Uniwersytet Warszawski
Wydział Fizyki

Wojciech Fabjańczuk
Nr albumu: 358624

Metody supergeometryczne i zastosowania w fizyce

Praca licencjacka
na kierunku fizyka w ramach Studiów Indywidualnych

Praca wykonana pod kierunkiem
dr Javiera de Lucas Araujo
Katedra Metod Matematycznych Fizyki

Warszawa, wrzesień 2017 r.

Oświadczenie kierującego pracą

Oświadczam, że niniejsza praca została przygotowana pod moim kierunkiem i stwierdzam, że spełnia ona warunki do przedstawienia jej w postępowaniu o nadanie tytułu zawodowego.

Data Podpis kierującego pracą

Oświadczenie autora (autorów) pracy

Świadom odpowiedzialności prawnej oświadczam, że niniejsza praca dyplomowa została napisana przeze mnie samodzielnie i nie zawiera treści uzyskanych w sposób niezgodny z obowiązującymi przepisami.
Oświadczam również, że przedstawiona praca nie była wcześniej przedmiotem procedur związanych z uzyskaniem tytułu zawodowego w wyższej uczelni.
Oświadczam ponadto, że niniejsza wersja pracy jest identyczna z załączoną wersją elektroniczną.

Data Podpis autora (autorów) pracy

Streszczenie

Celem pracy jest omówienie geometrii superrozmaitości i przedstawienie zastosowania metod supergeometrycznych w fizyce. Przedstawiono opracowanie matematycznych aspektów supergeometrii i przytoczono wiele przykładów z supermechaniki, w tym opis superoscylatora harmonicznego i nierelatywistycznej, klasycznej cząstki ze spinem. Dodano niezbędną literaturę z zakresu badanej dziedziny. Tekst skierowany jest do studentów indywidualnych fizyki trzeciego roku lub studentów drugiego stopnia zainteresowanych podstawami matematycznymi supersymetrii.

Słowa kluczowe

superprzestrzeń, superalgebra, berezinian, supergeometria, superrozmaitość, supermechanika, superlagranżjan, superrównania Eulera-Lagrange'a, superhamiltonian, superrównania Hamiltona

Dziedzina pracy (kody wg programu Socrates-Erasmus)

13.2 Fizyka

Tytuł pracy w języku angielskim

Supergeometric methods and applications in physics

Spis treści

Wstęp

Teoria supergeometrii pojawiła się w fizyce wraz z ideą opisu fermionów w kwantowej teorii pola za pomocą antyprzemiennych potencjałów [41] i w teorii strun [24, 42]. Supergeometria jest matematyczną teorią pozwalającą sformalizować różniczkowanie, całkowanie i wszystkie niezbędne operacje na nowych obiektach. W tym celu rozszerza się geometrię różniczkową o specjalne zmienne, których iloczyn po zmianie kolejności zmienia znak.

Teoria supergeometrii jest przede wszystkim podstawą wielu dziedzin fizyki teoretycznej takich jak supermechanika klasyczna [7] i teorie supersymetryczne [10], oraz znajduje zastosowanie w rozwiązywaniu niektórych problemów matematycznych w fizyce teoretycznej – na przykład w kwantyzacji metodą całek po trajektoriach nieabelowych teorii pola z cechowaniem [39]. Matematyków nie związanych z fizyką może zainteresować supersymetryczny dowód nierówności Morse'a [45], jak również supersymetryczne wyprowadzenia różnych twierdzeń o indeksie [1, 36] i dużo różnych nieprzemiennych analogii struktur pojawiających się w geometrii różniczkowej [11].

Celem niniejszej pracy jest szczegółowe przedstawienie i skrupulatna analiza kluczowych pojęć supergeometrii od strony matematycznej, i ukazanie jej zastosowań w supermechanice klasycznej. Praca skierowana jest dla studentów fizyki indywidualnej trzeciego roku lub studentów lubiących algebrę, będących po kursie geometrii różniczkowej i zainteresowanych teoriami supersymetrycznymi z matematycznego punktu widzenia.

Formalizm teorii przedstawiono w autorski sposób – drobiazgowy, ale możliwie najprostszy. Definicje i twierdzenia uzupełniono wieloma przykładami, czasami fizycznymi, czasami czysto teoretycznymi. W bibliografii na końcu pracy zamieszczono podstawową literaturę związaną z poruszonymi tematami.

Praca składa się z trzech rozdziałów: o superalgebrze liniowej, o supergeometrii i superrozmaitościach, o formalizmie superlagranżowskim i superhamiltonowskim w supermechanice klasycznej.

Pierwszy rozdział skupia się na algebraicznym wprowadzeniu do supergeometrii i prowadzi do definicji berezinianu (superwyznacznika) poprzez naturalne rozszerzenia obiektów algebry liniowej: superprzestrzenie, superalgebry, supermoduły i supermacierze.

W drugim rozdziale zaprezentowano istotę supergeometrii – superrozmaitości, czyli uogólnienie rozmaitości różniczkowych w których lokalną algebrę funkcji gładkich zastąpiono algebrą Grassmanna. Opisano wiele innych uogólnień pojęć geometrii różniczkowej takich jak współrzędne, wiązka styczna, całkowanie.

Ostatni rozdział poświęcono supermechanice klasycznej, która odzwierciedla jedno z zastosowań supergeometrii w fizyce teoretycznej. Scharakteryzowano formalizm superlagranżowski i superhamiltonowski oraz pokazano sporo przykładów.

Oznaczenia

M :	rozmaitość różniczkowa $m-$wymiarowa
$\mathbb{N}$:	zbiór liczb całkowitych większych od zera
$\mathbb{Z}_+$:	zbiór liczb całkowitych nieujemnych
$\mathbb{K}$:	ciało liczb rzeczywistych albo zespolonych
$\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$:	zbiór endomorfizmów przestrzeni wektorowej V nad $\mathbb{K}$
Id_V :	odwzorowanie tożsamościowe w przestrzeni wektorowej V nad $\mathbb{K}$
$\check{f}$:	dla funkcji liniowej $f : X \to Y$ funkcja taka, że $\forall x \in X,\ \check{f}(x) := f(-x)$
W° :	zbiór $\omega \in V^*$ spełniających $\forall x \in W,\ \omega(x) = 0$
$\overline{m,n}$:	zbiór liczb całkowitych z spełniających $m \leqslant z \leqslant n$ dla $m, n \in \mathbb{Z},\ m \leqslant n$
$\lfloor m \rfloor$ ($\lceil m \rceil$) :	największa (najmniejsza) liczba całkowita nie większa (mniejsza) niż $m \in \mathbb{R}$
$\Gamma(E)$:	cięcia wiązki wektorowej E
$\Omega(M)$:	zbiór form różniczkowych nad rozmaitością M
$\mathrm{Grass}(\mathbb{K}, L)$:	algebra Grassmanna nad ciałem $\mathbb{K}$ o L generatorach nieparzystych
$\underline{\lambda}$:	multi-indeks
$\mathfrak{m}(\underline{\lambda})$:	długość multi-indeksu λ
$\mathfrak{M}^L$:	zbiór multi-indeksów długości nie większej niż L
$\underline{\lambda}^c$:	multi-indeks dopełniający do $\underline{\lambda}$
$\beta_{[\underline{\lambda}]}$:	iloczyn generatorów $\beta_{\lambda_1} \dots \beta_{\lambda_k}$ dla multi-indeksu $\underline{\lambda} := \lambda_1, \dots, \lambda_k$
$\mathrm{Mat}(R, m, n)$:	zbiór macierzy wymiaru $m \times n$ o elementach z R
$H^\infty(U)$:	zbiór funkcji holomorficznych na otwartym U
$\mathcal{M}$:	superrozmaitość o superwymiarze (m, n)
$C^\infty(\mathcal{M})$:	zbiór superfunkcji nad $\mathcal{M}$
$\mathcal{TM}$:	superrozmaitość styczna do $\mathcal{M}$
$\mathfrak{X}(\mathcal{M})$:	zbiór superpól wektorowych na $\mathcal{M}$
$\mathcal{T}^*\mathcal{M}$:	superrozmaitość kostyczna do $\mathcal{M}$
$\Omega(\mathcal{M})$:	zbiór superform różniczkowych na $\mathcal{M}$

Rozdział 1

Superalgebra

Niniejszy rozdział jest niezbędny do zrozumienia supergeometrii i supermechaniki. Przedstawiono najważniejsze z praktycznego punktu widzenia pojęcia superalgebry liniowej, jednak dziedzina ta jest rozleglejsza i atrakcyjna sama w sobie [12, 16, 29, 33, 40, 43].

Celem superalgebry liniowej jest badanie własności struktur algebraicznych z tak zwaną $\mathbb{Z}_2$-gradacją, w szczególności superprzestrzeni wektorowych, superalgebr i supermodułów, oraz ich morfizmów [34, 38]. W pracy będzie się domyślnie zakładać, że wszystkie rozważane odwzorowania są gładkie, chyba że zaznaczono inaczej. Przez algebry będzie się rozumieć algebry łączne z jedynką. Pojawiające się ciało $\mathbb{K}$ będzie zawsze albo ciałem liczb rzeczywistych, albo ciałem liczb zespolonych.

Dyskusję odwracalności homomorfizmów supermodułów, aksjomatyczną definicję berezinianu, dowód jego istnienia oraz jedyności przeprowadzono tak jak w pracy magisterskiej J. Lamersa [31].

1.1 Superprzestrzenie wektorowe

W przestrzeniach wektorowych służących do analizy układów fizycznych często wyróżnia się podprzestrzenie mające interpretację fizyczną. Prostym przykładem jest przestrzeń Hilberta stanów układu bozonów i fermionów izomorficzna z sumą prostą podprzestrzeni stanów bozonowych i podprzestrzeni stanów fermionowych.

Definicja 1.1.1. *Superprzestrzenią wektorową* nad $\mathbb{K}$ nazywamy przestrzeń wektorową $\mathbb{V}$ nad ciałem $\mathbb{K}$ wraz z parą $(\mathbb{V}_0,\ \mathbb{V}_1)$ podprzestrzeni $\mathbb{V}$ takich, że $\mathbb{V} = \mathbb{V}_0 \oplus \mathbb{V}_1$.

Niech $\mathrm{Id}_{\mathbb{V}}$ oznacza odwzorowanie tożsamościowe, zaś $\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(\mathbb{V})$ oznacza zbiór endomorfizmów przestrzeni wektorowej $\mathbb{V}$ nad ciałem $\mathbb{K}$. Wtedy superprzestrzenią wektorową określamy równoważnie parę $(\mathbb{V}, \alpha)$, gdzie $\alpha \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(\mathbb{V})$ jest takie, że $\alpha^2 = \mathrm{Id}_{\mathbb{V}}$. To oznacza, że $(\alpha - \mathrm{Id}_{\mathbb{V}})(\alpha + \mathrm{Id}_{\mathbb{V}}) = 0$. Wtedy $\mathbb{V}_0 := \ker(\alpha - \mathrm{Id}_{\mathbb{V}})$, zaś $\mathbb{V}_1 := \ker(\alpha + \mathrm{Id}_{\mathbb{V}})$.

Będziemy pisać $(\mathbb{V}, (\mathbb{V}_0, \mathbb{V}_1))$ lub $(\mathbb{V}, \alpha)$, lub po prostu $\mathbb{V}$, kiedy rozkład na podprzestrzenie będzie znany z kontekstu, a $\mathbb{V}$ będziemy nazywać w skrócie superprzestrzenią.

Przykład 1.1.2. Niech $\mathbb{V}$ będzie przestrzenią wektorową. Ponieważ $\mathbb{V} = \mathbb{V} \oplus \{0\}$, przestrzeń $\mathbb{V}$ zadaje superprzestrzenie $(\mathbb{V}, \mathrm{Id}_{\mathbb{V}})$ i $(\mathbb{V}, -\mathrm{Id}_{\mathbb{V}})$.

Przykład 1.1.3. Niech W będzie przestrzenią wektorową nad $\mathbb{R}$ ciągłych funkcji rzeczywistych $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Niech $W_0, W_1 \subset W$ oznaczają kolejno podprzestrzeń funkcji parzystych i nieparzystych. Wtedy $(W, (W_0, W_1))$ jest superprzestrzenią równoważnie określoną przez (W, S_{OY}), gdzie $S_{OY} : W \ni f \mapsto \check{f} \in W$, gdzie $\check{f}(x) := f(-x)$.

Definicja 1.1.4. Jeśli istnieje $p(v) \in \mathbb{Z}_2$ takie, że $v \in \mathbb{V}_{p(v)}$, to $p(v)$ nazywamy *parzystością* v, które jest *parzyste*, kiedy $p(v) = 0$, lub *nieparzyste*, kiedy $p(v) = 1$.

Wektor posiadający dwie parzystości jest wektorem zerowym. Wszystkie elementy $\mathbb{V}$ z parzystością tworzą zbiór $\mathbb{V}_0 \cup \mathbb{V}_1$.

Przykład 1.1.5. Ciało $\mathbb{C}$ jest superprzestrzenią dla $\mathbb{C}_0 := \mathbb{R}$ i $\mathbb{C}_1 := i\mathbb{R}$. Liczby rzeczywiste są parzyste, liczby urojone są nieparzyste.

Przykład 1.1.6. Niech $(\mathbb{V}, \alpha)$ będzie superprzestrzenią. Wtedy $\Pi\mathbb{V} := (\mathbb{V}, -\alpha)$, w której $p^{\Pi\mathbb{V}}(v) = p^{\mathbb{V}}(v) + 1$ dla każdego $v \in \mathbb{V}_0 \cup \mathbb{V}_1 \setminus \{0\}$, jest superprzestrzenią.

Definicja 1.1.7. Niech $\mathbb{S}$ będzie podprzestrzenią wektorową superprzestrzeni $\mathbb{V}$. Powiemy, że $\mathbb{S}$ jest *superpodprzestrzenią* $\mathbb{V}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbb{S}$ jest superprzestrzenią dla $\mathbb{S}_0 = \mathbb{S} \cap \mathbb{V}_0$ oraz $\mathbb{S}_1 = \mathbb{S} \cap \mathbb{V}_1$.

1.1.1 Homomorfizmy superprzestrzeni

Przyjmujemy, że przez resztę rozdziału pierwszego $\mathbb{V}, \mathbb{W}$ będą superprzestrzeniami nad $\mathbb{K}$ z wyróżnionymi podprzestrzeniami $\mathbb{V}_0, \mathbb{V}_1$ oraz $\mathbb{W}_0, \mathbb{W}_1$.

Definicja 1.1.8. Odwzorowanie liniowe $f : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ nazywamy *homomorfizmem superprzestrzeni.* Zbiór wszystkich homomorfizmów superprzestrzeni z $\mathbb{V}$ do $\mathbb{W}$ oznaczamy $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{SVect}}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$.

Do końca tego podrozdziału przyjmiemy, że $f \in \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{SVect}}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$.

Definicja 1.1.9. Jeśli istnieje $p(f) \in \mathbb{Z}_2$ takie, że $f(\mathbb{V}_k) \subset \mathbb{W}_{k+p(f)}$ dla każdego $k \in \mathbb{Z}_2$, to $p(f)$ nazywamy *parzystością* f i mówimy, że f jest *parzysta*, gdy $p(f) = 0$, lub *nieparzysta*, gdy $p(f) = 1$. Jeśli f jest parzysta lub nieparzysta, to mówimy, że f jest *jednorodna.*

Stwierdzenie 1.1.10. *Istnieje jednoznaczny rozkład $f = f_0 + f_1$ na homomorfizmy superprzestrzeni $f_0, f_1 : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ takie, że f_0 jest parzysta i f_1 jest nieparzysta.*

Dowód. Niech $\pi_{\mathbb{V}_k}$ oraz $\pi_{\mathbb{W}_l}$ będą rzutami na podprzestrzenie $\mathbb{V}_k$ oraz $\mathbb{W}_l$ wzdłuż $\mathbb{V}_{k+1}$ i $\mathbb{W}_{l+1}$ dla dowolnych $k, l \in \mathbb{Z}_2$. Wtedy

$$
\begin{aligned}
f &= (\mathrm{Id}_{\mathbb{W}}) \circ f \circ (\mathrm{Id}_{\mathbb{V}}) = (\pi_{\mathbb{W}_0} + \pi_{\mathbb{W}_1}) \circ f \circ (\pi_{\mathbb{V}_0} + \pi_{\mathbb{V}_1}) = \\
&= ((\pi_{\mathbb{W}_0}) \circ f \circ (\pi_{\mathbb{V}_0}) + (\pi_{\mathbb{W}_1}) \circ f \circ (\pi_{\mathbb{V}_1})) + ((\pi_{\mathbb{W}_0}) \circ f \circ (\pi_{\mathbb{V}_1}) + (\pi_{\mathbb{W}_1}) \circ f \circ (\pi_{\mathbb{V}_0})) = f_0 + f_1,
\end{aligned}
$$

gdzie przyjęliśmy definicje

$$
f_0 := (\pi_{\mathbb{W}_0}) \circ f \circ (\pi_{\mathbb{V}_0}) + (\pi_{\mathbb{W}_1}) \circ f \circ (\pi_{\mathbb{V}_1}), \;\; f_1 := (\pi_{\mathbb{W}_0}) \circ f \circ (\pi_{\mathbb{V}_1}) + (\pi_{\mathbb{W}_1}) \circ f \circ (\pi_{\mathbb{V}_0}). \quad (1.1)
$$

Wzory (1.1) jednoznacznie definiują f_0 i f_1 spełniące warunki stwierdzenia. □

Zbiór $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{SVect}}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ tworzy superprzestrzeń wektorową z wyróżnioną parą podprzestrzeni $(\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{SVect}}(\mathbb{V}, \mathbb{W})_0, \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{SVect}}(\mathbb{V}, \mathbb{W})_1)$ homomorfizmów parzystych i nieparzystych.

Interesujące jest pytanie o związek jednorodności homomorfizmu superprzestrzeni ze strukturą jego jądra i obrazu. Pomocne w badaniu tego związku okazuje się pojęcie superpodprzestrzeni z Definicji 1.1.7.

Stwierdzenie 1.1.11. *Niech f będzie jednorodny. Wtedy ker(f) oraz im(f) są odpowiednio superpodprzestrzeniami $\mathbb{V}$ oraz $\mathbb{W}$.*

Dowód. Niech $r \in \ker(f)$. Istnieje jednoznaczny rozkład $r = r_0 + r_1$ na $r_0 \in \mathbb{V}_0, r_1 \in \mathbb{V}_1$. Widać, że

$$r \in \ker(f) \cap \mathbb{V}_0 \oplus \ker(f) \cap \mathbb{V}_1 \iff r_0, r_1 \in \ker(f).$$

Z faktu, że $f(r_0) = -f(r_1) \in \mathbb{W}_0 \cap \mathbb{W}_1 = \{0\}$ otrzymujemy $f(r_0) = f(r_1) = 0$. Z tego wynika, że $\ker(f)$ jest superpodprzestrzenią $\mathbb{V}$.

Jeśli $\omega \in \mathrm{im}(f)$, to istnieje pewien $v \in \mathbb{V}$ spełniający $f(v) = \omega$ oraz jednoznaczny rozkład $v = v_0 + v_1$ dla $v_k \in \mathbb{V}_k$, gdzie $k \in \mathbb{Z}_2$. Z drugiej strony istnieje jednoznaczny rozkład $\omega = \omega_0 + \omega_1$ dla $\omega_k \in \mathbb{W}_k$, dla $k \in \mathbb{Z}_2$. Stąd $\omega_0 + \omega_1 = f(v_0) + f(v_1)$. Zauważmy, że

$$\omega \in \mathrm{im}(f) \cap \mathbb{W}_0 \oplus \mathrm{im}(f) \cap \mathbb{W}_1 \iff \omega_0, \omega_1 \in \mathrm{im}(f).$$

Ze względu na to, że $f(v_{p(f)}) - \omega_0 = \omega_1 - f(v_{p(f)+1}) \in \mathbb{W}_0 \cap \mathbb{W}_1$ otrzymujemy $\omega_0 = f(v_{p(f)})$ oraz $\omega_1 = f(v_{p(f)+1})$ i tym samym $\mathrm{im}(f)$ jest superpodprzestrzenią $\mathbb{W}$. $\square$

Uwaga 1.1.12. Homomorfizm f którego jądro i obraz są superpodprzestrzeniami nie musi być jednorodny. Na przykład endomorfizm g superprzestrzeni $\mathbb{V} := \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$, $\mathbb{V}_0 := \langle e_1, e_2 \rangle$, $\mathbb{V}_1 := \langle e_3 \rangle$ przedstawiony w macierzy w bazie $\varepsilon := \{e_i\}_{i \in \overline{1,3}}$ jako

$$[g]_\varepsilon^\varepsilon = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

nie jest jednorodny, mimo że superpodprzestrzeniami są $\ker(g) = \langle e_2 \rangle \oplus \{0\}$ oraz $\mathrm{im}(g) = \langle e_1, e_2 \rangle \oplus \{0\}$.

Stwierdzenie 1.1.13. *Jeśli* $\ker(f)$ *jest superpodprzestrzenią, to* $\ker(f) = \ker(f_0) \cap \ker(f_1)$.

Dowód. Z definicji jąder $\ker(f_0) \cap \ker(f_1) \subset \ker(f)$. Udowodnijmy teraz, że $\ker(f) \subset \ker(f_0) \cap \ker(f_1)$. Niech $v \in \ker(f)$. Skoro $\ker(f)$ jest superpodprzestrzenią, to $v = v_0 + v_1$, przy czym $v_k \in \ker(f) \cap \mathbb{V}_k$, dla $k \in \mathbb{Z}_2$. W szczególności $v_0, v_1 \in \ker(f)$, więc

$$\mathbb{V}_0 \ni f_0(v_0) = -f_1(v_0) \in \mathbb{V}_1 \text{ oraz } \mathbb{V}_1 \ni f_0(v_1) = -f_1(v_1) \in \mathbb{V}_0.$$

Wobec tego $v \in \ker(f_0) \cap \ker(f_1)$. Zatem $\ker(f) \subset \ker(f_0) \cap \ker(f_1)$. Podsumowując $\ker(f) = \ker(f_0) \cap \ker(f_1)$. $\square$

Stwierdzenie 1.1.14. *Niech $f : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ będzie jednorodnym homomorfizmem superprzestrzeni. Wtedy $f = (-1)^{p(f)} \alpha_{\mathbb{W}} \circ f \circ \alpha_{\mathbb{V}}$.*

Dowód. Równość wystarczy sprawdzić na wektorach jednorodnych, ponieważ dla pozostałych wynika z liniowości. $\square$

1.1.2 Konstrukcje superprzestrzeni

Celem podrozdziału jest przedstawienie standardowych konstrukcji superprzestrzeni. Na szczególną uwagę zasługuje iloczyn tensorowy superprzestrzeni, którego przykładem jest $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{SVect}}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$. Jego zrozumienie jest koniecznie do badania supermacierzy.

Z każdej superprzestrzeni jesteśmy w stanie utworzyć drugą do niej dualną.

Definicja 1.1.15. *Superprzestrzenią dualną* superprzestrzeni $(\mathbb{V}, \alpha)$ nazywamy superprzestrzeń $(\mathbb{V}^*, \alpha^{\mathrm{T}})$.

Stwierdzenie 1.1.16. *Wyróżnione podprzestrzenie $(\mathbb{V}^*)_0, (\mathbb{V}^*)_1 \subset \mathbb{V}^*$ sprzężenia superprzestrzeni $(\mathbb{V}^*, \alpha^{\mathrm{T}})$ spełniają relacje $(\mathbb{V}^*)_0 \simeq (\mathbb{V}_0)^*$ oraz $(\mathbb{V}^*)_1 \simeq (\mathbb{V}_1)^*$.*

Dowód. Widać, że $(\mathbb{V}_0)^* \simeq \mathbb{V}_1^\circ$ oraz $(\mathbb{V}_1)^* \simeq \mathbb{V}_0^\circ$, gdzie $\mathbb{V}_0^\circ$ jest anihilatorem $\mathbb{V}_0$. Udowodnimy, że $\mathbb{V}_1^\circ = \ker\left(\alpha^{\mathrm{T}} - \mathrm{Id}_{\mathbb{V}^*}\right)$. Niech $\omega \in \mathbb{V}^*$. Wtedy

$$\begin{aligned} \forall v_0 \in \mathbb{V}_0, \quad & \left[\left(\alpha^{\mathrm{T}} - \mathrm{Id}_{\mathbb{V}^*}\right)\omega\right](v_0) = (\omega \circ \alpha)(v_0) - \omega(v_0) = 0, \\ \forall v_1 \in \mathbb{V}_1, \quad & \left[\left(\alpha^{\mathrm{T}} - \mathrm{Id}_{\mathbb{V}^*}\right)\omega\right](v_1) = (\omega \circ \alpha)(v_1) - \omega(v_1) = -2\omega(v_1). \end{aligned}$$

Stąd $\omega \in \mathbb{V}_1^\circ$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\omega \in \ker\left(\alpha^{\mathrm{T}} - \mathrm{Id}_{\mathbb{V}^*}\right)$, a więc $\mathbb{V}_1^\circ = \ker\left(\alpha^{\mathrm{T}} - \mathrm{Id}_{\mathbb{V}^*}\right)$. Wówczas $(\mathbb{V}_0)^* \simeq \mathbb{V}_1^\circ = \ker\left(\alpha^{\mathrm{T}} - \mathrm{Id}_{\mathbb{V}^*}\right) = (\mathbb{V}^*)_0$. Tak samo $(\mathbb{V}^*)_1 \simeq (\mathbb{V}_1)^*$. □

Od teraz superprzestrzeń dualną $(\mathbb{V}, (\mathbb{V}_0, \mathbb{V}_1))$ będziemy oznaczać $(\mathbb{V}^*, (\mathbb{V}_0^*, \mathbb{V}_1^*))$. Posiadając dwie superprzestrzenie jesteśmy w stanie stworzyć ich sumę prostą i iloczyn tensorowy.

Definicja 1.1.17. *Sumą prostą superprzestrzeni* $(\mathbb{V}, \alpha_{\mathbb{V}})$ oraz $(\mathbb{W}, \alpha_{\mathbb{W}})$ nazywamy superprzestrzeń $(\mathbb{V} \oplus \mathbb{W}, \alpha_{\mathbb{V}} \oplus \alpha_{\mathbb{W}})$.

Widać, że $(\mathbb{V} \oplus \mathbb{W})_0 \simeq \mathbb{V}_0 \oplus \mathbb{W}_0$ oraz $(\mathbb{V} \oplus \mathbb{W})_1 \simeq \mathbb{V}_1 \oplus \mathbb{W}_1$.

