2019-2020 学年第 1 学期

# 泛函分析作业

## 目录



## 第 1 周

**定义 1.1. 等价距离**

设集合 $X$ 上有两种距离：$d_1$, $d_2$. 如果 $X$ 中按距离 $d_1$ 收敛的点列 $\{x_n\}$ 都在距离 $d_2$ 下收敛于同一点, 并且按距离 $d_2$ 收敛的点列 $\{x_n\}$ 都在距离 $d_1$ 下收敛于同一点, 即

$$d_1(x_n, x) \to 0 \Longleftrightarrow d_2(x_n, x) \to 0,$$

则称距离 $d_1$ 和 $d_2$ 等价. ♣

**作业题 1.1** 设 $d(x,y)$ 是集合 $X$ 上的距离, 令

$$\tilde{d}(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}.$$

证明: $\tilde{d}(x,y)$ 也是 $X$ 上的距离, 并且 $\tilde{d}$ 与 $d$ 等价.

**证明** 显然, 对任意 $x, y \in X$,

$$\tilde{d}(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} \in \mathbb{R}.$$

(i) 由距离 $d(x,y)$ 的正定性可知 $\tilde{d}(x,y) \geq 0$, 并且 $\tilde{d}(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} = 0$ 等价于 $d(x,y) = 0$, 进而等价于 $x = y$.

(ii) 由距离 $d(x,y)$ 的三点不等式可知，对任意 $x, y, z \in X$, 总有

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(y,z),$$

从而, 根据函数

$$f(t) = \frac{t}{1+t}, \quad t \in [0, +\infty)$$

的单调递增性, 就有

$$\begin{aligned}\tilde{d}(x,y)=\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} &\le \frac{d(x,z)+d(y,z)}{1+d(x,z)+d(y,z)}\\ &= \frac{d(x,z)}{1+d(x,z)+d(y,z)}+\frac{d(y,z)}{1+d(x,z)+d(y,z)}\\ &\le \frac{d(x,z)}{1+d(x,z)}+\frac{d(y,z)}{1+d(y,z)}\\ &= \tilde{d}(x,z)+\tilde{d}(y,z).\end{aligned}$$

综上, $\tilde{d}(x,y)$ 也是空间 $X$ 上的距离.

注意到

$$0\le \tilde{d}(x,y)=\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}<1,$$

于是

$$d(x,y)=\frac{\tilde{d}(x,y)}{1-\tilde{d}(x,y)}. \tag{1.1}$$

若点列 $\{x_n\}\subset X$ 和点 $x\in X$ 满足

$$d(x_n,x)\to 0 \quad (n\to\infty),$$

则根据数列极限的四则运算法则, 就有

$$\tilde{d}(x_n,x)=\frac{d(x_n,x)}{1+d(x_n,x)}\to 0 \quad (n\to\infty).$$

若点列 $\{x_n\}\subset X$ 和点 $x\in X$ 满足

$$\tilde{d}(x_n,x)\to 0 \quad (n\to\infty),$$

同样根据 (1.1) 式以及数列极限的四则运算法则, 就有

$$d(x_n,x)=\frac{\tilde{d}(x_n,x)}{1-\tilde{d}(x_n,x)}\to 0 \quad (n\to\infty).$$

所以距离 $d$ 和 $\tilde{d}$ 等价. □

**注** 上述距离空间 $(X,\tilde{d})$ 中任何两点的距离都小于 1, 从而任何子集都是有界集. 上述结论说明, 任何距离空间上 $(X,d)$ 上都能够找到与 $d$ 等价的" 有界" 距离 $\tilde{d}$.

**作业题 1.2** 在 $\mathbb{R}^N$ 中可定义两种距离:

$$\begin{aligned} d_1(x,y) &= \sqrt{\sum_{i=1}^{N}|\xi_i-\eta_i|^2},\\ d_2(x,y) &= \max_{1\le i\le N}|\xi_i-\eta_i|, \end{aligned}$$

其中 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_N)\in\mathbb{R}^N$, $y=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_N)\in\mathbb{R}^N$. 证明: $d_1$ 和 $d_2$ 等价.

**证明** 对任意 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_N)\in\mathbb{R}^N$, $y=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_N)\in\mathbb{R}^N$, 都有

$$\max_{1\le i\le N}|\xi_i-\eta_i|^2\le\sum_{i=1}^{N}|\xi_i-\eta_i|^2\le N\max_{1\le i\le N}|\xi_i-\eta_i|^2,$$

从而

$$\max_{1\le i\le N}|\xi_i-\eta_i|\le\sqrt{\sum_{i=1}^{N}|\xi_i-\eta_i|^2}\le\sqrt{N}\max_{1\le i\le N}|\xi_i-\eta_i|,$$

即

$$d_2(x,y) \le d_1(x,y) \le \sqrt{N} d_2(x,y).$$

若点列 $\{x_n\} \subset \mathbb{R}^N$ 和点 $x \in \mathbb{R}^N$ 满足

$$d_1(x_n, x) \to 0 \quad (n \to \infty),$$

由 (1) 式的前半部分以及数列极限的迫敛性可知

$$d_2(x_n, x) \to 0 \quad (n \to \infty).$$

若点列 $\{x_n\} \subset \mathbb{R}^N$ 和点 $x \in \mathbb{R}^N$ 满足

$$d_2(x_n, x) \to 0 \quad (n \to \infty),$$

由 (1) 式的后半部分以及数列极限的迫敛性可知

$$d_1(x_n, x) \to 0 \quad (n \to \infty).$$

综上, $d_1$ 和 $d_2$ 等价. □

注 若距离空间 $X$ 上的两种距离 $d_1$ 和 $d_2$ 满足

$$C_1 d_1(x,y) \le d_2(x,y) \le C_2 d_1(x,y), \quad \forall x, y \in X,$$

其中 $C_1$, $C_2 > 0$ 是正的常数, 则 $d_1$ 与 $d_2$ 一定等价.

# 第 2 周

**作业题 2.1** 设 $P_r[a,b]$ 是定义在闭区间 $[a,b]$ 上的所有**有理系数多项式函数**的全体. 显然, $(P_r[a,b], d)$ 是连续函数空间 $(C[a,b], d)$ 的距离子空间, 其中

$$d(f,g) = \max_{t\in[a,b]} |f(t) - g(t)|, \quad \forall f, g \in C[a,b].$$

证明: $P_r[a,b]$ 是 $C[a,b]$ 的可数稠密子集, 从而 $C[a,b]$ 可分.

**证明**

Step1. 对任意 $n \in \mathbb{N}$, 设 $P_r^n[a,b]$ 是定义在 $[a,b]$ 上的所有**有理系数** $n$ **次多项式函数**的全体, 则 $P_r^n[a,b]$ 是可数集. 由于

$$P_r[a,b] = \bigcup_{n=0}^{\infty} P_r^n[a,b],$$

则 $P_r[a,b]$ 也是可数集.

Step2. 下证 $P_r[a,b]$ 按距离 $d$ 在 $P[a,b]$ 中稠密.

