 $t\in B$, 都有

$$|g(t)|<|f(t)|+\epsilon\le\sup_{t\in B}|f(t)|+\epsilon=\alpha,$$

也就是说 $g\in A$. 于是 $U(f,\epsilon)\subset A$, 这说明 A 中任意点都是 A 的内点, 所以 A 是开集. □

✍ **练习 7.7** 设 E 及 F 是度量空间中两个集, 如果 $d(E,F)>0$, 证明必有不相交开集 O 及 G 分别包含 E 及 F.

证明 令 $\epsilon=d(E,F)>0$,

$$O=\bigcup_{x\in E}U\left(x,\frac{1}{3}\epsilon\right),\quad G=\bigcup_{y\in F}U\left(y,\frac{1}{3}\epsilon\right),$$

则 O,G 是开集并且 $E\subset O$, $F\subset G$. 下证 $O\cap G=\emptyset$.

假设 $O\cap G\ne\emptyset$, 则存在 $z\in O\cap G$. 根据 O 和 G 的构造, 存在 $x\in E$ 以及 $y\in F$ 使得

$$d(x,z)<\frac{1}{3}\epsilon,\quad d(y,z)<\frac{1}{3}\epsilon.$$

于是,

$$d(x,y)\le d(x,z)+d(y,z)<\frac{2}{3}\epsilon,$$

这与

$$\inf_{\substack{x\in E\\ y\in F}}d(x,y)=d(E,F)=\epsilon$$

矛盾. 所以 $O \cap G = \emptyset$. □

✍ **练习 7.8** 设 $B[a,b]$ 表示 $[a,b]$ 上实有界函数全体, 对 $B[a,b]$ 中任意两元素 $f, g \in B[a,b]$, 规定距离为

$$d(f,g) = \sup_{a \le t \le b} |f(t) - g(t)|.$$

证明 $B[a,b]$ 不是可分空间.

证明 对任意 $c \in (a,b)$, 定义函数

$$f_c(t) = \begin{cases} 1, & \text{当 } t \in [a,c], \\ 0, & \text{当 } t \in (c,b]. \end{cases}$$

显然, $f_c \in B[a,b]$. 令

$$O_c = U\left(f_c, \frac{1}{3}\right) = \left\{ f \in B[a,b] \,\middle|\, \sup_{a \le t \le b} |f_c(t) - f(t)| < \frac{1}{3} \right\},$$

显然, O_c 为非空开集. 下证当 $\tilde{c} \in (a,b)$ 且 $\tilde{c} \neq c$ 时, $d(f_c, d_{\tilde{c}}) \geq 1$. 事实上, 不妨设 $c > \tilde{c}$, 则总存在 $t_0 \in (\tilde{c}, c) \subset [a,b]$ 使得 $f_c(t_0) = 1$ 并且 $f_{\tilde{c}}(t_0) = 0$. 于是,

$$d(f_c, f_{\tilde{c}}) = \sup_{a \le t \le b} |f_c(t) - f_{\tilde{c}}(t)| \geq |f_c(t_0) - f_{\tilde{c}}(t_0)| = 1.$$

这说明 $U(f_c, \frac{1}{3})$ 与 $U(f_{\tilde{c}}, \frac{1}{3})$ 不相交, 也就是说, 当 $\tilde{c} \in (a,b)$ 且 $\tilde{c} \neq c$ 时, $O_c \cap O_{\tilde{c}} = \emptyset$, 从而 $\{O_c\}_{c \in (a,b)}$ 是不可数个两两不相交的非空开集的集族, $B[a,b]$ 就是不可分的度量空间.

假设 $B[a,b]$ 是可分的, 则 $B[a,b]$ 存在可数稠密子集

$$M = \{g_1, g_2, \cdots, g_i, \cdots\}$$

使得 $\overline{M} = B[a,b]$. 于是, $\{O_c\}_{c \in (a,b)}$ 中的每一个开球 O_c 至少包含 M 中一点, $\{O_c\}_{c \in (a,b)}$ 中元素个数至多可数(因为不能 "超过" M 中元素的个数), 矛盾.

综上, $B[a,b]$ 不可分. □

✍ **练习 7.9** 设 X 是可分距离空间, $\mathscr{F}$ 为 X 的一个开覆盖, 即 $\mathscr{F}$ 是一族开集, 使得对每一个 $x \in X$, 有 $\mathscr{F}$ 中开集 O, 使 $x \in O$, 证明必可从 $\mathscr{F}$ 中选出可数个集组成 X 的一个覆盖.

证明 设 $\mathscr{F} = \{O_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ 是度量空间 X 的一个开覆盖. 则对任意 $x \in X$, 存在 $\lambda \in \Lambda$ 使得

$$x \in O_\lambda.$$

由于 O_λ 是开集, 则存在 $\epsilon_x > 0$ 使得

$$x \in U(x, \epsilon_x) \subset O_\lambda.$$

另一方面, 由于 X 是可分空间, 则 X 存在可数稠密子集 $D=\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$. 于是, 对于上述 $\epsilon_x>0$, 存在 $e_i\in D$ 以及 $k\in\mathbb{N}_+$ 使得

$$d(x,e_i)<\frac{1}{k}<\frac{1}{2}\epsilon_x,$$

从而

$$x\in U\left(e_i,\frac{1}{k}\right)\subset U(x,\epsilon_x)\subset O_\lambda. \tag{7.2.1}$$

记

$$\mathcal{E}=\left\{O_{i,k}\in\mathcal{F}\,\middle|\,U\left(e_i,\frac{1}{k}\right)\subset O_{i,k},\ i,k\in\mathbb{N}_+\right\},$$

则 $\mathcal{E}\subset\mathcal{F}$ 并且 $\mathcal{E}$(至多) 可数. 由 (7.2.1)式, 对任意 $x\in X$, 存在 $i,k\in\mathbb{N}_+$ 使得

$$x\in U\left(e_i,\frac{1}{k}\right)\subset O_{i,k}\in\mathcal{E},$$

从而 $\mathcal{E}$ 是空间 X 的一个可数覆盖. □

✍ **练习 7.10** 设 X 为距离空间, A 为 X 中子集, 令 $f(x)=\inf_{y\in A}d(x,y)$, $x\in X$, 证明 $f(x)$ 是 X 上连续函数.