Definicja 1.1.18. *Iloczynem tensorowym superprzestrzeni* $(\mathbb{V}, \alpha_{\mathbb{V}})$ oraz $(\mathbb{W}, \alpha_{\mathbb{W}})$ nazywamy superprzestrzeń $(\mathbb{V} \otimes \mathbb{W}, \alpha_{\mathbb{V}} \otimes \alpha_{\mathbb{W}})$.

Stwierdzenie 1.1.19. *Wyróżnione podprzestrzenie $(\mathbb{V} \otimes \mathbb{W})_0, (\mathbb{V} \otimes \mathbb{W})_1 \subset \mathbb{V} \otimes \mathbb{W}$ iloczynu tensorowego superprzestrzeni $(\mathbb{V}, \alpha_{\mathbb{V}})$ oraz $(\mathbb{W}, \alpha_{\mathbb{W}})$ spełniają relacje:*

$$(\mathbb{V} \otimes \mathbb{W})_0 \simeq (\mathbb{V}_0 \otimes \mathbb{W}_0) \oplus (\mathbb{V}_1 \otimes \mathbb{W}_1), \quad (\mathbb{V} \otimes \mathbb{W})_1 \simeq (\mathbb{V}_0 \otimes \mathbb{W}_1) \oplus (\mathbb{V}_1 \otimes \mathbb{W}_0).$$

Dowód. Niech ι_0, ι_1 będą trywialnymi zanurzeniami $T_0 := (\mathbb{V}_0 \otimes \mathbb{W}_0) \oplus (\mathbb{V}_1 \otimes \mathbb{W}_1)$ i $T_1 := (\mathbb{V}_0 \otimes \mathbb{W}_1) \oplus (\mathbb{V}_0 \otimes \mathbb{W}_1)$ w $\mathbb{V} \otimes \mathbb{W}$. Zauważmy, że $\iota_0(T_0) \subset \ker(\alpha_{\mathbb{V}} \otimes \alpha_{\mathbb{W}} - \mathbb{I}_{\mathbb{V} \otimes \mathbb{W}})$ oraz $\iota_1(T_1) \subset \ker(\alpha_{\mathbb{V}} \otimes \alpha_{\mathbb{W}} + \mathbb{I}_{\mathbb{V} \otimes \mathbb{W}})$. Ponadto $T_0 \cap T_1 = \{0\}$, więc z rachunku wymiarów wynika teza. □

Przykład 1.1.20. Istnieje izomorfizm superprzestrzeni $\Psi : \mathbb{W} \otimes \mathbb{V}^* \to \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{SVect}}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$. Obrazem $e \otimes \omega \in \mathbb{W} \otimes \mathbb{V}^*$ w tym izomorfizmie jest f takie, że $f(v) := e \cdot \omega(v)$ dla każdego $v \in \mathbb{V}$. W szczególności parzystość f jest taka sama jak parzystość przeciwobrazu f w tym izomorfizmie. Wynika z tego Stwierdzenie 1.1.10 oraz postać wzorów (1.1), ponieważ

$$(\mathbb{W} \otimes \mathbb{V}^*)_0 \simeq (\mathbb{W}_0 \otimes \mathbb{V}_0^*) \oplus (\mathbb{W}_1 \otimes \mathbb{V}_1^*), \ (\mathbb{W} \otimes \mathbb{V}^*)_1 \simeq (\mathbb{W}_0 \otimes \mathbb{V}_1^*) \oplus (\mathbb{W}_1 \otimes \mathbb{V}_0^*). \tag{1.2}$$

Dla dowolnego $f \in \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{SVect}}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ mamy $\Psi^{-1}(f) = e \otimes \omega \in \mathbb{W} \otimes \mathbb{V}^*$, a zatem z (1.2) otrzymujemy

$$f = \Psi(e \otimes \omega) = \Psi(e_0 \otimes \omega_0 + e_1 \otimes \omega_1) + \Psi(e_0 \otimes \omega_1 + e_1 \otimes \omega_0) = f_0 + f_1.$$

1.2 Superalgebry

Powstaje pytanie o możliwości zadania mnożenia na superprzestrzeni. Jedną z nich jest wprowadzenie struktury algebraicznej zwanej superalgebrą.

Definicja 1.2.1. Niech $\mathbb{A}$ będzie algebrą nad $\mathbb{K}$ oraz $(\mathbb{A}, (\mathbb{A}_0, \mathbb{A}_1))$ będzie superprzestrzenią. Mówimy, że $\mathbb{A}$ jest *superalgebrą* nad $\mathbb{K}$, jeśli

$$\forall i, j \in \mathbb{Z}_2, \ \forall a \in \mathbb{A}_i, b \in \mathbb{A}_j, \qquad ab \in \mathbb{A}_{i+j}.$$

Powiemy, że superalgebra $\mathbb{A}$ jest *superprzemienna*, jeśli

$$\forall i, j \in \mathbb{Z}_2, \ \forall a \in \mathbb{A}_i, b \in \mathbb{A}_j, \qquad ab = (-1)^{ij} ba.$$

Przykład 1.2.2. Na ciele $\mathbb{K}$ można wprowadzić strukturę superalgebry superprzemiennej $(\mathbb{K}, (\mathbb{K}, \{0\}))$. Od teraz przyjmujemy to za domyślną strukturę superalgebry na $\mathbb{K}$.

Przykład 1.2.3. Niech M będzie skończenie wymiarową rozmaitością różniczkową nad $\mathbb{K}$. Niech $\Omega^k(M)$ oznacza zbiór k-form nad rozmaitością M. Przestrzeń $\Omega(M) := \bigoplus_{k=0}^{\infty} \Omega^k(M)$ jest superprzestrzenią wektorową po wyróżnieniu podprzestrzeni $\Omega(M)_0 := \bigoplus_{k=0}^{\infty} \Omega^{2k}(M)$ oraz $\Omega(M)_1 := \bigoplus_{k=0}^{\infty} \Omega^{2k+1}(M)$. Superprzestrzeń $\Omega(M)$ wraz z iloczynem zewnętrznym jest superalgebrą superprzemienną, ponieważ iloczyn zewnętrzny jest dwuliniowy i zachodzi:

$$\forall \alpha \in \Omega^k(M), \ \forall \beta \in \Omega^l(M), \quad \alpha \wedge \beta = (-1)^{kl} \beta \wedge \alpha = (-1)^{p(\alpha)p(\beta)} \beta \wedge \alpha.$$

Uwaga 1.2.4. Nie wszystkie superalgebry są superprzemienne. $(\mathbb{C}, (\mathbb{R}, \mathrm{i}\mathbb{R}))$ jest superalgebrą nad $\mathbb{R}$, która nie jest superprzemienna, bo $\mathrm{i} \cdot \mathrm{i} \neq (-1)^{p(\mathrm{i})p(\mathrm{i})} \mathrm{i} \cdot \mathrm{i}$.

Definicja 1.2.5. Dla $L \in \mathbb{N}$ *algebrą* $\mathrm{Grass}(\mathbb{K}, L)$ nazywamy algebrę nad ciałem $\mathbb{K}$ generowaną przez $1, \beta_1, \ldots, \beta_L$, które spełniają relacje

$$1\beta_i = \beta_i = \beta_i 1, \quad \beta_i \beta_j = -\beta_j \beta_i, \quad i, j \in \{1, \ldots, L\}. \tag{1.3}$$

Algebry z Definicji 1.2.5 nazywamy *algebrami Grassmanna*. Algebry te pełnią kluczową rolę w opisie supersymetrycznych modelów fizycznych [38]. Wymieniając generatory algebry Grassmanna dla uproszczenia będziemy pomijać jedynkę, należy jednak pamiętać o jej istnieniu.

Definicja 1.2.6. Niech $L \in \mathbb{N}$ oraz $k \leqslant L$. Przyjmijmy, że liczby całkowite $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ spełniają $1 \leqslant \lambda_1 < \ldots < \lambda_k \leqslant L$. *Multi-indeksem* $\underline{\lambda}$ nazywamy napis $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$. Liczbę $\mathfrak{m}(\underline{\lambda}) := k$ nazywamy *długością multi-indeksu* $\underline{\lambda}$. *Multi-indeksem pustym* o długości 0 nazywamy znak $\oslash$. Zbiór multi-indeksów długości nie większej niż L oznaczamy $\mathfrak{M}^L$.

Dla każdego naturalnego L definiujemy rozkład $\mathfrak{M}^L = \mathfrak{M}^L_0 \cup \mathfrak{M}^L_1$ na podzbiory multi-indeksów parzystej ($\mathfrak{M}^L_0$) i nieparzystej długości ($\mathfrak{M}^L_1$), i wprowadzamy odwzorowanie

$$\mathfrak{M}^L \ni \underline{\lambda} \mapsto \beta_{[\underline{\lambda}]} := \begin{cases} \beta_{\lambda_1} \ldots \beta_{\lambda_k}, & \mathfrak{m}(\underline{\lambda}) > 1, \\ 1, & \mathfrak{m}(\underline{\lambda}) = 0. \end{cases}$$

Definicja 1.2.7. *Multi-indeksem dopełniającym* do $\underline{\lambda} \in \mathfrak{M}^L$ nazywamy multi-indeks $\underline{\lambda}^c \in \mathfrak{M}^L$ taki, że nie pojawiają się w nim żadne indeksy z $\underline{\lambda}$ oraz $\mathfrak{m}(\underline{\lambda}^c) = L - \mathfrak{m}(\underline{\lambda})$.

Wówczas dowolny $X \in \mathrm{Grass}(\mathbb{K}, L)$ ma postać

$$X = \sum_{\underline{\lambda} \in \mathfrak{M}^L} X_{\underline{\lambda}} \beta_{[\underline{\lambda}]},$$

gdzie $X_{\underline{\lambda}} \in \mathbb{K}$. Ponieważ liczba multi-indeksów długości k to liczba sposobów wybrania k elementów wśród L generatorów, wymiar algebry $\mathrm{Grass}(\mathbb{K}, L)$ wynosi $\dim \mathrm{Grass}(\mathbb{K}, L) = |\mathfrak{M}^L| = \sum_{k=0}^{L} \binom{L}{k} = 2^L$. Strukturę superalgebry superprzemiennej na $\mathrm{Grass}(\mathbb{K}, L)$ wprowadzamy poprzez

$$\mathrm{Grass}(\mathbb{K}, L)_0 := \left\{ \sum_{\underline{\lambda} \in \mathfrak{M}^L_0} x_{\underline{\lambda}} \beta_{[\underline{\lambda}]} \,\middle|\, x_{\underline{\lambda}} \in \mathbb{K} \right\}, \ \mathrm{Grass}(\mathbb{K}, L)_1 := \left\{ \sum_{\underline{\lambda} \in \mathfrak{M}^L_1} \xi_{\underline{\lambda}} \beta_{[\underline{\lambda}]} \,\middle|\, \xi_{\underline{\lambda}} \in \mathbb{K} \right\}.$$

Superprzemienność $\mathrm{Grass}(\mathbb{K}, L)$ wynika z relacji (1.3).

Definicja 1.2.8. Superalgebrą $\mathrm{Grass}(\mathbb{K})$ nazywamy superalgebrę nieskończenie wymiarową nad $\mathbb{K}$ generowaną przez $1, \beta_1, \beta_2, \dots$ spełniające relacje (1.3). Zbiór jej multi-indeksów oznaczamy przez $\mathfrak{M}^\infty$.

1.2.1 Homomorfizmy superalgebr

Definicja 1.2.9. Niech $\mathbb{A}$ i $\mathbb{B}$ będą superalgebrami. Niech $f : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ będzie homorfizmem superprzestrzeni z parzystością $p(f)$. Powiemy, że f jest *homomorfizmem superalgebr*, jeśli

$$\forall k \in \mathbb{Z}_2, \forall a \in \mathbb{A}_k, b \in \mathbb{A}, \quad f(ab) = (-1)^{p(f)k} f(a) f(b).$$

Stwierdzenie 1.2.10. *Istnieje dokładnie jedno odwzorowanie* $\varepsilon : \mathrm{Grass}(\mathbb{K}, L) \to \mathbb{K}$ *będące homomorfizmem superalgebr takim, że* $\varepsilon(1) = 1$ *oraz* $\varepsilon(\beta_i) = 0, \ \forall i \in \overline{1, L}$.

Dowód. Przypuśćmy, że istnieje pewien $\tilde{\varepsilon}$ spełniający warunki twierdzenia. Niech $\underline{\lambda} \in \mathfrak{M}^L$ oraz $\mathfrak{m}(\underline{\lambda}) > 1$. Wtedy

$$\tilde{\varepsilon}\left(\beta_{[\underline{\lambda}]}\right) = \tilde{\varepsilon}\left(\beta_{\lambda_1}\right) \tilde{\varepsilon}\left(\beta_{\lambda_2} \dots \beta_{\lambda_{\mathfrak{m}(\underline{\lambda})-1}} \beta_{\lambda_{\mathfrak{m}(\underline{\lambda})}}\right) = 0.$$

Wobec tego

$$\forall X \in \mathrm{Grass}(\mathbb{K}, L), \quad \tilde{\varepsilon}(X) = \tilde{\varepsilon}\left(\sum_{\underline{\lambda} \in \mathfrak{M}^L} X_{\underline{\lambda}} \beta_{[\underline{\lambda}]} \right) = \tilde{\varepsilon}(X_\oslash \cdot 1) = X_\oslash. \tag{1.4}$$

Warunek (1.4) jednoznacznie określa parzysty homomorfizm superalgebr $\tilde{\varepsilon}$. Definiujemy $\varepsilon := \tilde{\varepsilon}$. □

Widać, że warunek (1.4) wynikający z założeń Stwierdzenia 1.2.10 jest im równoważny.

Definicja 1.2.11. Homomorfizm superalgebr $\varepsilon : \mathrm{Grass}(\mathbb{K}, L) \to \mathbb{K}$ taki, że $\varepsilon(X) = X_\oslash$ dla każdego $X \in \mathrm{Grass}(\mathbb{K}, L)$, nazywamy *rzutem podstawowym* algebry $\mathrm{Grass}(\mathbb{K}, L)$.

1.2.2 Superróżniczkowania

Definicja 1.2.12. Niech $\mathbb{A}$ będzie superprzemienną superalgebrą nad $\mathbb{K}$. Powiemy, że endomorfizm superprzestrzeni $D : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ o parzystości $p(D)$ jest *superróżniczkowaniem jednorodnym* jeśli spełnia *superregułę Leibniza*:

$$\forall k \in \mathbb{Z}_2, \forall a \in \mathbb{A}_k, b \in \mathbb{A}, \quad D(ab) = D(a)b + (-1)^{p(D)k} aD(b).$$

Superróżniczkowaniami nazywamy kombinacje liniowe *superróżniczkowań* jednorodnych.

Postać obrazu w superróżniczkowaniu elementów, które nie są jednorodne, wynika z liniowości. Zbiór superróżniczkowań w $\mathbb{A}$ oznaczamy przez $\mathrm{Der}(\mathbb{A})$.

Niech $E \xrightarrow{\pi} M$ będzie wiązką wektorową. Przez $\Gamma(E)$ oznaczmy zbiór jej cięć, to jest zbiór odwzorowań $X : M \to E$ takich, że $\pi \circ X = \mathrm{Id}_M$.

Stwierdzenie 1.2.13. *Operator różniczkowania zewnętrznego d, operator ι_X zwężenia z polem wektorowym $X \in \Gamma(TM)$ oraz pochodna Liego $\mathcal{L}_X$ są superróżniczkowaniami $\Omega(M)$. Ponadto d oraz ι_X są nieparzyste, podczas gdy $\mathcal{L}_X$ jest parzysta.*

Dowód. Z liniowości d i ι_X, i własności iloczynu zewnętrznego wynika, że dla każdego $\alpha \in \Omega^k(M)$ oraz dla każdego $\beta \in \Omega^l(M)$ zachodzi

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta, \qquad \iota_X(\alpha \wedge \beta) = (\iota_X \alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge (\iota_X \beta).$$

Ponieważ $(-1)^k = (-1)^{1 \cdot p(\alpha)}$, operatory d oraz ι_X są superróżniczkowaniami nieparzystymi. Zauważmy, że

$$\begin{aligned} d \circ \iota_X(\alpha \wedge \beta) &= d((\iota_X \alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge (\iota_X \beta)) = \\ &= (d \circ \iota_X \alpha) \wedge \beta + (-1)^{k-1} (\iota_X \alpha) \wedge d\beta + (-1)^k d\alpha \wedge (\iota_X \beta) + \alpha \wedge (d \circ \iota_X \beta). \end{aligned}$$

Podobnie

$$\iota_X \circ d(\alpha \wedge \beta) = (\iota_X \circ d\alpha) \wedge \beta + (-1)^{k+1} d\alpha \wedge (\iota_X \beta) + (-1)^k (\iota_X \alpha) \wedge d\beta + \alpha \wedge (\iota_X \circ d\beta).$$

Z dodania stronami dwóch ostatnich równości i ze wzoru Cartana otrzymujemy

$$\mathcal{L}_X(\alpha \wedge \beta) = (\mathcal{L}_X \alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge (\mathcal{L}_X \beta).$$

Zatem $\mathcal{L}_X$ jest parzystym superróżniczkowaniem w $\Omega(M)$. □

Uwaga 1.2.14. Superróżniczkowania nie muszą być homomorfizmami superalgebr. Dla sfery S o niezerowym wymiarze operator d nie jest endomorfizmem w superalgebrze $\Omega(S)$, gdyż

$$f \in C^\infty(M),\ f \neq const, \quad \Rightarrow \quad d(f^2) = 2f df \neq df \wedge df = 0.$$

1.3 Supermoduły

Moduły są analogiczne do pierścieni wektorowych, tyle że są nad pierścieniami, nie ciałami (więcej o modułach można przeczytać w [32]). Supermoduły są modułami rozszerzonymi o $\mathbb{Z}_2$-gradację. Niniejszy podrozdział w przyszłości umożliwi lepsze zrozumienie supermacierzy, które są reprezentacjami homomorfizmów supermodułów.

Do końca rozdziału pierwszego $\mathbb{A}$ będzie zawsze superprzemienną superalgebrą.

Definicja 1.3.1. Jeśli superprzestrzeń $\mathbb{V}$ jest lewym modułem nad algebrą $\mathbb{A}$ oraz

$$\forall i, j \in \mathbb{Z}_2, \forall a \in \mathbb{A}_i, \forall v \in \mathbb{V}_j, \quad av \in \mathbb{V}_{i+j}, \tag{1.5}$$

to mówimy, że $\mathbb{V}$ jest *lewym super* $\mathbb{A}$*-modułem*.

Analogicznie definiujemy prawy super $\mathbb{A}$-moduł. Superalgebra $\mathbb{A}$ jest w naturalny sposób lewym i prawym super $\mathbb{A}$-modułem sama nad sobą.

Supermoduły są uogólnieniami superprzestrzeni, podobnie jak moduły uogólniają przestrzenie wektorowe. Jeśli $\mathbb{A} = \mathbb{K}$, to supermoduł $\mathbb{V}$ jest po prostu superprzestrzenią.

Stwierdzenie 1.3.2. $\mathrm{Der}(\mathbb{A})$ *jest lewym super* $\mathbb{A}$*-modułem z dodawaniem*

$$\forall a \in \mathbb{A},\ \forall D_1, D_2 \in \mathrm{Der}(\mathbb{A}), \quad (D_1 + D_2)(a) := D_1(a) + D_2(a)$$

i mnożeniem przez elementy $\mathbb{A}$

$$\forall a, b \in \mathbb{A},\ \forall D \in \mathrm{Der}(\mathbb{A}), \quad (aD)(b) := a \cdot D(b).$$

Dowód. Niech $a, b, c \in \mathbb{A}$ mają parzystości $p(a), p(b), p(c)$ oraz D ma parzystość $p(D)$. Zauważmy, że $aD(b) \in \mathbb{A}_{p(a)+p(D)+p(b)}$, zatem aD ma parzystość $p(a) + p(D)$. Ponadto

$$(aD)(bc) = a \cdot (D(b)c + (-1)^{p(D)p(b)} bD(c)) = (aD)(b)c + (-1)^{(p(a)+p(D))p(b)} b(aD)(c). \tag{1.6}$$

Wobec tego aD jest superróżniczkowaniem z parzystością. Teraz widać, że $\mathrm{Der}(\mathbb{A})$ tworzy lewy super $\mathbb{A}$-moduł. □

Dzięki superprzemienności $\mathbb{A}$ można wprowadzić na lewym super $\mathbb{A}$-module $\mathbb{V}$ opisanym w Definicji 1.3.1 strukturę prawego super $\mathbb{A}$-modułu za pomocą mnożenia

$$\forall i, j \in \mathbb{Z}_2, \forall a \in \mathbb{A}_i, \forall v \in \mathbb{V}_j, \quad va := (-1)^{ij} av \in \mathbb{V}. \tag{1.7}$$

Na prawym super $\mathbb{A}$-module jesteśmy w stanie skonstruować lewy w analogiczny sposób. Podobnie jak w przypadku przestrzeni wektorowych i modułów, istnieje odpowiednik pojęcia bazy dla supermodułów.

Definicja 1.3.3. Niech $\mathbb{V}$ będzie prawym super $\mathbb{A}$-modułem. Jeśli istnieją $v_1, \ldots, v_m \in \mathbb{V}_0$ oraz $v_{m+1}, \ldots, v_{m+n} \in \mathbb{V}_1$ takie, że dla każdego $v \in \mathbb{V}$ istnieje jedyny $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{m+n}) \in \mathbb{A}^{m+n}$ o własności

$$v = \sum_{k=1}^{m+n} v_k \alpha_k,$$

to mówimy, że układ wektorów $\{v_1, \ldots v_{m+n}\}$ jest *prawą superbazą* w $\mathbb{V}$. Samo $\mathbb{V}$ nazywamy *wolnym* prawym super $\mathbb{A}$-modułem, zaś (m, n) nazywamy *superwymiarem* $\mathbb{V}$.

Chociaż moduły nie muszą posiadać bazy, to własność ta jest powszechna wśród supermodułów pojawiających się w problemach fizyki teoretycznej opartej na supergeometrii.

Stwierdzenie 1.3.4. *Niech* $\mathbb{V}$ *będzie wolnym prawym super* $\mathbb{A}$*-modułem superwymiaru* (m, n) *z superbazą* $\{v_1, \ldots v_{m+n}\}$*. Jeśli* $v \in \mathbb{V}_0$*, to*

$$v = \sum_{k=1}^{m+n} v_k \alpha_k$$

dla $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \alpha_{m+1}, \ldots \alpha_{m+n}) \in \mathbb{A}_0^m \times \mathbb{A}_1^n$.

Dowód. Z definicji wolnego supermodułu wiemy, że istnieje dokładnie jeden skończony ciąg $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{m+n}) \in \mathbb{A}^{m+n}$ odpowiadający rozkładowi v w superbazie z treści twierdzenia. Niech α_k^0, α_k^1 oznaczają odpowiednio rzuty na $\mathbb{A}_0$ oraz $\mathbb{A}_1$ współczynnika $\alpha_k \in \mathbb{A}$. Zauważmy, że

$$v - \left(\sum_{i=1}^{m} v_i \alpha_i^0 + \sum_{j=m+1}^{m+n} v_j \alpha_j^1 \right) = \left(\sum_{i=1}^{m} v_i \alpha_i^1 + \sum_{j=m+1}^{m+n} v_j \alpha_j^0 \right). \tag{1.8}$$

Skoro $v \in \mathbb{V}_0$ oraz $\mathbb{V}_0 \cap \mathbb{V}_1 = 0$, to $\left(\sum_{i=1}^{m} v_i \alpha_i^1 + \sum_{j=m+1}^{m+n} v_j \alpha_j^0 \right) = 0$. Z jedyności rozkładu zera w $\mathbb{V}$ mamy, że $\alpha_i^1 = \alpha_j^0 = 0$ dla $i \in \overline{1, m}$ oraz $j \in \overline{m+1, m+n}$. $\square$

Z dowodu Stwierdzenia 1.3.4 natychmiast wynikają następujące wnioski:

Wniosek 1.3.5. *Niech $\mathbb{V}$ będzie takie jak w Stwierdzeniu 1.3.4. Jeśli $v \in \mathbb{V}_1$ to zachodzi*

$$v = \sum_{k=1}^{m+n} v_k \alpha_k$$

dla $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \alpha_{m+1}, \ldots \alpha_{m+n}) \in \mathbb{A}_1^m \times \mathbb{A}_0^n$.

Wniosek 1.3.6. *Jeżeli $\mathbb{V}$ jest wolnym prawym super $\mathbb{A}$-modułem superwymiaru (m, n), to $\mathbb{V}_0 \simeq \mathbb{A}_0^m \times \mathbb{A}_1^n$ oraz $\mathbb{V}_1 \simeq \mathbb{A}_1^m \times \mathbb{A}_0^n$.*

Widać, że jeśli $\{v_1, \ldots v_{m+n}\}$ jest *prawą superbazą* w supermodule $\mathbb{V}$, to po nadaniu w $\mathbb{V}$ struktury lewego supermodułu, układ $\{v_1, \ldots v_{m+n}\}$ jest także lewą superbazą – dla dowolnego $v \in \mathbb{V}$ rozkład w prawej superbazie jednoznacznie określa rozkład w lewej.

$$v = \sum_{k=1}^{m+n} v_k \alpha_k = \sum_{k=1}^{m+n} (-1)^{p(v_k)p(a_k)} a_k v_k.$$

Od teraz będziemy rozważać supermoduły obustronne i mówić po prostu o superbazie, to znaczy zgodnie z relacją (1.7) nadamy każdemu prawemu (lewemu) super $\mathbb{A}$-modułowi $\mathbb{V}$ strukturę lewego (prawego) super $\mathbb{A}$-modułu definiując lewostronne (prawostronne) mnożenie

$$\forall i, j \in \mathbb{Z}_2, \forall a \in \mathbb{A}_i, \forall v \in \mathbb{V}_j, \quad av := (-1)^{ij} va \qquad \Big(va := (-1)^{ij} av \Big).$$

1.3.1 Homomorfizmy supermodułów

Znając definicję supermodułów, możemy zacząć badać odwzorowania między nimi.

Definicja 1.3.7. Niech $\mathbb{V}, \mathbb{W}$ będą super $\mathbb{A}$-modułami. Homomorfizm superprzestrzeni $f : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ nazywamy *homomorfizmem supermodułów*, jeśli

$$\forall a \in \mathbb{A}, \ \forall v \in \mathbb{V}, \quad f(va) = f(v)a. \tag{1.9}$$

Zbiór wszystkich homomorfizmów supermodułów z $\mathbb{V}$ do $\mathbb{W}$ oznaczamy $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$.