任取 $h \in P[a,b]$,

$$h(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n, \quad t \in [a,b],$$

其中 $a_0, a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. 令

$$M = \max_{1\le k\le n} \max_{t\in[a,b]} |t|^k > 0.$$

根据有理数集 $\mathbb{Q}$ 在实数集 $\mathbb{R}$ 中的稠密性, 对任意 $\epsilon > 0$, 存在 $q_0, q_1, \cdots, q_n \in \mathbb{Q}$ 使得

$$|a_0 - q_0| < \frac{1}{n+1}\epsilon, \quad |a_1 - q_1| < \frac{1}{(n+1)M}\epsilon, \quad \cdots, \quad |a_n - q_n| < \frac{1}{(n+1)M}\epsilon.$$

令

$$g(t)=q_0+q_1t+\cdots+q_nt^n,\quad t\in[a,b],$$

则 $g\in P_r[a,b]$, 并且对任意 $t\in[a,b]$ 都有

$$\begin{aligned}&|h(t)-g(t)|\\ \le\ & |a_0-q_0|+|a_1-q_1|\cdot|t|+\cdots+|a_n-q_n|\cdot|t|^n\\ \le\ & |a_0-q_0|+|a_1-q_1|M+\cdots+|a_n-q_n|M\\ <\ & \epsilon,\end{aligned}$$

从而

$$\max_{t\in[a,b]}|h(t)-g(t)|<\epsilon.$$

综上, 对任意 $h\in P[a,b]$ 以及任意 $\epsilon>0$, 存在 $g\in P_r[a,b]$ 使得

$$d(h,g)=\max_{t\in[a,b]}|h(t)-g(t)|<\epsilon,$$

所以 $P_r[a,b]$ 按距离 $d$ 在 $P[a,b]$ 中稠密.

Step3. 根据 Weierstrauss 逼近定理, $P[a,b]$ 按距离 $d$ 在 $C[a,b]$ 中稠密, 则对任意 $\epsilon>0$ 以及任意 $f\in C[a,b]$, 存在 $h\in P[a,b]$ 使得

$$d(f,h)<\frac{1}{2}\epsilon.$$

由 Step2 可知, 存在 $g\in P_r[a,b]$ 使得

$$d(h,g)<\frac{1}{2}\epsilon,$$

从而 $d(f,g)\le d(f,h)+d(h,g)<\epsilon$.

综上, $P_r[a,b]$ 是 $C[a,b]$ 的可数稠密子集, 从而 $C[a,b]$ 可分. □

**作业题 2.2** 按以下步骤证明

**定理 2.1. Riemann-Lebesgue 引理**

$f\in L[a,b]$, 对应的 Fourier 系数为

$$a_n=\int_a^b f(x)\sin nx\mathrm{d}x,\quad b_n=\int_a^b f(x)\cos nx\mathrm{d}x,\quad n\in\mathbb{N},$$

则 $a_n,b_n\to 0\quad(n\to\infty)$.

Step1 若 $f$ 是 $[a,b]$ 上的简单函数 (P80 定义 3), 证明上述结论成立.

Step2 设 $S[a,b]$ 是定义在闭区间 $[a,b]$ 上的简单函数的全体. 显然, $S[a,b]$ 是 $L[a,b]$ 的距离子空间, 其中距离

$$d(f,g)=\int_a^b|f(t)-g(t)|\mathrm{d}t,\quad \forall f,g\in L[a,b].$$

证明: $S[a,b]$ 是 $L[a,b]$ 的稠密子集.

Step3 利用稠密性, 证明 Riemann-Lebesgue 引理成立.

**证明**

Step0. 设 $h$ 是 $[a,b]$ 上的一个阶梯函数,

$$h(x)=\begin{cases} c_1, & x\in(a_1,b_1),\\ c_2, & x\in(a_2,b_2),\\ \cdots & \cdots\\ c_k, & x\in(a_k,b_k),\\ 0, & x\in[a,b]\setminus\cup_{i=1}^{k}(a_i,b_i),\end{cases}$$

其中 $c_1,c_2,\cdots,c_k$ 为常数, $(a_1,b_1),\cdots,(a_k,b_k)$ 是 $[a,b]$ 中互不相交的非空开子区间. 于是,

$$\begin{aligned}&\int_a^b h(x)\sin nx dx\\ =&\sum_{i=1}^{k}c_i\int_{a_i}^{b_i}\sin nx dx\\ =&\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}c_i(\cos na_i-\cos nb_i)\\ \to&0\quad(n\to\infty).\end{aligned}$$

同理可证

$$\int_a^b h(x)\cos nx dx\to 0\quad(n\to\infty).$$

Step1. 设 $E$ 是 $[a,b]$ 中的可测子集, $\chi$ 是 $E$ 的特征函数, 即

$$\chi(x)=\begin{cases}1, & x\in E,\\ 0, & x\in[a,b]\setminus E,\end{cases}$$

下证

$$\int_a^b \chi(x)\sin nx dx\to 0\quad(n\to\infty).$$

令 $\tilde{E}=E\cap(a,b)$, 则 $\tilde{E}$ 也可测并且 $m(E\setminus\tilde{E})=0$. 对任意 $\epsilon>0$, 存在开集 $G\subset[a,b]$ 使得 $\tilde{E}\subset G$ 并且

$$m(G\setminus\tilde{E})<\frac{1}{2}\epsilon.$$

另一方面, 根据 $\mathbb{R}^1$ 中开集的构造定理 (P44), $G$ 可表为

$$G=\bigcup_{i=1}^{\infty}O_i,$$

其中 $O_i=(a_i,b_i)$ 是 $G$ 的构成区间, 从而

$$\sum_{i=1}^{\infty}(b_i-a_i)=mG\le b-a<+\infty.$$

于是, 对上述 $\epsilon>0$, 存在 $N\in\mathbb{N}_+$ 使得

$$\sum_{i=N+1}^{\infty}(b_i-a_i)<\frac{1}{2}\epsilon.$$

令 $V=\cup_{i=1}^{N}(a_i,b_i)$, 并定义阶梯函数

$$h(x)=\begin{cases}1, & x\in V,\\ 0, & x\in[a,b]\setminus V,\end{cases}$$

则

$$\begin{aligned}
&\int_a^b |\chi(x)-h(x)|dx\\
=&\left(\int_{E\setminus V}+\int_{V\setminus E}+\int_{[a,b]\setminus(E\cup V)}\right)|\chi(x)-h(x)|dx\\
=&\left(\int_{\tilde{E}\setminus V}+\int_{V\setminus \tilde{E}}+\int_{[a,b]\setminus(\tilde{E}\cup V)}\right)|\chi(x)-h(x)|dx\\
=&\int_{\tilde{E}\setminus V}|1-0|dx+\int_{V\setminus\tilde{E}}|0-1|dx+\int_{[a,b]\setminus(\tilde{E}\cup V)}|0-0|dx\\
=&m(\tilde{E}\setminus V)+m(V\setminus\tilde{E})\\
\le&m(G\setminus V)+m(G\setminus\tilde{E})\\
<&\frac{1}{2}\epsilon+\frac{1}{2}\epsilon=\epsilon,
\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}
0\le&\left|\int_a^b\chi(x)\sin nxdx\right|\\
\le&\left|\int_a^b(\chi(x)-h(x))\sin nxdx\right|+\left|\int_a^b h(x)\sin nxdx\right|\\
\le&\int_a^b|\chi(x)-h(x)|\,|\sin nx|dx+\left|\int_a^b h(x)\sin nxdx\right|\\
\le&\int_a^b|\chi(x)-h(x)|\,dx+\left|\int_a^b h(x)\sin nxdx\right|\\
<&\epsilon+\left|\int_a^b h(x)\sin nxdx\right|.
\end{aligned}$$

由于 $h$ 是阶梯函数, 综合 Step0, 数列极限的迫敛性以及 $\epsilon>0$ 的任意性, 可得

$$\int_a^b\chi(x)\sin nxdx\to 0\quad(n\to\infty).$$

设 $f$ 是 $[a,b]$ 上的简单函数,

$$f(x)=\sum_{i=1}^k c_i\chi_i(x),$$

其中

(i) $[a,b]=\cup_{i=1}^k E_i$, $E_1,E_2,\cdots,E_k$ 是 $[a,b]$ 中互不相交的可测子集;

