

# 泛函分析作业

## 1 第3周

**问题 1.1.** 设  $(X, d)$  是度量空间,  $\{x_n\}$  是  $(X, d)$  中的 Cauchy 点列, 证明:  $\{x_n\}$  收敛当且仅当  $\{x_n\}$  存在收敛子列.

**证明** 必要性是显然的.

下证充分性. 设 Cauchy 点列  $\{x_n\}$  存在收敛子列  $\{x_{n_k}\}$  使得  $x_{n_k} \rightarrow x (k \rightarrow \infty)$ . 任取  $\epsilon > 0$ . 一方面, 由于  $\{x_n\}$  是 Cauchy 点列, 则存在  $N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}_+$ , 使得

$$d(x_n, x_m) < \frac{1}{2}\epsilon, \quad \forall m, n > N. \quad (1.1)$$

另一方面, 由于  $x_{n_k} \rightarrow x (k \rightarrow \infty)$ , 则存在  $K = K(\epsilon) \in \mathbb{N}_+$  使得

$$n_k > N \quad \text{并且} \quad d(x_{n_k}, x) < \frac{1}{2}\epsilon, \quad \forall k > K. \quad (1.2)$$

综上, 由 (1.1)-(1.2) 式, 对任意  $n > N$ , 取  $k = K + 1$ , 就有

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x) < \frac{1}{2}\epsilon + \frac{1}{2}\epsilon = \epsilon,$$

所以  $x_n \rightarrow x (n \rightarrow \infty)$ . □

**问题 1.2.** 设  $f$  是度量空间  $(X, d)$  到  $\mathbb{R}$  的连续映射,  $M$  是  $X$  中的紧集, 证明: 连续映射  $f$  在紧集  $M$  上能够取到最值, 即存在  $x_0, x_1 \in M$  使得

$$f(x_0) = \min_{x \in M} f(x), \quad f(x_1) = \max_{x \in M} f(x).$$

**证明** Step1. 设

$$l = \inf_{x \in M} f(x).$$

下证  $l \in \mathbb{R}$ .

反证法, 假设  $l = -\infty$ , 则对任意  $n \in \mathbb{N}_+$ , 存在  $x_n \in M$  使得

$$f(x_n) < -n,$$

于是

$$f(x_n) \rightarrow -\infty \quad (n \rightarrow \infty). \quad (1.3)$$

另一方面, 由于  $\{x_n\} \subset M$  并且  $M$  是紧集, 则存在  $\{x_n\}$  的子列  $\{x_{n_k}\}$  以及  $x \in M$  使得

$$x_{n_k} \rightarrow x \quad (k \rightarrow \infty).$$

根据映射  $f$  的连续性, 就有

$$f(x_{n_k}) \rightarrow f(x) \in \mathbb{R} \quad (k \rightarrow \infty).$$

这与 (1.3) 式矛盾. 所以  $l \in \mathbb{R}$ .

Step2. 根据下确界的定义, 存在  $\{x_n\} \subset M$  (称为极小化序列) 使得

$$f(x_n) \rightarrow l \quad (n \rightarrow \infty).$$

由于  $M$  是紧集, 则存在  $\{x_n\}$  的子列  $\{x_{n_k}\}$  以及  $x \in M$  使得

$$x_{n_k} \rightarrow x \quad (k \rightarrow \infty).$$

根据映射  $f$  的连续性, 就有

$$\inf_{x \in M} f(x) = l = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f\left(\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}\right) = f(x).$$

所以连续映射  $f$  在紧集  $M$  上可以取到最小值.

同理可证, 连续映射  $f$  在紧集  $M$  上可以取到最大值.  $\square$

注 1.1. 上述结论才是数学分析中闭区间上的连续函数最值性的本质. 在一般的度量空间中, 有界闭集不一定是紧集, 有界闭集上的连续映射不一定有最值性.

### 问题 1.3.

定义 1.1 (Hölder 连续函数). 设  $\alpha \in (0, 1]$ . 若  $f \in C[a, b]$  满足

$$[f]_\alpha = \sup_{\substack{x, y \in [a, b], \\ x \neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha} < +\infty,$$

则称  $f$  是  $[a, b]$  上具有指数  $\alpha$  的 Hölder 连续函数.  $C[a, b]$  中所有具有指数  $\alpha$  的 Hölder 连续函数的全体记为  $C^{0, \alpha}[a, b]$ .

