

# 泛函分析作业

## 1 第4周

**问题 1.1.** 设  $X$  是完备的度量空间,  $T$  是  $X$  到  $X$  中的映射, 如果存在正整数  $m \in \mathbb{N}_+$  以及常数  $\alpha \in [0, 1)$  使得对所有的  $x, y \in X$ , 都有

$$d(T^m x, T^m y) \leq \alpha d(x, y),$$

其中  $T^m$  表示映射  $T$  作用  $m$  次, 则  $T$  在  $X$  中有且只有一个不动点  $x^*$ , 特别地, 迭代点列

$$x_0, x_1 = Tx_0, \dots, x_n = Tx_{n-1}, \dots,$$

在  $(X, d)$  中收敛于不动点  $x^*$ .

**证明** 由条件可知映射  $T^m : X \rightarrow X$  是压缩映射, 由于  $X$  完备, 根据压缩映射原理,  $T^m$  在  $X$  上存在唯一的不动点  $x^*$ , 即

$$x^* = T^m x^*. \quad (1.1)$$

下证  $x^*$  也是映射  $T$  在  $X$  上的唯一的不动点.

由(1.1)式可得

$$Tx^* = T(T^m x^*) = T^{m+1} x^* = T^m(Tx^*),$$

所以  $Tx^*$  也是  $T^m$  的不动点. 根据  $T^m$  的不动点的唯一性, 就有  $Tx^* = x^*$ , 所以  $x^*$  也是映射  $T$  的不动点. 若  $x \in X$  也是映射  $T$  的不动点, 则

$$x = Tx, x = Tx = T(Tx) = T^2x, \dots, x = T^m x,$$

即  $x$  也是  $T^m$  的不动点. 根据  $T^m$  的不动点的唯一性, 就有  $x^* = x$ . 所以  $x^*$  是映射  $T$  在  $X$  上的唯一的不动点.

任取  $x_0 \in X$ . 通过映射  $T$  构造迭代点列

$$x_0, x_1 = Tx_0, x_2 = Tx_1, \dots, x_n = Tx_{n-1}, \dots.$$

任取

$$s \in \{0, 1, 2, \dots, m-1\},$$

令

$$\begin{aligned} y_0 &= T^s x_0 = x_s, \\ y_1 &= T^m y_0 = x_{m+s}, \\ y_2 &= T^m y_1 = x_{2m+s}, \\ &\dots, \\ y_n &= T^m y_{n-1} = x_{nm+s}, \\ &\dots. \end{aligned}$$

根据由于  $T^m$  是压缩映射,  $X$  完备, 则迭代点列  $y_n$  收敛于  $T^m$  的不动点  $x^*$ , 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{nm+s} = x^*, \quad \forall s \in \{0, 1, 2, \dots, m-1\}.$$

于是对任意  $\epsilon > 0$ , 以及任意  $s \in \{0, 1, 2, \dots, m-1\}$ , 邻域  $U(x^*, \epsilon)$  之外只含有点列  $\{x_{nm+s}\}_{n=0}^{\infty}$  中的有限多项, 将这些项的集合记为  $A_s$ . 由于

$$\bigcup_{s=0}^{m-1} \bigcup_{n=0}^{\infty} \{x_{nm+s}\} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcup_{s=0}^{m-1} \{x_{nm+s}\} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \{x_n\},$$

于是点列  $\{x_n\}$  在邻域  $U(x^*, \epsilon)$  之外的项的全体为有限集

$$\bigcup_{s=0}^{m-1} A_s,$$

所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*.$$

□

**注 1.1.** 该题中的映射  $T$  自身不一定是压缩映射. 证明过程后半部分用到了点列收敛的另外一种等价定义:

任给  $\epsilon > 0$ , 若点列  $\{x_n\}$  在邻域  $U(x, \epsilon)$  之外至多只有有限多项, 则称点列  $\{x_n\}$  收敛于  $x$ .

点列极限与其子列极限的转化思路, 可参考华东师大《数学分析 (第四版·上册)》P27 例 8 和 P35-P36 习题 7(2) 的证明.

