


2019-2020 学年第 1 学期
数学分析作业

目录

1 第 4 周	1
-------------------	---

第 4 周

 **作业题 1.1** 设 A, B 为非空有界数集, 并且 $A \subset B$, 证明

$$\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B.$$

证明 显然, $\inf A \leq \sup A$. 下证 $\inf B \leq \inf A$ 并且 $\sup A \leq \sup B$.

假设 $\inf B > \inf A$, 则 $\inf B$ 不是集合 A 的下界, 从而存在 $x_0 \in A$ 使得 $\inf B > x_0$. 另一方面, 由于 $A \subset B$, 从而也有 $x_0 \in B$, 于是

$$\inf B > x_0 \geq \inf B,$$


矛盾.

假设 $\sup A > \sup B$, 则 $\sup B$ 不是集合 A 的上界, 从而存在 $x_1 \in A$ 使得 $\sup B < x_1$. 另一方面, 由于 $A \subset B$, 从而也有 $x_1 \in B$, 于是

$$\sup B < x_1 \leq \sup B,$$

矛盾.

综上, $\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B$. □

 **作业题 1.2** 设 S 为非空有下界 (不一定有上界) 的数集, 并且 $\inf S > 0$, 证明集合

$$S^{-1} = \{x^{-1} \mid x \in S\}$$

有界并且

$$\sup S^{-1} > 0, \quad \inf S^{-1} \geq 0, \quad \sup S^{-1} = \frac{1}{\inf S}.$$

证明 Step1. 任取 $y \in S^{-1}$, 令 $x = y^{-1}$, 则 $x \in S$,

$$x \geq \inf S > 0,$$

从而

$$0 < y \leq \frac{1}{\inf S}, \quad \forall y \in S^{-1}. \quad (1.1)$$

所以 0 是 S^{-1} 的一个下界, $\frac{1}{\inf S}$ 是 S^{-1} 的一个上界, 并且

$$\sup S^{-1} > 0, \quad \inf S^{-1} \geq 0.$$

Step2. 由 Step1 可知 $\sup S^{-1} \leq \frac{1}{\inf S}$. 下面排除 $\sup S^{-1} < \frac{1}{\inf S}$ 的情况.
反证法, 假设 $\sup S^{-1} < \frac{1}{\inf S}$ 成立, 由于 $\sup S^{-1} > 0$, 则

$$0 < \inf S < \frac{1}{\sup S^{-1}}.$$

所以 $\frac{1}{\sup S^{-1}}$ 不是 S 的下界, 存在 $x \in S$ 使得

$$0 < \inf S \leq x < \frac{1}{\sup S^{-1}}.$$

令 $y = x^{-1}$, 则 $y \in S^{-1}$,

$$0 < \frac{1}{y} = x < \frac{1}{\sup S^{-1}},$$

从而

$$\sup S^{-1} < y.$$


但是另一方面, 由于 $y \in S^{-1}$, 则一定有

$$y \leq \sup S^{-1},$$

矛盾. 所以

$$\sup S^{-1} = \frac{1}{\inf S}.$$

□

 **作业题 1.3** 证明以下等式和不等式:

(1) 设 $a, b \in \mathbb{R}$, 则

$$||a| - |b|| \leq |a - b|, \quad \frac{|a + b|}{1 + |a + b|} \leq \frac{|a|}{1 + |a|} + \frac{|b|}{1 + |b|}.$$

(2) 设 $a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_+$ 且 $n \geq 2$, 则

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}),$$

(3) Bernoulli(伯努利) 不等式: 设 $h \geq -1$, $n \in \mathbb{N}_+$, 则

$$(1 + h)^n \geq 1 + nh.$$

特别地, 如果还有 $h \geq 0$ 并且 $n \geq 2$, 则还成立

$$(1 + h)^n > \frac{n(n-1)}{2}h^2 \geq \frac{n^2h^2}{4}.$$

(4) 算术-几何平均值不等式: 设 a_1, a_2, \cdots, a_n 是 n 个非负实数, 则

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n}.$$


如果 a_1, a_2, \cdots, a_n 都是正实数, 还成立几何-调和平均值不等式:

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}.$$

(5)

$$\sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

$$\sum_{k=1}^n k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

 **注意** $\sum_{k=1}^n s_k$ 表示对 s_1, s_2, \dots, s_n 按下标 k 从 1 到 n 求和, 即 $\sum_{k=1}^n s_k = s_1 + s_2 + \cdots + s_n$.

(6) 若 $0 < x < \frac{\pi}{2}$, 则 $\sin x < x < \tan x$. 若 $x \in \mathbb{R}$, 则 $|\sin x| \leq |x|$.