Stwierdzenie 1.3.8. *Niech $f = f_0 + f_1$ będzie rozkładem ze Stwierdzenia 1.1.10 homomorfizmu $f \in \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$. Wtedy f_0 i f_1 są homomorfizmami supermodułów.*

Dowód. Weźmy dowolne $i, j \in \mathbb{Z}_2$ oraz $v \in \mathbb{V}_i$, oraz $a \in \mathbb{A}_j$. Wtedy

$$f_0(va) + f_1(va) = f(va) = f(v)a = f_0(v)a + f_1(v)a.$$

Wówczas

$$\mathbb{W}_{i+j} \ni f_0(va) - f_0(v)a = f_1(v)a - f_1(va) \in \mathbb{W}_{i+j+1},$$

a stąd $f_0(va) = f_0(v)a$ i $f_1(va) = f_1(v)a$. Z liniowości f_0 i f_1 wynika, że są homomorfizmami supermodułów. $\square$

Na $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ zadajemy strukturę superprzestrzeni poprzez zdefiniowanie

$$\begin{aligned}\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{V}, \mathbb{W})_0 &:= \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{V}, \mathbb{W}) \cap \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{SVect}}(\mathbb{V}, \mathbb{W})_0,\\ \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{V}, \mathbb{W})_1 &:= \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{V}, \mathbb{W}) \cap \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{SVect}}(\mathbb{V}, \mathbb{W})_1,\end{aligned}$$

co oznacza, że $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ staje się superpodprzestrzenią $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{SVect}}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$.

Wniosek 1.3.9. *Niech $f \in \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ będzie jednorodny z parzystością $p(f)$. Wtedy warunek (1.9) przybiera równoważną postać*

$$\forall k \in \mathbb{Z}_2, \forall a \in \mathbb{A}_k, \forall v \in \mathbb{V}, \quad f(av) = (-1)^{p(f)k} a f(v). \tag{1.10}$$

Dowód. Załóżmy, że zachodzi warunek (1.9). Dla $a \in \mathbb{A}$ z parzystością $p(a)$ oraz $v \in \mathbb{V}$ z parzystością $p(v)$ mamy:

$$\begin{aligned}f(av) = (-1)^{p(a)p(v)} f(va) = (-1)^{p(a)p(v)} f(v)a &= (-1)^{p(a)(p(v)+p(f(v)))} a f(v)\\ = (-1)^{p(a)(2p(v)+p(f))} a f(v) &= (-1)^{p(a)p(f)} a f(v).\end{aligned}$$

Z liniowości $f(av) = (-1)^{p(a)p(f)} a f(v)$ zachodzi dla każdego $v \in \mathbb{V}$. Dowód implikacji w drugą stronę jest analogiczny. $\square$

1.3.2 Konstrukcje supermodułów

Przez resztę tego podrozdziału $\mathbb{V}$ będzie super $\mathbb{A}$-modułem.

Definicja 1.3.10. *Supermodułem dualnym* supermodułu $\mathbb{V}$ nazywamy super $\mathbb{A}$-moduł $\mathbb{V}^* := \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{V}, \mathbb{A})$ z mnożeniem

$$\forall a \in \mathbb{A},\ \forall \omega \in \mathbb{V}^*,\ \forall v \in \mathbb{V}, \quad \langle a\omega, v\rangle := a\langle \omega, v\rangle. \tag{1.11}$$

Stwierdzenie 1.3.11. *Niech $\mathbb{V}$ będzie wolny i ma superwymiar (m, n). Wtedy $\mathbb{V}^*$ także jest wolny i ma superwymiar (m, n).*

Dowód. Niech super bazą w $\mathbb{V}$ będzie $\mathcal{B}_{\mathbb{V}} := \{v_i\}_{i \in \overline{1, m+n}}$. Definiujemy *superbazę dualną* do $\mathcal{B}_{\mathbb{V}}$ jako układ odwzorowań $\mathcal{B}_{\mathbb{V}^*} := \{v^j\}_{j \in \overline{1, m+n}}$ takich, że

$$\langle v^j, v_i\rangle = \delta^j_i.$$

Widać, że dla każdego $j \in \overline{1, m+n}$ odwzorowanie v^j należy do $\mathbb{V}^*$ oraz jest jednorodne z parzystością $p(v^j) = p(v_j)$. Ponadto dowolne odwzorowanie ω z $\mathbb{V}^*$ można zapisać jako liniową kombinację nad $\mathbb{A}$ elementów v^j:

$$\omega(v) = \omega\left(\sum_{i=1}^{m+n} v_i \alpha_i\right) = \sum_{i=1}^{m+n} \omega(v_i)\alpha_i = \sum_{i=1}^{m+n}\sum_{j=1}^{m+n} \beta_j v^j(v_i)\alpha_i,$$

dla pewnych $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{A}$, gdzie $i, j \in \overline{1, m+n}$. Z tego wynika, że układ wektorów $\mathcal{B}_{\mathbb{V}^*}$ jest superbazą w $\mathbb{V}^*$, który ma superwymiar (m, n). □

Stwierdzenie 1.3.12. *Niech $\mathbb{V}$ będzie wolny. Wtedy zachodzi*

$$\forall a \in \mathbb{A}, \forall \omega \in \mathbb{V}^*, \forall v \in \mathbb{V}, \quad \langle \omega a, v\rangle = \langle \omega, av\rangle. \tag{1.12}$$

Dowód. Dla ω, a, v mających parzystości $p(\omega), p(a), p(v)$ obliczamy

$$\begin{aligned}\langle \omega a, v\rangle = (-1)^{p(a)p(\omega)} a\langle \omega, v\rangle = (-1)^{p(a)p(\omega)+p(a)(p(\omega)+p(v))}\langle \omega, v\rangle a = (-1)^{p(a)p(v)}\langle \omega, va\rangle \\ = \langle \omega, av\rangle.\end{aligned}$$

□

Niech S będzie podzbiorem przestrzeni wektorowej $\mathbb{V}$ nad ciałem $\mathbb{K}$. Przez $\mathrm{span}_{\mathbb{K}} S$ będziemy rozumieć powłokę liniową S nad $\mathbb{K}$, czyli najmniejszą w sensie zawierania podprzestrzeń liniową przestrzeni $\mathbb{V}$ zawierającą zbiór S.

Definicja 1.3.13. Niech $\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2$ będą super $\mathbb{A}$-modułami. *Iloczynem tensorowym supermodułów* $\mathbb{V}_1$ i $\mathbb{V}_2$ nazywamy iloraz superprzestrzeni wektorowej $\mathbb{V}_1 \otimes \mathbb{V}_2$ przez podprzestrzeń

$$\mathrm{span}_{\mathbb{K}}\{v_1 a \otimes v_2 - v_1 \otimes a v_2 \mid a \in \mathbb{A}, v_1 \in \mathbb{V}_1, v_2 \in \mathbb{V}_2\},$$

wraz z mnożeniem

$$a \cdot (v_1 \otimes v_2) := (a \cdot v_1) \otimes v_2, \quad (v_1 \otimes v_2) \cdot a := v_1 \otimes (v_2 \cdot a).$$

Widać, że iloczyn tensorowy supermodułów z Definicji 1.3.13 jest super $\mathbb{A}$-modułem. Co więcej, istnieje kanoniczny izomorfizm Ψ pomiędzy iloczynami tensorowymi supermodułów $\mathbb{V}_1 \otimes \mathbb{V}_2$ oraz $\mathbb{V}_2 \otimes \mathbb{V}_1$ określony na jednorodnych $v_1 \in \mathbb{V}_1, v_2 \in \mathbb{V}_2$ jako

$$v_1 \otimes v_2 \mapsto (-1)^{p(v_1)p(v_2)} v_2 \otimes v_1.$$

1.4 Supermacierze

Przykład 1.4.1. Jeśli $\mathbb{V}, \mathbb{W}$ są wolnymi prawymi super $\mathbb{A}$-modułami o superwymiarach (m, n) i (r, s), z superbazami $\{v_i\}_{i \in \overline{1, m+n}}$ oraz $\{w_j\}_{j \in \overline{1, r+s}}$, to dla $f \in \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ zachodzi

$$f\left(\sum_{j=1}^{m+n} v_j x_j\right) = \sum_{j=1}^{m+n} f(v_j) x_j = \sum_{j=1}^{m+n}\sum_{i=1}^{r+s} w_i f_{ij} x_j = \sum_{i=1}^{r+s} w_i \left(\sum_{j=1}^{m+n} f_{ij} x_j\right), \tag{1.13}$$

gdzie $x_i, f_{ij} \in \mathbb{A}$. Współczynniki f_{ij} tworzą macierz wymiaru $(r+s)\times(m+n)$ w powyższych superbazach.

Supermacierze są po prostu macierzami homomorfizmów supermodułów wolnych.

Definicja 1.4.2. Niech $r, s, m, n \in \mathbb{Z}_+$. *Supermacierzami nad* $\mathbb{A}$ *superwymiaru* $(r, s) \times (m, n)$ nazywamy macierze wymiaru $(r+s) \times (m+n)$ o współczynnikach z $\mathbb{A}$.

Zbiór supermacierzy nad $\mathbb{A}$ superwymiaru $(r,s)\times(m,n)$ oznaczamy $\underline{\mathrm{SMat}}(\mathbb{A},r,s,m,n)$. Jeśli $(r,s)=(m,n)$, to piszemy w skrócie $\underline{\mathrm{SMat}}(\mathbb{A},r,s)$. W dalszym ciągu supermacierz Λ superwymiaru $(r,s)\times(m,n)$ będzie pisana w postaci

$$\Lambda = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}, \quad \text{gdzie} \quad \begin{array}{l} A \text{ jest macierzą } r\times m, \\ B \text{ jest macierzą } r\times n, \\ C \text{ jest macierzą } s\times m, \\ D \text{ jest macierzą } s\times n. \end{array} \tag{1.14}$$

Definicja 1.4.3. Jeśli niezerowa $\Lambda \in \underline{\mathrm{SMat}}(\mathbb{A},r,s,m,n)$ jest postaci

$$\Lambda = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}, \tag{1.15}$$

to kiedy macierze A,D są nad $\mathbb{A}_0$ oraz macierze B,C są nad $\mathbb{A}_1$, to mówimy, że Λ jest *parzysta* i ma *parzystość* 0. Gdy macierze A,D są nad $\mathbb{A}_1$ oraz macierze B,C są nad $\mathbb{A}_0$, to Λ jest *nieparzysta* i ma *parzystość* 1. Jeśli supermacierz ma parzystość, to mówimy, że jest *jednorodna*.

Zbiór $\underline{\mathrm{SMat}}(\mathbb{A},r,s,m,n)$ z dodawaniem macierzy tworzy superprzestrzeń wektorową zadaną poprzez

$$\underline{\mathrm{SMat}}(\mathbb{A},r,s,m,n)_0 := \{\Lambda \mid \exists p(\Lambda)=0\}, \quad \underline{\mathrm{SMat}}(\mathbb{A},r,s,m,n)_1 := \{\Lambda \mid \exists p(\Lambda)=1\},$$

gdzie przez $p(\Lambda)$ oznaczyliśmy parzystość Λ.

Wniosek 1.4.4. *Dla $\mathbb{V},\mathbb{W}$ z Przykładu 1.4.1 zbiór $\underline{\mathrm{SMat}}(\mathbb{A},r,s,m,n)$ jest izomorficzny z $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{V},\mathbb{W})$ w sensie superprzestrzeni wektorowych.*

Dowód. Izomorfizm konstruujemy wybierając dowolne bazy $\mathbb{V}$ i $\mathbb{W}$ oraz przyporządkowując homomorfizmy supermacierzom ich współczynników. □

Dla Λ postaci (1.14) definiujemy mnożenie jednorodnych $\Lambda \in \underline{\mathrm{SMat}}(\mathbb{A},r,s,m,n)_j$ przez jednorodne $a\in\mathbb{A}_i$ (pozostałe przypadki otrzymujemy zakładając rozdzielność mnożenia względem odpowiednio dodawania supermacierzy i dodawania elementów $\mathbb{A}$):

$$a\cdot\Lambda := (-1)^{ij}\begin{bmatrix} aA & aB \\ (-1)^i aC & (-1)^i aD \end{bmatrix}, \qquad \Lambda\cdot a := (-1)^{ij}\begin{bmatrix} Aa & (-1)^i Ba \\ Ca & (-1)^i Da \end{bmatrix}. \tag{1.16}$$

Relacje (1.16) mogą wyglądać nieintuicyjnie, lecz wynika z nich, że

$$a\cdot\Lambda = (-1)^{ij}\Lambda\cdot a,$$

co gwarantuje, że $\underline{\mathrm{SMat}}(\mathbb{A},r,s,m,n)$ jest obustronnym super $\mathbb{A}$-modułem. Dla $\mathbb{V},\mathbb{W}$ z Przykładu 1.4.1 relacje (1.16) indukują mnożenie homomorfizmów $f\in\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{V},\mathbb{W})$ przez elementy $a\in\mathbb{A}$ w ten sposób, że $a\cdot f$ będzie morfizmem odpowiadającym supermacierzy iloczynu a i supermacierzy morfizmu f.

Wniosek 1.4.5. *Dla $\mathbb{V},\mathbb{W}$ z Przykładu 1.4.1 superprzestrzeń $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{V},\mathbb{W})$ z mnożeniem morfizmów indukowanym przez relacje (1.16) jest obustronnym super $\mathbb{A}$-modułem izomorficznym z $\underline{\mathrm{SMat}}(\mathbb{A},r,s,m,n)$.*

Od teraz w tym podrozdziale będziemy zakładać, że $mn\neq 0\neq rs$. Zaprezentowane pojęcia można łatwo uogólnić na osobliwy przypadek wykorzystując znajomość algebry liniowej.

1.4.1 Odwracalność supermacierzy parzystych

Do końca tego podrozdziału przyjmujemy, że $\mathbb{A}$ jest skończenie wymiarową superalgebrą superprzemienną oraz

$$\Lambda := \begin{bmatrix} G & P \\ Q & H \end{bmatrix} \in \underline{\mathrm{SMat}}(\mathbb{A}, m, n)_0.$$

Niech $J := \mathbb{A}_1 + \mathbb{A}_1^2$. Wtedy J jest ideałem w $\mathbb{A}$.

Uwaga 1.4.6. Zbiór J nie musi zawierać wszystkich elementów nilpotentnych z $\mathbb{A}$. Kontrprzykładem jest superalgebra superprzemienna $\mathbb{A}$ gdzie $\mathbb{A}_0 = \langle a_0, a_1, a_2 \rangle$ oraz $\mathbb{A}_1 = \{0\}$ z mnożeniem spełniającym

$$a_0^2 = a_1^2 = a_2^2 = 0, \quad a_0 a_1 = a_1 a_0 = a_2, \quad a_1 a_2 = a_2 a_1 = a_0 a_2 = a_2 a_0 = 0.$$

Skoro J jest ideałem w $\mathbb{A}$, możemy zdefiniować algebrę ilorazową $\overline{\mathbb{A}} = \mathbb{A}/J$, która jest superalgebrą dla $(\overline{\mathbb{A}})_0 := \mathbb{A}_0/J$ oraz $(\overline{\mathbb{A}})_1 := \mathbb{A}_1/J = \{0\} \subset (\overline{\mathbb{A}})_0$. Ponieważ $(\overline{\mathbb{A}})_0$ jest zamknięte na mnożenie, warunek superalgebry z Definicji 1.2.1 jest spełniony. Ponadto odwzorowanie ilorazowe $\pi : \mathbb{A} \to \overline{\mathbb{A}}$ jest parzystym homomorfizmem superalgebr, gdyż dla dowolnych $a, b \in \mathbb{A}$ oraz $j_1, j_2 \in J$ zachodzi

$$(a + j_1)(b + j_2) = ab + j_3,$$

gdzie $j_3 = j_1 b + a j_2 + j_1 j_2 \in J$. Dla dowolnego $\Omega \in \underline{\mathrm{SMat}}(\mathbb{A}, m, n)_0$ konstruujemy $\overline{\Omega}$ poprzez zastąpienie każdego elementu Ω jego obrazem w rzutowaniu $\mathbb{A} \to \overline{\mathbb{A}}$.

Lemat 1.4.7. *Supermacierz Λ jest odwracalna wtedy i tylko wtedy, gdy $\overline{\Lambda}$ jest odwracalna.*

Dowód. Załóżmy, że Λ jest odwracalna. Wtedy istnieje Γ takie, że $\Lambda\Gamma = \mathbb{I}$, wobec tego $\overline{\Lambda\Gamma} = \overline{\mathbb{I}}$ i $\overline{\Lambda}$ jest odwracalna. W drugą stronę: wiemy, że $\overline{\Lambda}$ jest odwracalna, więc istnieje $L \in \underline{\mathrm{SMat}}(\overline{\mathbb{A}}, m, n)$ takie, że $\overline{\Lambda} \cdot L = \overline{\mathbb{I}}$. Wybierając dowolnych reprezentantów klas współczynników L konstruujemy supermacierz $L' \in \underline{\mathrm{SMat}}(\mathbb{A}, m, n)$ i otrzymujemy równość $\Lambda L' = \mathbb{I} + X$, gdzie X jest pewną supermacierzą o współczynnikach z J, które są kombinacjami liniowymi skończonego zbioru elementów $\mathbb{A}_1$. Wobec tego X jest nilpotentne, a z tego wynika, że istnieje $(\mathbb{I} + X)^{-1}$ oraz $\Lambda L'(\mathbb{I} + X)^{-1} = \mathbb{I}$. □

Lemat 1.4.8. *Macierze $(G - PH^{-1}Q)^{-1}$ oraz $(H - QG^{-1}P)^{-1}$ istnieją wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją G^{-1} oraz H^{-1}.*

Dowód. Przypuśćmy, że G^{-1} i H^{-1} istnieją. Zauważmy, że

$$(G - PH^{-1}Q)^{-1} = G^{-1}(\mathbb{I}_m - PH^{-1}QG^{-1})^{-1} = G^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (PH^{-1}QG^{-1})^n. \tag{1.17}$$

Elementy skończenie wymiarowych macierzy P i Q należą do $\mathrm{span}\{\theta_1, \ldots \theta_{2N}\}$ dla pewnych $\theta_1, \ldots, \theta_{2N} \in \mathbb{A}_1$. Wobec tego szereg potęgowy w równości (1.17) jest sumą co najwyżej $N + 1$ wyrazów i $(G - PH^{-1}Q)^{-1}$ istnieje. Podobnie $(H - QG^{-1}P)^{-1}$ istnieje. W drugą stronę, istnienie G^{-1} oraz H^{-1} wynika bezpośrednio z istnienia $G - PH^{-1}Q$ oraz $H - QG^{-1}P$. □

Twierdzenie 1.4.9. *Supermacierz* Λ *jest odwracalna wtedy i tylko wtedy, gdy* $\overline{G}$ *i* $\overline{H}$ *są odwracalne. Supermacierz odwrotna ma postać*

$$\Lambda^{-1} = \begin{bmatrix} (G - PH^{-1}Q)^{-1} & -G^{-1}P(H - QG^{-1}P)^{-1} \\ -H^{-1}Q(G - PH^{-1}Q)^{-1} & (H - QG^{-1}P)^{-1} \end{bmatrix} \tag{1.18}$$

Dowód. Skoro

$$\overline{\Lambda} = \begin{bmatrix} \overline{G} & 0 \\ 0 & \overline{H} \end{bmatrix},$$

na mocy Lematu 1.4.7 odwracalność Λ jest równoważna odwracalności $\overline{\Lambda}$, a ta jest równoważna jednoczesnej odwracalności $\overline{G}$ i $\overline{H}$, co z kolei jest równoważne odwracalności G i H. Ponadto z Lematu 1.4.8 wynika, że jest to równoważne istnieniu $(G - PH^{-1}Q)^{-1}$ oraz $(H - QG^{-1}P)^{-1}$. Postać macierzy odwrotnej można zweryfikować obliczając $\Lambda\Lambda^{-1}$. □

Przykład 1.4.10. Jeśli $\mathbb{A} = \mathrm{Grass}(\mathbb{K}, L)$, to rzut podstawowy ε jest rzutowaniem na algebrę ilorazową $\mathbb{A}/J$ a Λ jest odwracalna wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją odwrotności macierzy $\varepsilon(G), \varepsilon(H)$. Niech $s(\Lambda) := \Lambda - \varepsilon(\Lambda)$. Wtedy $\Lambda = (\mathbb{I} + s(\Lambda)\varepsilon(\Lambda)^{-1})\varepsilon(\Lambda)$ i supermacierz odwrotna jest postaci $\Lambda^{-1} = \varepsilon(\Lambda)^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}(-s(\Lambda)\varepsilon(\Lambda)^{-1})^n$.

Supermacierze odwracalne z $\underline{\mathrm{SMat}}(\mathbb{A}, m, n)_0$ tworzą grupę multiplikatywną, którą oznaczamy $\mathrm{GL}(\mathbb{A}, m, n)$.

1.4.2 Supertransponowanie

Wprowadzimy teraz uogólnienie transpozycji dla supermacierzy i supermorfizmu.

Definicja 1.4.11. Dla $\Phi \in \mathbf{Hom}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ z parzystością $p(\Phi)$ *odwzorowaniem supertransponowanym* nazywamy odwzorowanie $\Phi^{\mathrm{ST}} \in \mathbf{Hom}(\mathbb{W}^*, \mathbb{V}^*)$ spełniające

$$\forall k \in \mathbb{Z}_2, \forall \omega \in \mathbb{W}_k^*, \forall v \in \mathbb{V}, \quad \langle \Phi^{\mathrm{ST}}\omega, v\rangle := (-1)^{p(\Lambda)k}\langle \omega, \Phi v\rangle. \tag{1.19}$$

Różnica między transponowaniem i supertransponowaniem kryje się w znaku $(-1)^{p(\Lambda)k}$.

Stwierdzenie 1.4.12. *Niech* $\Lambda \in \underline{\mathrm{SMat}}(\mathbb{A}, r, s, m, n)$ *z parzystością* $p(\Lambda)$ *o postaci*

$$\Lambda = \begin{bmatrix} G & P \\ Q & H \end{bmatrix}$$

będzie macierzą homomorfizmu supermodułów Φ. *Wtedy macierz* $\Lambda^{\mathrm{ST}} \in \underline{\mathrm{SMat}}(\mathbb{A}, m, n, r, s)$ *odwzorowania supertransponowanego* Φ^{ST} *ma postać*

$$\Lambda^{\mathrm{ST}} = \begin{bmatrix} G^{\mathrm{T}} & (-1)^{p(\Lambda)}Q^{\mathrm{T}} \\ (-1)^{p(\Lambda)+1}P^{\mathrm{T}} & H^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}.$$

Dowód. Niech $\mathbb{V}, \mathbb{W}$ będą wolnymi prawymi super $\mathbb{A}$-modułami z (m, n) i (r, s) superbazami $\{v_i\}_{i \in \overline{1, m+n}}$ oraz $\{w_j\}_{j \in \overline{1, r+s}}$. Wykorzystamy istnienie izomorfizmu supermodułów

$\underline{\mathrm{SMat}}(\mathbb{A},r,s,m,n) \simeq \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{V},\mathbb{W})$. Niech w^j, v_i mają parzystości $p(w^j), p(v_i)$. Ze wzoru (1.12) mamy:

$$\begin{aligned}\langle \Lambda^{\mathrm{ST}} w^j, v_i\rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{p+q} v^k \Lambda^{\mathrm{ST}}_{kj}, v_i \right\rangle &= \sum_{k=1}^{p+q} \langle v^k, v_i\rangle \left(\left(\Lambda^{\mathrm{ST}}_{kj}\right)_0 + (-1)^{p(v_i)} \left(\Lambda^{\mathrm{ST}}_{kj}\right)_1 \right) \\ &= \left(\Lambda^{\mathrm{ST}}_{ij}\right)_0 + (-1)^{p(v_i)} \left(\Lambda^{\mathrm{ST}}_{ij}\right)_1,\end{aligned}$$

gdzie $\left(\Lambda^{\mathrm{ST}}_{ij}\right)_0 \in \mathbb{A}_0$ oraz $\left(\Lambda^{\mathrm{ST}}_{ij}\right)_1 \in \mathbb{A}_1$. Natomiast ze wzoru (1.19) wynika, że

$$\langle \Lambda^{\mathrm{ST}} w^j, v_i\rangle = (-1)^{p(\Lambda)p(w_j)} \langle w^j, \Lambda v_i\rangle = (-1)^{p(\Lambda)p(w_j)} \left\langle w^j, \sum_{k=1}^{r+s} w_k \Lambda_{ki} \right\rangle = (-1)^{p(\Lambda)p(w_j)} \Lambda_{ji}.$$

Z porównania powyższych dwóch postaci $\langle \Lambda^{\mathrm{ST}} w^j, v_i\rangle$ otrzymujemy, że Λ^{ST} ma parzystość $p(\Lambda^{\mathrm{ST}}) = p(\Lambda)$ oraz

$$\Lambda^{\mathrm{ST}}_{ij} = (-1)^{((p(\Lambda)+p(w_j)+p(v_i))p(v_i)+p(\Lambda)p(w_j)} \Lambda_{ji} = (-1)^{(p(\Lambda)+p(v_i))(p(v_i)+p(w_j))} \Lambda_{ji},$$

co daje tezę stwierdzenia. □

1.4.3 Superślad

Definicja 1.4.13. *Superśladem* nazywamy $\mathrm{str} : \underline{\mathrm{SMat}}(\mathbb{A},m,n)_0 \to \mathbb{A}_0$ takie, że

$$\mathrm{str}\begin{pmatrix} G & P \\ Q & H \end{pmatrix} = \mathrm{tr}(G) - \mathrm{tr}(H).$$

Stwierdzenie 1.4.14. *Niech* $\Lambda, \Omega \in \underline{\mathrm{SMat}}(\mathbb{A},m,n)_0$. *Wtedy* $\mathrm{str}(\Lambda\Omega) = \mathrm{str}(\Omega\Lambda)$.

Dowód. Obliczamy

$$\begin{aligned}\mathrm{str}(\Lambda\Omega) &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \Lambda_{ij}\Omega_{ji} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=m+1}^{m+n} \Lambda_{ij}\Omega_{ji} - \sum_{i=m+1}^{m+n}\sum_{j=1}^{m} \Lambda_{ij}\Omega_{ji} - \sum_{i=m+1}^{m+n}\sum_{j=m+1}^{m+n} \Lambda_{ij}\Omega_{ji} \\ &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \Omega_{ji}\Lambda_{ij} - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=m+1}^{m+n} \Omega_{ji}\Lambda_{ij} + \sum_{i=m+1}^{m+n}\sum_{j=1}^{m} \Omega_{ji}\Lambda_{ij} - \sum_{i=m+1}^{m+n}\sum_{j=m+1}^{m+n} \Omega_{ji}\Lambda_{ij} \\ &= \mathrm{str}(\Omega\Lambda).\end{aligned}$$

□

Definicja 1.4.15. *Superśladem* endomorfizmu $\Phi \in \mathrm{End}(\mathbb{V})$, oznaczanym $\mathrm{str}(\Phi)$, nazywamy superślad macierzy tego endomorfizmu.