**问题 1.2 (Volterra 型线性积分方程解的存在唯一性问题).** 设  $f \in C[a, b]$ , 二元函数  $k(t, s)$  在  $[a, b] \times [a, b]$  上连续. 利用上题的结论证明, 对任意  $\lambda \in \mathbb{R}$ , 积分方程

$$\phi(t) - \lambda \int_0^t k(t, s)\phi(s) ds = f(t), \quad t \in [a, b] \quad (1.2)$$

总存在唯一的连续函数解  $\phi \in C[a, b]$ .

**证明** 任取  $\phi \in C[a, b]$ , 定义  $[a, b]$  上的函数  $T\phi$ :

$$(T\phi)(t) = f(t) + \lambda \int_a^t k(t, s)\phi(s) ds, \quad t \in [a, b]. \quad (1.3)$$

由于  $\phi, f \in C[a, b]$ ,  $k(t, s)$  在  $[a, b] \times [a, b]$  上连续, 由上式可知  $T\phi \in C[a, b]$ . 由此得到映射

$$\begin{aligned} T: C[a, b] &\rightarrow C[a, b], \\ \phi &\mapsto T\phi. \end{aligned}$$

显然, 积分方程(1.2)在  $[a, b]$  上的连续函数解等价于映射  $T$  在空间  $C[a, b]$  中的不动点. (下面验证  $T$  是否是压缩映射, 若不是, 继续验证  $T^m$  是否是压缩映射)

对任意  $\phi_1, \phi_2 \in C[a, b]$  以及任意  $t \in [a, b]$ , 由(1.3)可得

$$|(T\phi_1)(t) - (T\phi_2)(t)|$$

$$\begin{aligned}
&= |\lambda| \cdot \left| \int_a^t k(t, s) [\phi_1(s) - \phi_2(s)] ds \right| \\
&\leq |\lambda| \cdot \int_a^t \max_{\substack{a \leq t \leq b \\ a \leq s \leq b}} |k(t, s)| \cdot \max_{t \in [a, b]} |\phi_1(s) - \phi_2(s)| ds \\
&= M|\lambda|(t-a) \cdot d(\phi_1, \phi_2),
\end{aligned}$$

其中

$$M = \max_{\substack{a \leq t \leq b \\ a \leq s \leq b}} |k(t, s)| \geq 0.$$

(这样看  $T$  不一定是压缩映射)  
利用上述结果, 继续计算可得

$$\begin{aligned}
&|(T^2\phi_1)(t) - (T^2\phi_2)(t)| \\
&= |\lambda| \cdot \left| \int_a^t k(t, s) [(T\phi_1)(s) - (T\phi_2)(s)] ds \right| \\
&\leq |\lambda| \cdot \int_a^t M \cdot |(T\phi_1)(s) - (T\phi_2)(s)| ds \\
&\leq M^2|\lambda|^2 \int_a^t (s-a) \cdot d(\phi_1, \phi_2) ds \\
&= \frac{[M|\lambda|(t-a)]^2}{2} d(\phi_1, \phi_2).
\end{aligned}$$

一直做下去, 对任意  $m \in \mathbb{N}_+$  就有

$$|(T^m\phi_1)(t) - (T^m\phi_2)(t)| \leq \frac{[M|\lambda|(t-a)]^m}{m!} d(\phi_1, \phi_2), \quad \forall t \in [a, b],$$

上式两端对  $t \in [a, b]$  取最大值可得

$$d(T^m\phi_1, T^m\phi_2) \leq \frac{[M|\lambda|(b-a)]^m}{m!} d(\phi_1, \phi_2).$$

对任意  $a \in \mathbb{R}$ , 都有  $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{a^m}{m!} = 0$ , 由该事实可知, 存在充分大的一个正整数  $m$  使得

$$\alpha = \frac{[M|\lambda|(b-a)]^m}{m!} \in [0, 1),$$

此时  $T^m$  就是完备度量空间  $C[a, b]$  上的压缩映射. 根据上一个问题的结论, 映射  $T$  在  $C[a, b]$  中存在唯一的不动点, 所以积分方程(1.2)在  $[a, b]$  上存在唯一的连续函数解.  $\square$