# 泛函分析作业

## 1 第 1 周

**定义 1.1 (等价距离).** 设集合 $X$ 上有两种距离：$d_1, d_2$. 如果 $X$ 中按距离 $d_1$ 收敛的点列 $\{x_n\}$ 都在距离 $d_2$ 下收敛于同一点, 并且按距离 $d_2$ 收敛的点列 $\{x_n\}$ 都在距离 $d_1$ 下收敛于同一点, 即

$$d_1(x_n, x) \to 0 \Longleftrightarrow d_2(x_n, x) \to 0,$$

则称距离 $d_1$ 和 $d_2$ 等价.

**问题 1.1.** 设 $d(x,y)$ 是集合 $X$ 上的距离, 令

$$\tilde{d}(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}.$$

证明: $\tilde{d}(x,y)$ 也是 $X$ 上的距离, 并且 $\tilde{d}$ 与 $d$ 等价.

**证明** 显然, 对任意 $x, y \in X$,

$$\tilde{d}(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} \in \mathbb{R}.$$

(i) 由距离 $d(x,y)$ 的正定性可知 $\tilde{d}(x,y) \geq 0$, 并且 $\tilde{d}(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} = 0$ 等价于 $d(x,y) = 0$, 进而等价于 $x = y$.

(ii) 由距离 $d(x,y)$ 的三点不等式可知，对任意 $x, y, z \in X$, 总有

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(y,z),$$

从而, 根据函数

$$f(t) = \frac{t}{1+t}, \quad t \in [0, +\infty)$$

的单调递增性, 就有

$$\begin{aligned}\tilde{d}(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} &\leq \frac{d(x,z)+d(y,z)}{1+d(x,z)+d(y,z)} \\ &= \frac{d(x,z)}{1+d(x,z)+d(y,z)} + \frac{d(y,z)}{1+d(x,z)+d(y,z)} \\ &\leq \frac{d(x,z)}{1+d(x,z)} + \frac{d(y,z)}{1+d(y,z)} \\ &= \tilde{d}(x,z) + \tilde{d}(y,z).\end{aligned}$$

综上, $\tilde{d}(x,y)$ 也是空间 $X$ 上的距离.

注意到

$$0 \leq \tilde{d}(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} < 1,$$

于是

$$d(x,y)=\frac{\tilde{d}(x,y)}{1-\tilde{d}(x,y)}. \tag{1.1}$$

若点列 $\{x_n\}\subset X$ 和点 $x\in X$ 满足

$$d(x_n,x)\to 0\quad (n\to\infty),$$

则根据数列极限的四则运算法则, 就有

$$\tilde{d}(x_n,x)=\frac{d(x_n,x)}{1+d(x_n,x)}\to 0\quad (n\to\infty).$$

若点列 $\{x_n\}\subset X$ 和点 $x\in X$ 满足

$$\tilde{d}(x_n,x)\to 0\quad (n\to\infty),$$

同样根据 (1.1) 式以及数列极限的四则运算法则, 就有

$$d(x_n,x)=\frac{\tilde{d}(x_n,x)}{1-\tilde{d}(x_n,x)}\to 0\quad (n\to\infty).$$

所以距离 $d$ 和 $\tilde{d}$ 等价. □

**注 1.1.** 上述距离空间 $(X,\tilde{d})$ 中任何两点的距离都小于 1, 从而任何子集都是有界集. 上述结论说明, 任何距离空间上 $(X,d)$ 上都能够找到与 $d$ 等价的" 有界" 距离 $\tilde{d}$.

**问题 1.2.** 在 $\mathbb{R}^N$ 中可定义两种距离:

$$d_1(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{N}|\xi_i-\eta_i|^2},$$

$$d_2(x,y)=\max_{1\le i\le N}|\xi_i-\eta_i|\,,$$

其中 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_N)\in\mathbb{R}^N$, $y=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_N)\in\mathbb{R}^N$. 证明: $d_1$ 和 $d_2$ 等价.

**证明** 对任意 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_N)\in\mathbb{R}^N$, $y=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_N)\in\mathbb{R}^N$, 都有

$$\max_{1\le i\le N}|\xi_i-\eta_i|^2\le\sum_{i=1}^{N}|\xi_i-\eta_i|^2\le N\max_{1\le i\le N}|\xi_i-\eta_i|^2,$$

从而

$$\max_{1\le i\le N}|\xi_i-\eta_i|\le\sqrt{\sum_{i=1}^{N}|\xi_i-\eta_i|^2}\le\sqrt{N}\max_{1\le i\le N}|\xi_i-\eta_i|,$$

即

$$d_2(x,y)\le d_1(x,y)\le\sqrt{N}d_2(x,y).$$

若点列 $\{x_n\}\subset\mathbb{R}^N$ 和点 $x\in\mathbb{R}^N$ 满足

$$d_1(x_n,x)\to 0\quad (n\to\infty),$$

由 (1) 式的前半部分以及数列极限的迫敛性可知

$$d_2(x_n, x) \to 0 \quad (n \to \infty).$$

若点列 $\{x_n\} \subset \mathbb{R}^N$ 和点 $x \in \mathbb{R}^N$ 满足

$$d_2(x_n, x) \to 0 \quad (n \to \infty),$$

由 (1) 式的后半部分以及数列极限的迫敛性可知

$$d_1(x_n, x) \to 0 \quad (n \to \infty).$$

综上, $d_1$ 和 $d_2$ 等价. □

**注 1.2.** 若距离空间 $X$ 上的两种距离 $d_1$ 和 $d_2$ 满足

$$C_1 d_1(x, y) \le d_2(x, y) \le C_2 d_1(x, y), \quad \forall x, y \in X,$$

其中 $C_1, C_2 > 0$ 是正的常数, 则 $d_1$ 与 $d_2$ 一定等价.