(ii) $c_1,c_2,\cdots,c_k$ 是非负常数;

(iii) $\chi_i(x)$ 是 $E_i$ 的特征函数, 即

$$\chi_i(x)=\begin{cases}1, & x\in E_i,\\ 0, & x\in[a,b]\setminus E_i.\end{cases}$$

由前面的结论可知

$$\int_a^b f(x)\sin nxdx=\sum_{i=1}^k c_i\int_a^b\chi_i(x)\sin nxdx\to 0\quad(n\to\infty).$$

同理可证

$$\int_a^b f(x)\cos nxdx\to 0\quad(n\to\infty).$$

Step2. (P118) 设 $f \in L[a,b]$, 则 $f^+$ 和 $f^-$ 也是 $[a,b]$ 上的非负 L 可积函数, 从而, 根据非负可测函数 L 积分的定义 (P102, 定义 1), 对任意 $\epsilon > 0$, 存在 $[a,b]$ 上的简单函数 $\phi_1$, $\phi_2$, 使得

$$0 \le \phi_1(x) \le f^+(x), \quad 0 \le \phi_2(x) \le f^-(x), \quad \forall x \in [a,b],$$

并且

$$\int_a^b f^+(x)dx - \frac{\epsilon}{2} \le \int_a^b \phi_1(x)dx \le \int_a^b f^+(x)dx,$$
$$\int_a^b f^-(x)dx - \frac{\epsilon}{2} \le \int_a^b \phi_2(x)dx \le \int_a^b f^-(x)dx.$$

令 $\phi(x) = \phi_1(x) - \phi_2(x)$, 则 $\phi$ 也是 $[a,b]$ 上的简单函数, 并且

$$\begin{aligned} d(f,\phi) &= \int_a^b |f(x) - \phi(x)|dx \\ &= \int_a^b |f^+(x) - f^-(x) - \phi_1(x) + \phi_2(x)|dx \\ &\le \int_a^b |f^+(x) - \phi_1(x)|dx + \int_a^b |f^-(x) - \phi_2(x)|dx \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

综上, $S[a,b]$ 是 $L[a,b]$ 的稠密子集.

Step3. 由 Step2, 对任意 $f \in L[a,b]$ 以及任意 $\epsilon > 0$, 存在 $g \in S[a,b]$, 使得

$$d(f,g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx < \epsilon,$$

从而

$$\begin{aligned} 0 &\le \left| \int_a^b f(x) \sin nx dx \right| \\ &\le \left| \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big) \sin nx dx \right| + \left| \int_a^b g(x) \sin nx dx \right| \\ &\le \int_a^b |f(x) - g(x)|\, |\sin nx| dx + \left| \int_a^b g(x) \sin nx dx \right| \\ &\le \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx + \left| \int_a^b g(x) \sin nx dx \right| \\ &< \epsilon + \left| \int_a^b g(x) \sin nx dx \right|. \end{aligned}$$

另一方面, 根据 Step1, 就有

$$\int_a^b g(x) \sin nx dx \to 0 \quad (n \to \infty).$$

综上, 由以上两式, 结合数列极限的迫敛性以及 $\epsilon > 0$ 的任意性, 可得

$$\int_a^b f(x) \sin nx dx \to 0 \quad (n \to \infty).$$

同理可证

$$\int_a^b f(x) \cos nx dx \to 0 \quad (n \to \infty).$$

□

# 第 3 周

**作业题 3.1** 设 $(X,d)$ 是度量空间, $\{x_n\}$ 是 $(X,d)$ 中的 Cauchy 点列, 证明: $\{x_n\}$ 收敛当且仅当 $\{x_n\}$ 存在收敛子列.

**证明** 必要性是显然的.

下证充分性. 设 Cauchy 点列 $\{x_n\}$ 存在收敛子列 $\{x_{n_k}\}$ 使得 $x_{n_k}\to x\ (k\to\infty)$. 任取 $\epsilon>0$. 一方面, 由于 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 点列, 则存在 $N=N(\epsilon)\in\mathbb{N}_+$, 使得

$$d(x_n,x_m)<\frac{1}{2}\epsilon,\quad \forall m,n>N. \tag{3.1}$$

另一方面, 由于 $x_{n_k}\to x\ (k\to\infty)$, 则存在 $K=K(\epsilon)\in\mathbb{N}_+$ 使得

$$n_k>N\quad \text{并且}\quad d(x_{n_k},x)<\frac{1}{2}\epsilon,\quad \forall k>K. \tag{3.2}$$

综上, 由 (3.1)-(3.2) 式, 对任意 $n>N$, 取 $k=K+1$, 就有

$$d(x_n,x)\le d(x_n,x_{n_k})+d(x_{n_k},x)<\frac{1}{2}\epsilon+\frac{1}{2}\epsilon=\epsilon,$$

所以 $x_n\to x\ (n\to\infty)$. □

**作业题 3.2** 设 $f$ 是度量空间 $(X,d)$ 到 $\mathbb{R}$ 的连续映射, $M$ 是 $X$ 中的紧集, 证明: 连续映射 $f$ 在紧集 $M$ 上能够取到最值, 即存在 $x_0,x_1\in M$ 使得

$$f(x_0)=\min_{x\in M}f(x),\quad f(x_1)=\max_{x\in M}f(x).$$

**证明** Step1. 设

$$l=\inf_{x\in M}f(x).$$

下证 $l\in\mathbb{R}$.

反证法, 假设 $l=-\infty$, 则对任意 $n\in\mathbb{N}_+$, 存在 $x_n\in M$ 使得

$$f(x_n)<-n,$$

于是

$$f(x_n)\to-\infty\quad (n\to\infty). \tag{3.3}$$

另一方面, 由于 $\{x_n\}\subset M$ 并且 $M$ 是紧集, 则存在 $\{x_n\}$ 的子列 $\{x_{n_k}\}$ 以及 $x\in M$ 使得

$$x_{n_k}\to x\quad (k\to\infty).$$

根据映射 $f$ 的连续性, 就有

$$f(x_{n_k})\to f(x)\in\mathbb{R}\quad (k\to\infty).$$

这与 (3.3) 式矛盾. 所以 $l\in\mathbb{R}$.

Step2. 根据下确界的定义, 存在 $\{x_n\}\subset M$(称为极小化序列) 使得

$$f(x_n)\to l\quad (n\to\infty).$$

由于 $M$ 是紧集, 则存在 $\{x_n\}$ 的子列 $\{x_{n_k}\}$ 以及 $x\in M$ 使得

$$x_{n_k}\to x\quad (k\to\infty).$$

根据映射 $f$ 的连续性, 就有

$$\inf_{x\in M} f(x) = l = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f\left(\lim_{k\to\infty} x_{n_k}\right) = f(x).$$

所以连续映射 $f$ 在紧集 $M$ 上可以取到最小值.

同理可证, 连续映射 $f$ 在紧集 $M$ 上可以取到最大值. □

注 上述结论才是数学分析中闭区间上的连续函数最值性的本质. 在一般的度量空间中, 有界闭集不一定是紧集, 有界闭集上的连续映射不一定有最值性.

## 作业题 3.3

**定义 3.1. Hölder 连续函数**

设 $\alpha\in(0,1]$. 若 $f\in C[a,b]$ 满足

$$[f]_\alpha = \sup_{\substack{x,y\in[a,b],\\ x\neq y}} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha} < +\infty,$$

则称 $f$ 是 $[a,b]$ 上具有指数 $\alpha$ 的 Hölder 连续函数. $C[a,b]$ 中所有具有指数 $\alpha$ 的 Hölder 连续函数的全体记为 $C^{0,\alpha}[a,b]$. ♣

(1) 令

$$\bar{d}(f,g) = \max_{t\in[a,b]} |f(t)-g(t)| + [f-g]_\alpha, \quad \forall f,g\in C^{0,\alpha}[a,b],$$

证明 $(C^{0,\alpha}[a,b],\bar{d})$ 是一个度量空间.