证明 任取 $x,\tilde{x}\in X$ 以及 $y\in A$, 都有

$$d(x,y)\le d(x,\tilde{x})+d(\tilde{x},y),$$

上式两端对 $y\in A$ 取下确界, 得

$$f(x)=\inf_{y\in A}d(x,y)\le d(x,\tilde{x})+\inf_{y\in A}d(\tilde{x},y)=d(x,\tilde{x})+f(\tilde{x}).$$

同理, 从 $d(\tilde{x},y)\le d(x,\tilde{x})+d(x,y)$ 可得

$$f(\tilde{x})\le d(x,\tilde{x})+f(x).$$

于是

$$|f(x)-f(\tilde{x})|\le d(x,\tilde{x}). \tag{7.2.2}$$

任取 $x\in X$, 若点列 $\{x_n\}\subset X$ 满足

$$x_n\to x\quad(n\to\infty).$$

则对任意的 $\epsilon>0$, 存在只依赖于 ϵ 的正整数 N, 使得当 $n>N$ 时, 有 $d(x_n,x)<\epsilon$, 再根据(7.2.2)式, 可得

$$|f(x_n)-f(x)|<\epsilon,$$

所以 $f(x_n)\to f(x)$ $(n\to\infty)$, f 在 X 上连续. □

✍ **练习 7.11** 设 X 为距离空间, F_1,F_2 为 X 中不相交的闭集, 证明存在开集 G_1,G_2, 使

得 $G_1 \cap G_2 = \emptyset, G_1 \supset F_1, G_2 \supset F_2$.

证明 对任意 $x \in X \setminus F_2$, 都有

$$d(x, F_2) = \inf_{y \in F_2} d(x, y) > 0.$$

事实上, 假设 $d(x, F_2) = 0$. 根据 $d(x, F_2)$ 的定义, 对任意自然数 n, 存在 $y_n \in F_2$ 使得

$$0 = d(x, F_2) \leq d(x, y_n) < d(x, F_2) + \frac{1}{n}.$$

所以 $\lim_{n\to\infty} d(x, y_n) = 0$, 这表明闭集 F_2 中的点列 $\{y_n\}$ 收敛于点 x, 从而 $x \in F_2$, 矛盾. 同理可证, 对任意 $y \in X \setminus F_1$, 都有

$$d(y, F_1) = \inf_{x \in F_1} d(x, y) > 0.$$

对任意 $x \in F_1, y \in F_2$, 由于 F_1 与 F_2 时不相交的闭集, 则可以定义

$$\epsilon(x) = d(x, F_2) > 0, \quad \delta(y) = d(y, F_1) > 0.$$

再令

$$G_1 = \bigcup_{x \in F_1} U(x, \frac{1}{2}\epsilon(x)), \quad G_2 = \bigcup_{y \in F_2} U(y, \frac{1}{2}\delta(y)),$$

显然 G_1, G_2 都是开集并且 $F_1 \subset G_1, F_2 \subset G_2$. 下证 $G_1 \cap G_2 = \emptyset$. 反证法, 假设存在 $x_0 \in F_1$, $y_0 \in F_2$ 以及 $z \in G_1 \cap G_2$ 使得

$$z \in U(x_0, \epsilon(x_0)) \cap U(y_0, \delta(y_0)),$$

于是,

$$d(x_0, y_0) \leq d(x_0, z) + d(y_0, z) < \frac{1}{2}\epsilon(x_0) + \frac{1}{2}\delta(y_0). \tag{7.2.3}$$

但是, 另一方面, 我们还有 $d(x_0, y_0) \geq \inf_{y \in F_2} d(x_0, y)$, $d(x_0, y_0) \geq \inf_{x \in F_1} d(x, y_0)$, 即

$$d(x_0, y_0) \geq \max\{\epsilon(x_0), \delta(y_0)\},$$

该不等式与(7.2.3)式矛盾. □

练习 7.12 设 X, Y, Z 为三个度量空间, f 是 X 到 Y 中的连续映射, g 是 Y 到 Z 中的连续映射, 证明复合映射 $(gf)(x) = g(f(x))$ 是 X 到 Z 中的连续映射.

证明 设点列 $\{x_n\} \subset X$, 点 $x \in X$ 且

$$x_n \longrightarrow x \quad (n \to \infty),$$

则 $f(x_n) \in Y$, $f(x) \in Y$, $(gf)(x_n) \in Z$, $(gf)(x) \in Z$. 由于 f 时 X 到 Y 的连续映射, 则在空

间 Y 中,

$$f(x_n) \to f(x) \quad (n \to \infty).$$

又因为 g 是 Y 到 Z 的连续映射, 所以在空间 Z 中

$$(gf)(x_n) \to (gf)(x) \quad (n \to \infty),$$

于是, 映射 gf 是 X 到 Z 的连续映射. □

✍ **练习 7.13** 设 X 是度量空间, f 是 X 上的实函数, 证明 f 是连续映射的充要条件是对每个实数 c, 集合

$$\{x \mid x \in X,\ f(x) \le c\} \text{ 和集合 } \{x \mid x \in X,\ f(x) \ge c\}$$

都是闭集.

证明 为方便起见, 记

$$A = \{x \mid x \in X,\ f(x) \le c\}, \quad B = \{x \mid x \in X,\ f(x) \ge c\}.$$

(必要性) 设 f 是度量空间 X 到 $\mathbb{R}$ 的连续映射, $c \in \mathbb{R}$, 集合 A 中的点列 $\{x_n\}$ 收敛于点 $x \in X$. 下证 $x \in A$, 从而 A 是闭集. 事实上, 对任意自然数 n, 都有 $f(x_n) \le c$. 再根据连续映射的定义, 就有

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) \le c.$$

所以, $x \in A$. 同理可证 B 也是闭集.

(充分性) 设 f 是是度量空间 X 到 $\mathbb{R}$ 的映射, 对任意 $c \in \mathbb{R}$, 集合

$$\{x \mid x \in X,\ f(x) \le c\}$$

和集合

$$\{x \mid x \in X,\ f(x) \ge c\}$$

都是闭集. 对任意的 $z \in X$ 以及 $\epsilon > 0$, 记

$$c_1 = f(z) - \epsilon, \quad c_2 = f(z) + \epsilon.$$

由条件可知, 集合

$$\{x \mid x \in X,\ f(x) > c_1\}$$

和

$$\{x \mid x \in X,\ f(x) < c_2\}$$

都是开集, 所以交集

$$O = \{x \in X \mid c_1 < f(x) < c_2\} = \{x \in X \mid |f(z) - f(x)| < \epsilon\}$$

也是开集. 显然 $z \in O$, 所以存在 $\delta > 0$ 使得

$$U(z, \delta) \subset O.$$

由连续映射的定义可知, f 在点 z 处连续. 由 $z \in X$ 的任意性可知 f 在 X 上连续. □

✍ **练习 7.14** 证明柯西点列是有界点列.