证明 (1) 对任意 $a, b \in \mathbb{R}$, 由绝对值不等式可得

$$\begin{aligned} |a - b| &\geq |a| - |b|, \\ |a - b| &= |b - a| \geq |b| - |a|, \end{aligned}$$

综合上述两式可得

$$-|a - b| \leq |a| - |b| \leq |a - b|,$$

所以

$$||a| - |b|| \leq |a - b|.$$

由于

$$f(t) = \frac{t}{1+t}, \quad t > 0$$

是严格增函数, 并且

$$|a + b| \leq |a| + |b|,$$

则 $f(|a + b|) \leq f(|a| + |b|)$, 从而

$$\begin{aligned} \frac{|a + b|}{1 + |a + b|} &\leq \frac{|a| + |b|}{1 + |a| + |b|} \\ &= \frac{|a|}{1 + |a| + |b|} + \frac{|b|}{1 + |a| + |b|} \\ &\leq \frac{|a|}{1 + |a|} + \frac{|b|}{1 + |b|}. \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} &(a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}) \\ &= (a^n + a^{n-1}b + \cdots + a^2b^{n-2} + ab^{n-1}) \\ &\quad - (a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \cdots + ab^{n-1} + b^n) \\ &= a^n - b^n. \end{aligned}$$

(3) 当 $n = 1$ 时, $(1 + h)^1 = 1 + 1 \cdot h$, 结论成立.

假设当 $n = k$ 时, 成立

$$(1 + h)^k \geq 1 + kh.$$

由于 $h \geq -1$, 则当 $n = k + 1$ 时,

$$\begin{aligned} (1 + h)^{k+1} &= (1 + h)^k \cdot (1 + h) \geq (1 + kh) \cdot (1 + h) \\ &= 1 + (k + 1)h + kh^2 \geq 1 + (k + 1)h. \end{aligned}$$

综上, 对任意 $n \in \mathbb{N}_+$ 以及任意 $h \geq -1$ 都有

$$(1 + h)^n \geq 1 + nh.$$

当 $n \geq 2$ 时, 有

$$\frac{n(n-1)}{2} \geq \frac{n^2}{4},$$

从而对任意 $h \geq 0$ 都有

$$\begin{aligned} (1+h)^n &= 1 + nh + \frac{n(n-1)}{2}h^2 + \cdots + h^n \\ &> \frac{n(n-1)}{2}h^2 \geq \frac{n^2h^2}{4}. \end{aligned}$$

(4) 如果 a_1, a_2, \cdots, a_n 中有一个是 0, 则算术-几何平均值不等式成立. 下设 a_1, a_2, \cdots, a_n 都是正的实数.

当 $n = 1$ 时, 两个不等式显然都成立.

假设当 $n = k$ 时, 有

$$\frac{a_1 + \cdots + a_k}{k} \geq \sqrt[k]{a_1 \cdots a_k}.$$

当 $n = k + 1$ 时,

$$\begin{aligned} &\frac{a_1 + \cdots + a_k + a_{k+1}}{k+1} \\ &= \frac{a_1 + \cdots + a_k}{k} + \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k} \right) (a_1 + \cdots + a_k) + \frac{a_{k+1}}{k+1} \\ &= \frac{a_1 + \cdots + a_k}{k} + \frac{ka_{k+1} - (a_1 + \cdots + a_k)}{k(k+1)}. \end{aligned}$$

令

$$A = \frac{a_1 + \cdots + a_k}{k}, \quad B = \frac{ka_{k+1} - (a_1 + \cdots + a_k)}{k(k+1)},$$

则 $A > 0, A + B > 0$. 再令 $h = \frac{B}{A}$, 则 $1 + h > 0, h > -1$, 利用 Bernoulli 不等式可得

$$\begin{aligned} &\left(\frac{a_1 + \cdots + a_k + a_{k+1}}{k+1} \right)^{k+1} \\ &= (A+B)^{k+1} = A^{k+1} \left(1 + \frac{B}{A} \right)^{k+1} = A^{k+1} (1+h)^{k+1} \\ &\geq A^{k+1} [1 + (k+1)h] = A^{k+1} \left[1 + \frac{(k+1)B}{A} \right] = A^k [A + (k+1)B] \\ &= A^k \cdot a_{k+1}. \end{aligned}$$

根据 $n = k$ 时的假设条件, 有

$$A^k = \left(\frac{a_1 + \cdots + a_k}{k} \right)^k \geq a_1 \cdots a_k,$$

从而

$$\frac{a_1 + \cdots + a_k + a_{k+1}}{k+1} \geq a_1 \cdots a_k \cdot a_{k+1}.$$

综上, 算术-几何平均值不等式

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n}$$

成立.