(2) 证明 $(C^{0,\alpha}[a,b],\bar{d})$ 是完备的度量空间.

(3) 利用 Ascoli-Arezela 定理证明, 若 $M$ 是 $(C^{0,\alpha}[a,b],\bar{d})$ 中的有界集, 则 $M$ 是 $(C[a,b],d)$ 中的列紧集, 其中 $d$ 是最大值距离, 即

$$d(f,g) = \max_{t\in[a,b]} |f(t)-g(t)|, \quad \forall f,g\in C[a,b].$$

证明 (1) 任取 $f,g\in C^{0,\alpha}[a,b]$, 对任意 $x,y\in[a,b]$ 且 $x\neq y$, 都有

$$\begin{aligned} &\frac{|(f-g)(x)-(f-g)(y)|}{|x-y|^\alpha} \\ \le\ & \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha} + \frac{|g(x)-g(y)|}{|x-y|^\alpha} \\ \le\ & [f]_\alpha + [g]_\alpha < +\infty, \end{aligned}$$

从而

$$[f-g]_\alpha = \sup_{\substack{x,y\in[a,b],\\ x\neq y}} \frac{|(f-g)(x)-(f-g)(y)|}{|x-y|^\alpha} \le [f]_\alpha + [g]_\alpha < +\infty.$$

所以 $\bar{d}(f,g)$ 的定义是合理的.

(i) 显然 $\bar{d}(f,g)\ge 0$. 由于 $d(f,g)\le\bar{d}(f,g)$, 根据 $d(f,g)$ 的正定性可知, $\bar{d}(f,g)=0$ 等价于

$$f(t)=g(t), \quad \forall t\in[a,b],$$

从而等价于 $f=g$.

(ii) 设 $f,g,h\in C^{0,\alpha}[a,b]$, 则

$$d(f,g)\le d(f,h)+d(h,g).$$

另一方面, 对任意 $x,y\in[a,b]$ 且 $x\ne y$, 都有

$$\begin{aligned}
&\frac{|(f-g)(x)-(f-g)(y)|}{|x-y|^\alpha}\\
=\ &\frac{\big|[(f-h)+(h-g)](x)-[(f-h)+(h-g)](y)\big|}{|x-y|^\alpha}\\
\le\ &\frac{|(f-h)(x)-(f-h)(y)|}{|x-y|^\alpha}+\frac{|(h-g)(x)-(h-g)(y)|}{|x-y|^\alpha},
\end{aligned}$$

从而

$$[f-g]_\alpha\le[f-h]_\alpha+[h-g]_\alpha.$$

综上,

$$\bar d(f,g)\le\bar d(f,g)+\bar d(h,g).$$

所以 $(C^{0,\alpha}[a,b],\bar d)$ 是一个度量空间.

(2) 设 $\{f_n\}$ 是空间 $(C^{0,\alpha}[a,b],\bar d)$ 中的 Cauchy 点列. 由于 $C^{0,\alpha}[a,b]\subset C[a,b]$ 并且

$$0\le d(f,g)\le\bar d(f,g),\quad \forall f,g\in C^{0,\alpha}[a,b],$$

易证 $\{f_n\}$ 也是 $(C[a,b],d)$ 中的 Cauchy 点列. 根据 $(C[a,b],d)$ 的完备性, 存在 $f\in C[a,b]$ 使得

$$d(f_n,f)\to0\quad(n\to\infty).$$

下证 $f\in C^{0,\alpha}[a,b]$ 并且

$$\bar d(f_n,f)\to0\quad(n\to\infty).$$

由于 $\{f_n\}$ 是空间 $(C^{0,\alpha}[a,b],\bar d)$ 中的 Cauchy 点列, 从而是 $(C^{0,\alpha}[a,b],\bar d)$ 中的有界点列 (p219 第 14 题), 于是存在 $M>0$ 使得对任意 $x,y\in[a,b]$ 并且 $x\ne y$ 都有

$$\frac{|f_n(x)-f_n(y)|}{|x-y|^\alpha}\le[f_n]_\alpha=[f_n-0]_\alpha\le\bar d(f_n,0)\le M,\quad\forall n\in\mathbb{N}_+.\tag{3.4}$$

由于函数列 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f$, 那么也逐点收敛于 $f$, 即对任意 $x\in[a,b]$, 都有

$$f_n(x)\to f(x)\quad(n\to\infty).\tag{3.5}$$

因此, 在 (3.4) 两端令 $n\to\infty$, 可得

$$\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha}\le M,\quad\forall x,y\in[a,b],\ x\ne y,$$

从而 $[f]_\alpha<+\infty$, $f\in C^{0,\alpha}[a,b]$.

对任意 $\epsilon>0$, 由于 $\{f_n\}$ 是空间 $(C^{0,\alpha}[a,b],\bar d)$ 中的 Cauchy 点列, 则存在正整数 $N$, 使得对任意 $m,n>N$, 都有

$$\frac{\big|[f_n(x)-f_m(x)]-[f_n(y)-f_m(y)]\big|}{|x-y|^\alpha}\le[f_n-f_m]_\alpha\le\bar d(f_n,f_m)<\epsilon,\quad\forall x,y\in[a,b],\ x\ne y.$$

在上式中固定 $x,y$ 以及 $n>N$, 令 $m\to\infty$, 结合 (3.5) 式可得

$$\frac{\big|[f_n(x)-f(x)]-[f_n(y)-f(y)]\big|}{|x-y|^\alpha}\le\epsilon,\quad\forall n\ge N,\ \forall x,y\in[a,b],\ x\ne y,$$

所以

$$[f_n-f]_\alpha\le\epsilon,\forall n>N.$$

综上
$$[f_n - f]_\alpha \to 0 \quad (n \to \infty),$$
从而
$$\bar{d}(f_n, f) = d(f_n, f) + [f_n - f]_\alpha \to 0 \quad (n \to \alpha).$$
所以 $(C^{0,\alpha}[a,b], \bar{d})$ 是完备的度量空间.

(3) 设 $M$ 在 $(C^{0,\alpha}[a,b], \bar{d})$ 中有界. 由于 $C^{0,\alpha}[a,b] \subset C[a,b]$ 并且
$$0 \le d(f,g) \le \bar{d}(f,g), \quad \forall f, g \in C^{0,\alpha}[a,b],$$
所以 $M$ 也在 $(C[a,b], d)$ 中有界. 任取 $\{f_n\} \subset M$, 则 $\{f_n\}$ 既是 $(C^{0,\alpha}[a,b], \bar{d})$ 中的有界点列, 又是 $(C[a,b], d)$ 中的有界点列, 从而函数列 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上一致有界. 下证函数列 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上等度连续.

由于 $\{f_n\}$ 是 $(C^{0,\alpha}[a,b], \bar{d})$ 中的有界点列, 则存在 $M > 0$, 使得
$$[f_n]_\alpha = [f_n - 0]_\alpha \le \bar{d}(f_n, 0) \le M.$$
从而
$$|f_n(x) - f_n(y)| \le M|x-y|^\alpha, \quad \forall n \in \mathbb{N}_+,\ \forall x, y \in [a,b]. \tag{3.6}$$
对任意 $\epsilon > 0$, 取
$$\delta = \left(\frac{\epsilon}{M}\right)^{\frac{1}{\alpha}} > 0,$$
则对任意 $x, y \in [a,b]$ 且 $|x-y| < \delta$, 根据 $\alpha \in (0,1]$ 以及(3.6)式可得
$$|f_n(x) - f_n(y)| \le M|x-y|^\alpha < M\delta^\alpha = \epsilon, \quad \forall n \in \mathbb{N}_+,$$
因此函数列 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上等度连续.