(1) 令

$$\bar{d}(f, g) = \max_{t \in [a, b]} |f(t) - g(t)| + [f - g]_\alpha, \quad \forall f, g \in C^{0, \alpha}[a, b],$$

证明  $(C^{0, \alpha}[a, b], \bar{d})$  是一个度量空间.

(2) 证明  $(C^{0, \alpha}[a, b], \bar{d})$  是完备的度量空间.

(3) 利用 Ascoli-Arzelà 定理证明, 若  $M$  是  $(C^{0, \alpha}[a, b], \bar{d})$  中的有界集, 则  $M$  是  $(C[a, b], d)$  中的列紧集, 其中  $d$  是最大值距离, 即

$$d(f, g) = \max_{t \in [a, b]} |f(t) - g(t)|, \quad \forall f, g \in C[a, b].$$

**证明** (1) 任取  $f, g \in C^{0, \alpha}[a, b]$ , 对任意  $x, y \in [a, b]$  且  $x \neq y$ , 都有

$$\begin{aligned} & \frac{|(f - g)(x) - (f - g)(y)|}{|x - y|^\alpha} \\ & \leq \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha} + \frac{|g(x) - g(y)|}{|x - y|^\alpha} \\ & \leq [f]_\alpha + [g]_\alpha < +\infty, \end{aligned}$$

从而

$$[f - g]_\alpha = \sup_{\substack{x, y \in [a, b], \\ x \neq y}} \frac{|(f - g)(x) - (f - g)(y)|}{|x - y|^\alpha} \leq [f]_\alpha + [g]_\alpha < +\infty.$$

所以  $\bar{d}(f, g)$  的定义是合理的.

(i) 显然  $\bar{d}(f, g) \geq 0$ . 由于  $d(f, g) \leq \bar{d}(f, g)$ , 根据  $d(f, g)$  的正定性可知,  $\bar{d}(f, g) = 0$  等价于

$$f(t) = g(t), \quad \forall t \in [a, b],$$

从而等价于  $f = g$ .

(ii) 设  $f, g, h \in C^{0,\alpha}[a, b]$ , 则

$$d(f, g) \leq d(f, h) + d(h, g).$$

另一方面, 对任意  $x, y \in [a, b]$  且  $x \neq y$ , 都有

$$\begin{aligned} & \frac{|(f - g)(x) - (f - g)(y)|}{|x - y|^\alpha} \\ &= \frac{|[(f - h) + (h - g)](x) - [(f - h) + (h - g)](y)|}{|x - y|^\alpha} \\ &\leq \frac{|(f - h)(x) - (f - h)(y)|}{|x - y|^\alpha} + \frac{|(h - g)(x) - (h - g)(y)|}{|x - y|^\alpha}, \end{aligned}$$

从而

$$[f - g]_\alpha \leq [f - h]_\alpha + [h - g]_\alpha.$$

综上,

$$\bar{d}(f, g) \leq \bar{d}(f, h) + \bar{d}(h, g).$$

所以  $(C^{0,\alpha}[a, b], \bar{d})$  是一个度量空间.

(2) 设  $\{f_n\}$  是空间  $(C^{0,\alpha}[a, b], \bar{d})$  中的 Cauchy 点列. 由于  $C^{0,\alpha}[a, b] \subset C[a, b]$  并且

$$0 \leq d(f, g) \leq \bar{d}(f, g), \quad \forall f, g \in C^{0,\alpha}[a, b],$$

易证  $\{f_n\}$  也是  $(C[a, b], d)$  中的 Cauchy 点列. 根据  $(C[a, b], d)$  的完备性, 存在  $f \in C[a, b]$  使得

$$d(f_n, f) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

下证  $f \in C^{0,\alpha}[a, b]$  并且

$$\bar{d}(f_n, f) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

由于  $\{f_n\}$  是空间  $(C^{0,\alpha}[a, b], \bar{d})$  中的 Cauchy 点列, 从而是  $(C^{0,\alpha}[a, b], \bar{d})$  中的有界点列 (p219 第 14 题), 于是存在  $M > 0$  使得对任意  $x, y \in [a, b]$  并且  $x \neq y$  都有

$$\frac{|f_n(x) - f_n(y)|}{|x - y|^\alpha} \leq [f_n]_\alpha = [f_n - 0]_\alpha \leq \bar{d}(f_n, 0) \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N}_+. \quad (1.4)$$

由于函数列  $\{f_n\}$  在  $[a, b]$  上一致收敛于  $f$ , 那么也逐点收敛于  $f$ , 即对任意  $x \in [a, b]$ , 都有

$$f_n(x) \rightarrow f(x) \quad (n \rightarrow \infty). \quad (1.5)$$

因此, 在 (1.4) 两端令  $n \rightarrow \infty$ , 可得

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha} \leq M, \quad \forall x, y \in [a, b], x \neq y,$$

从而  $[f]_\alpha < +\infty$ ,  $f \in C^{0,\alpha}[a, b]$ .