证明 设 $\{x_n\}$ 是度量空间 X 中的 Cauchy 点列, 记 $M = \{x_n\}$. 根据 Cauchy 点列的定义, 存在正整数 N, 使得当 $n \geq N$ 时,

$$d(x_N, x_n) < 1.$$

任取 $y \in X$, 则当 $n \geq N$ 时,

$$d(x_n, y) \leq d(x_N, y) + d(x_N, x_n) < d(x_N, y) + 1.$$

令 $c = \max\{d(x_1, y), d(x_2, y), \cdots, d(x_{N-1}, y), d(x_N) + 1\}$, 则对任意 $x \in M$, 都有 $d(x, y) \leq c$, 所以

$$\inf_{x \in M} d(x, y) \leq c < \infty,$$

这表明集合 M 是有界集, 即 Cauchy 点列 $\{x_n\}$ 是有界点列. □

✍ **练习 7.15** 证明教材 §7.1 中空间 S, $B(A)$ 以及离散度量空间都是完备的度量空间.

证明 (1) 证明度量空间 S 完备.

设 $\{x_n\}$ 是空间 S 中的 Cauchy 点列,

$$x_n = \left(\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \cdots, \xi_i^{(n)}, \cdots\right),$$

则

$$\lim_{\substack{m \to \infty \\ n \to \infty}} d(x_m, x_n) = 0.$$

对任意固定的指标 i, 都有

$$0 \leq \frac{\left|\xi_i^{(m)} - \xi_i^{(n)}\right|}{1 + \left|\xi_i^{(m)} - \xi_i^{(n)}\right|} \leq 2^i d(x_m, x_n),$$

于是, 由追敛性可得

$$\lim_{\substack{m \to \infty \\ n \to \infty}} \left|\xi_i^{(m)} - \xi_i^{(n)}\right| = 0,$$

这表明 $\{\xi_i^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ 是实数空间 $\mathbb{R}$ 中的 Cauchy 数列. 由 Cauchy 收敛准则可知, 存在 $\xi_i \in \mathbb{R}$,

使得 $\lim_{n\to\infty}\xi_i^{(n)}=\xi_i$. 记

$$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_i,\cdots),$$

显然 $x\in S$. 下证, 在空间 S 中, $\lim_{n\to\infty}d(x_n,x)=0$. (事实上, 在 187 页的 (3) 中已经证明, $\{x_n\}$ 按距离收敛于 x 当且仅当对任意指标 i, $\xi_i^{(n)}\to\xi_i\,(n\to\infty)$. 为了本题解答的完整性, 我们仍然补充下面的证明)

任给 $\epsilon>0$. 一方面, 由于 $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}$ 收敛, 则存在正整数 $K=K(\epsilon)$, 使得

$$\sum_{i=K}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{\left|\xi_i^{(n)}-\xi_i\right|}{1+\left|\xi_i^{(n)}-\xi_i\right|}\le\sum_{i=K}^{\infty}\frac{1}{2^i}<\frac{1}{2}\epsilon.$$

另一方面, 由于 $\xi_i^{(n)}\to\xi_i\,(n\to\infty)$, 则存在只依赖于 ϵ 和指标 i 的正整数 $N(\epsilon,i)$, 使得当 $n\ge N(\epsilon,i)$ 时, 有

$$\left|\xi_i^{(n)}-\xi_i\right|<\frac{1}{2}\epsilon.$$

取 $N=\{N(\epsilon,1),N(\epsilon,2),\cdots,N(\epsilon,K-1)\}$, 则 N 只依赖于 ϵ, 并且当 $n\ge N$ 时, 有

$$\sum_{i=1}^{K-1}\frac{1}{2^i}\frac{\left|\xi_i^{(n)}-\xi_i\right|}{1+\left|\xi_i^{(n)}-\xi_i\right|}<\sum_{i=1}^{K-1}\frac{1}{2^i}\frac{\frac{1}{2}\epsilon}{1+\frac{1}{2}\epsilon}<\frac{1}{2}\epsilon.$$

综上, 存在只依赖于 ϵ 的正整数 N, 使得当 $n\ge N$ 时, 有

$$\begin{aligned}d(x_n,x)&=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{\left|\xi_i^{(n)}-\xi_i\right|}{1+\left|\xi_i^{(n)}-\xi_i\right|}\\&\le\left(\sum_{i=i}^{K-1}+\sum_{i=K}^{\infty}\right)\frac{1}{2^i}\frac{\left|\xi_i^{(n)}-\xi_i\right|}{1+\left|\xi_i^{(n)}-\xi_i\right|}\\&<\epsilon,\end{aligned}$$

所以 $\lim_{n\to\infty}d(x_n,x)=0$, 空间 S 完备.

(2) 证明度量空间 $B(A)$ 完备.

设 $\{f_n\}$ 是 $B(A)$ 中的 Cauchy 点列. 固定 $s\in A$, 对任意 $\epsilon>0$, 都存在只依赖于 ϵ 的正整数 $N=N(\epsilon,s)$, 使得当 $m,n\ge N$ 时都有

$$|f_n(s)-f_m(s)|\le\sup_{t\in A}|f_n(t)-f_m(t)|=d(f_n,f_m)<\epsilon. \tag{7.2.4}$$

所以 $\{f_n(s)\}_{n=1}^{\infty}$ 是实数空间 $\mathbb{R}$ 上的 Cauchy 数列. 根据 Cauchy 收敛准则, 存在唯一的 $y_s\in\mathbb{R}$ 使得 $f_n(s)\to y_s\,(n\to\infty)$. 这样就定义了 A 上的实函数

$$f:\quad A\to\mathbb{R}$$

$$s \mapsto y_s.$$

下证 $f \in B(A)$ 并且 $\lim_{n\to\infty} d(f_n, f) = 0$.

在(7.2.4)式中令 $m \to \infty$, 可知当 $n \geq N$ 时,

$$|f_n(s) - f(s)| = \lim_{m\to\infty} |f_n(s) - f_m(s)| \leq \epsilon$$

对任意 $s \in A$ 都成立, 即

$$\sup_{t\in A} |f_n(s) - f(s)| \leq \epsilon. \tag{7.2.5}$$

一方面,

$$\sup_{s\in A} |f(s)| \leq |f_n(s)| + \epsilon < \infty,$$

这说明 $f \in B(A)$. 另一方面, 由(7.2.5)式可得

$$\lim_{n\to\infty} d(f_n, f) = \lim_{n\to\infty} |f_n(s) - f(s)| = 0.$$

所以 $B(A)$ 是完备度量空间.

(3) 证明离散度量空间完备.