根据 Ascoli-Arezela 定理, 点列 $\{f_n\}$ 在空间 $(C[a,b], d)$ 中有收敛子列, 由此可知集合 $M$ 是空间 $(C[a,b], d)$ 中的列紧集.

由于 $\{f_n\}$ 是 $(C^{0,\alpha}[a,b], \bar{d})$ 中的有界点列, 根据 (2) 的证明的前半部分可知, 上述收敛子列 $\{f_{n_k}\}$ 的极限 $f$ 也在 $C^{0,\alpha}[a,b]$ 中. 然而, 虽然 $\{f_{n_k}\}$ 在 $(C[a,b], d)$ 中收敛, 但是却不能保证 $\{f_{n_k}\}$ 是 $(C^{0,\alpha}[a,b], \bar{d}))$ 的 Cauchy 点列, 因此我们无法像 (2) 的证明的后半部分那样证明
$$[f_{n_k} - f]_\alpha \to 0 \quad (k \to \infty).$$

□

# 第 4 周

✍ **作业题 4.1** 设 $X$ 是完备的度量空间, $T$ 是 $X$ 到 $X$ 中的映射, 如果存在正整数 $m \in \mathbb{N}_+$ 以及常数 $\alpha \in [0,1)$ 使得对所有的 $x, y \in X$, 都有
$$d(T^m x, T^m y) \le \alpha\, d(x,y),$$
其中 $T^m$ 表示映射 $T$ 作用 $m$ 次, 则 $T$ 在 $X$ 中有且只有一个不动点 $x^*$, 特别地, 迭代点列
$$x_0,\ x_1 = Tx_0, \cdots, x_n = Tx_{n-1}, \cdots,$$
在 $(X,d)$ 中收敛于不动点 $x^*$.

**证明** 由条件可知映射 $T^m: X \to X$ 是压缩映射, 由于 $X$ 完备, 根据压缩映射原理, $T^m$ 在 $X$ 上存在唯一的不动点 $x^*$, 即
$$x^* = T^m x^*. \tag{4.1}$$
下证 $x^*$ 也是映射 $T$ 在 $X$ 上的唯一的不动点.

由(4.1)式可得

$$Tx^* = T\left(T^m x^*\right) = T^{m+1}x^* = T^m\left(Tx^*\right),$$

所以 $Tx^*$ 也是 $T^m$ 的不动点. 根据 $T^m$ 的不动点的唯一性, 就有 $Tx^* = x^*$, 所以 $x^*$ 也是映射 $T$ 的不动点. 若 $x \in X$ 也是映射 $T$ 的不动点, 则

$$x = Tx,\ x = Tx = T(Tx) = T^2x, \cdots, x = T^m x,$$

即 $x$ 也是 $T^m$ 的不动点. 根据 $T^m$ 的不动点的唯一性, 就有 $x^* = x$. 所以 $x^*$ 是映射 $T$ 在 $X$ 上的唯一的不动点.

任取 $x_0 \in X$. 通过映射 $T$ 构造迭代点列

$$x_0,\ x_1 = Tx_0,\ x_2 = Tx_1, \cdots, x_n = Tx_{n-1}, \cdots.$$

任取

$$s \in \{0, 1, 2, \cdots, m-1\},$$

令

$$\begin{aligned}
&y_0 = T^s x_0 = x_s,\\
&y_1 = T^m y_0 = x_{m+2},\\
&y_2 = T^m y_1 = x_{2m+s},\\
&\cdots,\\
&y_n = T^m y_{n-1} = x_{nm+s},\\
&\cdots.
\end{aligned}$$

根据由于 $T^m$ 是压缩映射, $X$ 完备, 则迭代点列 $y_n$ 收敛于 $T^m$ 的不动点 $x^*$, 即

$$\lim_{n\to\infty} x_{nm+s} = x^*, \quad \forall s \in \{0, 1, 2, \cdots, m-1\}.$$

于是对任意 $\epsilon > 0$, 以及任意 $s \in \{0, 1, 2, \cdots, m-1\}$, 邻域 $U\left(x^*, \epsilon\right)$ 之外只含有点列 $\{x_{nm+s}\}_{n=0}^{\infty}$ 中的有限多项, 将这些项的集合记为 $A_s$. 由于

$$\bigcup_{s=0}^{m-1}\bigcup_{n=0}^{\infty}\{x_{nm+s}\} = \bigcup_{n=0}^{\infty}\bigcup_{s=0}^{m-1}\{x_{nm+s}\} = \bigcup_{n=0}^{\infty}\{x_n\},$$

于是点列 $\{x_n\}$ 在邻域 $U\left(x^*, \epsilon\right)$ 之外的项的全体为有限集

$$\bigcup_{s=0}^{m-1} A_s,$$

所以

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x^*.$$

□

注 该题中的映射 $T$ 自身不一定是压缩映射. 证明过程后半部分用到了点列收敛的另外一种等价定义:

> 任给 $\epsilon > 0$, 若点列 $\{x_n\}$ 在邻域 $U(x, \epsilon)$ 之外至多只有有限多项, 则称点列 $\{x_n\}$ 收敛于 $x$.

点列极限与其子列极限的转化思路, 可参考华东师大《数学分析（第四版 • 上册）》P27 例 8 和 P35-P36 习题 7(2) 的证明.

✍ **作业题 4.2** (Volterra 型线性积分方程解的存在唯一性问题) 设 $f \in C[a,b]$, 二元函数 $k(t,s)$ 在 $[a,b]\times[a,b]$ 上连续. 利用上题的结论证明, 对任意 $\lambda \in \mathbb{R}$, 积分方程

$$\phi(t) - \lambda \int_0^t k(t,s)\phi(s)\,\mathrm{d}s = f(t), \quad t \in [a,b] \tag{4.2}$$

总存在唯一的连续函数解 $\phi \in C[a,b]$.

**证明** 任取 $\phi \in C[a,b]$, 定义 $[a,b]$ 上的函数 $T\phi$:

$$(T\phi)(t) = f(t) + \lambda \int_a^t k(t,s)\phi(s)\,\mathrm{d}s, \quad t \in [a,b]. \tag{4.3}$$

由于 $\phi, f \in C[a,b]$, $k(t,s)$ 在 $[a,b]\times[a,b]$ 上连续, 由上式可知 $T\phi \in C[a,b]$. 由此得到映射

$$\begin{aligned} T:\ C[a,b] &\to C[a,b], \\ \phi &\mapsto T\phi. \end{aligned}$$

显然, 积分方程(4.2)在 $[a,b]$ 上的连续函数解等价于映射 $T$ 在空间 $C[a,b]$ 中的不动点.