Wniosek 1.4.16. *Jeśli* $\Phi \in \mathrm{End}(\mathbb{V})$, *to* $\mathrm{str}(\Phi)$ *nie zależy od superbazy, w której wyrażona jest supermacierz endomorfizmu* Φ.

Istnieje również definicja śladu dla supermacierzy nieparzystych [34].

1.4.4 Bierezinian

Bierezinian jest uogólnieniem wyznacznika w superalgebrze. Jedną z własności, których oczekujemy od berezinianu jest spełnianie równości $\mathrm{ber}(e^A) = e^{\mathrm{str}(A)}$. Podamy aksjomatyczną definicję berezinianu, znajdziemy jego postać dla dowolnej supermacierzy z $\mathrm{GL}(\mathbb{A}, m, n)$ i udowodnimy, że tak zdefinowany berezinian istnieje.

Definicja 1.4.17. Niech $\mathrm{GL}(\mathbb{A}_0, m)$ będzie zbiorem odwracalnych macierzy $m \times m$ o współczynnikach z $\mathbb{A}_0$. *Bierezinianem* nazywamy odwzorowanie $\mathrm{ber} : \mathrm{GL}(\mathbb{A}, m, n) \to \mathbb{A}_0$ spełniające dwa warunki:

(1) Dla $G \in \mathrm{GL}(\mathbb{A}_0, m)$ oraz $H \in \mathrm{GL}(\mathbb{A}_0, n)$ mamy

$$\mathrm{ber}\begin{pmatrix} G & 0 \\ 0 & H \end{pmatrix} = \det(G)\det(H^{-1}).$$

(2) Dla $\Lambda, \Omega \in \mathrm{GL}(\mathbb{A}, m, n)$ zachodzi $\mathrm{ber}(\Lambda\Omega) = \mathrm{ber}(\Lambda)\mathrm{ber}(\Omega)$.

Uwaga 1.4.18. Ze Stwierdzenia 1.4.9 macierz H jest odwracalna, więc powyższa definicja ma sens.

Lemat 1.4.19. *Dla parzystych supermacierzy blokowo trójkątnych*

$$\mathrm{ber}\begin{pmatrix} G & P \\ 0 & H \end{pmatrix} = \mathrm{ber}\begin{pmatrix} G & 0 \\ Q & H \end{pmatrix} = \det(G)\det(H^{-1}).$$

Dowód. Zauważmy, że

$$\begin{bmatrix} G & P \\ 0 & H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G & 0 \\ 0 & -H \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbb{I}_m & G^{-1}P \\ 0 & -\mathbb{I}_n \end{bmatrix}$$

oraz

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \mathbb{I}_m & G^{-1}P \\ 0 & -\mathbb{I}_n \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbb{I}_m & -\frac{1}{2}G^{-1}P \\ 0 & \mathbb{I}_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbb{I}_m & 0 \\ 0 & -\mathbb{I}_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbb{I}_m & \frac{1}{2}G^{-1}P \\ 0 & \mathbb{I}_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbb{I}_m & -\frac{1}{2}G^{-1}P \\ 0 & \mathbb{I}_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbb{I}_m & 0 \\ 0 & -\mathbb{I}_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbb{I}_m & -\frac{1}{2}G^{-1}P \\ 0 & \mathbb{I}_n \end{bmatrix}^{-1}.\end{aligned}$$

Z tego i z warunków (1), (2) Definicji 1.4.17 otrzymujemy

$$\mathrm{ber}\begin{pmatrix} G & P \\ 0 & H \end{pmatrix} = \mathrm{ber}\begin{pmatrix} G & 0 \\ 0 & -H \end{pmatrix}\mathrm{ber}\begin{pmatrix} \mathbb{I}_m & 0 \\ 0 & -\mathbb{I}_n \end{pmatrix} = \det(G)\det(H^{-1}).$$

Drugi przypadek wykazujemy analogicznie. □

Twierdzenie 1.4.20. *Niech*

$$\Lambda = \begin{bmatrix} G & P \\ Q & H \end{bmatrix} \in \mathrm{GL}(\mathbb{A}, m, n).$$

Wtedy

$$\mathrm{ber}(\Lambda) = \det(G - PH^{-1}Q)\det(H^{-1}). \tag{1.20}$$

Dowód. Sprawdzamy, że

$$\begin{bmatrix} G & P \\ Q & H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{I}_m & PH^{-1} \\ 0 & \mathbb{I}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G - PH^{-1}Q & 0 \\ 0 & H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{I}_m & 0 \\ H^{-1}Q & \mathbb{I}_n \end{bmatrix}. \tag{1.21}$$

Stąd mamy

$$\operatorname{ber}\begin{pmatrix} G & P \\ Q & H \end{pmatrix} = \det(G - PH^{-1}Q)\det(H^{-1}).$$

□

Wniosek 1.4.21. *Jeśli berezinian istnieje, to jest jednoznacznie określony wzorem (1.20).*

Wniosek 1.4.22. *Wzór (1.20) jest równoważny z* $\operatorname{ber}(\Lambda) = \det(G)\det(H - QG^{-1}P)^{-1}$.

Dowód. Wystarczy rozważyć rozkład

$$\begin{bmatrix} G & P \\ Q & H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{I}_m & 0 \\ QG^{-1} & \mathbb{I}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G & 0 \\ 0 & H - QG^{-1}P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{I}_m & G^{-1}P \\ 0 & \mathbb{I}_n \end{bmatrix}.$$

□

Twierdzenie 1.4.23. *Bierezinian istnieje.*

Dowód. Definiujemy berezinian wzorem (1.20). Pokażemy, że spełnia on warunki z Definicji 1.4.17. Widać, że warunek (1) jest spełniony. Niech $\mathcal{G}^+, \mathcal{G}^0, \mathcal{G}^-$ będą podgrupami $\mathcal{G} := \mathrm{GL}(\mathbb{A}, m, n)$ składającymi się z elementów $\Lambda^+, \Lambda^0, \Lambda^- \in \mathcal{G}$ postaci

$$\Lambda^+ := \begin{bmatrix} \mathbb{I}_m & P \\ 0 & \mathbb{I}_n \end{bmatrix}, \ \Lambda^0 := \begin{bmatrix} G & 0 \\ 0 & H \end{bmatrix}, \ \Lambda^- := \begin{bmatrix} \mathbb{I}_m & 0 \\ Q & \mathbb{I}_n \end{bmatrix}. \tag{1.22}$$

Ze wzoru (1.21) każda $\Lambda \in \mathcal{G}$ posiada pewien rozkład $\Lambda = \Lambda^+\Lambda^0\Lambda^-$. Z kolei ze wzoru (1.20) wynika, że $\operatorname{ber}(\Lambda^\pm) = 1$ i $\operatorname{ber}(\Lambda) = \operatorname{ber}(\Lambda^0) = \det(G)\det(H^{-1})$. Wykażemy najpierw, że warunek (2) jest spełniony w szczególnych przypadkach.

1) Jeżeli $\Lambda \in \mathcal{G}$, $\forall \Omega^- \in \mathcal{G}^-$ to zachodzi

$$\operatorname{ber}(\Lambda\Omega^-) = \operatorname{ber}(\Lambda^+\Lambda^0\Lambda^-\Omega^-) = \operatorname{ber}(\Lambda^0) = \operatorname{ber}(\Lambda)\operatorname{ber}(\Omega^-).$$

2) Niech $\Lambda \in \mathcal{G}$, $\Omega^0 \in \mathcal{G}^0$. Przyjmijmy, że Λ jest postaci ze wzoru (1.22) oraz

$$\Omega^0 := \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & L \end{bmatrix}.$$

Wtedy

$$\Lambda^-\Omega^0 = \begin{bmatrix} K & 0 \\ QK - LQ & L \end{bmatrix}\Lambda^-, \quad \begin{bmatrix} K & 0 \\ QK - LQ & L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & L \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbb{I}_m & 0 \\ L^{-1}(QK - LQ) & \mathbb{I}_n \end{bmatrix}.$$

Zatem

$$\Lambda\Omega^0 = \Lambda^+\Lambda^0 \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & L \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbb{I}_m & 0 \\ L^{-1}(QK - LQ) & \mathbb{I}_n \end{bmatrix}\Lambda^- = \tilde{\Lambda}^+\tilde{\Lambda}^0\tilde{\Lambda}^-, \quad \tilde{\Lambda}^0 = \begin{bmatrix} GK & 0 \\ 0 & HL \end{bmatrix}.$$

Wobec tego

$$\operatorname{ber}(\Lambda\Omega^0) = \operatorname{ber}\left(\tilde{\Lambda}^+\tilde{\Lambda}^0\tilde{\Lambda}^-\right) = \operatorname{ber}(\tilde{\Lambda}^0) = \operatorname{ber}(\Lambda)\operatorname{ber}(\Omega^0).$$

3) Dla każdego $\Lambda^+ \in \mathcal{G}^+$ oraz dla każdego $\Omega \in \mathcal{G}$ zachodzi $\mathrm{ber}(\Lambda^+\Omega) = \mathrm{ber}(\Lambda^+)\mathrm{ber}(\Omega)$, co dowodzimy jak w 1).

4) Dla każdego $\Lambda^0 \in \mathcal{G}^0$ oraz dla każdego $\Omega \in \mathcal{G}$ zachodzi $\mathrm{ber}(\Lambda^0\Omega) = \mathrm{ber}(\Lambda^0)\mathrm{ber}(\Omega)$, co dowodzimy jak w 2).

5) Udowodnimy w dwóch krokach, że dla dowolnych $\Lambda^- \in \mathcal{G}^-$, $\Omega^+ \in \mathcal{G}^+$ zachodzi $\mathrm{ber}(\Lambda^-\Omega^+) = \mathrm{ber}(\Lambda^-)\mathrm{ber}(\Omega^+)$.

5.1) Załóżmy, że Λ^- jest postaci ze wzoru (1.22) oraz

$$\Omega^+ := \begin{bmatrix} \mathbb{I}_m & E \\ 0 & \mathbb{I}_n \end{bmatrix},$$

gdzie E jest macierzą elementarną o jedynym niezerowym elemencie $\theta \in \mathbb{A}_1$. Każdy element macierzy $(QE)^2, (EQ)^2$ jest proporcjonalny do θ^2, więc $(QE)^2 = (EQ)^2 = 0$. Stąd $(\mathbb{I}_n + QE)^{-1} = \mathbb{I}_n - QE$. Dalej mamy

$$\mathrm{ber}(\Lambda^-\Omega^+) = \mathrm{ber}\begin{pmatrix} \mathbb{I}_m & E \\ Q & \mathbb{I}_n + QE \end{pmatrix} =$$
$$\det(\mathbb{I}_m - E(\mathbb{I}_n + QE)^{-1}Q)\det(\mathbb{I}_n + QE)^{-1} = \det(\mathbb{I}_m - EQ)\det(\mathbb{I}_n - QE).$$

Iloczyn dowolnych dwóch elementów macierzy EQ, QE wynosi zero, co daje nam $\det(\mathbb{I}_m - EQ) = 1 - \mathrm{tr}(EQ)$ oraz $\det(\mathbb{I}_n - QE) = 1 - \mathrm{tr}(QE)$. Wobec tego

$$\mathrm{ber}(\Lambda^-\Omega^+) = (1 - \mathrm{tr}(EQ))(1 - \mathrm{tr}(QE)) = 1 - \mathrm{tr}(EQ) - \mathrm{tr}(QE).$$

Z niezmienniczości śladu na cykliczne permutacje i superprzemienności $\mathbb{A}$ wynika, że $\mathrm{tr}(EQ) = -\mathrm{tr}(QE)$ i

$$\mathrm{ber}(\Lambda^-\Omega^+) = 1 = \mathrm{ber}(\Lambda^-)\mathrm{ber}(\Omega^+).$$

5.2) Niech Λ^- jest taka, jak we wzorze (1.22) oraz Ω^+ jest dowolną macierzą z $\mathcal{G}^+$ postaci

$$\Omega^+ := \begin{bmatrix} \mathbb{I}_m & P \\ 0 & \mathbb{I}_n \end{bmatrix},$$

gdzie P jest sumą macierzy elementarnych $P = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n P_{ij}$. Definiujemy

$$\Omega^+_{(k,l)} := \prod_{(i,j)\in J_{(k,l)}} \begin{bmatrix} \mathbb{I}_m & P_{ij} \\ 0 & \mathbb{I}_n \end{bmatrix}, \quad J_{(k,l)} := \left\{(i,j) \mid i \in \overline{1,k}, j \in \overline{1,l}\right\}. \tag{1.23}$$

Widać, że

$$\Omega^+ = \begin{bmatrix} \mathbb{I}_m & \sum_{(i,j)\in J_{(m,n)}} P_{ij} \\ 0 & \mathbb{I}_n \end{bmatrix} = \prod_{(i,j)\in J_{(m,n)}} \begin{bmatrix} \mathbb{I}_m & P_{ij} \\ 0 & \mathbb{I}_n \end{bmatrix} = \Omega^+_{(m,n)}.$$

Powyższa równość jest przejawem izomorficzności grupy multiplikatywnej $\mathcal{G}^+$ z grupą addytywną $\mathrm{Mat}(\mathbb{A}_1, m, n)$. Jeśli $m = n = 1$, to teza podpunktu 5) jest równoważna tezie podpunktu 5.1). W innym przypadku teza wynika z indukcji. Niech $(k,l) := (m,n)$. Załóżmy bez straty ogólności, że $k > 1$. Wtedy

$$\mathrm{ber}(\Lambda^-\Omega^+) = \mathrm{ber}\left(\tilde{\Lambda}\begin{bmatrix}\mathbb{I}_m & P_{kl}\\ 0 & \mathbb{I}_n\end{bmatrix}\right), \quad \tilde{\Lambda} = \Lambda^- \prod_{(i,j)\in J'_{(k,l)}} \begin{bmatrix}\mathbb{I}_m & P_{ij}\\ 0 & \mathbb{I}_n\end{bmatrix},$$

przy czym $J'_{(k,l)} := J_{(k,l)} \setminus \{(k,l)\}$. Z faktu, że $\tilde{\Lambda} \in \mathcal{G}$ mamy pewien rozkład $\tilde{\Lambda} = \tilde{\Lambda}^+\tilde{\Lambda}^0\tilde{\Lambda}^-$. Wykorzystując punkty 3), 4) oraz 5.1) dostajemy

$$\mathrm{ber}(\Lambda^-\Omega^+) = \mathrm{ber}(\tilde{\Lambda^+})\mathrm{ber}(\tilde{\Lambda^0})\mathrm{ber}(\tilde{\Lambda^-})\mathrm{ber}\begin{pmatrix}\mathbb{I}_m & P_{ij}\\ 0 & \mathbb{I}_n\end{pmatrix} = \mathrm{ber}(\tilde{\Lambda}).$$

Powtarzając powyższą procedurę z macierzami

$$\left\{\begin{bmatrix}\mathbb{I}_m & P_{kj}\\ 0 & \mathbb{I}_n\end{bmatrix}\right\}_{j\in\overline{1,l-1}},$$

otrzymujemy $\mathrm{ber}\left(\Lambda^-\Omega^+_{(k,l)}\right) = \mathrm{ber}\left(\Lambda^-\Omega^+_{(k-1,l)}\right)$. W wyniku indukcji po k i l,

$$\mathrm{ber}(\Lambda^-\Omega^+) = \mathrm{ber}\left(\Lambda^-\Omega^+_{(1,1)}\right) = 1 = \mathrm{ber}(\Lambda^-)\mathrm{ber}(\Omega^+).$$

Z wykazanych pięciu przypadków szczególnych wynika, że dla wszystkich $\Lambda, \Omega \in \mathcal{G}$ mamy

$$\mathrm{ber}(\Lambda\Omega) = \mathrm{ber}(\Lambda^+\Lambda^0\Lambda^-\Omega^+\Omega^0\Omega^-) = \mathrm{ber}(\Lambda^0)\mathrm{ber}(\Omega^0) = \mathrm{ber}(\Lambda)\mathrm{ber}(\Omega),$$

wobec tego warunek (2) Definicji 1.4.17 również jest spełniony. $\square$

Rozdział 2

Supergeometria

2.1 Superrozmaitości

Istnieje wiele różnych definicji superrozmaitości, które prezentują Berezin [4], DeWitt [15], Jadczyk i Pilch [28] oraz Rogers [38]. Podsumowuje to Alice Rogers, która wyróżnia dwie drogi do zdefiniowania superrozmaitości. Jedna traktuje superrozmaitość jak rozmaitość różniczkową modelowaną nad algebrą Grassmanna uogólniając konstrukcje z geometrii różniczkowej, a druga, nazywana algebraiczno-geometryczną, koncentruje się na algebrze funkcji nad superrozmaitością.

Należy zwrócić uwagę, że wszystkie definicje superrozmaitości określają obiekty w jakiś sposób ze sobą związane, ale mające drobne różnice, jak pokazano w [2]. W niniejszej pracy przedstawiono podejście algebraiczno-geometryczne, przeanalizowane między innymi w [4, 44] oraz w Rozdziale 7 w [38].

Definicja 2.1.1. *Snopem $C^\infty_M(\cdot, \mathbb{K})$ funkcji gładkich nad* $\mathbb{K}$ dla pewnej rozmaitości różniczkowej M nazwiemy snop taki, że dla każdego otwartego $U \subset M$ zbiór $C^\infty_M(U, \mathbb{K})$ jest algebrą nad $\mathbb{K}$ funkcji gładkich na M przyjmujących wartości w $\mathbb{K}$.

Definicja 2.1.2. Niech M będzie rozmaitością różniczkową (zespoloną rozmaitością różniczkową) wymiaru m. Niech ponadto $n \in \mathbb{Z}_+$ oraz $\mathcal{A}_\mathcal{M}$ będzie snopem superalgebr z kategorii otwartych podzbiorów M takim, że

(1) dla pewnego zbioru indeksów A istnieje otwarte pokrycie $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ rozmaitości M spełniające warunek, że dla każdego $\alpha \in A$ istnieje izomorfizm superalgebr

$$\mathcal{A}_\mathcal{M}(U_\alpha) \simeq C^\infty_M(U_\alpha, \mathbb{K}) \otimes \Lambda\mathbb{K}^n,$$

(2) istnieje snop $\mathcal{F}_\mathcal{M}$ wszystkich elementów nilpotentnych snopu $\mathcal{A}_\mathcal{M}$ oraz $\mathcal{E}_\mathcal{M} := \mathcal{A}_\mathcal{M}/\mathcal{F}_\mathcal{M}$ jest izomorficzny do snopu $C^\infty_M(\cdot, \mathbb{K})$.

Parę $\mathcal{M} := (M, \mathcal{A}_\mathcal{M})$ nazywamy *superrozmaitością* o *superwymiarze* (m, n). Snop $\mathcal{A}_\mathcal{M}$ nazywamy *snopem podstawowym* superrozmaitości $\mathcal{M}$. Każdy zbiór otwarty $U \subset M$ taki, że $\mathcal{A}_\mathcal{M}(U) \simeq C^\infty_M(U, \mathbb{K}) \otimes \Lambda\mathbb{K}^n$ nazywamy *rozdzielającym*.

Jeżeli $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, to mówimy, że superrozmaitość jest *zespolona*, a jeśli $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, to mówimy o *rzeczywistej* superrozmaitości. Gdyby $\mathbb{K}$ nie było ustalone, będziemy domyślnie zakładać przypadek rzeczywisty.

Uwaga 2.1.3. Warunek (2) Definicji 2.1.2 jest naturalnie spełniony dla superrozmaitości rzeczywistych, ale nie dla zespolonych. Zwróćmy uwagę na to, że $\mathcal{A}_{\mathcal{M}}$ zwykle jest presnopem, ale staje się snopem kiedy na rozmaitości istnieje rozkład jedności [13], czyli na przykład w przypadku rozmaitości rzeczywistej. W przypadku rozmaitości zespolonej nie zawsze tak jest. W dalszym ciągu pracy będziemy zakładać, że ten warunek jest spełniony.

Zespolona superrozmaitość superwymiaru $(1,1)$ jest w literaturze nazywana *superpowierzchnią Riemanna* [21].

W szczególności otwarte pokrycie z punktu (1) jest pokryciem złożonym ze zbiorów rozdzielających. Ponadto jeśli U jest rozdzielający i $f \in \mathcal{A}_M(U)$, to f jest odwzorowaniem o wartościach w algebrze Grassmanna $\Lambda\mathbb{K}^n$. Wobec tego istnieje $\tilde{f} \in \mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ taki, że $\tilde{f} = \varepsilon_{\mathcal{M}}(U) \circ f$ gdzie $\varepsilon_{\mathcal{M}}(U)$ jest rzutem podstawowym $\Lambda\mathbb{K}^n$.

Zauważmy, że wartość $\varepsilon_{\mathcal{M}}$ nie zależy od bazy $\Lambda\mathbb{K}^n$ i jest on dobrze określony dla każdego rozdzielającego $U \subset M$.

Definicja 2.1.4. Snop $\varepsilon_{\mathcal{M}}$ taki, że każdemu rozdzielającemu $U \subset M$ przyporządkowuje dokładnie jedno odwzorowanie $\varepsilon_{\mathcal{M}}(U)$ będące rzutem podstawowym algebry Grassmanna $\mathcal{A}_{\mathcal{M}}(U)$, nazywamy *rzutem podstawowym superrozmaitości* $\mathcal{M}$.

Od teraz dla zwiększenia przejrzystości notacji będziemy pisać $\varepsilon_{\mathcal{M}}$ zamiast $\varepsilon_{\mathcal{M}}(U)$. Taki zapis ułatwi nam badanie homomorfizmów superrozmaitości.

Przykład 2.1.5. Każda rozmaitość m-wymiarowa M w naturalny sposób określa superrozmaitość $(M, C^\infty(\cdot,\mathbb{R}))$, bo dla każdego $U \subset M$ zbiór $C^\infty(U,\mathbb{R})$ tworzy superalgebrę w której $C^\infty(U,\mathbb{R})_1 = \{0\}$. Wtedy $\mathcal{F}$ jest snopem zerowym, a superwymiar $(M, C^\infty(\cdot,\mathbb{R}))$ to $(m,0)$.

Przykład 2.1.6. Niech M będzie rozmaitością m-wymiarową oraz Ω_M będzie snopem form różniczkowych na M. Wtedy (M,Ω_M) jest superrozmaitością, ponieważ dowolny atlas $\mathcal{P}$ rozmaitości M zawiera otwarte pokrycie M spełniające warunek (1). Na każdym zbiorze otwartym U z atlasu $\mathcal{P}$ istnieją lokalne współrzędne $x^1,\dots,x^m$.

Niech 1 będzie funkcją stałą równą 1 na U. Wtedy funkcje $x^1,\dots,x^m$ generują nad $\mathbb{R}$ algebrę $C^\infty(U)$. Z kolei nieparzyste elementy $dx^1,\dots,dx^m$ generują nad $\mathbb{R}$ algebrę Grassmanna $\Lambda(\mathbb{R}^m)^* \simeq \Lambda\mathbb{R}^m$. Wobec tego $\Omega(U) \simeq C^\infty(U) \otimes \Lambda\mathbb{R}^m$.

Definicja 2.1.7. Niech $E \stackrel{\pi_E}{\to} M$ będzie wiązką wektorową [20] nad rozmaitością M. *Wiązką zewnętrzną* ΛE nazywamy wiązkę wektorową $\Lambda E \stackrel{\pi_{\Lambda E}}{\to} M$ taką, że dla każdego $U \subset M$ mamy $\pi_{\Lambda E}^{-1}(U) = \Lambda\pi_E^{-1}(U)$.

Przykład 2.1.8. Niech $E \stackrel{\pi}{\to} M$ będzie wiązką wektorową nad rozmaitością M. Wtedy superrozmaitością jest para $(M,\Gamma_{\Lambda E})$, gdzie $\Gamma_{\Lambda E}$ jest snopem przyporządkowującym otwartemu $U \subset M$ zbiór cięć wiązki wektorowej $\Lambda E \stackrel{\pi}{\to} M$ nad U.

Definicja 2.1.9. Superrozmaitością $\mathbb{K}^{m|n}$ nazywamy parę $(\mathbb{K}^m, C^\infty \otimes \Lambda\mathbb{K}^n)$, gdzie snop $C^\infty \otimes \Lambda\mathbb{K}^n$ definiujemy poprzez

$$\mathbb{K}^m \supset U \mapsto (C^\infty \otimes \Lambda\mathbb{K}^n)(U) := C^\infty(U) \otimes \Lambda\mathbb{K}^n.$$

Każda superrozmaitość lokalnie wygląda tak jak $\mathbb{K}^{m|n}$.

2.1.1 Superwspółrzędne

Podobnie jak w przypadku zwykłych rozmaitości, na superrozmaitościach również można zdefiniować atlas i lokalne układy współrzędnych.

Niech przez resztę tego rozdziału $\mathcal{M} := (M, \mathcal{A}_{\mathcal{M}})$ będzie superrozmaitością superwymiaru (m, n) nad $\mathbb{K}$.

Definicja 2.1.10. Niech $U \subset M$ będzie rozdzielający. Wtedy:

- *nieparzystym układem współrzędnych* na U nazywamy zbiór $\{\theta^1, \ldots, \theta^n\}$ nieparzystych elementów $\mathcal{A}_{\mathcal{M}}(U)$ takich, że $\theta^1, \ldots, \theta^n$ są generatorami algebry Grassmanna,
- *parzystym układem współrzędnych* na U nazywamy zbiór $\{x^1, \ldots, x^m\}$ parzystych elementów $\mathcal{A}_{\mathcal{M}}(U)$ takich, że $\{\varepsilon_{\mathcal{M}}(x^1), \ldots, \varepsilon_{\mathcal{M}}(x^m)\}$ jest układem współrzędnych na U rozmaitości M,
- *superukładem współrzędnych* na U nazywamy układ $\{x^1, \ldots, x^m, \theta^1, \ldots, \theta^n\}$, w którym układem parzystym jest $\{x^1, \ldots, x^m\}$ a nieparzystym jest $\{\theta^1, \ldots, \theta^n\}$ [38].