设 $\{x_n\}$ 是离散度量空间 X 中的 Cauchy 点列, 则存在正整数 N, 使得当 $n \geq N$ 时有

$$d(x_n, x_N) < \frac{1}{2}.$$

考虑到离散度量空间上距离的定义, 可知当 $n \geq N$, $x_n \equiv x_N$. 于是, 对任意 $\epsilon > 0$, 当 $n \geq N$ 时都有

$$d(x_n, x_N) = 0 < \epsilon,$$

即 $x_n \to x_N \in X\,(n \to \infty)$. 所以离散度量空间完备. □

练习 7.16 证明 l^∞ 与 $C(0,1]$ 的一个子空间等距同构.

注意 $C(0,1]$ 表示 $(0,1]$ 上连续并且有界的函数的全体, 这是一个线性空间. 对任意 $x \in C(0,1]$, 函数的有界性保证

$$\|x\| = \sup_{t\in(0,1]} |x(t)|$$

是 $C(0,1]$ 上的范数.

证明 对任意 $x \in C(0,1]$, 令

$$\alpha_x = \left(x(1), x\left(\frac{1}{2}\right), \cdots, x\left(\frac{1}{n}\right), \cdots\right). \tag{7.2.6}$$

由函数 x 的有界性易证 $\alpha_x \in l^\infty$, 由此得到映射 $\phi : C(0,1] \to l^\infty$ 使得 $\phi(x) = \alpha_x$.

下证 ϕ 是等距同构映射.

对任意 $x \in C(0,1]$, 由(7.2.6)式可知,

$$\|\phi(x)\|_\infty = \|\alpha_x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}_+}\left|x\left(\frac{1}{n}\right)\right| \leq \sup_{t\in(0,1]}|x(t)| = \|x\| \tag{7.2.7}$$

由上式易证 ϕ 是单射.

反之, 对任意 $\alpha = (\xi_1, \xi_2, \cdots) \in l^\infty$, 定义 $(0,1]$ 上的连续函数 x_ξ, 使得对任意 $t \in (0,1]$, 当 $t \in \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$ $(n \in \mathbb{N}_+)$ 时,

$$x_\xi(t) = \frac{\xi_{n+1} - \xi_n}{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}}\left(t - \frac{1}{n}\right) + \xi_n,$$

即函数 x_ξ 的图像时将点列 $(1, \xi_1), (2, \xi_2), \cdots, \left(\frac{1}{n}, \xi_n\right), \cdots$ 依此连接起来的折线, 于是

$$\sup_{t\in(0,1]}|x_\xi(t)| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}_+}\left|x\left(\frac{1}{n}\right)\right| = \sup_{n\in\mathbb{N}_+}|\xi_n| = \|\xi\|_\infty, \tag{7.2.8}$$

从而 $x_\xi \in C(0,1]$ 并且 $\|x_\xi\| \leq \|\xi\|_\infty$. 根据映射 ϕ 的定义, $\phi(x_\xi) = \xi$. 由此可知 ϕ 是满射, 从而是一一映射. 再由(7.2.8)式可得

$$\|\phi^{-1}(\xi)\| \leq \|\xi\|, \quad \forall \xi \in l^\infty. \tag{7.2.9}$$

综合(7.2.7)(7.2.9)式, 考虑到 ϕ 是一一映射, 可得

$$\|x\| = \|\phi(x)\|_\infty, \quad \forall x \in C(0,1].$$

综上, ϕ 是等距同构映射, l^∞ 与 $C(0,1]$ 等距同构. □

练习 7.17 设 F 是 n 维欧式空间 $\mathbb{R}^n$ 中有界闭集, A 是 F 到自身中的映射, 并且适合下列条件: 对任意 $x, y \in F$ $(x \neq y)$, 有

$$d(Ax, Ay) < d(x, y),$$

证明映射 A 在 F 中存在唯一的不动点.

证明 (存在性) 定义 $\mathbb{R}^n$ 上的函数

$$f(x) = d(Ax, x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

对任意 $x, y \in F$, 由条件可知

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= |d(Ax, x) - d(Ay, y)| \\ &\leq d(Ax, Ay) + d(x, y) \\ &\leq 2d(x, y), \end{aligned}$$

所以 f 是 F 上的 Lipschitz 连续函数. 由于 F 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界闭集, 则连续函数 f 可以在 F 上取到最小值, 即存在 $x_0 \in F$ 使得

$$d(Ax_0, x_0) = f(x_0) = \min_{x \in F} f(x) = \min_{x \in F} d(Ax, x).$$

下证 x_0 是 A 的不动点.

反证法, 假设 $Ax_0 \neq x_0$. 一方面, 由于 $x_0 \in F$, $A : F \to F$, 则 $Ax_0 \in F$, 从而

$$f(Ax_0) \geq \min_{x \in F} f(x) = f(x_0).$$

另一方面, 由条件,

$$f(Ax_0) = d(A(Ax_0), Ax_0) < d(Ax_0, x_0) = f(x_0).$$

矛盾. 所以 x_0 是 A 的不动点.

(唯一性) 设 $x, y \in F$ 满足 $Ax = x$, $Ay = y$. 假设 $x \neq y$, 则由条件,

$$d(x, y) = d(Ax, Ay) < d(x, y),$$

矛盾. 所以 $x = y$, 映射 A 在 F 中的不动点只有一个. □

✍ **练习 7.18** 设 X 为度量空间, A 是 X 到 X 中的映射, 记

$$a_n = \sup_{x \neq x'} \frac{d(A^n x, A^n x')}{d(x, x')}.$$

若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$, 则映射 A 有唯一不动点.

证明 (存在性) 任取 $x_0 \in X$, 作迭代列

$$x_n = Ax_{n-1} = A^n x_0, \quad n \in \mathbb{N}_+.$$

下证 $\{x_n\}$ 是 X 中的 Cauchy 点列.

事实上, 对任意 $n \in \mathbb{N}_+$, $p \in \mathbb{N}$, 都有

$$\begin{aligned} 0 \leq d(x_{n+p}, x_n) &\leq \sum_{k=0}^{p-1} d(x_{n+k+1}, x_{n+k}) \\ &= \sum_{k=0}^{p-1} d\left(A^{n+k} x_1, A^{n+k} x_0\right) \\ &\leq \left(\sum_{k=0}^{p-1} a_{n+k}\right) d(x_1, x_0). \end{aligned}$$

由于 $a_n \ge 0$ 并且 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$, 上式两端令 $p, n \to \infty$, 就可得到

$$d(x_{n+p}, x_n) \to 0, \quad n, p \to \infty.$$

所以 $\{x_n\}$ 是 X 中的 Cauchy 点列. 由于 X 是完备度量空间, 则存在 $x^* \in X$ 使得 $x_n \to x^*$ $(n \to \infty)$.

下证 x^* 是映射 A 的不动点.