(下面验证 $T$ 是否是压缩映射, 若不是, 继续验证 $T^m$ 是否是压缩映射)

对任意 $\phi_1, \phi_2 \in C[a,b]$ 以及任意 $t \in [a,b]$, 由(4.3)可得

$$\begin{aligned} & |(T\phi_1)(t) - (T\phi_2)(t)| \\ = \ & |\lambda| \cdot \left| \int_a^t k(t,s)\left[\phi_1(s) - \phi_2(s)\right] \mathrm{d}s \right| \\ \le \ & |\lambda| \cdot \int_a^t \max_{\substack{a \le t \le b \\ a \le s \le b}} |k(t,s)| \cdot \max_{t\in[a,b]} |\phi_1(s) - \phi_2(s)|\,\mathrm{d}s \\ = \ & M|\lambda|(t-a)\cdot d(\phi_1,\phi_2), \end{aligned}$$

其中

$$M = \max_{\substack{a \le t \le b \\ a \le s \le b}} |k(t,s)| \ge 0.$$

(这样看 $T$ 不一定是压缩映射)

利用上述结果, 继续计算可得

$$\begin{aligned} & \left|(T^2\phi_1)(t) - (T^2\phi_2)(t)\right| \\ = \ & |\lambda| \cdot \left| \int_a^t k(t,s)\left[(T\phi_1)(s) - (T\phi_2)(s)\right] \mathrm{d}s \right| \\ \le \ & |\lambda| \cdot \int_a^t M \cdot |(T\phi_1)(s) - (T\phi_2)(s)|\,\mathrm{d}s \\ \le \ & M^2|\lambda|^2 \int_a^t (s-a)\cdot d(\phi_1,\phi_2)\,\mathrm{d}s \\ = \ & \frac{\left[M|\lambda|(t-a)\right]^2}{2} d(\phi_1,\phi_2). \end{aligned}$$

一直做下去, 对任意 $m \in \mathbb{N}_+$ 就有

$$|(T^m\phi_1)(t) - (T^m\phi_2)(t)| \le \frac{\left[M|\lambda|(t-a)\right]^m}{m!} d(\phi_1,\phi_2), \quad \forall t \in [a,b],$$

上式两端对 $t \in [a,b]$ 取最大值可得

$$d\left(T^m\phi_1, T^m\phi_2\right) \le \frac{\left[M|\lambda|(b-a)\right]^m}{m!} d(\phi_1,\phi_2).$$

对任意 $a \in \mathbb{R}$, 都有 $\lim_{m\to\infty} \frac{a^m}{m!} = 0$, 由该事实可知, 存在充分大的一个正整数 $m$ 使得

$$\alpha = \frac{\left[M|\lambda|(b-a)\right]^m}{m!} \in [0,1),$$

此时 $T^m$ 就是完备度量空间 $C[a,b]$ 上的压缩映射. 根据上一个问题的结论, 映射 $T$ 在 $C[a,b]$ 中存在唯一的不动点, 所以积分方程(4.2)在 $[a,b]$ 上存在唯一的连续函数解. □

# 第 5 周

**作业题 5.1** 设 $(X, \|\cdot\|)$ 是一个赋范空间, $x_0 \in X$, $\epsilon > 0$. 令

$$\begin{aligned} U(x_0,\epsilon) &= \{x \mid \|x - x_0\| < \epsilon\}, \\ S(x_0,\epsilon) &= \{x \mid \|x - x_0\| \le \epsilon\}, \end{aligned}$$

则

$$\overline{U(x_0,\epsilon)} = S(x_0,\epsilon).$$

**证明** 由于范数 $\|\cdot\|$ 作为映射是赋范线性空间 $X$ 上的连续映射, 则可证 $S(x_0,\epsilon)$ 是空间 $X$ 中的闭集. 由于 $U(x_0,\epsilon) \subset S(x_0,\epsilon)$, 则 $\overline{U(x_0,\epsilon)} \subset S(x_0,\epsilon)$. 下证 $S(x_0,\epsilon) \subset \overline{U(x_0,\epsilon)}$.

令

$$D = \{x \in X \mid \|x - x_0\| = \epsilon\},$$

则 $S(x_0,\epsilon) = U(x_0,\epsilon) \cup D$. 显然, $U(x_0,\epsilon) \subset \overline{U(x_0,\epsilon)}$, 所以只需要证明 $D \subset \overline{U(x_0,\epsilon)}$.

任取 $y_0 \in D$. 对任意 $n \in \mathbb{N}$, 令

$$x_n = y_0 + \frac{x_0 - y_0}{n\|x_0 - y_0\|} = y_0 + \frac{1}{n\epsilon}(x_0 - y_0),$$ (赋范线性空间里可以做加法和数乘)

则 $x_n \in X$, 并且当 $n$ 足够大时, 就有(下式还用到了范数的正齐次性)

$$\|x_n - x_0\| = \left\|\left(\frac{1}{n\epsilon} - 1\right)(x_0 - y_0)\right\| = \left|\frac{1}{n\epsilon} - 1\right| \|x_0 - y_0\| = \left|\frac{1}{n} - \epsilon\right| = \epsilon - \frac{1}{n} < \epsilon,$$

从而 $x_n \in U(x_0,\epsilon)$. 另一方面,

$$\|x_n - y_0\| = \left\|\frac{1}{n\epsilon}(x_0 - y_0)\right\| = \frac{1}{n\epsilon}\|x_0 - y_0\| = \frac{1}{n},$$

所以 $\lim\limits_{x\to\infty} \|x_n - y_0\| = 0$, $y_0$ 就是 $U(x_0,\epsilon)$ 的聚点, 因此 $y_0 \in \overline{U(x_0,\epsilon)}$. 综上, $D \subset \overline{U(x_0,\epsilon)}$.

所以 $\overline{U(x_0,\epsilon)} = S(x_0,\epsilon)$. □

**作业题 5.2** 利用 Hölder 不等式证明

**定理 5.1. 内插不等式**

设 $1 \le s \le r \le t < \infty$, $u \in L^s(\Omega) \cap L^t(\Omega)$, 则 $u \in L^r(\Omega)$ 并且

$$\|u\|_r \le \|u\|_s^\theta \|u\|_t^{1-\theta},$$

其中 $\theta \in [0,1]$ 满足

$$\frac{1}{r} = \frac{\theta}{s} + \frac{1-\theta}{t}.$$

**证明** 当 $r=s$ 时, 取 $\theta=1$; 当 $r=t$ 时, 取 $\theta=0$. 在这两种情况下, 结论都成立. 下设

$$1\le s<r<t<\infty.$$

若存在 $m,n>0$ 使得 $r=\frac{s}{m}+\frac{t}{n}$, 则

$$|u|^r=|u|^{\frac{s}{m}}\cdot|u|^{\frac{t}{n}}.$$

由于 $u\in L^s(\Omega)\cap L^t(\Omega)$, 则

$$\begin{aligned}\int_\Omega\left(|u|^{\frac{s}{m}}\right)^m\mathrm{d}x&=\int_\Omega|u|^s\,\mathrm{d}x<+\infty,\\ \int_\Omega\left(|u|^{\frac{t}{n}}\right)^n\mathrm{d}x&=\int_\Omega|u|^t\,\mathrm{d}x<+\infty,\end{aligned}$$

从而 $|u|^{\frac{s}{m}}\in L^m(\Omega)$, $|u|^{\frac{t}{n}}\in L^n(\Omega)$. 于是, 当 $m,n$ 满足

$$\begin{cases}m,n>0,\\ \frac{s}{m}+\frac{t}{n}=r,\\ \frac{1}{m}+\frac{1}{n}=1,\end{cases}$$

即 $m=\frac{t-s}{t-r}$, $n=\frac{t-s}{r-s}$ 时, 利用 Hölder 不等式可得

$$\begin{aligned}&\int_\Omega|u|^r\,\mathrm{d}x=\int_\Omega|u|^{\frac{s}{m}}\cdot|u|^{\frac{t}{n}}\,\mathrm{d}x\le\left[\int_\Omega\left(|u|^{\frac{s}{m}}\right)^m\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{m}}\cdot\left[\int_\Omega\left(|u|^{\frac{t}{n}}\right)^n\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{n}}\\ =&\left(\int_\Omega|u|^s\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{m}}\cdot\left(\int_\Omega|u|^t\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}}=\|u\|_s^{\frac{s}{m}}\cdot\|u\|_t^{\frac{t}{n}}<\infty,\end{aligned}$$