Definicja 2.1.11. Niech $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ będzie otwartym pokryciem M złożonym ze zbiorów rozdzielających. *Rozdzielającym atlasem* na $\mathcal{M}$ nazwiemy rodzinę $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$, gdzie φ_α jest układem współrzędnych na U_α rozmaitości M.

Przykład 2.1.12. Rozważmy superrozmaitość rzeczywistą (M, Ω_M) superwymiaru (m, m) oraz lokalny układ współrzędnych $\{x^1, \ldots, x^m\}$ na otwartym $U \subset M$. Wtedy

$$\Omega_M(U) = \left\{ \sum_{\underline{\lambda} \in \mathfrak{M}^m} f_{\underline{\lambda}}(x^1, \ldots, x^m) dx^{[\underline{\lambda}]} \;\middle|\; f_{\underline{\lambda}} \in C^\infty(U) \right\}.$$

Widać, że $dx^1, \ldots, dx^m$ generują nad $\mathbb{R}$ algebrę Grassmanna $(\Lambda\mathbb{R}^m)^* \simeq \Lambda\mathbb{R}^m$. Ponieważ każdą formę różniczkową nad U można przedstawić jako kombinację liniową iloczynów elementów z $C^\infty(U)$ oraz $(\Lambda\mathbb{R}^m)^*$ otrzymujemy $\Omega_M(U) \simeq C^\infty(U) \otimes \Lambda\mathbb{R}^m$. Zatem zbiór $\{x^i, dx^i\}_{i \in \overline{1,m}}$ jest superukładem współrzędnych na U. Ponadto jeśli rozmaitość M ma parzysty wymiar, to dla $\omega := dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^m$ mamy parzysty układ współrzędnych w postaci $\{x^1 + \omega, \ldots, x^m + \omega\}$.

W zastosowaniach najważniejsze są elementy snopów superrozmaitości, które opisują modele fizyczne.

Definicja 2.1.13. Niech F będzie *cięciem snopa* $\mathcal{A}_{\mathcal{M}}$, czyli snopem takim, że każdemu otwartemu $U \subset M$ przyporządkowuje dokładnie jedną funkcję $F_U \in \mathcal{A}_{\mathcal{M}}(U)$. Wtedy F nazwiemy *superfunkcją na superrozmaitości* $\mathcal{M}$. Zbiór superfunkcji na $\mathcal{M}$ oznaczamy $C^\infty(\mathcal{M})$.

Przykład 2.1.14. Rozważmy superrozmaitość $\mathcal{T}\mathbb{C}^{3|3}$ wraz ze współrzędnymi parzystymi $\{q^i, \dot{q}^i\}$ dla $i \in \overline{1,3}$ oraz współrzędnymi nieparzystymi $\{\theta^\mu, \dot{\theta}^\mu\}$ dla $\mu \in \overline{1,3}$. Cząstkę klasyczną nierelatywistyczną o masie m posiadającą spin można opisać [9] superfunkcją (superlagranżjanem)

$$L = \frac{\mathrm{i}}{2}\theta^\mu\dot{\theta}^\mu + \frac{m}{2}\dot{q}^i\dot{q}^i - V(q) - \theta^\mu\theta^\nu V_{\mu\nu}(q), \tag{2.1}$$

gdzie V i $V_{\mu\nu}$ są zespolonymi funkcjami, przy czym $V_{\mu\nu}$ jest postaci $V_{\mu\nu} := \frac{\mathrm{i}}{2}\epsilon_{\mu\nu\xi}V_\xi(q)$ dla pewnego pseudowektora $\overrightarrow{V}(q) = (V_1(q), V_2(q), V_3(q))$ oraz $\epsilon_{\mu\nu\xi}$ będącego symbolem Leviego-Civity, a przez q w argumencie V i $V_{\mu\nu}$ rozumiemy zestaw superwspółrzędnych parzystych q^i dla $i \in \overline{1,6}$ (od teraz przyjmujemy na stałe taką konwencję).

Definiując wektor $\overrightarrow{S} := -\frac{\mathrm{i}}{2}\overrightarrow{\theta} \times \overrightarrow{\theta}$ otrzymujemy wektorową postać L

$$L = \frac{\mathrm{i}}{2}\overrightarrow{\theta} \cdot \dot{\overrightarrow{\theta}} + \frac{m}{2}\dot{\overrightarrow{q}}^2 - V(q) + \overrightarrow{S} \cdot \overrightarrow{V}(q), \tag{2.2}$$

gdzie $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} := a_k b_k$.

2.1.2 Homomorfizmy superrozmaitości

Morfizmy między superrozmaitościami można zdefiniować na wiele sposobów, między innymi takich jak w [25] albo [38], spośród których wybraliśmy algebraiczno-geometryczną definicję Rogersa w [38] opisaną również w [37].

Definicja 2.1.15. Niech $\mathcal{M} := (M, \mathcal{A}_M)$ i $\mathcal{N} := (N, \mathcal{A}_N)$ będą superrozmaitościami o superwymiarach (m_0, m_1) i (n_0, n_1). Niech odwzorowanie $\widetilde{\Psi} : M \to N$ będzie różniczkowalną bijekcją, a odwzorowanie Ψ^* będzie spełniać warunki

(1) każdemu otwartemu $U \subset N$ przyporządkowuje parzysty homomorfizm superalgebr $\Psi^*_U : \mathcal{A}_N(U) \to \mathcal{A}_M(\widetilde{\Psi}^{-1}(U))$

(2) dla dowolnych otwartych V, U o własności $V \subset U \subset N$ następujący diagram jest przemienny

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}_N(U) \arrow[r, "\Psi^*_U"] \arrow[d, "\rho_{\mathcal{A}_N(V)}"'] & \mathcal{A}_M(\widetilde{\Psi}^{-1}(U)) \arrow[d, "\rho_{\mathcal{A}_M(\widetilde{\Psi}^{-1}(V))}"] \\
\mathcal{A}_N(V) \arrow[r, "\Psi^*_V"'] & \mathcal{A}_M(\widetilde{\Psi}^{-1}(V))
\end{tikzcd}$$

(3) Dla dowolnych parzystych współrzędnych $\{y^1, \ldots, y^{n_0}\}$ na $U \subset N$ zachodzi równość

$$\widetilde{\Psi^{-1}}^* \circ \varepsilon_{\mathcal{N}}(y^i) = \varepsilon_{\mathcal{M}} \circ \Psi^*_U(y^i), \quad \forall i \in \overline{1, n_0}. \tag{2.3}$$

Parę $\Psi := (\widetilde{\Psi}, \Psi^*)$ nazywamy *homomorfizmem superrozmaitości*, co w skrócie zapisujemy

$$\Psi : \mathcal{M} \to \mathcal{N}.$$

Przykład 2.1.16. Rozważmy superrozmaitości $(M, C^\infty_M(\cdot, \mathbb{K}))$ oraz $(N, C^\infty_N(\cdot, \mathbb{K}))$. Każdy dyfeomorfizm $\widetilde{\Phi} : M \to N$ zadaje homomorfizm superrozmaitości $\Phi = (\widetilde{\Phi}, \Phi^*)$ gdzie Φ^* jest cofnięciem postaci $\Phi^*(f) = f \circ \widetilde{\Phi}$ dla $f \in C^\infty(U, \mathbb{K})$.

Uwaga 2.1.17. Warto zauważyć, że z punktu (3) Definicji 2.1.15 wynika, że odwzorowanie $\widetilde{\Psi}$ można określić za pomocą Ψ^*. Biorąc za parzyste współrzędne y^i lokalne współrzędne rozmaitości N otrzymamy $\varepsilon_{\mathcal{N}}(y^i) = y^i$ i równanie (2.3) sprowadza się do

$$\widetilde{\Psi^{-1}}^*(y^i) = \varepsilon_{\mathcal{M}} \circ \Psi^*_U(y^i), \quad \forall i \in \overline{1, n_0},$$

co daje obrazy współrzędnych rozmaitości N w odwzorowaniu $\widetilde{\Psi^{-1}}$, które na mocy definicji 2.1.15 posiada gładką funkcję odwrotną.

Zwróćmy uwagę, że jeśli $M = N$ i odwzorowanie $\widetilde{\Psi}$ jest identycznością na M, to Ψ^* w Definicji 2.1.2 jest transformacją naturalną snopów $\mathcal{A}_M$ i $\mathcal{A}_N$.

Definicja 2.1.18. Niech $\Psi := (\widetilde{\Psi}, \Psi^*)$ będzie homomorfizmem superrozmaitości $\mathcal{M}_1 := (M_1, \mathcal{A}_1)$ oraz $\mathcal{M}_2 := (M_2, \mathcal{A}_2)$. Powiemy, że Ψ jest *izomorfizmem superrozmaitości*, jeśli $\widetilde{\Psi}$ jest dyfeomorfizmem oraz dla każdego otwartego $U \subset M_2$ odwzorowanie Ψ^*_U jest izomorfizmem superalgebr $\mathcal{A}_2(U)$ i $\mathcal{A}_1(\widetilde{\Psi}^{-1}(U))$.

Ważnym wynikiem supergeometrii jest twierdzenie Batchelory-Gawędzkiego które pomaga zrozumieć strukturę superrozmaitości [3].

Twierdzenie 2.1.19. *(Batchelory-Gawędzkiego) Niech $\mathcal{M} := (M, \mathcal{A}_M)$ będzie rzeczywistą superrozmaitością superwymiaru (m, n). Wtedy istnieją wiązka wektorowa $E \xrightarrow{\pi} M$ rzędu n, snop jej cięć $\Gamma_{\Lambda E}$ oraz izomorfizm superrozmaitości $\mu : (M, \Gamma_{\Lambda E}) \to \mathcal{M}$.*

Dla superrozmaitości zespolonych powyższe twierdzenie ma tylko charakter lokalny, ponieważ wymaga rozkładu jedności, który w ogólności nie istnieje na rozmaitościach zespolonych.

Definicja 2.1.20. Superrozmaitość $(M, \Gamma_{\Lambda E})$ z Twierdzenia 2.1.19 nazywamy *superrozmaitością strukturalną* superrozmaitości $\mathcal{M}$.

Wiązka wektorowa E jest określona z dokładnością do izomorfizmu wiązek wektorowych a izomorfizm superrozmaitości μ zwykle nie jest izomorfizmem wiązek wektorowych i nie jest kanoniczny. Kategoria superrozmaitości i kategoria wiązek wektorowych nie są izomorficzne.

Dzięki Twierdzeniu Batchelory-Gawędzkiego wiemy, że każda superrozmaitość ma swoją superrozmaitość strukturalną i na niej można by zdefiniować superwspółrzędne. Jednak do obliczeń praktycznych warto zdefiniować superukład współrzędnych jak najogólniej.

2.2 Superrozmaitość styczna

W supermechanice pojawią się superrównania Eulera-Lagrange'a [7]. Do ich wprowadzenia potrzebne będą pojęcia superrozmaitości stycznej i superpól wektorowych. Niech $\mathcal{M} := (M, \mathcal{A}_M)$ będzie superrozmaitością o superwymiarze (m, n). Pokażemy jak z jej pomocą skonstruować nową superrozmaitość $\mathcal{TM} := (TM, \mathcal{A}_{TM})$, która jest uogólnieniem wiązki stycznej do M.

Do zdefiniowania superrozmaitości stycznej potrzeba definicji snopa $\mathcal{A}_{TM}$. Każdemu TU dla otwartegu $U \subset M$ przyporządkujmy $\mathcal{A}_{TM}(TU) := C^\infty(TU) \otimes \Lambda\mathbb{K}^{2n}$ oraz każdemu morfizmowi inkluzji $TV \subset TU$ przyporządkujmy morfizm restrykcji $\rho_{TU,TV} : \mathcal{A}_{TM}(TU) \ni f \mapsto f|_V \in \mathcal{A}_{TM}(TV)$. Tak określony $\mathcal{A}_{TM}$ jest presnopem.

Żeby zagwarantować, że $\mathcal{A}_{TM}$ jest snopem, musimy odpowiednio zdefiniować tranformacje współrzędnych na przecięciach otwartych podzbiorów TM.

Z Twierdzenia 2.1.19 wynika istnienie superrozmaitości strukturalnej $(M, \Gamma_{\Lambda E})$ superrozmaitości $\mathcal{M}$ oraz istnienie rodziny superwspółrzędnych, które transformują się jak współrzędne na wiązce wektorowej $E \xrightarrow{\pi} M$. Stąd na otwartych $U_\alpha, U_\beta \subset M$ istnieją superwspółrzędne $\{a^i, \theta^\mu\}_{i\in\overline{1,m}}^{\mu\in\overline{1,n}}$ oraz $\{b^i, \xi^\mu\}_{i\in\overline{1,m}}^{\mu\in\overline{1,n}}$ takie, że na $U_\alpha \cap U_\beta$ transformacja współrzędnych jest postaci

$$b^i = \varphi^i(a^1, \ldots, a^m), \quad i \in \overline{1,m}, \qquad \xi^\mu = \psi^\mu_\nu(a_1, \ldots, a_m)\theta^\nu, \quad \mu \in \overline{1,n}, \tag{2.4}$$

dla pewnych funkcji φ^i oraz ψ^μ_ν. W superalgebrach $\mathcal{A}_{TM}(TU_\alpha), \mathcal{A}_{TM}(TU_\beta)$ wybieramy generatory $\{a^i, \dot{a}^i, \theta^\mu, \dot{\theta}^\mu\}_{i\in\overline{1,m}}^{\mu\in\overline{1,n}}$ oraz $\{b^i, \dot{b}^i, \xi^\mu, \dot{\xi}^\mu\}_{i\in\overline{1,m}}^{\mu\in\overline{1,n}}$, w których

- $a^i, b^i, \theta^\mu, \xi^\mu$ są superwspółrzędnymi transformującymi się jak w (2.4),
- $\dot{a}^i, \dot{b}^i$ są współrzędnymi indukowanymi przez a^i, b^i na wiązce stycznej TM,
- $\dot{\theta}^\mu, \dot{\xi}^\mu$ są generatorami nieparzystymi takimi, że

$$\{a^i, \dot{a}^i, \theta^\mu, \dot{\theta}^\mu\}_{i\in\overline{1,m}}^{\mu\in\overline{1,n}}, \qquad \{b^i, \dot{b}^i, \xi^\mu, \dot{\xi}^\mu\}_{i\in\overline{1,m}}^{\mu\in\overline{1,n}}$$

  spełniają, że $\mathcal{A}_{TM}(TU_\alpha) \simeq C^\infty(U_\alpha) \otimes \Lambda\mathbb{K}^n$ oraz $\mathcal{A}_{TM}(TU_\beta) \simeq C^\infty(U_\beta) \otimes \Lambda\mathbb{K}^n$.

Transformację superwspółrzędnych (izomorfizm superalgebr) na $TU_\alpha \cap TU_\beta$ definiujemy dodając do reguł (2.4) zależności, które odpowiadają różniczkowaniom funkcji przejścia przestrzeni konfiguracyjnej:

$$\begin{aligned} \dot{b}^i &= \frac{\partial \varphi^i(a^1, \ldots, a^m)}{\partial a^j}\dot{a}^j, \quad i \in \overline{1,m}, \\ \dot{\xi}^\mu &= \frac{\partial \psi^\mu_\nu(a^1, \ldots, a^m)}{\partial a^j}\dot{a}^j\theta^\nu + \psi^\mu_\nu(a^1, \ldots, a^m)\dot{\theta}^\nu, \quad \mu \in \overline{1,n}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

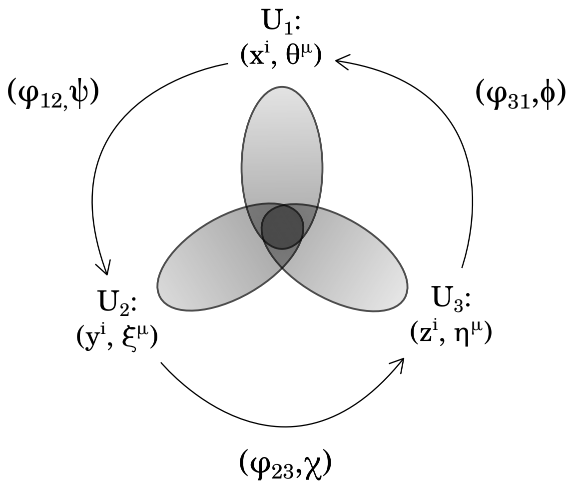
Pokażemy, że tak zdefiniowane transformacje superwspółrzędnych superrozmaitości stycznej spełniają warunek kocyklu. Niech otwarte zbiory $U_1, U_2, U_3 \subset M$ mają niepuste przecięcie. Wybierzmy superukład współrzędnych (x^i, θ^μ) na U_1, superukład (y^i, ξ^μ) na U_2 oraz superukład (z^i, η^μ) na U_3. Niech $\varphi_{12}, \varphi_{23}, \varphi_{31}$ będą transformacjami superwspółrzędnych parzystych, a ψ, χ, ϕ będą transformacjami superwspółrzędnych nieparzystych, odpowiednio z U_1 do U_2, z U_2 do U_3 i z U_3 do U_1. Opisaną sytuację przedstawiono na Rysunku 2.1.

Fakt, że transformacje superwspółrzędnych $\{x^i, \dot{x}^i, \theta^\mu\}$ spełniają warunki kocyklu

$$\varphi^i_{12}\varphi^i_{23}\varphi^i_{31} = \mathbb{I}, \qquad \frac{\partial \varphi^k_{31}}{\partial z^n}\frac{\partial \varphi^n_{23}}{\partial y^m}\frac{\partial \varphi^k_{12}}{\partial x^l} = \delta^k_l, \qquad \phi^\alpha_\beta \chi^\beta_\gamma \psi^\gamma_\mu = \delta^\alpha_\mu$$

wynika z własności wiązki stycznej TM i własności wiązki wektorowej $E \xrightarrow{\pi} M$. Dla superwspółrzędnych $\{\dot{\theta}^\mu\}$ udowadniamy to licząc złożenie Φ trzech transformacji superwspółrzędnych nieparzystych w postaci macierzowej (2.6).

$$\Phi := \begin{bmatrix} \phi^\alpha_\beta & 0 \\ \frac{\partial \phi^\alpha_\beta}{\partial z^i}\dot{z}^i & \phi^\alpha_\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi^\beta_\gamma & 0 \\ \frac{\partial \chi^\beta_\gamma}{\partial y^j}\dot{y}^j & \chi^\beta_\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi^\gamma_\alpha & 0 \\ \frac{\partial \psi^\gamma_\alpha}{\partial x^k}\dot{x}^k & \psi^\gamma_\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi^\alpha_\beta\chi^\beta_\gamma\psi^\gamma_\alpha & 0 \\ M & \phi^\alpha_\beta\chi^\beta_\gamma\psi^\gamma_\alpha \end{bmatrix}, \tag{2.6}$$



Rysunek 2.1: Ilustracja zbiorów U_1, U_2, U_3 i zmiany superwspółrzędnych między nimi.

gdzie macierz M ma postać:

$$M = \frac{\partial \phi^{\alpha}_{\beta}}{\partial z^i} \chi^{\beta}_{\gamma} \psi^{\gamma}_{\alpha} \dot{z}^i + \phi^{\alpha}_{\beta} \frac{\partial \chi^{\beta}_{\gamma}}{\partial y^j} \psi^{\gamma}_{\alpha} \dot{y}^j + \phi^{\alpha}_{\beta} \chi^{\beta}_{\gamma} \frac{\partial \psi^{\gamma}_{\alpha}}{\partial x^k} \dot{x}^k.$$

Zauważmy, że

$$\frac{\partial \phi^{\alpha}_{\beta}}{\partial z^i} \dot{z}^i = \frac{\partial \phi^{\alpha}_{\beta}}{\partial x^m} \frac{\partial x^m}{\partial z^i} \frac{\partial \dot{z}^i}{\partial \dot{x}^k} \dot{x}^k = \frac{\partial \phi^{\alpha}_{\beta}}{\partial x^k} \dot{x}^k.$$

Podobnie $\frac{\partial \chi^{\beta}_{\gamma}}{\partial y^j} \dot{y}^j = \frac{\partial \chi^{\beta}_{\gamma}}{\partial x^k} \dot{x}^k$, a zatem

$$M = \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\phi^{\alpha}_{\beta} \chi^{\beta}_{\gamma} \psi^{\gamma}_{\alpha} \right) \dot{x}^k = 0$$

co oznacza, że $\Phi = \mathbb{I}_{2n \times 2n}$ i ostatni warunek kocyklu też jest spełniony. Zachodzenie warunków kocyklu gwarantuje, że spełnione jest poniższe

Twierdzenie 2.2.1. *$\mathcal{A}_{\mathcal{TM}}$ jest snopem.*

Snopem elementów nilpotentnych $\mathcal{N}_{TM}$ snopu $\mathcal{A}_{TM}$ jest snop superalgebr lokalnie generowanych przez współrzędne nieparzyste. Skoro $\mathcal{A}_M / \mathcal{N}_M \simeq C^{\infty}(\cdot, M)$ z założenia, to można udowodnić, że $\mathcal{A}_{TM}/\mathcal{N}_{TM} \simeq C^{\infty}(\cdot, TM)$. Wobec tego $\mathcal{TM} := (TM, \mathcal{A}_{TM})$ jest superrozmaitością.

Definicja 2.2.2. Superrozmaitość $\mathcal{TM} := (TM, \mathcal{A}_{TM})$ skonstruowaną powyżej nazywamy *superwiązką styczną* do superrozmaitości $\mathcal{M} := (M, \mathcal{A}_M)$, zaś $\mathcal{A}_{TM}$ nazywamy *supersnopem stycznym* snopa $\mathcal{A}_M$.

Stwierdzenie 2.2.3. *Jeśli $E \xrightarrow{\pi} M$ jest wiązką strukturalną superrozmaitości $\mathcal{M} = (M, \mathcal{A}_M)$, to wiązka $TE \xrightarrow{T\pi} TM$ jest wiązką strukturalną superrozmaitości stycznej $\mathcal{TM}$.*

2.2.1 Superpola wektorowe

Skoro dla każdego otwartego $U \subset M$ mamy supermoduł $\mathrm{Der}(\mathcal{A}_{\mathcal{M}}(U))$, możemy zdefiniować snop supermodułów superróżniczkowań $\mathcal{A}'_{\mathcal{M}}$ tak, że

$$\begin{aligned} U &\mapsto \mathrm{Der}(\mathcal{A}_{\mathcal{M}}(U)), \qquad \forall \text{ otwartego } U \subset M, \\ \rho_{VU} &\mapsto \rho'_{VU}, \qquad \forall \text{ otwartego } V, U, \text{ gdzie } V \subset U \subset M, \end{aligned} \tag{2.7}$$

przy czym przez ρ_{VU} rozumiemy obcięcie z U do V, zaś ρ'_{VU} jest odwzorowaniem

$$\begin{array}{rccc} \rho'_{VU}: & \mathrm{Der}(\mathcal{A}_M(U)) & \to & \mathrm{Der}(\mathcal{A}_M(V)) \\ & D & \mapsto & \rho'_{UV}(D) \end{array} \tag{2.8}$$

dla

$$\rho'_{VU}(D)\rho_{VU}(f) := \rho_{VU}(Df), \qquad \forall D \in \mathrm{Der}(\mathcal{A}_M(U)),\ \forall f \in \mathcal{A}_M(U).$$

Definicja 2.2.4. Cięcia snopa $\mathcal{A}'_{\mathcal{M}}$ nazywamy *superpolami wektorowymi* na superrozmaitości $\mathcal{M}$.

Zbiór superpól wektorowych nad superrozmaitością $\mathcal{M}$ oznaczamy $\mathfrak{X}(\mathcal{M})$. Inaczej niż w geometrii różniczkowej, w supergeometrii superpola wektorowe na $\mathcal{M}$ nie są cięciami snopa superrozmaitości stycznej, tylko cięciami tzw. superwiązki stycznej [7]. Z drugiej strony widać, że superrozmaitość styczna w ogólności nie jest superwiązką nad superrozmaitością pierwotną, ponieważ rzutowanie $\mathcal{A}_{\mathcal{TM}} \to \mathcal{A}_{\mathcal{M}}$ może nie istnieć.

Podobnie jak w geometrii różniczkowej, można pokazać [38], że superpole wektorowe X w lokalnych superwspółrzędnych (x^i, θ^μ) przyjmuje postać

$$X = X^{x^i}\frac{\partial}{\partial x^i} + X^{\theta\mu}\frac{\partial}{\partial \theta^\mu},$$

gdzie $X^{x^i}, X^{\theta\mu}$ są superfunkcjami na $\mathcal{M}$. Widać, że dla superwymiaru (m, n) superrozmaitości $\mathcal{M}$ zachodzi $\mathcal{A}'_{\mathcal{TM}} \simeq {\mathcal{A}_{\mathcal{TM}}}^{2m+2n}$.