事实上, 由条件可知

$$d(Ax, Ax') \le a_1 d(x, x'), \quad \forall x, x' \in X,$$

从而 A 是 X 上的连续映射, 所以

$$Ax^* = A\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = \lim_{n\to\infty} Ax_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x^*.$$

(唯一性) 注意到

$$A^n x^* = Ax^* = x^*, \quad \forall n \in \mathbb{N}_+.$$

由于 $a_n \ge 0$ 并且 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$, 则存在 $n_0 \in \mathbb{N}_+$ 使得 $0 \le a_{n_0} < 1$. 设 $x, x' \in X$ 都是 A 的不动点, 则同样也是 A^{n_0} 的不动点. 假设 $x \ne x'$, 则

$$0 < d(x, x') = d(A^{n_0}x, A^{n_0}x') \le a_{n_0} d(x, x') < d(x, x'),$$

矛盾. 所以 $x = x'$, 映射 A 在空间 X 上的不动点是唯一的. □

✍ **练习 7.19** 设 A 为从度量空间 X 到 X 中映射, 若存在开球 $U(x_0, r)$ $(r > 0)$ 内满足

$$d(Ax, Ax') \le \theta d(x, x'), \quad 0 < \theta < 1,$$

又 A 在闭球 $S(x_0, r) = \{x \mid d(x, x_0) \le r\}$ 上连续, 并且

$$d(x_0, Ax_0) \le \theta(1 - \theta).$$

证明: A 在 $S(x_0, r)$ 中有不动点.

证明

Step 1. 先证

$$A : S(x_0, \theta r) \to S(x_0, \theta r),$$

其中

$$S(x_0, \theta r) = \{x \in X \mid d(x, x_0) \le \theta r\} \subset U(x_0, r) \subset S(x_0, r)$$

事实上, 对任意 $x \in S(x_0, \theta r)$, 由条件可知

$$\begin{aligned} d(Ax, x_0) &\le d(Ax, Ax_0) + d(Ax_0, x_0) \\ &\le \theta d(x, x_0) + \theta(1 - \theta) r \end{aligned}$$

$$\leq \quad \theta^2 r + \theta(1-\theta)r = \theta r,$$

所以 $Ax \in S(x_0, \theta r)$.

Step 2. 由于 X 是完备度量空间, $S(x_0, \theta r)$ 是 X 中的闭集, 则 $S(x_0, \theta r)$ 作为 X 的度量子空间也完备. 将映射 A 限制在完备的度量空间 $S(x_0, \theta r)$ 上, 由 Step 1 可知 $A: S(x_0, \theta r) \to S(x_0, \theta r)$, 由条件可知 A 还是 $S(x_0, \theta r)$ 上的压缩映射. 由压缩映射原理, A 在 $S(x_0, \theta r)$ 上存在唯一的不动点, 从而在 $S(x_0, r)$ 中有不动点(不一定唯一, 在 $S(x_0, r) \setminus S(x_0, \theta r)$ 上也可能有不动点). □

✍ **练习 7.20** 设 $a_{jk}, j, k = 1, 2, \cdots, n$ 为一组实数, 满足

$$\sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij} - \delta_{ij})^2 < 1,$$

其中 δ_{jk} 当 $j = k$ 时为 1, 否则为 0. 证明: 代数方程

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2, \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n & = & b_n \end{cases} \tag{7.2.10}$$

对任何一组固定的 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 必有唯一的解 $x_1, x_2, \cdots, x_n$.

注 设 $\mathbb{R}^n$ 中的范数 (模) 为

$$|x| = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

若 $A = (a_{ij})$ 是一个 $n \times n$ 矩阵, 则 $Ax \in \mathbb{R}^n$. 利用 Cauchy-Schwartz 不等式容易证明

$$|Ax| \leq \left(\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} |x|.$$

证明 Step1. 原方程(7.2.10)可转化为以下方程

$$Ax = b, \tag{7.2.11}$$

其中 $A = (a_{ij})_{n \times n}, x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n, b = (b_1, b_2, \cdots, b_n) \in \mathbb{R}^n$. 进一步, 方程(7.2.11)可以转化为不动点方程

$$Tx = x, \tag{7.2.12}$$

其中映射 $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 满足

$$Tx = b - Ax + x = b - (A - I)x, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

I 是 $n \times n$ 单位矩阵.

Step2. 下证 T 是压缩映射.

任取 $x, y \in \mathbb{R}^n$, 就有

$$\begin{aligned} |Tx - Ty| &= |(A-I)y - (A-I)x| \\ &= |(A-I)(x-y)| \\ &= |\left(a_{ij} - \delta_{ij}\right)(x-y)| \\ &\leq \left(\sum_{i,j=1}^{n} \left(a_{ij} - \delta_{ij}\right)_{n\times n}^2\right)^{\frac{1}{2}} |x-y|. \end{aligned}$$

令

$$\alpha = \left(\sum_{i,j=1}^{n} \left(a_{ij} - \delta_{ij}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

由条件可知 $0 \leq \alpha < 1$, 因此

$$|Tx - Ty| \leq \alpha |x-y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n,$$

T 是压缩映射.

Step3. 由于 $\mathbb{R}$ 是 Banach 空间, 根据压缩映射原理, 不动点方程 $Tx = x$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中存在唯一的不动点, 因此原方程(7.2.10)存在唯一的解. □

练习 7.21 设 $BV[a,b]$ 表示 $[a,b]$ 上右连续的有界变差函数全体, 其线性运算为通常函数空间中的运算. 在 $BV[a,b]$ 中定义范数

$$\|f\| = |f(a)| + \bigvee_a^b(f), \quad f \in BV[a,b].$$

证明 $BV[a,b]$ 是 Banach 空间.

定义 7.2.1. 有界变差函数, P149

设 f 为 $[a,b]$ 上的有限函数. 对 $[a,b]$ 的任何分割

$$T: a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b,$$

称有限和

$$\sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1}|$$

为函数 f 关于分割 T 的变差, 记为 $V(f, T)$.

若

$$\left\{V(f,T) \mid T\text{是}[a,b]\text{的一个分割}\right\}$$

是有界数集, 则称 f 为 $[a,b]$ 上的有界变差函数, 称

$$\sup\left\{V(f,T) \mid T\text{是}[a,b]\text{的一个分割}\right\}$$

为 f 在 $[a,b]$ 上的全变差, 记作 $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)$. ♣

证明 Step1. 不妨设数域 $\mathbb{F}$ 是实数域 $\mathbb{R}$. 任取 $f,g \in BV[a,b]$, $\alpha \in \mathbb{R}$. 容易证明, $f+g$ 在 $[a,b]$ 上右连续, 并且对 $[a,b]$ 的任何一个分割 T, 总有

$$V(f+g,T) \leq V(f,T)+V(g,T) \leq \overset{b}{\underset{a}{V}}(f)+\overset{b}{\underset{a}{V}}(g) < +\infty,$$

从而 $f+g \in BV[a,b]$ 并且

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f+g) \leq \overset{b}{\underset{a}{V}}(f)+\overset{b}{\underset{a}{V}}(g) < +\infty.$$

同样可证 $\alpha f \in BV[a,b]$ 并且

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(\alpha f) = |\alpha|\overset{b}{\underset{a}{V}}(f).$$

因此, $BV[a,b]$ 关于通常函数空间的加法和数乘封闭.