所以 $u\in L^r(\Omega)$, 并且

$$\|u\|_r^r=\int_\Omega|u|^r\,\mathrm{d}x\le\|u\|_s^{\frac{s}{m}}\cdot\|u\|_t^{\frac{t}{n}}.$$

令 $\theta=\frac{s}{rm}$, 则 $\theta\in(0,1)$, $\frac{t}{rn}=1-\theta$,

$$\frac{\theta}{s}+\frac{1-\theta}{t}=\frac{1}{rm}+\frac{1}{rm}=\frac{1}{r},$$

并且

$$\|u\|_r\le\|u\|_s^\theta\|u\|_t^{1-\theta}.$$

□

✍ **作业题 5.3** ($L^p(\Omega)$ 与 $L^\infty(\Omega)$ 的联系) 设 $\Omega$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的可测集并且 $m(\Omega)<+\infty$, 证明

(1) 若 $p,q$ 满足 $1\le p<q\le\infty$, 则

$$L^q(\Omega)\subset L^p(\Omega),$$

并且存在与 $m(\Omega),p$ 和 $q$ 相关的正常数 $C$ 使得

$$\|f\|_p\le C\|f\|_q,\quad\forall f\in L^q(\Omega).$$

(2) 对任意 $f\in L^\infty(\Omega)$, 都有

$$\lim_{p\to+\infty}\|f\|_p=\|f\|_\infty.$$

**证明** (1) Step1. 任取 $f \in L^\infty(\Omega)$, 下证

$$f \in L^p(\Omega), \quad \forall p \geq 1.$$

由于 $f \in L^\infty(\Omega)$, 则存在 $E_0 \subset \Omega$ 使得 $m(E_0)=0$ 并且

$$|f(x)|^p \leq \|f\|_\infty^p, \quad \forall x \in \Omega \setminus E_0, \quad \forall p \geq 1.$$

于是

$$\begin{aligned}\int_\Omega |f(x)|^p \,\mathrm{d}x &= \int_{\Omega\setminus E_0} |f(x)|^p \,\mathrm{d}x + \int_{E_0} |f(x)|^p \,\mathrm{d}x \\ &= \int_{\Omega\setminus E_0} |f(x)|^p \,\mathrm{d}x \\ &\leq \int_{\Omega\setminus E_0} \|f\|_\infty^p \,\mathrm{d}x \\ &\leq m(\Omega)\|f\|_\infty^p < +\infty,\end{aligned}$$

所以 $f \in L^p(\Omega)$ 并且

$$\|f\|_p \leq [m(\Omega)]^{\frac{1}{p}} \|f\|_\infty. \tag{5.1}$$

□

Step2. 下证当 $p, q$ 满足

$$1 \leq p < q < \infty$$

时结论成立.

任取 $f \in L^q(\Omega)$, 令 $t = \frac{q}{p}$, $s = \frac{t}{t-1}$, 则 $t, s > 0$, $\frac{1}{t} + \frac{1}{s} = 1$, 并且

$$\int_\Omega (|f(x)|^p)^t \,\mathrm{d}x = \int_\Omega |f(x)|^q \,\mathrm{d}x < \infty,$$

即 $|f|^p \in L^t(\Omega)$. 定义

$$g(x) \equiv 1, \quad x \in \Omega,$$

则 $g \in L^s(\Omega)$. 利用 Hölder 不等式可得

$$\begin{aligned}&\int_\Omega |f(x)|^p \,\mathrm{d}x \\ =& \int_\Omega 1 \cdot |f(x)|^p \,\mathrm{d}x \\ \leq& \left(\int_\Omega 1^s \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{s}} \left(\int_\Omega (|f(x)|^p)^t \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{t}} \\ =& [m(\Omega)]^{\frac{1}{s}} \left(\int_\Omega |f(x)|^q \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{t}} \\ =& [m(\Omega)]^{\frac{q-p}{q}} \|f\|_q^p < +\infty,\end{aligned}$$

所以 $f \in L^p(\Omega)$, 并且

$$\|f\|_p \leq [m(\Omega)]^{\frac{q-p}{pq}} \|f\|_q.$$

(2) 当 $\|f\|_\infty = 0$ 时, 由 (1) 部分的结论可知 $\|f\|_p \equiv 0$, $\forall p > 1$, 此时结论显然成立. 下设 $\|f\|_\infty > 0$.

一方面, 由(5.1)可得

$$\varlimsup_{p\to+\infty}\|f\|_p\leq\varlimsup_{p\to+\infty}[m(\Omega)]^{\frac{1}{p}}\|f\|_\infty=\|f\|_\infty. \tag{5.2}$$

另一方面, 对任意 $\epsilon\in(0,\|f\|_\infty)$, 令

$$E_\epsilon=\{x\in\Omega\mid|f(x)|\geq\|f\|_\infty-\epsilon\},$$

下证 $m(E_\epsilon)>0$. 反证法, 假设 $m(E_\epsilon)=0$, 由 $\|f\|_\infty$ 的定义可得

$$\sup_{x\in\Omega\setminus E_\epsilon}|f(x)|\geq\inf_{\substack{E_0\subset\Omega\\ m(E_0)=0}}\left(\sup_{x\in\Omega\setminus E_0}|f(x)|\right)=\|f\|_\infty. \tag{5.3}$$

但是另一方面，对任意 $x\in\Omega\setminus E_\epsilon$, 有 $|f(x)|\leq\|f\|_\infty-\epsilon$, 从而

$$\sup_{x\in\Omega\setminus E_\epsilon}|f(x)|\leq\|f\|_\infty-\epsilon,$$

这与(5.3)矛盾. 所以 $m(E_\epsilon)>0$. 于是

$$\begin{aligned}\int_\Omega|f(x)|^p\,\mathrm{d}x &\geq \int_{E_\epsilon}|f(x)|^p\,\mathrm{d}x\\ &\geq \int_{E_\epsilon}(\|f\|_\infty-\epsilon)^p\,\mathrm{d}x\\ &= m(E_\epsilon)\,(\|f\|_\infty-\epsilon)^p\,,\end{aligned}$$

进而

$$\|f\|_p=\left(\int_\Omega|f(x)|^p\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\geq[m(E_\epsilon)]^{\frac{1}{p}}\,(\|f\|_\infty-\epsilon)\,,$$

$$\begin{aligned}\varliminf_{p\to+\infty}\|f\|_p &\geq \varliminf_{p\to+\infty}[m(E_\epsilon)]^{\frac{1}{p}}\,(\|f\|_\infty-\epsilon)\\ &= \|f\|_\infty-\epsilon.\end{aligned}$$

由 $\epsilon>0$ 的任意性可知

$$\varliminf_{p\to+\infty}\|f\|_p\geq\|f\|_\infty. \tag{5.4}$$

综合(5.2)与(5.4)式, 可得

$$\lim_{p\to+\infty}\|f\|_p=\|f\|_\infty.$$

## ✍ 作业题 5.4 证明

**定理 5.2. Brezis-Lieb 引理**

设 $\Omega$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的可测集, $1\leq p<\infty$. 若 $L^p(\Omega)$ 中的函数列 $\{u_n\}$ 满足

(1) $\{u_n\}$ 是 $L^p(\Omega)$ 中的有界点列;

(2) $u_n(x)\to u(x)$ $a.e.x\in\Omega$ $\quad(n\to\infty)$.