Przykład 2.2.5. Rozważmy transformację superwspółrzędnych $(x, \theta) \mapsto (y, \Upsilon)$ na $\mathbb{R}^{1|1}$ taką, że

$$y := \log(x), \quad \Upsilon := (1 + x^2)\theta. \tag{2.9}$$

Relacje (2.9) indukują transformację $\dot{x}, \dot{\theta}$ na superrozmaitości stycznej $\mathcal{T}\mathbb{R}^{1|1}$ w postaci

$$\dot{y} = \dot{x}/x, \quad \dot{\Upsilon} = 2x\dot{x}\theta + (1 + x^2)\dot{\theta}. \tag{2.10}$$

Zbadajmy, jak zmienia się zapis superpola wektorowego $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{T}\mathbb{R}^{1|1})$ zadanego wzorem

$$X = \dot{x}\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial \dot{x}} + \dot{\theta}\frac{\partial}{\partial \theta} - \theta\frac{\partial}{\partial \theta} \tag{2.11}$$

pod wpływem zamiany zmiennych $(x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}) \mapsto (y, \dot{y}, \Upsilon, \dot{\Upsilon})$ na $\mathcal{T}\mathbb{R}^{1|1}$. W nowych zmiennych X przyjmuje ogólną postać

$$X = (Xy)\frac{\partial}{\partial y} + (X\dot{y})\frac{\partial}{\partial \dot{y}} + (X\Upsilon)\frac{\partial}{\partial \Upsilon} + (X\dot{\Upsilon})\frac{\partial}{\partial \dot{\Upsilon}}.$$

Ponieważ

$$Xy = X\log x = \frac{\dot{x}}{x} = \dot{y}, \quad X\dot{y} = X\frac{\dot{x}}{x} = -\frac{\dot{x}^2}{x^2} - 1 = -\dot{y}^2 - 1$$

$$X\Upsilon = 2x\dot{x}\theta + (1+x^2)\dot{\theta} = \dot{\Upsilon}, \quad X\dot{\Upsilon} = \frac{4e^{2y}\dot{y}}{1+e^{2y}}\dot{\Upsilon} + \frac{\Upsilon}{(1+e^{2y})^2}[6e^{4y}(6\dot{y}^2-3) - 4e^{2y} - 1],$$

otrzymujemy

$$X = \dot{y}\frac{\partial}{\partial y} - (\dot{y}^2+1)\frac{\partial}{\partial \dot{y}} + \dot{\Upsilon}\frac{\partial}{\partial \Upsilon} + \left[\frac{4e^{2y}\dot{y}}{1+e^{2y}}\dot{\Upsilon} + \frac{\Upsilon}{(1+e^{2y})^2}[6e^{4y}(6\dot{y}^2-3) - 4e^{2y} - 1]\right]\frac{\partial}{\partial \dot{\Upsilon}}.$$

W ogólnym przypadku superpola wektorowego $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ postaci (2.11) dla superwspółrzędnych lokalnych x^i, θ^μ na pewnej superrozmaitości $\mathcal{M}$, superwspółrzędne $\dot{x}^i, \dot{\theta}^\mu$ można traktować jak odwzorowania spełniające relacje

$$\dot{\theta}^\alpha(X) = X\theta^\alpha, \quad \dot{x}^i(X) = Xx^i.$$

Stwierdzenie 2.2.6. *Niech $D \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ i niech $\widetilde{D}$ będzie postaci*

$$\widetilde{D}\widetilde{f} := \widetilde{Df}, \qquad \forall f \in \mathcal{A}_M,$$

gdzie $\widetilde{f} = \varepsilon(f)$ dla morfizmu $\varepsilon : \mathcal{A}_\mathcal{M} \to \mathcal{A}_\mathcal{M}/\mathcal{F}_\mathcal{M} \simeq C^\infty(M)$. Wtedy $\widetilde{D}$ jest polem wektorowym na M. [37]

Przykład 2.2.7. Cząstkę klasyczną nierelatywistyczną można opisać superpolem wektorowym $\Gamma \in \mathfrak{X}(\mathcal{T}\mathbb{C}^{3|3})$ (patrz Przykład 3.1.9) postaci

$$\Gamma = \dot{q}^i\frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{1}{m}\left(\frac{\partial V}{\partial q^i} + \frac{\partial V_{\mu\nu}}{\partial q^i}\theta^\mu\theta^\nu\right)\frac{\partial}{\partial \dot{q}^i} - 2\mathrm{i}\theta^\nu V_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial \theta^\mu}.$$

Weźmy dowolną superfunkcję $f \in C^\infty(\mathcal{T}\mathbb{C}^{3|3})$ o ogólnej postaci

$$f(q,\dot{q},\theta,\dot{\theta}) := \sum_{\underline{\lambda}\in\mathfrak{M}^3,\ \underline{\alpha}\in\mathfrak{M}^3} f^{\theta^{[\underline{\lambda}]}\dot{\theta}^{[\underline{\alpha}]}}(q,\dot{q})\theta^{[\underline{\lambda}]}\dot{\theta}^{[\underline{\alpha}]}.$$

Skoro $\widetilde{\Gamma}\widetilde{f} = \widetilde{\Gamma f}$, to

$$\widetilde{\Gamma}\widetilde{f} = \dot{q}^i\frac{\partial f^0}{\partial q^i} - \frac{1}{m}\frac{\partial V}{\partial q^i}\frac{\partial f^0}{\partial \dot{q}^i} \quad \Longrightarrow \quad \widetilde{\Gamma} = \dot{q}^i\frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{1}{m}\frac{\partial V}{\partial q^i}\frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}.$$

Pokażemy teraz sposób całkowania superpól wektorowych parzystych. Przypominamy, że w geometrii różniczkowej układ równań różniczkowych na krzywą całkową $\gamma_x(t) = (\gamma_x^1(t), \ldots, \gamma_x^m(t))$ pola wektorowego X na rozmaitości M wymiaru m ma postać

$$\frac{d}{dt}\gamma_x^i(t) = X^i(\gamma_x(t)), \quad i \in \overline{1,m}, \tag{2.12}$$

gdzie γ_x to rozwiązanie szczególne układu (2.12) z warunkiem początkowym $\gamma_x(0) = x \in M$. Definiuje się potok pola X jako odwzorowanie $\gamma(\cdot,\cdot) : \mathbb{R}\times M \to M$ takie, że $\gamma(t,x) := \gamma_x(t)$. Dla pola wektorowego X można również zdefiniować funkcję $\Gamma^* : C^\infty(M) \to C^\infty(\mathbb{R}\times M)$ za pomocą warunków

$$\Gamma^*(x^i) := x^i(\gamma(\cdot,\cdot)) = \gamma^i(\cdot,\cdot), \quad i \in \overline{1,m},$$

gdzie przez x^i rozumiemy funkcję współrzędnościową zwracającą i-tą współrzędną punktu $x \in M$ w ustalonych lokalnych współrzędnych M. Wtedy

$$\frac{\partial \Gamma^*(x^i)}{\partial t}(t,x) = \frac{d}{dt}\gamma_x^i(t) = X^i(\gamma_x(t)) = X^i(\gamma(t,x)) = \Gamma^*(Xx^i)(t,x). \tag{2.13}$$

Skoro równość (2.13) jest spełniona dla wszystkich funkcji współrzędnościowych x^i, to można pokazać, że $D \circ \Gamma^* = \Gamma^* \circ X$, gdzie $D = \frac{\partial}{\partial t}$, zachodzi dla dowolnej funkcji $f \in C^\infty(M)$. W supergeometrii korzysta się z uogólnienia tego równania do zdefiniowania potoku superpola wektorowego.

Definicja 2.2.8. *Superpotokiem superpola wektorowego* $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ nazywamy homomorfizm superrozmaitości $\Gamma : \mathbb{R} \times \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ taki, że $\widetilde{\Gamma}$ to potok $\mathbb{R} \times M \to M$ pola wektorowego $\widetilde{X}$, natomiast Γ^* spełnia relację

$$D \circ \Gamma^* = \Gamma^* \circ X$$

oraz warunek $\Gamma^*_M(f)(0,x) = f(x)$ dla dowolnej funkcji $f \in C^\infty(M)$ i dowolnego $x \in M$.

Przykład 2.2.9. Zbadamy klasyczny jednowymiarowy superoscylator harmoniczny [35]. Można pokazać, że superpole wektorowe $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{T}\mathbb{R}^{1|1})$ o lokalnej postaci

$$X = \dot{x}\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial \dot{x}} + \dot{\theta}\frac{\partial}{\partial \theta} - \theta\frac{\partial}{\partial \dot{\theta}}$$

jest rozwiązaniem superrównania Eulera-Lagrange'a (3.7) dla superlagranżjanu superoscylatora harmonicznego w superwymiarze $(1,1)$. Dynamikę takiego układu opisuje superpotok $\Gamma : \mathbb{R} \times \mathcal{T}\mathbb{R}^{1|1} \to \mathcal{T}\mathbb{R}^{1|1}$ superpola wektorowego X. W tym przykładzie pokażemy, jak go znaleźć, czyli jak określić Γ^* i $\widetilde{\Gamma}$.

Wykorzystując globalne superwspółrzędne $(x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta})$ na $\mathcal{T}\mathbb{R}^{1|1}$ i fakt, że dla każdego otwartego $U \subset \mathbb{R}^{1|1}$ odwzorowanie Γ^*_U jest parzystym homomorfizmem superalgebr otrzymujemy równania na obrazy funkcji współrzędnościowych na $\mathcal{T}\mathbb{R}^{1|1}$

$$\begin{aligned} \Gamma^*_U(x)(t,x,\dot{x}) &= \Gamma^x(t,x,\dot{x}) + \Gamma^x_{\theta\dot{\theta}}(t,x,\dot{x})\theta\dot{\theta}, & \Gamma^*_U(\dot{x})(t,x,\dot{x}) &= \Gamma^{\dot{x}}(t,x,\dot{x}) + \Gamma^{\dot{x}}_{\theta\dot{\theta}}(t,x,\dot{x})\theta\dot{\theta},\\ \Gamma^*_U(\theta)(t,x,\dot{x}) &= \Gamma^\theta_\theta(t,x,\dot{x})\theta + \Gamma^\theta_{\dot{\theta}}(t,x,\dot{x})\dot{\theta}, & \Gamma^*_U(\dot{\theta})(t,x,\dot{x}) &= \Gamma^{\dot{\theta}}_\theta(t,x,\dot{x})\theta + \Gamma^{\dot{\theta}}_{\dot{\theta}}(t,x,\dot{x})\dot{\theta}, \end{aligned} \tag{2.14}$$

gdzie $\Gamma^\alpha_\beta(t,x,\dot{x}) \in C^\infty(\mathbb{R} \times T\mathbb{R})$ dla dowolnych indeksów $\alpha, \beta \in \{-, x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}, \theta\dot{\theta}\}$. Na podstawie układu równań (2.14) można określić obraz dowolnej funkcji $f \in C^\infty(\mathcal{T}\mathbb{R}^{1|1})$: przypuśćmy, że

$$f(x,\dot{x},\theta,\dot{\theta}) = \sum_{\underline{\lambda} \in \mathfrak{M}^3,\, \underline{\alpha} \in \mathfrak{M}^3} f^{\theta^{[\underline{\lambda}]}\dot{\theta}^{[\underline{\alpha}]}}(x,\dot{x})\theta^{[\underline{\lambda}]}\dot{\theta}^{[\underline{\alpha}]},$$

a wtedy z własności homomorfizmu superalgebr otrzymamy

$$\Gamma^*_U(f)(t,x,\dot{x}) = \sum_{\underline{\lambda} \in \mathfrak{M}^3,\, \underline{\alpha} \in \mathfrak{M}^3} f^{\theta^{[\underline{\lambda}]}\dot{\theta}^{[\underline{\alpha}]}}(\Gamma^*_U x, \Gamma^*_U \dot{x})\Gamma^*_U\theta^{[\underline{\lambda}]}\Gamma^*_U\dot{\theta}^{[\underline{\alpha}]}.$$

Jeśli równanie $D \circ \Gamma^* = \Gamma^* \circ X$ jest spełnione dla globalnych funkcji współrzędnościowych $x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}$, to z liniowości D, Γ^* oraz X jest ono spełnione dla dowolnej superfunkcji $f \in C^\infty(\mathcal{T}\mathbb{R}^{1|1})$. W szczególności

$$D \circ \Gamma^*(x) = \Gamma^* \circ Xx \quad \Longrightarrow \quad D\Gamma^x + D\Gamma^x_{\theta\dot\theta}\theta\dot\theta = \Gamma^{\dot x} + \Gamma^{\dot x}_{\theta\dot\theta}\theta\dot\theta \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} D\Gamma^x = \Gamma^{\dot x}, \\ D\Gamma^x_{\theta\dot\theta} = \Gamma^{\dot x}_{\theta\dot\theta}, \end{cases}$$

$$D \circ \Gamma^*(\dot x) = \Gamma^* \circ X\dot x \quad \Longrightarrow \quad D\Gamma^{\dot x} + D\Gamma^{\dot x}_{\theta\dot\theta}\theta\dot\theta = -\Gamma^x - \Gamma^x_{\theta\dot\theta}\theta\dot\theta \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} D\Gamma^{\dot x} = -\Gamma^x, \\ D\Gamma^{\dot x}_{\theta\dot\theta} = -\Gamma^x_{\theta\dot\theta}, \end{cases}$$

$$D \circ \Gamma^*(\theta) = \Gamma^* \circ X\theta \quad \Longrightarrow \quad D\Gamma^\theta_\theta\theta + D\Gamma^\theta_{\dot\theta}\dot\theta = \Gamma^{\dot\theta}_\theta\theta + \Gamma^{\dot\theta}_{\dot\theta}\dot\theta \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} D\Gamma^\theta_\theta = \Gamma^{\dot\theta}_\theta, \\ D\Gamma^\theta_{\dot\theta} = \Gamma^{\dot\theta}_{\dot\theta}, \end{cases}$$

$$D \circ \Gamma^*(\dot\theta) = \Gamma^* \circ X\dot\theta \quad \Longrightarrow \quad D\Gamma^{\dot\theta}_\theta\theta + D\Gamma^{\dot\theta}_{\dot\theta}\dot\theta = -\Gamma^\theta_\theta\theta - \Gamma^\theta_{\dot\theta}\dot\theta \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} D\Gamma^{\dot\theta}_\theta = -\Gamma^\theta_\theta, \\ D\Gamma^{\dot\theta}_{\dot\theta} = -\Gamma^\theta_{\dot\theta}. \end{cases}$$

Stąd wynika, że

$$\begin{aligned} D^2\Gamma^x &= -\Gamma^x, \quad \Gamma^{\dot x} = D\Gamma^x, & D^2\Gamma^\theta_\theta &= -\Gamma^\theta_\theta, \quad \Gamma^{\dot\theta}_\theta = D\Gamma^\theta_\theta, \\ D^2\Gamma^{\dot\theta}_{\dot\theta} &= -\Gamma^{\dot\theta}_{\dot\theta}, \quad \Gamma^\theta_{\dot\theta} = -D\Gamma^{\dot\theta}_{\dot\theta}, & D^2\Gamma^x_{\theta\dot\theta} &= -\Gamma^x_{\theta\dot\theta}, \quad D\Gamma^x_{\theta\dot\theta} = \Gamma^{\dot x}_{\theta\dot\theta}. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Rozwiązując równania (2.15) dla superróżniczkowania $D = \frac{\partial}{\partial t}$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} \Gamma^x &= A(x,\dot x)\cos(t) + \hat A(x,\dot x)\sin(t), & \Gamma^{\dot x} &= -A(x,\dot x)\sin(t) + \hat A(x,\dot x)\cos(t), \\ \Gamma^\theta_\theta &= B(x,\dot x)\cos(t) + \hat B(x,\dot x)\sin(t), & \Gamma^{\dot\theta}_\theta &= -B(x,\dot x)\sin(t) + \hat B(x,\dot x)\cos(t), \\ \Gamma^{\dot\theta}_{\dot\theta} &= C(x,\dot x)\cos(t) + \hat C(x,\dot x)\sin(t), & \Gamma^\theta_{\dot\theta} &= C(x,\dot x)\sin(t) - \hat C(x,\dot x)\cos(t), \\ \Gamma^x_{\theta\dot\theta} &= D(x,\dot x)\cos(t) + \hat D(x,\dot x)\sin(t), & \Gamma^{\dot x}_{\theta\dot\theta} &= -D(x,\dot x)\sin(t) + \hat D(x,\dot x)\cos(t). \end{aligned} \tag{2.16}$$

Ponieważ dla $t = 0$ zachodzą warunki

$$\begin{aligned} \Gamma^*(x) &= A(x,\dot x) + D(x,\dot x)\theta\dot\theta = x, & \Gamma^*\dot x &= \hat A(x,\dot x) + \hat D(x,\dot x)\theta\dot\theta = \dot x, \\ \Gamma^*(\theta) &= B(x,\dot x)\theta - \hat C(x,\dot x)\dot\theta = \theta, & \Gamma^*(\dot\theta) &= C(x,\dot x)\dot\theta + \hat B(x,\dot x)\theta = \dot\theta, \end{aligned}$$

muszą być spełnione relacje

$$\begin{aligned} A(x,\dot x) &= x, \quad \hat A(x,\dot x) = \dot x, & B(x,\dot x) &= 1, \quad \hat B(x,\dot x) = 0, \\ C(x,\dot x) &= 1, \quad \hat C(x,\dot x) = 0, & D(x,\dot x) &= 0, \quad \hat D(x,\dot x) = 0. \end{aligned}$$

Ostatecznie

$$\begin{aligned} \Gamma^*(x) &= x\cos(t) + \dot x\sin(t), & \Gamma^*(\dot x) &= -x\sin(t) + \dot x\cos(t), \\ \Gamma^*(\theta) &= \cos(t)\theta + \sin(t)\dot\theta, & \Gamma^*(\dot\theta) &= \cos(t)\dot\theta - \sin(t)\theta. \end{aligned}$$

Do znalezienia pozostał potok $\widetilde\Gamma$ pola wektorowego $\widetilde X$. Pole wektorowe $\widetilde X$ poznamy badając relację $\widetilde X\widetilde f = \widetilde{Xf}$ dla dowolnej $f \in C^\infty(\mathcal{T}\mathbb{R}^{1|1})$ opisanej w superwspółrzędnych wzorem $f(x,\dot x,\theta,\dot\theta) = f^0(x,\dot x) + f^\theta(x,\dot x)\theta + f^{\dot\theta}(x,\dot x)\dot\theta + f^{\theta\dot\theta}(x,\dot x)\theta\dot\theta$. Widać, że

$$\widetilde{Xf} = \dot x\frac{\partial f^0}{\partial x} - x\frac{\partial f^0}{\partial \dot x} \quad \Longrightarrow \quad \widetilde X = \dot x\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial \dot x},$$

zatem krzywe całkowe $\widetilde{X}$ są rozwiązaniami układu równań różniczkowych postaci

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dot{x}, \\ \dfrac{d\dot{x}}{dt} = -x, \end{cases} \implies \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix}.$$

Wobec tego krzywe te są określone we współrzędnych poprzez $x(t) = x_0\cos(t)+v_0\sin(t)$, $\dot{x}(t) = v_0\cos(t) - x_0\sin(t)$ i potok $\widetilde{\Gamma}$ ma postać

$$\widetilde{\Gamma} : \mathbb{R} \times TM \ni (t, x, \dot{x}) \mapsto (x\cos(t) + \dot{x}\sin(t), \dot{x}\cos(t) - x\sin(t)) \in TM.$$

Na zakończenie podrozdziału o superpolach wektorowych wspomnimy o superkomutatorze, który jest naturalnym rozszerzeniem komutatora pól wektorowych.

Definicja 2.2.10. *Superkomutatorem* superpól wektorowych $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ nazywamy odwzorowanie

$$[X_1, X_2] := X_1 \circ X_2 - (-1)^{p(X_1)p(X_2)} X_2 \circ X_1.$$

Stwierdzenie 2.2.11. *Niech $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ będą jednorodnymi superpolami wektorowymi. Wtedy $[X_1, X_2]$ także jest jednorodnym superpolem wektorowym o parzystości $p([X_1, X_2]) = p(X_1) + p(X_2)$.*

2.3 Superrozmaitość kostyczna

Omówimy konstrukcję superrozmaitości kostycznej $\mathcal{T}^*\mathcal{M}$ do superrozmaitości $\mathcal{M}$. Podobnie jak w przypadku wiązki stycznej, nad rozmaitością M możemy w naturalny sposób określić wiązkę kostyczną T^*M, która będzie rozmaitością bazową superrozmaitości kostycznej.

Do skonstruowania $\mathcal{T}^*\mathcal{M}$ brakuje jeszcze supersnopa kostycznego $\mathcal{A}_{\mathcal{T}^*\mathcal{M}}$, który zdefiniujemy korzystając z rozdzielającego atlasu $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ na $\mathcal{M}$. Dzięki twierdzeniu Batchelora-Gawędzkiego wiemy, że między podzbiorami tego atlasu istnieje rodzina funkcji przejścia mających prostą postać:

$$y^i := \Psi^i(x), \quad \Upsilon^\mu := \Psi^\mu_\nu \theta^\nu.$$

Można zdefiniować rodzinę rozdzielających otoczeń $\mathcal{T}^*\mathcal{M}$ jako $\{T^*U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ z superalgebrami $\mathcal{A}_{\mathcal{T}^*\mathcal{M}}(U_\alpha) := C^\infty_{T^*M}(U_\alpha) \otimes \Lambda\mathbb{R}^{2n}$, na których można zadać lokalne superwspółrzędne $(x^i, p_i, \theta^\mu, \pi_\mu)$. To pozwala na określenie snopa $\mathcal{A}_{\mathcal{T}^*\mathcal{M}}$ dla dowolnych otwartych $T^*U \subset T^*M$.

Jeśli $\mathcal{A}_{\mathcal{T}^*\mathcal{M}}$ ma być snopem, to superalgebry, które wyznacza, muszą być zgodne na przecięciach zbiorów otwartych. Przypuśćmy, że $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$. Wówczas restrykcje superalgebr $\mathcal{A}_{\mathcal{T}^*\mathcal{M}}(U_1)$ oraz $\mathcal{A}_{\mathcal{T}^*\mathcal{M}}(U_2)$ do $\mathcal{A}_{\mathcal{T}^*\mathcal{M}}(U_1 \cap U_2)$ muszą być ze sobą izomorficzne. Gwarantuje to przedstawienie elementów obu superalgebr jako reprezentacji tych samych elementów w różnych bazach i spełnienie warunku kocyklu tak jak w przypadku superrozmaitości stycznej.

Spodziewając się, że wiązką strukturalną $\mathcal{T}^*\mathcal{M}$ jest $T^*E \to M$, można zdefiniować zamianę zmiennych $(x^i, p_i, \theta^\mu, \pi_\mu) \to (y^i, w_i, \Upsilon^\mu, \omega_\mu)$ w postaci

$$y^i = \Psi^i(x), \quad \Upsilon^\mu = \Psi^\mu_\nu(x)\theta^\nu, \quad \omega_\mu = (\Psi^\nu_\mu(x))^{-1}\pi_\nu \tag{2.17}$$

i w celu zagwarantowania spełnienia warunku kocyklu ustalić

$$w_i = \frac{\partial x^j}{\partial y^i}\left(p_j - \frac{\partial \Psi^\mu_\rho}{\partial x^j}(\Psi^\nu_\mu(x))^{-1}\theta^\rho \pi_\nu\right). \tag{2.18}$$

Proste, ale żmudne rachunki prowadzą do wniosku, że tak ustalona zamiana superwspółrzędnych spełnia oczekiwane kryteria.

Podobnie można rozszerzyć snop podstawowy $\mathcal{E}_\mathcal{M}$ superrozmaitości $\mathcal{M}$ do snopa $\mathcal{E}_{\mathcal{T}^*\mathcal{M}}$. Zauważmy, że dla otwartego U z rozdzielającego atlasu na M zbiór elementów nilpotentnych superalgebry $\mathcal{A}_{\mathcal{T}^*\mathcal{M}}(U)$ jest generowany nad $C^\infty(T^*U)$ za pomocą θ^μ, π_μ w lokalnych superwspółrzędnych. Widać, że $\mathcal{A}_{\mathcal{T}^*\mathcal{M}}/\mathcal{N}(T^*M) \simeq C^\infty(T^*M)$. Ponadto jeśli superrozmaitość $\mathcal{M}$ ma superwymiar (m,n), to superrozmaitość $\mathcal{T}^*\mathcal{M}$ ma superwymiar $(2m, 2n)$.

Definicja 2.3.1. Superrozmaitość $\mathcal{T}^*\mathcal{M} := (T^*M, \mathcal{A}_{\mathcal{T}^*\mathcal{M}})$ nazywamy *superrozmaitością kostyczną* do $\mathcal{M}$, natomiast snop $\mathcal{A}_{T^*M}$ nazywamy *supersnopem kostycznym.*

Na podstawie powyższej dyskusji można wywnioskować

Twierdzenie 2.3.2. *Jeżeli $E \xrightarrow{\pi} M$ jest wiązką strukturalną $\mathcal{M} := (M, \mathcal{A}_\mathcal{M})$, to $(T^*E \xrightarrow{T^*\pi} TM)$ jest wiązką strukturalną superrozmaitości kostycznej $\mathcal{T}^*\mathcal{M} := (T^*M, \mathcal{A}_{\mathcal{T}^*\mathcal{M}})$.*

Przykład 2.3.3. Superhamiltonian dwuwymiarowego superoscylatora harmonicznego jest superfunkcją na superrozmaitości kostycznej $\mathcal{T}^*\mathbb{R}^{2|2}$ postaci

$$H(x, y, p_x, p_y, \theta_x, \theta_y, \pi_x, \pi_y) = \frac{1}{2}p_x^2 + \frac{1}{2}p_y^2 + \frac{1}{2}\theta_x\theta_y$$

Zdefiniujmy zamianę zmiennych $(x, y, \theta_x, \theta_y) \to (\bar{x}, \bar{y}, \bar{\theta}_x, \bar{\theta}_y)$ na $\mathbb{R}^{2|2}$ w postaci

$$\bar{x} := \log x, \quad \bar{\theta}_x := (1+x^2)\theta_x, \qquad \bar{y} := \log y, \quad \bar{\theta}_y := (1+y^2)\theta_y \tag{2.19}$$

i wyznaczmy superhamiltonian H w nowych superwspółrzędnych $\bar{x}, \bar{y}, \bar{p}_x, \bar{p}_y, \bar{\theta}_x, \bar{\theta}_y, \bar{\pi}_x, \bar{\pi}_y$. Transformacja odwrotna do (2.19) ma postać

$$x = e^{\bar{x}}, \qquad y = e^{\bar{y}}, \qquad \theta_x = \frac{\bar{\theta}_x}{1+e^{2\bar{x}}}, \qquad \theta_y = \frac{\bar{\theta}_y}{1+e^{2\bar{y}}}.$$

Korzystając z wzorów (2.17) i (2.18) otrzymujemy

$$p_{\bar{x}} = e^{\bar{x}}\left(p_x - \frac{2x}{1+x^2}\theta_x\pi_x\right), \quad p_{\bar{y}} =, e^{\bar{y}}\left(p_y - \frac{2y}{1+y^2}\theta_y\pi_y\right), \quad \pi_{\bar{x}} = \frac{\theta_x}{1+e^{\bar{x}^2}}, \quad \pi_{\bar{y}} = \frac{\theta_y}{1+e^{\bar{y}^2}}.$$

Wykorzystując to obliczamy superhamiltonian H w nowych superwspółrzędnych:

$$H = \frac{1}{2}\left[e^{2\bar{x}}\left(p_x - \frac{2x\theta_x\pi_x}{1+x^2}\right)^2 + e^{2\bar{y}}\left(p_y - \frac{2y\theta_y\pi_y}{1+y^2}\right)^2\right] + \frac{\bar{\theta}_x\bar{\theta}_y}{2(1+e^{2\bar{x}})(1+e^{2\bar{y}})}.$$

2.3.1 Superformy różniczkowe

W tym podrozdziale pokażemy, jak zdefiniować odpowiednik superpól wektorowych dla superrozmaitości kostycznej, czyli superformy różniczkowe.