规定 $f=0 \in BV[a,b]$ 当且仅当 $f(t) \equiv 0$, $t \in [a,b]$. 根据线性空间的定义, 易证 $BV[a,b]$ 关于通常函数空间的加法和数乘成为一个线性空间.

Step2. 下证

$$\|f\| = |f(a)|+\overset{b}{\underset{a}{V}}(f), \quad f \in BV[a,b]$$

是线性空间 $BV[a,b]$ 上的范数.

(1) 对任意 $f \in BV[a,b]$, 总有 $0 \leq \overset{b}{\underset{a}{V}} < \infty$, 所以 $\|x\|$ 的定义合理并且 $\|f\| \geq 0$. 若 $f=0 \in BV[a,b]$, 则

$$f(t) \equiv 0, \quad t \in [a,b],$$

从而 $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)=0$, $\|f\| = |f(a)|+\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)=0$.

设 $\|f\|=0$, 则 $f(a)=0$ 并且 $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)=0$. 下证 $f(t)=0$, $\forall t \in [a,b]$.

对任意 $t \in [a,b]$, $[a,b]$ 的任意一个分割 $T=\{a,t_1,t_2,\cdots,T_{n-1},b\}$, 令 $T'=T\cup\{t\}$, 则 T' 也是 $[a,b]$ 的一个分割, 从而

$$0 \leq V(f,T') \leq \overset{b}{\underset{a}{V}}(f)=0.$$

根据变差的定义, 就有

$$f(t)=f(t_1)=f(t_2)=\cdots=f(b)=f(a)=0..$$

综上 $\|\cdot\|$ 满足正定性.

(2) 根据 Step1 中的结果, 对任意 $\alpha \in \mathbb{R}$ 以及任意 $f \in BV[a,b]$ 都有

$$\|\alpha f\| = |\alpha f(a)|+\overset{b}{\underset{a}{V}}(\alpha f) = |\alpha||f(a)|+|\alpha|\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) = |\alpha|\|f\|,$$

所以 $\|\cdot\|$ 满足正齐次性.

(3) 对任意 $f,g\in BV[a,b]$, 总有

$$|f(a)+g(a)|\le|f(a)|+|g(a)|.$$

根据 Step1 的结果, 还有

$$\bigvee_a^b(f+g)\le\bigvee_a^b(f)+\bigvee_a^b(g)<+\infty.$$

从而,

$$\|f+g\|\le\|f\|+\|g\|,$$

$\|\cdot\|$ 满足三角不等式.

综上, $\|\cdot\|$ 是线性空间 $BV[a,b]$ 上的范数, $(BV[a,b],\|\cdot\|)$ 成为赋范线性空间.

Step3. 下证 $(BV[a,b],\|\cdot\|)$ 是 Banach 空间.

(1) 下证对任意 $f\in BV[a,b]$, 都有

$$\sup_{t\in[a,b]}|f(t)|\le\|f\|.$$

对任意 $t\in[a,b]$, 作 $[a,b]$ 的分割 $T=\{a,t,b\}$, 则

$$V(f,T)=|f(t)-f(a)|+|f(b)-f(t)|\le\bigvee_a^b(f),$$

从而

$$|f(t)|\le|f(a)|+)f(t)-f(a)|\le|f(a)|+\bigvee_a^b(f)=\|f\|.$$

由 $t\in[a,b]$ 的任意性可得

$$\sup_{t\in[a,b]}|f(t)|\le\|f\|.$$

(2) 设 $\{f_n\}$ 是 $BV[a,b]$ 中的一列 Cauchy 点列, 则对任意 $\varepsilon>0$, 存在正整数 N 使得

$$\|f_m-f_n\|<\varepsilon,\quad\forall m,n>N,\tag{7.2.13}$$

对任意 $t\in[a,b]$, 有

$$|f_m(t)-f_n(t)|=|(f_m-f_n)(t)|\le\sup_{t\in[a,b]}|(f_m-f_n)(t)|\le\|f_m-f_n\|<\varepsilon,\quad\forall m,n>N,\tag{7.2.14}$$

因此 $\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ 就是 $\mathbb{R}$ 中的 Cauchy 数列, 从而存在 $f(t)\in\mathbb{R}$ 使得

$$f_n(t)\longrightarrow f(t)\in\mathbb{R}\quad(n\to\infty),\quad\forall t\in[a,b],\tag{7.2.15}$$

由此得到函数 $f(t),t\in[a,b]$.

(3) 下证 f 在 $[a,b]$ 上右连续, 即对任意 $t\in[a,b)$, $f(t)=f(t+0)=\lim\limits_{t\to0^+}f(t)$.

在(7.2.14)式中令 $m\to\infty$, 得

$$|f_n(t)-f(t)|\le\varepsilon,\quad \forall t\in[a,b],\quad \forall n>N,$$

从而

$$\sup_{t\in[a,b]}|f_n(t)-f(t)|\le\varepsilon,\quad \forall n>N,$$

所以函数列 $\{f_n\}$ 在闭区间 $[a,b]$ 上一致收敛于 f. 对任意 $n\in BbbN_+$, f_n 都是 $[a,b]$ 上得右连续函数, 根据一致收敛与连续性的关系可知极限函数 f 也在 $[a,b]$ 上右连续 (仿照华师大《数学分析》第 4 版下册 P39-P40 并利用 $\frac{1}{3}\varepsilon$ 法则).

(4) 下证 f 是 $[a,b]$ 上的有界变差函数, 从而 $f\in BV[a,b]$.

由于 $\{f_n\}$ 是 $BV[a,b]$ 中的 Cauchy 点列, 从而 $\{f_n\}$ 在 $BV[a,b]$ 中有界, 存在 $M>0$ 使得

$$\|f_n\|=|f_n(a)|+\overset{b}{\underset{a}{V}}(f_n)\le M,\quad \forall n\in\mathbb{N}_+.$$

作 $[a,b]$ 的任意一个分割

$$T: a=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_{k-1}<t_k=b,$$

则由(7.2.15)式可得

$$\begin{aligned} V(f,T) &= \sum_{i=1}^{k}|f(t_i)-f(t_{i-1})| \\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{k}|f_n(t_i)-f_n(t_{i-1})| \\ &= \lim_{n\to\infty}V(f_n,T) \\ &\le \overline{\lim_{n\to\infty}}\,\overset{b}{\underset{a}{V}}(f_n) \\ &\le M. \end{aligned}$$

由分割 T 的任意性可知

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)\le M<+\infty,$$

所以 $f\in BV[a,b]$.