则 $u \in L^p(\Omega)$ 并且
$$\lim_{n\to\infty}\left(\|u_n\|_p^p - \|u_n - u\|_p^p\right) = \|u\|_p^p.$$
♡

**证明** Step1. 由于 $\{u_n\}$ 在 $L^p(\Omega)$ 中有界, 则存在 $M > 0$, 使得
$$\|u_n\|_p \le M, \quad \forall n \in \mathbb{N}_+.$$
由于
$$u_n(x) \to u(x)\ a.e. x \in \Omega \quad (n\to\infty),$$
则
$$|u_n(x)|^p \to |u(x)|^p\ a.e. x \in \Omega \quad (n\to\infty).$$
由 Fatou 引理 (P107) 可得
$$\int_\Omega |u(x)|^p\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \varliminf_{n\to\infty} |u_n(x)|^p\,\mathrm{d}x \le \varliminf_{n\to\infty}\int_\Omega |u_n(x)|^p\,\mathrm{d}x = \varliminf_{n\to\infty}\|u_n\|_p^p \le M^p < +\infty,$$
所以 $u \in L^p(\Omega)$.

Step2. (为什么要有这一步? 从下面的(5.7)式最后一步估计可以看到端倪) 任取 $\epsilon > 0$. 下证存在只与 $\epsilon$ 和 $p$ 有关的正常数 $C > 0$ 使得
$$\Big||a+b|^p - |a|^p\Big| \le \epsilon|a|^p + C|b|^p, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

事实上, 当 $p = 1$ 时,
$$\Big||a+b| - |a|\Big| \le |(a+b) - a| = |b| \le \epsilon|a| + |b|,$$
结论成立. 当 $p > 1$ 时, 由微分中值定理, 存在 $\theta \in [0,1]$ 使得
$$\begin{aligned}
&\Big||a+b|^p - |a|^p\Big| \\
=\ & \Big|p|\theta a + (1-\theta)b|^{p-2}(\theta a + (1-\theta)b)b\Big| \\
=\ & p|\theta a + (1-\theta)b|^{p-1}|b| \\
\le\ & p2^{p-1}\left(|\theta a|^{p-1} + |(1-\theta)b|^{p-1}\right)|b| \\
\le\ & p2^{p-1}\left(|a|^{p-1} + |b|^{p-1}\right)|b| \\
=\ & p2^{p-1}|a|^{p-1}|b| + p2^{p-1}|b|^p.
\end{aligned} \tag{5.5}$$
令 $q = \frac{p}{p-1}$, 则 $p > 1$ 且 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. 由 Young 不等式可得
$$\begin{aligned}
& p2^{p-1}|a|^{p-1}|b| \\
=\ & \left[(q\epsilon)^{\frac{1}{q}}|a|^{p-1}\right]\cdot\left[(q\epsilon)^{-\frac{1}{q}}p2^{p-1}|b|\right] \\
\le\ & \frac{\left[(q\epsilon)^{\frac{1}{q}}|a|^{p-1}\right]^q}{q} + \frac{\left[(q\epsilon)^{-\frac{1}{q}}p2^{p-1}|b|\right]^p}{p} \\
=\ & \epsilon|a|^p + \left(\frac{2^p(p-1)}{\epsilon}\right)^{p-1}|b|^p
\end{aligned} \tag{5.6}$$
令
$$C = \left(\frac{2^p(p-1)}{\epsilon}\right)^{p-1} + p2^{p-1},$$

再将(5.6)式代入到(5.5)中可得

$$\left||a+b|^p-|a|^p\right|\le\epsilon|a|^p+C|b|^p.$$

Step3. 下证

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left(\|u_n\|_p^p-\|u_n-u\|_p^p\right)-\|u\|_p^p\right)=0.$$

由 Step2 可得

$$\begin{aligned}
&\left||u_n(x)|^p-|u_n(x)-u(x)|^p-|u(x)|^p\right|\\
\le\ &\left||u_n(x)|^p-|u_n(x)-u(x)|^p\right|+|u(x)|^p\\
=\ &\left||(u_n(x)-u(x))+u(x)|^p-|u_n(x)-u(x)|^p\right|+|u(x)|^p\\
\le\ &\epsilon|u_n(x)-u(x)|^p+(C+1)|u(x)|^p.
\end{aligned}\tag{5.7}$$

令

$$f_n^\epsilon(x)=\left||u_n(x)|^p-|u_n(x)-u(x)|^p-|u(x)|^p\right|-\epsilon|u_n(x)-u(x)|^p,$$

则由条件 (ii) 可知

$$f_n^\epsilon(x)\to 0\quad a.e.\ x\in\Omega\quad(n\to\infty),$$

同样也有 $f_n^\epsilon$ 的正部 $(f_n^\epsilon)^+$ 也满足

$$(f_n^\epsilon)^+(x)\to 0,\quad a.e.\ x\in\Omega\quad(n\to\infty).\tag{5.8}$$

由(5.7)式可得

$$0\le(f_n^\epsilon)^+(x)\le(C+1)|u(x)|^p,\quad\forall x\in\Omega.\tag{5.9}$$

由于 $u\in L^p(\Omega)$, 则 $|u|^p\in L^1(\Omega)$, 综合(5.8)和(5.9), 利用 Lebesgue 控制收敛定理可得

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega(f_n^\epsilon)^+(x)\,\mathrm{d}x=\int_\Omega\lim_{n\to\infty}(f_n^\epsilon)^+(x)\,\mathrm{d}x=0.\tag{5.10}$$

再由(5.7)式可得

$$\begin{aligned}
&\left||u_n(x)|^p-|u_n(x)-u(x)|^p-|u(x)|^p\right|\\
=\ &f_n^\epsilon(x)+\epsilon|u_n(x)-u(x)|^p\\
\le\ &(f_n^\epsilon)^+(x)+\epsilon|u_n(x)-u(x)|^p,
\end{aligned}$$

上式两端在 $\Omega$ 上积分可得

$$\begin{aligned}
&\left|\left(\|u_n\|_p^p-\|u_n-u\|_p^p\right)-\|u\|_p^p\right|\\
\le\ &\int_\Omega\left||u_n(x)|^p-|u_n(x)-u(x)|^p-|u(x)|^p\right|\mathrm{d}x\\
\le\ &\int_\Omega(f_n^\epsilon)^+(x)\,\mathrm{d}x+\epsilon\|u_n-u\|_p^p\\
\le\ &\int_\Omega(f_n^\epsilon)^+(x)\,\mathrm{d}x+\left(M^p+\|u\|_p^p\right)\epsilon,
\end{aligned}$$

在上式两端令 $n\to\infty$ 可得

$$\begin{aligned}
&\varlimsup_{n\to\infty}\left|\left(\|u_n\|_p^p-\|u_n-u\|_p^p\right)-\|u\|_p^p\right|\\
\le\ &\varlimsup_{n\to\infty}\int_\Omega(f_n^\epsilon)^+(x)\,\mathrm{d}x+\left(M^p+\|u\|_p^p\right)\epsilon
\end{aligned}$$

$$= \left(M^p + \|u\|_p^p\right)\epsilon$$

再由 $\epsilon > 0$ 的任意性可得

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left| \left(\|u_n\|_p^p - \|u_n - u\|_p^p\right) - \|u\|_p^p \right| = 0,$$

所以

$$\lim_{n\to\infty} \left( \left(\|u_n\|_p^p - \|u_n - u\|_p^p\right) - \|u\|_p^p \right) = 0,$$

即

$$\lim_{n\to\infty} \left(\|u_n\|_p^p - \|u_n - u\|_p^p\right) = \|u\|_p^p.$$

□