Dla każdego otwartego $U \subset M$ mamy supermoduł dualny $\mathrm{Der}^*(\mathcal{A}_{\mathcal{M}}(U))$, zatem możemy określić snop $\mathcal{A}^*_{\mathcal{M}}$ taki, że

$$\begin{aligned} U &\mapsto \mathrm{Der}^*(\mathcal{A}_{\mathcal{M}}(U)), \qquad \forall \text{ otwartego } U \subset M, \\ \rho_{VU} &\mapsto \rho^*_{VU}, \qquad \forall \text{ otwartego } V, U, \text{ gdzie } V \subset U \subset M, \end{aligned} \tag{2.20}$$

przy czym przez ρ_{VU} rozumiemy obcięcie z U do V, zaś ρ^*_{VU} jest odwzorowaniem

$$\begin{array}{rccc} \rho^*_{VU}: & \mathrm{Der}^*(\mathcal{A}_M(U)) & \to & \mathrm{Der}^*(\mathcal{A}_M(V)) \\ & \omega & \mapsto & \rho^*_{UV}(\omega), \end{array} \tag{2.21}$$

dla

$$\rho^*_{VU}(\omega)\rho_{VU}(D) := \rho_{VU}(\omega(D)), \qquad \forall D \in \mathrm{Der}(\mathcal{A}_M(U)),\ \forall \omega \in \mathrm{Der}^*(\mathcal{A}_M(U)).$$

Definicja 2.3.4. Cięcia snopa $\mathcal{A}'^{\otimes j}_{\mathcal{M}} \otimes \mathcal{A}^{*\otimes k}_{\mathcal{M}}$ nazywamy $(j,k)-$*supertensorami* nad $\mathcal{M}$, których zbiór oznaczamy $\mathfrak{T}^j_k(\mathcal{M})$, przy czym przyjmujemy, że $\mathcal{A}'^{0}_{\mathcal{M}} := \mathcal{A}_{\mathcal{M}}$ i $\mathcal{A}^{*0}_{\mathcal{M}} := \mathcal{A}_{\mathcal{M}}$. Jeśli $j \in \mathbb{N}, k = 0$, to mówimy o *supertensorach kontrawariantnych.* Z kolei gdy $j = 0, k \in \mathbb{N}$ mamy do czynienia z *supertensorami kowariantnymi.*

Superalgebrę wszystkich supertensorów nad superrozmaitością $\mathcal{M}$ oznaczamy jako

$$\mathfrak{T}(\mathcal{M}) := \sum_{j \in \mathbb{Z}_+} \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} \mathfrak{T}^j_k(\mathcal{M}), \tag{2.22}$$

gdzie przez superalgebrę $(0,0)$-supertensorów rozumiemy po prostu superalgebrę superfunkcji $C^\infty(\mathcal{M})$. Superalgebra $\mathfrak{T}(\mathcal{M})$ jest tri-gradowana, to znaczy posiada trzy gradacje: $\mathbb{Z}$-gradację związaną z kontrawariantnością, $\mathbb{Z}$-gradację związaną z kowariantnością (2.22) oraz $\mathbb{Z}_2$-gradację związaną z parzystością supertensora jako homomorfizmu superprzestrzeni. Można też powiedzieć, że $\mathfrak{T}(\mathcal{M})$ posiada trzy rodzaje parzystości odpowiadające wymienionym gradacjom.

Najwięcej uwagi spośród wszystkich supertensorów poświęcimy w niniejszej pracy superformom różniczkowym, ponieważ są niezbędne do zdefiniowania superrównań Eulera-Lagrange'a i superrównań Hamiltona. Pokażemy teraz jak je zdefiniować, czyli jak uogólnić pojęcie antysymetryczności tensora kowariantnego do supergeometrii.

Każdy element $\beta \in \mathfrak{T}^0_k(\mathcal{M}) \simeq \underline{\mathrm{Hom}}(\mathfrak{T}^k_0(\mathcal{M}), C^\infty(\mathcal{M}))$ można traktować jak k-liniowe odwzorowanie nad $\mathfrak{X}(\mathcal{M})$ przyjmujące wartości w $C^\infty(\mathcal{M})$ oznaczane

$$\langle X_1, \ldots, X_k | \beta \rangle \in \mathcal{A}_{\mathcal{M}}(U),$$

gdzie $X_1, \ldots, X_k \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$. Ponadto z własności iloczynu tensorowego supermodułów dla dowolnego jednorodnego $f \in C^\infty(\mathcal{M})$ o parzystości $p(f)$ zachodzi

$$\langle X_1, \ldots, fX_l, \ldots, X_k | \beta \rangle = (-1)^{p(f)\sum_{i=1}^{l-1} p(X_i)} \langle fX_1, \ldots, X_l, \ldots, X_k | \beta \rangle, \quad l \in \overline{1,k}.$$

Skoro $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathfrak{T}^k_0(\mathcal{M}), C^\infty(\mathcal{M}))$ jest supermodułem nad $C^\infty(\mathcal{M})$, to dla superfunkcji f nad superrozmaitością $\mathcal{M}$ mamy

$$f\langle X_1, \ldots, X_l, \ldots, X_k|\beta\rangle = \langle fX_1, \ldots, X_l, \ldots, X_k|\beta\rangle,$$
$$\langle X_1, \ldots, X_k f|\beta\rangle = \langle X_1, \ldots, X_k|f\beta\rangle, \qquad \langle X_1, \ldots, X_k|\beta f\rangle = \langle X_1, \ldots, X_k|\beta\rangle f.$$

Niech $\mathfrak{D}(\mathcal{M})$ będzie superalgebrą iloczynów tensorowych supertensorów kontrawariantnych na U:

$$\mathfrak{D}(\mathcal{M}) := \sum_{j\in\mathbb{Z}_+} \mathfrak{T}^j_0(\mathcal{M}),$$

Określmy $\mathcal{I}(\mathcal{M})$ jako ideał w $\mathfrak{D}(\mathcal{M})$ generowany przez iloczyny tensorowe

$$X_1 \otimes X_2 + (-1)^{p(X_1)p(X_2)} X_2 \otimes X_1$$

jednorodnych elementów $X_1, X_2 \in \mathfrak{D}(\mathcal{M})$. Określmy $\mathcal{I}^j(\mathcal{M}) := \mathcal{I}(\mathcal{M}) \cap \mathfrak{T}^j_0(\mathcal{M})$.

Definicja 2.3.5. Niech $k \in \mathbb{N}$. Wtedy *k-superformami różniczkowymi* nad superrozmaitością $\mathcal{M}$ nazywamy elementy zbioru

$$\Omega^k(\mathcal{M}) := \{\beta \in \underline{\mathrm{Hom}}(\mathfrak{T}^k_0(\mathcal{M}), C^\infty(\mathcal{M})) \mid \beta(\mathcal{I}^k(\mathcal{M})) = 0\}.$$

Innymi słowy $\Omega^k(\mathcal{M})$ to zbiór k-liniowych $\beta \in \underline{\mathrm{Hom}}(\mathfrak{T}^k_0(\mathcal{M}), C^\infty(\mathcal{M}))$ spełniających

$$\langle X_1, \ldots, X_j, X_{j+1}, \ldots, X_k|\beta\rangle = (-1)^{1+p(X_j)p(X_{j+1})}\langle X_1, \ldots, X_{j+1}, X_j, \ldots, X_k|\beta\rangle$$

dla $X_1, \ldots, X_k \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$. W przypadku $k = 0$ przyjmujemy po prostu $\Omega^0(\mathcal{M}) := C^\infty(\mathcal{M})$, a dla $k < 0$ ustalamy $\Omega^k(\mathcal{M}) := \emptyset$. Zbiór wszystkich superform nad U oznaczamy

$$\Omega(\mathcal{M}) := \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} \Omega^k(\mathcal{M})$$

Zbiór $\Omega^k(\mathcal{M})$ jest superalgebrą z rozkładem $\Omega^k(\mathcal{M}) = \Omega^k(\mathcal{M})_0 \oplus \Omega^k(\mathcal{M})_1$, gdzie $\Omega^k(\mathcal{M})_p$ jest zbiorem k-superform o parzystości p w znaczeniu homomorfizmu superprzestrzeni. Na $\Omega(\mathcal{M})$ można wprowadzić $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$-gradację, której pierwszy człon odpowiada za stopień superformy, a drugi za parzystość homomorfizmu. Taka gradacja jest zgodna z iloczynem zewnętrznym superform:

Definicja 2.3.6. Niech $\alpha \in \Omega^j(\mathcal{M})_{p_1}$ i $\beta \in \Omega^k(\mathcal{M})_{p_2}$. Wtedy *iloczyn zewnętrzny* α i β definiujemy wzorem

$$\langle X_1, \ldots, X_{j+k}|\alpha \wedge \beta\rangle := \sum_{\underline{\lambda}\in\mathfrak{M}^{j+k}} (-1)^{\sigma(X_{\underline{\lambda}}, X_{\underline{\lambda}^c}) + p_2 p(X_{\underline{\lambda}})} \langle X_{\underline{\lambda}}|\alpha\rangle\langle X_{\underline{\lambda}^c}|\beta\rangle,$$

gdzie $X_1, \ldots, X_{j+k} \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ oraz dla $\mathfrak{m}(\underline{\lambda}) = k$ definiujemy $X_{\underline{\lambda}} := (X_{\lambda_1}, \ldots, X_{\lambda_k})$ i $p(X_{\underline{\lambda}}) := \sum_{r=1}^k p(X_{\lambda_r})$. Ponadto

$$\sigma(X_{\underline{\lambda}}, X_{\underline{\lambda}^c}) := \sum_{(r,r')\in\mathfrak{S}_{\underline{\lambda}}} (1 + p(X_r)p(X_{r'})),$$

przy czym $\mathfrak{S}_{\underline{\lambda}}$ to zbiór par $(r, r') \in \underline{\lambda} \times \underline{\lambda}^c$ takich, że $r > r'$.

Dowód następnego twierdzenia przedstawiającego podstawowe własności superform jest czysto rachunkowy, dlatego pozostawiamy go czytelnikowi.

Twierdzenie 2.3.7. *Niech* $\alpha \in \Omega^j(\mathcal{M})_{p_1}$ *i* $\beta \in \Omega^k(\mathcal{M})_{p_2}$. *Iloczyn zewnętrzny superform posiada następujące własności:*

(1) $\alpha \wedge \beta$ *jest* $(j+k)$*-superformą różniczkową i* $p(\alpha \wedge \beta) = p_1 + p_2$.

(2) iloczyn zewnętrzny jest łączny,

(3) iloczyn zewnętrzny jest $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$*-gradowany, tzn.* $\alpha \wedge \beta = (-1)^{jk+p_1p_2}\beta \wedge \alpha$.

2.4 Algebra supertensorowa

2.4.1 Superróżniczka zewnętrzna

W supergeometrii występuje uogólnienie różniczki zewnętrznej na superformy różniczkowe. Dowodu jego istnienia i jedyności nie przedstawiamy ze względu na to, że jest analogiczny do dowodu w geometrii różniczkowej [38].

Twierdzenie 2.4.1. *Istnieje dokładnie jeden operator* $d : \Omega(\mathcal{M}) \to \Omega(\mathcal{M})$ *spełniający następujące relacje*

$$d(\alpha + \beta) = d\alpha + d\beta, \tag{2.23}$$

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^j \alpha \wedge d\beta, \tag{2.24}$$

$$df := dx^i \frac{\partial f}{\partial x^i} + d\theta^\alpha \frac{\partial f}{\partial \theta^\alpha}, \tag{2.25}$$

$$d^2 f = 0, \tag{2.26}$$

dla dowolnych $\alpha \in \Omega^j(\mathcal{M})_{p_1}$, $\beta \in \Omega^k(\mathcal{M})_{p_2}$ *oraz* $f \in C^\infty(\mathcal{M})$.

Definicja 2.4.2. Operator d z Twierdzenia 2.4.1 nazywamy *superróżniczką zewnętrzną* na superrozmaitości $\mathcal{M}$.

Przykład 2.4.3. W lokalnych superwspółrzędnych x^i, θ^μ na superrozmaitości $\mathcal{M}$ mamy

$$dx^i \wedge dx^j = -dx^j \wedge dx^i, \qquad dx^i \wedge d\theta^\mu = -d\theta^\mu \wedge dx^i, \qquad d\theta^\mu \wedge d\theta^\nu = d\theta^\nu \wedge d\theta^\mu.$$

Przykład 2.4.4. Niech L będzie superfunkcją na superrozmaitości $\mathcal{TM}$ o superwymiarze $(2m, 2n)$, o ogólnym zapisie w lokalnych superwspółrzędnych $x^i, \dot{x}^i, \theta^\mu, \dot{\theta}^\mu$

$$L(x^i, \dot{x}^i, \theta^\mu, \dot{\theta}^\mu) = \sum_{\underline{\lambda} \in \mathfrak{M}^n,\ \underline{\alpha} \in \mathfrak{M}^n} L^{\theta^{[\underline{\lambda}]}\dot{\theta}^{[\underline{\alpha}]}}(x, \dot{x})\theta^{[\underline{\lambda}]}\dot{\theta}^{[\underline{\alpha}]}.$$

Aby znaleźć superrównania Eulera-Lagrange'a należy obliczyć dL, które jest 1-superformą różniczkową na $\mathcal{TM}$ postaci

$$dL = dx^i \frac{\partial L}{\partial x^i} + d\dot{x}^i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} + d\theta^\mu \frac{\partial L}{\partial \theta^\mu} + d\dot{\theta}^\mu \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}^\mu}.$$

Warto podkreślić, że w konwencji, która jest konsekwentnie stosowana w niniejszej pracy, pochodne cząstkowe pojawiają się po prawej stronie superróżniczek.

Widać, że druga różniczka zewnętrzna L jest superfunkcją zerową. Wprowadzając pomocnicze superwspółrzędne y^i, dla $i = 1, \dots, 2n$, będące superwspółrzędnymi parzystymi $y^i = x^i$ dla $i \in \overline{1,n}$ oraz $y^i = \dot{x}^{i-n}$ dla $i \in \overline{n+1, 2n}$, oraz pomocnicze superwspółrzędne Υ^μ związane z superwspółrzędnymi nieparzystymi θ^μ w analogiczny sposób, otrzymujemy

$$d^2L = -dy^i \wedge dy^j \frac{\partial^2 L}{\partial y^j \partial y^i} - dy^i \wedge d\Upsilon^\mu \frac{\partial^2 L}{\partial \Upsilon^\mu \partial y^i} - d\Upsilon^\mu \wedge dy^i \frac{\partial^2 L}{\partial y^i \partial \Upsilon^\mu} - d\Upsilon^\mu \wedge d\Upsilon^\nu \frac{\partial^2 L}{\partial \Upsilon^\nu \partial \Upsilon^\mu}.$$

Korzystając z relacji

$$dy^i \wedge dy^j = -dy^j \wedge dy^i, \quad dy^i \wedge d\Upsilon^\mu = -d\Upsilon^\mu \wedge dy^i, \quad d\Upsilon^\mu \wedge d\Upsilon^\nu = d\Upsilon^\nu \wedge d\Upsilon^\mu,$$

dostajemy

$$\begin{aligned} d^2L = -\sum_{i=1}^{2m}\sum_{j=i+1}^{2m} dy^i \wedge dy^j \left(\frac{\partial^2 L}{\partial y^j \partial y^i} - \frac{\partial^2 L}{\partial y^i \partial y^j}\right) - \sum_{i=1}^{2m}\sum_{\mu=1}^{2n} dy^i \wedge d\Upsilon^\mu \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \Upsilon^\mu \partial y^i} - \frac{\partial^2 L}{\partial y^i \partial \Upsilon^\mu}\right) \\ - \sum_{\mu=1}^{2n}\sum_{\nu=\mu+1}^{2n} d\Upsilon^\mu \wedge d\Upsilon^\nu \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \Upsilon^\nu \partial \Upsilon^\mu} + \frac{\partial^2 L}{\partial \Upsilon^\mu \partial \Upsilon^\nu}\right). \end{aligned} \tag{2.27}$$

Natomiast z zależności

$$\left[\frac{\partial}{\partial y^i}, \frac{\partial}{\partial y^j}\right] = \frac{\partial}{\partial y^i}\frac{\partial}{\partial y^j} - \frac{\partial}{\partial y^j}\frac{\partial}{\partial y^i} = 0, \qquad \left[\frac{\partial}{\partial y^i}, \frac{\partial}{\partial \Upsilon^\mu}\right] = \frac{\partial}{\partial y^i}\frac{\partial}{\partial \Upsilon^\mu} - \frac{\partial}{\partial \Upsilon^\mu}\frac{\partial}{\partial y^i} = 0,$$
$$\left[\frac{\partial}{\partial \Upsilon^\mu}, \frac{\partial}{\partial \Upsilon^\nu}\right] = \frac{\partial}{\partial \Upsilon^\mu}\frac{\partial}{\partial \Upsilon^\nu} + \frac{\partial}{\partial \Upsilon^\nu}\frac{\partial}{\partial \Upsilon^\mu} = 0,$$

wynika, że wartości w nawiasach w (2.27) są równe zero, wobec tego $d^2L = 0$.

2.4.2 Superzwężenie i superpochodna Liego

Swoje uogólnienia posiadają także zwężenie formy z polem wektorowym i pochodna Liego.

Definicja 2.4.5. *Superzwężenie jednorodnego superpola wektorowego $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$, to* odwzorowanie jednorodne $\iota_X \in \underline{\mathrm{Hom}}(\Omega(\mathcal{M}), \Omega(\mathcal{M}))$ określone relacją

$$\langle X_1, \dots, X_k | \iota_X \beta\rangle = (-1)^{p(X)\sum_{i=1}^k p(X_i)} \langle X, X_1, \dots, X_k | \beta\rangle,$$

dla dowolnego $k \in \mathbb{Z}_+$ i $\beta \in \Omega^k(\mathcal{M})$, i jednorodnych $X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$.

Korzystając z liniowości i rozkładu superpola wektorowego na część parzystą i nieparzystą można rozszerzyć Definicję 2.4.5 dla wszystkich superpól wektorowych $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$. Widać, że gdy $f \in C^\infty(\mathcal{M})$, to $\iota_{fX}(\beta) := f\iota_X(\beta)$.

Stwierdzenie 2.4.6. *Niech $\alpha \in \Omega^j(\mathcal{M})_{p_1}$ i $\beta \in \Omega^k(\mathcal{M})_{p_2}$ będą jednorodnymi superformami na $\mathcal{M}$. Jeżeli $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ jest jednorodnym superpolem wektorowym, to*

$$\iota_X(\alpha \wedge \beta) = (\iota_X\alpha) \wedge \beta + (-1)^{j+p_1 p(X)} \alpha \wedge \iota_X \beta.$$

Definicja 2.4.7. Dla dowolnego $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ definiujemy *superpochodną Liego* jako

$$\mathcal{L}_X := d\iota_X + \iota_X d.$$

Widać, że superróżniczka zewnętrzna i superpochodna Liego komutują, ponieważ

$$d\mathcal{L}_X = d^2\iota_X + d\iota_X d = d\iota_X d = d\iota_X + \iota_X d^2 = \mathcal{L}_X d, \qquad \forall X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M}).$$

Stwierdzenie 2.4.8. *Niech $\alpha \in \Omega^j(\mathcal{M})_{p_1}$ i $\beta \in \Omega^k(\mathcal{M})_{p_2}$ będą jednorodnymi superformami różniczkowymi na $\mathcal{M}$ i niech $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ będzie jednorodnym superpolem wektorowym. Wtedy*

$$\mathcal{L}_X\alpha \wedge \beta = (\mathcal{L}_X\alpha) \wedge \beta + (-1)^{p_1 p(X)}\alpha \wedge \mathcal{L}_X\beta.$$

Dowód. Rozpisujemy $\mathcal{L}_X$ z definicji i obliczamy

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}_X(\alpha \wedge \beta) = (d\iota_X + \iota_X d)(\alpha \wedge \beta)\\
&= d[(\iota_X\alpha) \wedge \beta + (-1)^{j+p_1 p(X)}\alpha \wedge (\iota_X\beta)] + \iota_X[d\alpha \wedge \beta + (-1)^j\alpha \wedge d\beta]\\
&= d(\iota_X\alpha) \wedge \beta + (-1)^{j-1}(\iota_X\alpha) \wedge d\beta + (-1)^{j+p_1 p(X)}[d\alpha \wedge (\iota_X\beta) + (-1)^j\alpha \wedge d(\iota_X\beta)]\\
&+ (\iota_X d\alpha) \wedge \beta + (-1)^{j+1+p_1 p(X)}d\alpha \wedge (\iota_X\beta) + (-1)^j(\iota_X\alpha) \wedge d\beta + (-1)^{p_1 p(X)}\alpha \wedge (\iota_X d\beta)\\
&= (\mathcal{L}_X\alpha) \wedge \beta + (-1)^{p_1 p(X)}\alpha \wedge (\mathcal{L}_X\beta).
\end{aligned}$$

□

W związku z $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$-gradacją warto wprowadzić pojęcie stopnia superformy różniczkowej i stopnia superróżniczkowania.

Definicja 2.4.9. Niech $\alpha \in \Omega^j(\mathcal{M})_p$. Mówimy, że α jest superformą *stopnia* (j,p).

Definicja 2.4.10. Niech $\mathcal{D} \in \underline{\mathrm{Hom}}(\Omega(\mathcal{M}), \Omega(\mathcal{M}))$. Mówimy, że $\mathcal{D}$ jest superróżniczkowaniem *stopnia* $(n, p(\mathcal{D}))$ superalgebry superform różniczkowych jeśli dla $\alpha \in \Omega^j(\mathcal{M})_{p_1}$ i $\beta \in \Omega^k(\mathcal{M})_{p_2}$ zachodzi

$$\mathcal{D}(\alpha \wedge \beta) = (\mathcal{D}\alpha) \wedge \beta + (-1)^{jn+p_1 p(\mathcal{D})}\alpha \wedge \mathcal{D}\beta.$$

Dla jednorodnego $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ ze Stwierdzenia 2.4.6 wynika, że superzwężenie ι_X jest superróżniczkowaniem stopnia $(1, p(X))$, zaś ze Stwierdzenia 2.4.8 otrzymujemy, że superpochodna Liego $\mathcal{L}_X$ jest superróżniczkowaniem stopnia $(0, p(X))$.

Definicja 2.4.11. Niech $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2 \in \underline{\mathrm{Hom}}(\Omega(\mathcal{M}), \Omega(\mathcal{M}))$ będą superróżniczkowaniami stopni $(n_1, p(\mathcal{D}_1))$ oraz $(n_2, p(\mathcal{D}_2))$. *Superkomutatorem* $\mathcal{D}_1$ i $\mathcal{D}_2$ nazywamy

$$[\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2] := \mathcal{D}_1 \circ \mathcal{D}_2 - (-1)^{n_1 n_2 + p(\mathcal{D}_1)p(\mathcal{D}_2)}\mathcal{D}_2 \circ \mathcal{D}_1.$$

Można pokazać, że superkomutator superróżniczkowań $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ z Definicji 2.4.11 jest superróżniczkowaniem stopnia $(n_1 + n_2, p(\mathcal{D}_1) + p(\mathcal{D}_2))$.

Stwierdzenie 2.4.12. *Niech $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ będą jednorodnymi superpolami wektorowymi. Wtedy*

$$[\iota_{X_1}, \iota_{X_2}] = 0, \tag{2.28}$$

$$[\mathcal{L}_{X_1}, \iota_{X_2}] = \iota_{[X_1, X_2]}, \tag{2.29}$$

$$[\mathcal{L}_{X_1}, \mathcal{L}_{X_2}] = \mathcal{L}_{[X_1, X_2]}. \tag{2.30}$$

Dowód wzoru (2.28). Niech $\beta \in \Omega^k(\mathcal{M})_{p_2}$. Z definicji zwężenia mamy

$$\begin{aligned}\langle Y_1, \ldots, Y_k | \iota_{X_1}\iota_{X_2}\beta\rangle &= (-1)^{p(X_1)\sum_{i=1}^k p(Y_i)}\langle X_1, Y_1, \ldots, Y_k | \iota_{X_2}\beta\rangle, \\ &= (-1)^{(p(X_1)+p(X_2))\sum_{i=1}^k p(Y_i)+p(X_1)p(X_2)}\langle X_2, X_1, Y_1, \ldots, Y_k|\beta\rangle,\end{aligned}$$

dla dowolnych jednorodnych $Y_1, \ldots, Y_k \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$. Podobnie

$$\begin{aligned}\langle Y_1, \ldots, Y_k | \iota_{X_2}\iota_{X_1}\beta\rangle &= (-1)^{(p(X_1)+p(X_2))\sum_{i=1}^k p(Y_i)+p(X_1)p(X_2)}\langle X_1, X_2, Y_1, \ldots, Y_k|\beta\rangle, \\ &= (-1)^{(p(X_1)+p(X_2))\sum_{i=1}^k p(Y_i)+1}\langle X_2, X_1, Y_1, \ldots, Y_k|\beta\rangle.\end{aligned}$$

Zatem $[\iota_{X_1}, \iota_{X_2}] = \iota_{X_1}\iota_{X_2}\beta - (-1)^{p(X_1)p(X_2)+1}\iota_{X_2}\iota_{X_1} = 0$ dla dowolnej superformy β. $\square$

Dowód wzoru (2.29). Obie strony równości są superróżniczkowaniami stopnia $(1, p(X_1) + p(X_2))$. Prawa i lewa strona zerują się na superfunkcjach $f \in C^\infty(\mathcal{M})$, więc wystarczy udowodnić równość dla superróżniczek superfunkcji (reszta wynika z indukcji). Widać, że

$$(\mathcal{L}_{X_1}\iota_{X_2} - (-1)^{p(X_1)p(X_2)}\iota_{X_2}\mathcal{L}_{X_1})df = X_1X_2f - (-1)^{p(X_1)p(X_2)}X_2X_1f = \iota_{[X_1,X_2]}df. \quad \square$$

Dowód wzoru (2.30). Korzystając z definicji superpochodnej Liego i wzoru (2.29) mamy

$$\begin{aligned}[\mathcal{L}_{X_1}, \mathcal{L}_{X_2}] &= \mathcal{L}_{X_1}\mathcal{L}_{X_2} - (-1)^{p(X_1)p(X_2)}\mathcal{L}_{X_2}\mathcal{L}_{X_1} \\ &= \mathcal{L}_{X_1}\iota_{X_2}d + d\mathcal{L}_{X_1}\iota_{X_2} - (-1)^{p(X_1)p(X_2)}\iota_{X_2}\mathcal{L}_{X_1}d - (-1)^{p(X_2)p(X_1)}d\iota_{X_2}\mathcal{L}_{X_1} \\ &= [\mathcal{L}_{X_1}, \iota_{X_2}]d + d[\mathcal{L}_{X_1}, \iota_{X_2}] = \iota_{[X_1,X_2]}d + d\iota_{[X_1,X_2]} = \mathcal{L}_{[X_1,X_2]}. \end{aligned} \tag{2.31}$$

$\square$

Uwaga 2.4.13. Można ustalić ciąg dokładny

$$C^\infty(\mathcal{M}) \xrightarrow{d} \Omega^1(\mathcal{M}) \xrightarrow{d} \Omega^2(\mathcal{M}) \xrightarrow{d} \Omega^3(\mathcal{M}) \xrightarrow{d} \ldots$$

i analogicznie jak w geometrii różniczkowej otrzymać supergeometryczną wersję lematu Poincarego [2]: jeśli $d\beta = 0$ dla $\beta \in \Omega^k(\mathcal{M})$, to istnieje superforma różniczkowa $\alpha \in \Omega^{k-1}(\mathcal{M})$ taka, że lokalnie $d\alpha = \beta$.