(5) 由(7.2.15)式可得 $|(f_n-f)(a)|\to 0\ (n\to\infty)$. 下证 $\|f_n-f\|\to 0\ (n\to\infty)$.

对任意 $m,n>N$ 以及 $[a,b]$ 的任意一个分割

$$T: a=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_{k-1}<t_k=b,$$

都有

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{k}|(f_n-f_m)(t_i)-(f_n-f_m)(t_{i-1})|\\
=\ & V(f_n-f_m,T)\\
\leq\ & \bigvee_a^b(f_n-f_m)<\varepsilon,
\end{aligned}$$

上式两端令 $m\to\infty$, 结合(7.2.15)式可得

$$V(f_n-f,T)=\sum_{i=1}^{k}|(f_n-f)(t_i)-(f_n-f)(t_{i-1})|\leq\varepsilon,\quad \forall n>N.$$

由分割 T 的任意性可得

$$\bigvee_a^b(f_n-f)\leq\varepsilon,\forall n>N,$$

于是 $\lim\limits_{n\to\infty}\bigvee_a^b(f_n-f)=0$, 从而

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n-f\|=0.$$

综上, $(BV[a,b],\|\cdot\|)$ 是 Banach 空间.

□

练习 7.22 设 $X_1,X_2,\cdots$ 是一列 Banach 空间,

$$x=\{x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots\}$$

是一列元素, 其中 $x_n\in X_n$, $n=1,2,\cdots$, 并且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\|x_n\|^p<\infty$, 这种元素列的全体记为 X, 类似通常数列的加法和数乘, 在 X 中引入线性运算. 若令

$$\|x\|=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

证明: 当 $p\geq1$ 时, X 是 Banach 空间.

证明

Step 1. 对任意 $x=(x_1,x_2,\cdots)\in X$, $y=(y_1,y_2,\cdots)\in X$ 以及任意数 α,β, 都有

$$\begin{aligned}
&\|\alpha x_x+\beta y_n\|^p\\
\leq\ & (\|\alpha x_n\|+\|\beta y_n\|)^p\\
\leq\ & 2^p\left(|a|^p\|x_n\|^p+|\beta|^p\|y_n\|^p\right),
\end{aligned}$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|\alpha x_n+\beta y_n\|^p\leq 2^p\left(|\alpha|^p\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|^p+|\beta|^p\sum_{n=1}^{\infty}\|y_n\|^p\right)<+\infty,$$

也就是说, $\alpha x+\beta y=(\alpha x_1+\beta y_1,\alpha x_2+\beta y_2,\cdots)\in X$. 易证 X 是线性空间.

Step 2. 设 $p\geq1$.

1°. 对任意 $x=(x_1,x_2,\cdots)\in X$, 显然 $\|x\|=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|^p\right)^{\frac{1}{p}}\geq 0$. 当 $x=0=(0,0,\cdots)$ 时, 有 $\|x\|=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\|0\|^p\right)^{\frac{1}{p}}=0$. 反之, 若 $\|x\|=0$, 则对任意 $n\in\mathbb{N}$, 都有 $x_n=0$, 从而 $x=(0,0,\cdots)=0\in X$.

2°. 对任意 $x=(x_1,x_2,\cdots)\in X$ 以及任意数 α, 都有

$$\|\alpha x_n\|^p=|\alpha|^p\|x_n\|^p,\quad \forall n\in\mathbb{N},$$

从而

$$\begin{aligned}\|\alpha x\|=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\|\alpha x_n\|^p\right)^{\frac{1}{p}}&=\left(|\alpha|^p\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\&=|\alpha|\left(\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|^p\right)^{\frac{1}{p}}=|\alpha|\|x\|.\end{aligned}$$

3°. 对任意 $x=(x_1,x_2,\cdots)\in X$, $y=(y_1,y_2,\cdots)\in X$, 由空间 X_n 上范数的三角不等式可得

$$\|x_n+y_n\|\leq\|x_n\|+\|y_n\|,\quad \forall n\in\mathbb{N}.$$

根据级数形式的 Minkowski 不等式, 就有

$$\begin{aligned}\|x+y\|=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n+y_n\|^p\right)^{\frac{1}{p}}&\leq\left(\sum_{n=1}^{\infty}(\|x_n\|+\|y_n\|)^p\right)^{\frac{1}{p}}\\&\leq\left(\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{n=1}^{\infty}\|y_n\|^p\right)^{\frac{1}{p}}=\|x\|+\|y\|.\end{aligned}$$

综上, 当 $p\geq 1$ 时, $\|\cdot\|$ 就是线性空间 X 上的范数, X 是赋范线性空间.

Step 3. 设 $\{x^m\}$ 是 X 中的 Cauchy 点列, 其中

$$x^m=\left(x_1^{(m)},x_2^{(m)},\cdots\right).$$

则对任意 $\epsilon>0$, 存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得对 $m,n>N$ 以及任意指标 i, 都有

$$\left\|x_i^{(m)}-x_i^{(n)}\right\|\leq\left(\sum_{i=1}^{\infty}\|x_i^{(m)}-x_i^{(n)}\|^p\right)^{\frac{1}{p}}=\|x^m-x^n\|<\epsilon,\tag{7.2.16}$$

则 $\left\{x_i^{(m)}\right\}_{i=1}^{\infty}$ 也是 Banach 空间 X_i 中的 Cauchy 点列, 于是, 存在 $x_i\in X_i$ 使得

$$\xi_i=\lim_{m\to\infty}x_i^{(m)}.$$

令 $\xi=(\xi_1,\xi_2,\cdots)$, 下证 $\xi\in X$ 并且 $\|x^m-\xi\|\to 0\ (m\to\infty)$.

由于 $\{x^m\}$ 是 X 中的 Cauchy 点列, 则 $\{x^m\}$ 在 X 中有界, 即存在 $M>0$, 使得对任

意 $n \in \mathbb{N}_+$ 都有 $\|x^m\| \le M$. 于是, 对任意指标 $k \in \mathbb{N}$ 都有

$$\left(\sum_{i=1}^{k}\left\|x_i^{(m)}\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{i=1}^{\infty}\left\|x_i^{(m)}\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|x^m\| \le M.$$

在上式两端令 $m \to \infty$, 得

$$\left(\sum_{i=1}^{k}\left\|\xi_i^{(m)}\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le M.$$

再由 k 的任意性, 可知

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left\|\xi_i^{(m)}\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le M < +\infty,$$

所以 $\xi = (\xi_1, \xi_2, \cdots) \in X$.