利用算术-几何平均值不等式可得

$$\frac{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}{n} \geq \sqrt[n]{\frac{1}{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n}} > 0,$$

对上式取倒数, 就得到几何-调和平均值不等式:

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}.$$

(5) 当 $n = 1$ 时, 两不等式显然都成立.

假设当 $n = l$ 时,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^l k^2 &= \frac{l(l+1)(2l+1)}{6}, \\ \sum_{k=1}^l k^3 &= \left(\frac{l(l+1)}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

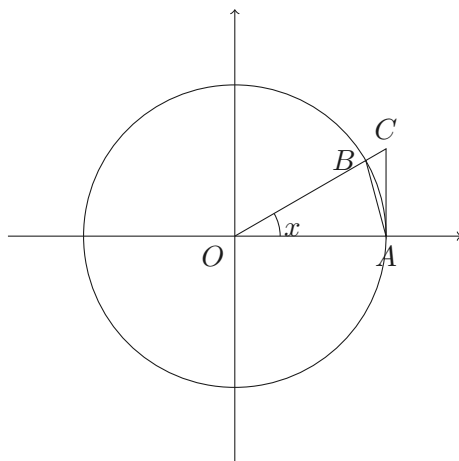
当 $n = l + 1$ 时就有

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{l+1} k^2 &= \sum_{k=1}^l k^2 + (l+1)^2 \\ &= \frac{l(l+1)(2l+1)}{6} + \frac{6(l+1)^2}{6} \\ &= \frac{(l+1)[(l+1)+1][2(l+1)+1]}{6}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{l+1} k^3 &= \sum_{k=1}^l k^3 + (l+1)^3 \\ &= \left(\frac{l(l+1)}{2}\right)^2 + (l+1)^3 \\ &= \left[\frac{(l+1)(l+2)}{2}\right]^2. \end{aligned}$$

综上, 两等式恒成立.

(6)



在以上单位圆周中, 角的弧度 x 满足 $0 < x < \frac{\pi}{2}$, 三角形 OAB 的面积

$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB \cdot \sin x = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin x = \frac{1}{2} \sin x,$$

扇形 \widehat{OAB} 的面积

$$S_2 = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB \cdot x = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot x = \frac{1}{2} x,$$

直角三角形 OAC 的两条直角边的长度分别为

$$OA = 1, \quad AC = \tan x,$$

所以直角三角形 OAC 的面积为

$$S_3 = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \tan x = \frac{1}{2} \tan x.$$

显然, $S_1 < S_2 < S_3$, 从而

$$0 < \sin x < x < \tan x.$$

当 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ 时, 由上述结论可知

$$|\sin x| \leq |x|.$$

当 $x > 1$ 时, 总有

$$|\sin x| \leq 1 < x = |x|.$$

于是,

$$|\sin x| \leq |x|, \quad \forall x \in [0, +\infty).$$

当 $x < 0$ 时, $-x \in (0, +\infty)$, 由以上结论可得

$$|\sin x| = |\sin(-x)| \leq |-x| = |x|.$$

综上,

$$|\sin x| \leq |x|, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

□

总结:

1. 作业不要抄袭. 字迹要清楚.
2. 以上参考答案保证正确, 但是不一定是最优的.
3. 确界相关的题目, 一定要紧扣确界的定义, 不要想当然的用一些错误结论. 上确界、下确界不一定是集合的最大值、最小值, 上确界、下确界也不一定属于集合. 大家自行总结课堂上、教材和作业中和确界有关的结论和题目, 分为**一般集合的确界问题**和**函数相关的确界问题**. 这些结论我们今后会用到.
4. 不了解数学归纳法的同学, 请自学.
5. 本次作业完成的比较好的同学: **王芹**.
6. 各位同学要在学习上多花时间, 多动笔练习, 勤于思考, 多与其它同学讨论. 课前一定要预习教材内容, 课后及时复习.
7. 各位同学要积极找我答疑. 请提前通过 qq 联系我预约时间, 原则上我只当面答疑, 不接受在线答疑. 我的办公室是系楼 303 办公室后门 A 格, 走西面的门 (前门), 直接推门进入, 不要敲门.