对任意  $\epsilon > 0$ , 由于  $\{f_n\}$  是空间  $(C^{0,\alpha}[a, b], \bar{d})$  中的 Cauchy 点列, 则存在正整数  $N$ , 使得对任意  $m, n > N$ , 都有

$$\frac{|[f_n(x) - f_m(x)] - [f_n(y) - f_m(y)]|}{|x - y|^\alpha} \leq [f_n - f_m]_\alpha \leq \bar{d}(f_n, f_m) < \epsilon, \quad \forall x, y \in [a, b], x \neq y.$$

在上式中固定  $x, y$  以及  $n > N$ , 令  $m \rightarrow \infty$ , 结合 (1.5) 式可得

$$\frac{|[f_n(x) - f(x)] - [f_n(y) - f(y)]|}{|x - y|^\alpha} \leq \epsilon, \quad \forall n \geq N, \forall x, y \in [a, b], x \neq y,$$

所以

$$[f_n - f]_\alpha \leq \epsilon, \forall n > N.$$

综上

$$[f_n - f]_\alpha \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

从而

$$\bar{d}(f_n, f) = d(f_n, f) + [f_n - f]_\alpha \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

所以  $(C^{0,\alpha}[a, b], \bar{d})$  是完备的度量空间.

(3) 设  $M$  在  $(C^{0,\alpha}[a, b], \bar{d})$  中有界. 由于  $C^{0,\alpha}[a, b] \subset C[a, b]$  并且

$$0 \leq d(f, g) \leq \bar{d}(f, g), \quad \forall f, g \in C^{0,\alpha}[a, b],$$

所以  $M$  也在  $(C[a, b], d)$  中有界. 任取  $\{f_n\} \subset M$ , 则  $\{f_n\}$  既是  $(C^{0,\alpha}[a, b], \bar{d})$  中的有界点列, 又是  $(C[a, b], d)$  中的有界点列, 从而函数列  $\{f_n\}$  在  $[a, b]$  上一致有界. 下证函数列  $\{f_n\}$  在  $[a, b]$  上等度连续.

由于  $\{f_n\}$  是  $(C^{0,\alpha}[a, b], \bar{d})$  中的有界点列, 则存在  $M > 0$ , 使得

$$[f_n]_\alpha = [f_n - 0]_\alpha \leq \bar{d}(f_n, 0) \leq M.$$

从而

$$|f_n(x) - f_n(y)| \leq M|x - y|^\alpha, \quad \forall n \in \mathbb{N}_+, \forall x, y \in [a, b]. \quad (1.6)$$

对任意  $\epsilon > 0$ , 取

$$\delta = \left(\frac{\epsilon}{M}\right)^{\frac{1}{\alpha}} > 0,$$

则对任意  $x, y \in [a, b]$  且  $|x - y| < \delta$ , 根据  $\alpha \in (0, 1]$  以及 (1.6) 式可得

$$|f_n(x) - f_n(y)| \leq M|x - y|^\alpha < M\delta^\alpha = \epsilon, \quad \forall n \in \mathbb{N}_+,$$

因此函数列  $\{f_n\}$  在  $[a, b]$  上等度连续.

根据 Ascoli-Arzelà 定理, 点列  $\{f_n\}$  在空间  $(C[a, b], d)$  中有收敛子列, 由此可知集合  $M$  是空间  $(C[a, b], d)$  中的列紧集.

由于  $\{f_n\}$  是  $(C^{0,\alpha}[a, b], \bar{d})$  中的有界点列, 根据 (2) 的证明的前半部分可知, 上述收敛子列  $\{f_{n_k}\}$  的极限  $f$  也在  $C^{0,\alpha}[a, b]$  中. 然而, 虽然  $\{f_{n_k}\}$  在  $(C[a, b], d)$  中收敛, 但是却不能保证  $\{f_{n_k}\}$  是  $(C^{0,\alpha}[a, b], \bar{d})$  的 Cauchy 点列, 因此我们无法像 (2) 的证明的后半部分那样证明

$$[f_{n_k} - f]_\alpha \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty).$$

□