当 $m, n > N$ 时, 由(7.2.16)式得

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty}\|x_i^{(m)} - x_i^{(n)}\|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \epsilon,$$

在上式中令 $n \to \infty$, 得

$$\|x^m - \xi\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty}\|x_i^{(m)} - \xi_i\|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \epsilon.$$

所以 $\|x^m - \xi\| \to 0\ (m \to \infty)$.

综上, X 是 Banach 空间. □

✍ **练习 7.23** 设 X 为赋范线性空间, $X \times X$ 为两个 X 的笛卡尔乘积空间, 对每个 $(x, y) \in X \times X$, 定义

$$\|(x, y)\| = \sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2},$$

则 $X \times X$ 成为赋范线性空间. 证明 $X \times X$ 到 X 的映射 $(x, y) \mapsto x + y$ 是连续映射.

证明 设 $\{(x_n, y_n)\} \subset X \times X$, $(x, y) \in X \times X$ 并且

$$\|(x_n, y_n) - (x, y)\| \to 0 \quad (n \to \infty).$$

由于 $(x_n, y_n) - (x, y) = (x_n - x, y_n - y)$, 则

$$0 \le \|x_n - x\| \le \sqrt{\|x_n - x\|^2 + \|y_n - y\|^2} = \|(x_n, y_n) - (x, y)\|,$$

$$0 \le \|y_n - y\| \le \sqrt{\|x_n - x\|^2 + \|y_n - y\|^2} = \|(x_n, y_n) - (x, y)\|.$$

由数列极限的追敛性可知

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n - x\| = 0 = \lim_{n\to\infty}\|y_n - y\|.$$

另一方面, 由于

$$0 \le \|(x_n + y_n) - (x + y)\| = \|(x_n - x) + (y_n - y)\| \le \|x_n - x\| + \|y_n - y\|,$$

由数列极限的追敛性可知

$$\|(x_n + y_n) - (x + y)\| \to 0 \quad (n \to \infty),$$

即

$$x_n + y_n \to x + y \quad (n \to \infty).$$

所以 $X \times X$ 到 X 的映射:$(x, y) \mapsto x + y$ 是连续映射. □

练习 7.24 设 Λ 是实 (复) 数域, X 为赋范线性空间, 对每个 $(\alpha, x) \in \Lambda \times X$, 定义

$$\|(\alpha, x)\| = \sqrt{|\alpha|^2 + \|x\|^2},$$

则 $(\alpha, x) \mapsto \alpha x$ 是 $\Lambda \times X$ 到 X 中的连续映射.

证明

设 $\{(\alpha_n, x_n)\} \subset \Lambda \times X$, $(\alpha, x) \in \Lambda \times X$ 并且

$$\|(\alpha_n . x_n) - (\alpha, x)\| \to 0 \quad (n \to \infty).$$

与 23 题的证明类似, 可以得到

$$\lim_{n\to\infty}|\alpha_n - \alpha| = 0 = \lim_{n\to\infty}\|x_n - x\|.$$

另一方面, 由于

$$\begin{aligned}
0 &\le \|\alpha_n x_n - \alpha x\| \\
&= \|\alpha_n x_n - \alpha x_n + \alpha x_n - \alpha x\| \\
&\le \|\alpha_n x_n - \alpha x_n\| + \|\alpha x_n - \alpha x\| \\
&= |\alpha_n - \alpha|\|x_n\| + |\alpha|\|x_n - x\|,
\end{aligned}$$

注意到 $\|x_n\|$ 是有界量, 则由数列极限的追敛性, 就有

$$\|\alpha_n x_n - \alpha x\| \to 0 \quad (n \to \infty),$$

即
$$\alpha_n x_n \to \alpha x \quad (n \to \infty).$$
所以 $\Lambda \times X$ 到 X 的映射:$(\alpha, x) \mapsto \alpha x$ 是连续映射. □

练习 7.25 设 C 为一切收敛数列所组成的空间, 其中的线性运算与通常序列空间相同. 在 C 中令
$$\|x\| = \sup_i |\xi_i|, \quad x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, \cdots) \in C,$$
证明 C 是可分的 Banach 空间.

证明 Step1. 设 $0 \in C$ 当且仅当
$$0 = (0, 0, \cdots, 0, \cdots).$$
易证 C 按常序列空间的加法和数乘成为线性空间. 并且
$$\|x\| = \sup_i |\xi_i|, \quad x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, \cdots) \in C$$
是空间 C 上的范数. 根据教材 P194, 收敛数列空间 C 按范数 $\|\cdot\|$ 导出的距离是完备的, 因此 $(C, \|\cdot\|)$ 是 Banach 空间.

Step2. 下证 C 是可分空间.

令
$$E = \{x \in C \mid x = (r_1, r_2, \cdots, r_n, \cdots),\ r_i \in \mathbb{Q},\ \forall i \in \mathbb{N}_+\},$$
则 E 是 C 的可数子集.

任取 $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, \cdots) \in C$. 对任意 $\varepsilon > 0$, 任意 $i \in \mathbb{N}_+$, 存在有理数 $r_i \in \mathbb{Q}$, 使得
$$|\xi_i - r_i| < \frac{1}{2^i}\varepsilon.$$
对任意 $i, j \in \mathbb{N}_+$, 都有
$$|r_i - r_j| \le |r_i - \xi_i| + |\xi_i - \xi_j| + |\xi_j - r_j| \le \frac{1}{2^i}\varepsilon + |\xi_i - \xi_j| + \frac{1}{2^j}\varepsilon. \tag{7.2.17}$$
由于 $\{\xi_n\}$ 是收敛数列, 从而是 Cauchy 数列, 存在正整数 N, 使得对任意 $i, j > N$ 都有
$$|\xi_i - \xi_j| < \frac{1}{2}\varepsilon.$$
根据(7.2.17)式, 对任意 $i, j > N$, 就有
$$|r_i - r_j| < \frac{1}{2^i}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2^j}\varepsilon < \varepsilon,$$

于是 $\{r_n\}$ 是 Cauchy 数列, 从而是收敛数列. 令 $y = (r_1, r_2, \cdots, r_n, \cdots)$, 则 $y \in E$ 并且

$$\|x - y\| = \sup_i |\xi_i - r_i| \le \sup_i \frac{1}{2^i}\varepsilon < \varepsilon.$$

所以 E 是 C 的可数稠密子集, C 是可分的 Banach 空间.

$\square$

第 8 章 有界线性算子和连续线性泛函

第 9 章 内积空间和 Hilbert 空间

第 10 章 Banach 空间中的基本定理

第 11 章 线性算子的谱

第 12 章 补充专题