2.4.3 Superpodniesienie pionowe i superpole wektorowe Liouville

Definicja 2.4.14. *Superpodniesieniem pionowym* na superrozmaitości stycznej $\mathcal{TM}$ nazywamy $(1,1)$-supertensor S zdefiniowany w lokalnych współrzędnych $(x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta})$ jako

$$S := \mathrm{d}x^i \otimes \frac{\partial}{\partial \dot{x}^i} + \mathrm{d}\theta^\alpha \otimes \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}^i}.$$

Można pokazać, że S jest dobrze zdefiniowane na każdej superrozmaitości stycznej $\mathcal{TM}$. Innymi słowy definicje S w lokalnych współrzędnch na $TU_1, TU_2 \subset TM$ takich, że $TU_1 \cap TU_2 \neq \emptyset$ będą na siebie przechodzić pod wpływem zamiany superwspółrzędnych.

Definicja 2.4.15. *Pionowym superpolem wektorowym* na $\mathcal{TM}$ nazywamy superpole wektorowe na $\mathcal{TM}$ należące do jądra S.

Przykład 2.4.16. Wszystkie pionowe superpola wektorowe na $\mathcal{T}\mathbb{R}^{1|1}$ mają postać

$$X = A_1 \frac{\partial}{\partial \dot{x}} + A_2 \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}},$$

dla $A_1, A_2 \in C^\infty(\mathcal{T}\mathcal{M})$.

Widać, że nazwa superpodniesienia pionowego S pochodzi od tego, że S przeprowadza superpola wektorowe na $\mathcal{M}$ na pionowe superpola wektorowe na $\mathcal{T}\mathcal{M}$.

Definicja 2.4.17. *Superpolem wektorowym Liouville'a* na $\mathcal{T}\mathcal{M}$ nazywamy superpole wektorowe określone w lokalnych superwspółrzędnych $(x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta})$ za pomocą wzoru

$$\Delta := \dot{x}^i \frac{\partial}{\partial \dot{x}^i} + \dot{\theta}^\alpha \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}^\alpha}.$$

Podobnie jak S, superpole wektorowe Liouville'a Δ jest globalnie dobrze zdefiniowane na dowolnej superrozmaitości stycznej $\mathcal{T}\mathcal{M}$.

Rozdział 3

Supermechanika

Supermechanika była na początku klasycznym odpowiednikiem kwantowych teorii pola zawierających pola bozonowe i fermionowe. Supermechaniczne układy klasyczne, zawierające przemienne i antyprzemienne zmienne, znajdują zastosowanie w opisach symetrii mieszających bozonowe i fermionowe stopnie swobody, czyli supersymetrii [26].

Celem tego rozdziału jest zdefiniowanie odpowiedników równań Eulera-Lagrange'a i Hamiltona w supermechanice. Dzięki nim przeanalizujemy pewne modele supergeometryczne. Od teraz $\mathcal{M}$ zawsze będzie oznaczać superrozmaitość $(M, \mathcal{A}_{\mathcal{M}})$ o superwymiarze (m, n).

3.1 Formalizm superlagranżowski

3.1.1 Superlagranżjany

Definicja 3.1.1. Dowolną superfunkcję L na $\mathcal{TM}$ nazywamy *superlagranżjanem*, a *częścią klasyczną* superlagranżjanu L nazwiemy funkcję $\varepsilon_{\mathcal{TM}}(L)$ na rozmaitości TM.

Przykład 3.1.2. Superlagranżjan cząstki klasycznej nierelatywistycznej w przestrzeni trójwymiarowej można określić na $\mathcal{T}\mathbb{C}^{3|3}$ ze współrzędnymi globalnymi $\{q^i, \dot{q}^i, \theta^\mu, \dot{\theta}^\mu\}_{i\in\overline{1,3}}^{\mu\in\overline{1,3}}$ w postaci ogólnej

$$L := \frac{1}{2}(\dot{q}^i)^2 + \frac{\mathrm{i}}{2}\dot{\theta}^\mu\theta^\mu - V_1(q) - \theta^\mu\theta^\nu V_{\mu\nu}(q), \tag{3.1}$$

gdzie $V_{\mu\nu}(q) = -V_{\nu\mu}(q)$, przy czym q w argumencie V_1 oraz $V_{\mu\nu}$ oznacza to samo, co w Przykładzie 2.1.14, w którym był identyczny superlagranżjan.

Na dowolnej superrozmaitości stycznej $\mathcal{TM}$ superlagranżjan można zdefiniować dla każdego zestawu lokalnych superwspółrzędnych. Należy jednak pamiętać, że definicje te muszą być ze sobą zgodne, to znaczy transformacja wzoru na superlagranżjanu L w superwspółrzędnych (x^i, θ^μ) do superwspółrzędnych (y^j, ξ^ν) ma dać w wyniku definicję L w superwspółrzędnych (y^j, ξ^ν).

Teraz wprowadzimy jedno-superformę Cartana i dwu-superformę Cartana (popatr [7, 35]), które są kluczowe dla naszego celu – wprowadzenia analogii do równań Eulera-Lagrange'a na $\mathcal{TM}$. W dalszym ciągu będziemy zakładać, że superlagranżjan L na $\mathcal{TM}$ posiada parzystość $p(L)$. W szceglólności znaczna wiekszosc modelów fizycznych określane są superlagranżjanami jednorodnymi, a przede wszystkim, superlagranżjanami parzystymi

[5, 9, 22]. Często jest to spodowodane przez brak interpretacji matematycznego struktur nieparzystych, np superpól wektorowych nieparzystych, dla których istnieją obecne różne metody całkowania [6, 37].

Definicja 3.1.3. *Jedno-superformą Cartana* stowarzyszoną z superlagranżjanen L na $\mathcal{TM}$ nazywamy jedno-superformę na $\mathcal{TM}$ postaci

$$\Theta_L := dL \circ S, \tag{3.2}$$

gdzie przez $dL \circ S$ rozumiemy superformę taką, że dla dowolnego superpola X na $\mathcal{TM}$ mamy $\iota_X(dL \circ S) := \iota_{(\iota_X S)} dL$.

Następujące twierdzenie będzie przydatne w analizie konkretnych przykładów. [7]

Stwierdzenie 3.1.4. *W lokalnych superwspółrzędnych* $(x^i, \dot{x}^i, \theta^\mu, \dot{\theta}^\mu)$ *na* $\mathcal{TM}$ *jedno-superforma Cartana superlagranżjanu* $L \in C^\infty(\mathcal{TM})$ *przyjmuje postać*

$$\Theta_L = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} dx^i - (-1)^{p(L)} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}^\mu} d\theta^\mu. \tag{3.3}$$

Dowód. Postać Θ_L znajdziemy po sprawdzeniu działania dwóch stron definicji (3.2) na dowolne superpole wektorowe X na $\mathcal{TM}$ w postaci

$$X = X^{x^i} \frac{\partial}{\partial x^i} + X^{\dot{x}^i} \frac{\partial}{\partial \dot{x}^i} + X^{\theta^\mu} \frac{\partial}{\partial \theta^\mu} + X^{\dot{\theta}^\mu} \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}^\mu}.$$

Widać, że

$$\iota_X S = X^{x^i} \frac{\partial}{\partial \dot{x}^i} + X^{\theta^\mu} \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}^\mu}.$$

Na podstawie Definicji 2.4.1, superróżniczka dL ma postać

$$dL = dx^i \frac{\partial L}{\partial x^i} + d\dot{x}^i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} + d\theta^\mu \frac{\partial L}{\partial \theta^\mu} + d\dot{\theta}^\mu \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}^\mu},$$

a stąd

$$\iota_{(\iota_X S)} dL = X^{x^i} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} + X^{\theta^\mu} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}^\mu}. \tag{3.4}$$

Z drugiej strony jeśli Θ_L ma w lokalnych współrzędnach $x, \dot{x}, \theta^\mu, \dot{\theta}^\mu$ postać

$$\Theta_L = dx^i \Theta_L^{x^i} + d\dot{x}^i \Theta_L^{\dot{x}^i} + d\theta^\mu \Theta_L^{\theta^\mu} + d\dot{\theta}^\mu \Theta_L^{\dot{\theta}^\mu},$$

to

$$\iota_X \Theta_L = X^{x^i} \Theta_L^{x^i} + X^{\dot{x}^i} \Theta_L^{\dot{x}^i} + X^{\theta^\mu} \Theta_L^{\theta^\mu} + X^{\dot{\theta}^\mu} \Theta_L^{\dot{\theta}^\mu}. \tag{3.5}$$

Wobec (3.4) i (3.5) otrzymamy

$$\Theta_L = dx^i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} + d\theta^\mu \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}^\mu},$$

a to jest równoważne (3.3). □

Definicja 3.1.5. *Dwu-superformą Cartana* superlagranżjanu $L \in C^\infty(\mathcal{TM})$ nazywamy dwu-superformę na $\mathcal{TM}$ postaci

$$\Omega_L := -d\Theta_L. \tag{3.6}$$

Pokażemy teraz, jak wygląda macierz superformy Cartana w lokalnych współrzędnych. Różniczkując super-jednoformę Cartana otrzymujemy

$$\begin{aligned}
d\Theta_L = {} & \frac{\partial^2 L}{\partial x^i \partial \dot{x}^j} dx^i \wedge dx^j - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^j} dx^i \wedge d\dot{x}^j + (-1)^{p(L)} \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^i \partial \theta^\mu} - \frac{\partial^2 L}{\partial x^i \partial \dot{\theta}^\mu} \right) dx^i \wedge d\theta^\mu \\
& + (-1)^{p(L)} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{\theta}^\mu} dx^i \wedge d\dot{\theta}^\mu - (-1)^{p(L)} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{\theta}^\mu} d\dot{x}^i \wedge d\theta^\mu - \frac{\partial^2 L}{\partial \theta^\mu \partial \dot{\theta}^\nu} d\theta^\mu \wedge d\theta^\nu \\
& - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{\theta}^\mu \partial \dot{\theta}^\nu} d\theta^\mu \wedge d\dot{\theta}^\nu .
\end{aligned}$$

Widać, że superforma Cartana jest domknięta. Macierz C superformy Cartana przyjmuje postać

$$C = \begin{bmatrix} M & W & R & S \\ -W^t & 0 & T & 0 \\ -R^t & -T^t & U & V \\ -S^t & 0 & V^t & 0 \end{bmatrix},$$

gdzie

$$M_{ij} := -\frac{\partial^2 L}{\partial x^i \partial \dot{x}^j} + \frac{\partial^2 L}{\partial x^j \partial \dot{x}^i}, \qquad W_{ij} := \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^j},$$

$$R_{ij} := (-1)^{p(L)} \left(\frac{\partial^2 L}{\partial x^i \partial \dot{\theta}^\mu} - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^i \partial \theta^\mu} \right), \quad S_{i\mu} := -(-1)^{p(L)} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{\theta}^\mu}, \quad T_{i\mu} := (-1)^{p(L)} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{\theta}^\mu},$$

$$U_{\mu\nu} := \frac{\partial^2 L}{\partial \theta^\mu \partial \dot{\theta}^\nu} + \frac{\partial^2 L}{\partial \theta^\nu \partial \dot{\theta}^\mu}, \qquad V_{\mu\nu} := \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{\theta}^\mu \partial \dot{\theta}^\nu}.$$

Parzystość supermacierzy C jest taka sama, jak parzystość L. Jeśli L jest parzyste, to C jest niezdegenerowana wtedy i tylko wtedy, gdy M i U są niezdegenerowane. Jeśli L jest nieparzyste i wymiary m, n są sobie równe, to C jest niezgenerowana wtedy i tylko wtedy, gdy R jest niezdegenerowana.

3.1.2 Superrównania Eulera-Lagrange'a

Ostatnim pojęciem do wprowadzenia przed zdefiniowaniem superrównań Eulera-Lagrange'a jest superenergia.

Definicja 3.1.6. *Superenergią* E_L superlagranżjanu L na $\mathcal{TM}$ nazywamy superfunkcję $E_L := \Delta L - L$ na $\mathcal{TM}$.

Można udowodnić, że E_L jest dobrze zdefiniowana niezależnie od superwspółrzędnych.

Stwierdzenie 3.1.7. *Superenergia E_L superlagranżjanu $L \in C^\infty(\mathcal{TM})$ przyjmuje postać*

$$E_L = \dot{x}^i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} + \dot{\theta}^\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}^\alpha} - L$$

w lokalnych superwspółrzędnych $(x^i, \dot{x}^i, \theta^\mu, \dot{\theta}^\mu)$

Definicja 3.1.8. *Superrównaniem Eulera-Lagrange'a* dla superlagranżjanu $L \in C^\infty(\mathcal{TM})$ nazywamy algebraiczne równanie na superpole wektorowe Γ na $\mathcal{TM}$ postaci

$$\iota_\Gamma \Omega_L = dE_L. \tag{3.7}$$

Potok superpola wektorowego Γ opisuje dynamikę układu, któremu odpowiada superlagranżjan L. Jeśli Ω_L jest niezdegenerowana, to Γ istnieje i jest określona jednoznacznie. Jeśli Ω_L jest zdegenerowana, to Γ albo nie istnieje, albo istnieje i nie jest jednoznacznie określona. W literaturze zazwyczaj jest zdegenerowana [35].

Przykład 3.1.9. Pokażemy, jak rozwiązać w lokalnym superukładzie współrzędnych superrównanie Eulera-Lagrange'a dla superlagranżjanu L cząstki klasycznej, nierelatywistycznej ze spinem, pokazanym wcześniej w Przykładzie 2.1.14:

$$L = \frac{\mathrm{i}}{2}\theta^\mu\dot{\theta}^\mu + \frac{m}{2}\dot{q}^i\dot{q}^i - V(q) - \theta^\mu\theta^\nu V_{\mu\nu}(q).$$

Superpole wektorowe Γ można ogólnie zapisać jako

$$\Gamma = \Gamma_{q^i}\frac{\partial}{\partial q^i} + \Gamma_{\dot{q}^i}\frac{\partial}{\partial \dot{q}^i} + \Gamma_{\theta^\mu}\frac{\partial}{\partial \theta^\mu} + \Gamma_{\dot{\theta}^\mu}\frac{\partial}{\partial \dot{\theta}^\mu}.$$

Na mocy Stwierdzenia 3.1.7 wynika, że jedno-superforma Cartana dla L jest postaci $\Theta_L = m\dot{q}^i dq^i + \frac{i}{2}\theta^\mu d\theta^\mu$, a stąd dwu-superforma Cartana przyjmuje postać $\Omega_L = mdq^i \wedge d\dot{q}^i - \frac{i}{2}d\theta^\mu \wedge d\theta^\mu$. Zwróćmy uwagę, że dwu-superforma Cartana jest zdegenerowana, więc nie istnieje jednoznaczne rozwiązanie superrównań Eulera–Lagrange'a (3.7). Lewa strona (3.7) ma postać:

$$\iota_\Gamma \Omega_L = m\Gamma_{q^i} d\dot{q}^i - m\Gamma_{\dot{q}^i} dq^i - i\Gamma_{\theta^\mu} d\theta^\mu.$$

Na superenergię mamy wzór $E_L = \frac{m}{2}\dot{q}^i\dot{q}^i + V(q) + \theta^\mu\theta^\nu V_{\mu\nu}(q)$. Stąd prawa strona (3.7):

$$dE_L = m\dot{q}^i d\dot{q}^i + \left(\frac{\partial V}{\partial q^i} + \frac{\partial V_{\mu\nu}}{\partial q^i}\theta^\mu\theta^\nu\right) dq^i - 2\theta^\nu V_{\mu\nu} d\theta^\mu.$$

Rozwiązaniem jest

$$\Gamma = \dot{q}^i\frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{1}{m}\left(\frac{\partial V}{\partial q^i} + \frac{\partial V_{\mu\nu}}{\partial q^i}\theta^\mu\theta^\nu\right)\frac{\partial}{\partial \dot{q}^i} - 2i\theta^\nu V_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial \theta^\mu} + \Gamma_{\dot{\theta}^\mu}\frac{\partial}{\partial \dot{\theta}^\mu},$$

gdzie $\Gamma_{\dot{\theta}^\mu}$ jest dowolną superfunkcją z dziedziny superukładu $\{q^i, \dot{q}^i, \theta^\mu, \dot{\theta}^\mu\}$.

3.2 Formalizm superhamiltonowski

3.2.1 Superpola hamiltonowskie

Przed wprowadzeniem pojęcia superpól hamiltonowskich należy zdefiniować superformę Liouville'a i kanoniczną superformę symplektyczną [7, 30].

Niech $\{x^i, p_i, \theta^\mu, \pi_\mu\}$ będą superwspółrzędnymi na $\mathcal{T}^*\mathcal{M}$ indukowanymi przez superwspółrzędne $\{x^i, \theta^\mu\}$ na $\mathcal{M}$.

Definicja 3.2.1. *Superformą Liouville'a* nazywamy superformę na $\mathcal{T}^*\mathcal{M}$ lokalnej postaci

$$\Theta := p_i dx^i - \pi_\mu d\theta^\mu,$$

zaś *kanoniczną superformą symplektyczną* nazywamy super dwuformę $\Omega := -d\Theta$ postaci

$$\Omega = dx^i \wedge dp_i + d\pi_\mu \wedge d\theta^\mu.$$

Zwróćmy uwagę, że superforma Liouville'a oraz kanoniczna superforma symplektyczna są parzyste, a ta druga na dodatek jest zamknięta. Od teraz niech Ω zawsze będzie kanoniczną superformą symplektyczną na $\mathcal{T}^*\mathcal{M}$.

Definicja 3.2.2. Mówimy, że $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{T}^*\mathcal{M})$ jest *superpolem lokalnie hamiltonowskim*, jeśli

$$\mathcal{L}_X\Omega = 0.$$

Jeśli X jest superpolem wektorowym lokalnie hamiltonowskim, to $\iota_X\Omega$ jest formą zamkniętą, gdyż

$$0 = \mathcal{L}_X\Omega = \iota_X d\Omega + d\iota_X\Omega = d\iota_X\Omega.$$

Z superwersji twierdzenia Poincarego [2] wynika, że lokalnie $\iota_X\Omega = dH$ dla pewnej superfunkcji H na $\mathcal{T}^*\mathcal{M}$.

Definicja 3.2.3. Mówimy, że $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{T}^*\mathcal{M})$ jest *superpolem hamiltonowskim*, jeśli dla pewnej superfunkcji H

$$\iota_X\Omega = dH. \tag{3.8}$$

Superfunkcję H nazywamy *superhamiltonianem* superpola wektorowego X.

Superpola lokalnie hamiltonowskie będą hamiltonowskie, gdy na superrozmaitości $\mathcal{M}$ pierwsza grupa kohomologii $H^1(\mathcal{M}) = 0$, przy czym $H^1(\mathcal{M})$ to iloraz przestrzeni jedno-superform zamkniętych i jedno-superform dokładnych. Można udowodnić, że dla każdego naturalnego p grupa $H^p(\mathcal{M})$ jest izomorficzna z p-tą grupą kohomologii de Rhama $H^p_{dR}(M)$ na rozmaitości M [2, 30].

Jeśli Ω jest kanoniczną superformą symplektyczną, to każdej superfunkcji H odpowiada dokładnie jedno superpole X_H spełniające (3.8).

Przykład 3.2.4. Niech $\mathcal{M} := \mathbb{R}^{3|3}$. Poniższe superpole wektorowe jest hamiltonowskie:

$$X := p_i\frac{\partial}{\partial x^i} + x^i\frac{\partial}{\partial p_i} + \pi_\mu\frac{\partial}{\partial \pi_\mu} - \theta^\mu\frac{\partial}{\partial \theta^\mu}.$$

Widać, że X jest lokalnie hamiltonowskie, gdyż $\iota_X\Omega = p_i dp_i - x^i dx^i + \pi_\mu d\theta^\mu - \theta^\mu d\pi_\mu$, a stąd $\mathcal{L}_X\Omega = d\iota_X\Omega = 0$. Ponieważ kohomologia $H^1(\mathcal{T}^*\mathcal{M}) = H^1(T^*M)$ i $M = \mathbb{R}^3$, to $H^1(\mathcal{T}^*\mathcal{M}) = 0$. Wobec tego każda jedno-superforma zamknięta jest dokładna i X jest hamiltonowskie. Zauważmy, że

$$\iota_X\Omega = p_i dp_i - x^i dx^i + \pi_\mu d\theta^\mu - \theta^\mu d\pi_\mu = d\left(\frac{1}{2}p_i p_i - \frac{1}{2}x^i x^i + \pi_\mu\theta^\mu\right).$$

Zatem $H = \frac{1}{2}p_i p_i - \frac{1}{2}x^i x^i + \pi_\mu\theta^\mu$ jest superhamiltonianem superpola wektorowego X.

3.2.2 Superrozmaitość Poissona

Definicja 3.2.5. Niech F, G będą superfunkcjami na $\mathcal{T}^*\mathcal{M}$. *Supernawiasem Poissona* nazywamy odwzorowanie $\{\cdot,\cdot\} : C^\infty(\mathcal{T}^*\mathcal{M}) \times C^\infty(\mathcal{T}^*\mathcal{M}) \to C^\infty(\mathcal{T}^*\mathcal{M})$ postaci $\{F, G\} := X_F G$, gdzie $X_F \in \mathfrak{X}(\mathcal{T}^*\mathcal{M})$ jest superpolem wektorowym hamiltonowskim związanym z F relacją (3.8).

Stwierdzenie 3.2.6. *Jeżeli $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(\mathcal{T}^*\mathcal{M})$ to superpola wektorowe hamiltonowskie zadane przez superfunkcje H_1, H_2, to superpole wektorowe $[X_1, X_2]$ jest hamiltonowskie i zadane przez $\{H_1, H_2\}$. Przestrzeń superpól wektorowych hamiltonowskich tworzy superalgebrę Liego* $\mathrm{Ham}(\mathcal{T}^*\mathcal{M})$.

Dowód. Wykorzystamy tożsamość $\iota_{[X_1,X_2]} = [\mathcal{L}_{X_1}, \iota_{X_2}]$, którą można udowodnić sprawdzając, że zachodzi dla superfunkcji i różniczek superfunkcji, a następnie skorzystać z indukcji. Obie strony równania są superróżniczkowaniami, więc tożsamość ta jest spełniona dla wszystkich superform. Zauważmy, że skoro $\mathcal{L}_X\Omega = 0$, to

$$\begin{aligned}\iota_{[X_1,X_2]}\Omega &= (\mathcal{L}_{X_1}\iota_{X_2} - (-1)^{p(X_1)p(X_2)}\iota_{X_2}\mathcal{L}_{X_1})\Omega = \mathcal{L}_{X_1} dH_2 \\ &= d\iota_{X_1} dH_2 = dX_1 H_2 = d\{H_1, H_2\}.\end{aligned}$$

Wobec tego $[X_1, X_2]$ jest superpolem hamiltonowskim zadanym przez $\{H_1, H_2\}$. Ponieważ kombinacje liniowe superpól hamiltonowskich są hamiltonowskie, zbiór superpól hamiltonowskich tworzy superalgebrę Liego $\mathrm{Ham}(\mathcal{T}^*\mathcal{M})$. □

Stwierdzenie 3.2.7. *Niech $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(\mathcal{T}^*\mathcal{M})$ będą superpolami lokalnie hamiltonowskimi lokalnie zadanymi przez superfunkcje H_1, H_2. Wtedy $[X_1, X_2]$ jest superpolem hamiltonowskim.*

Dowód. Skoro X_1 jest superpolem lokalnie hamiltonowskim, to istnieją $H_1, \breve{H}_1$ będące superfunkcjami takimi, że na otwartych $U_1, \breve{U}_1 \subset \mathcal{T}^*\mathcal{M}$ mamy

$$(\iota_{X_1}\Omega)\,|_{U_1} = dH_1, \quad (\iota_{X_1}\Omega)\,|_{\breve{U}_1} = d\breve{H}_1,$$

a stąd

$$dH_1|_{U_1\cap\breve{U}_1} = (\iota_{X_1}\Omega)\,|_{U_1\cap\breve{U}_1} = d\breve{H}_1|_{U_1\cap\breve{U}_1},$$

czyli $d(H_1 - \breve{H}_1) = 0$ i $\breve{H}_1 = H_1 + \breve{c}_1$. Oznacza to, że superfunkcja odpowiadająca superpolu lokalnie hamiltonowskiemu jest określona z dokładnością do stałej. Wtedy

$$\{H_1, H_2\} = \{H_1 + \breve{c}_1, H_2 + \breve{c}_2\} = \{\breve{H}_1, \breve{H}_2\},$$

wobec tego $\{H_1, H_2\}$ nie zależy od stałych i jest określony globalnie zadając superpole hamiltonowskie $[X_1, X_2]$. □

Stwierdzenie 3.2.8. *Na superrozmaitości kostycznej $\mathcal{T}^*\mathcal{M}$ istnieje superalgebra Liego $(C^\infty(\mathcal{T}^*\mathcal{M}), \{\cdot,\cdot\})$, gdzie $\{F, G\} := X_F G$, dla dowolnych superfunkcji F, G.*

Dowód. Z definicji supernawias Poissona jest dwuliniowy. Jest też superantysymetryczny

$$\{F, G\} = X_F G = \iota_{X_F} dG = \iota_{X_F}\iota_{X_G}\Omega = -(-1)^{p(F)p(G)}\iota_{X_G}\iota_{X_F}\Omega = -(-1)^{p(F)p(G)}\{G, F\}$$

i spełnia super tożsamość Jacobiego

$$\begin{aligned}\{F, \{G, H\}\} &= X_F X_G H = [X_F, X_G]H + (-1)^{p(F)p(G)} X_G X_F H \\ &= X_{\{F,G\}}H + (-1)^{p(F)p(G)}\{G, \{F, H\}\} = \{\{F, G\}, H\} + (-1)^{p(F)p(G)}\{G, \{F, H\}\}.\end{aligned}$$ □

Wniosek 3.2.9. *Supernawias Poissona jest superróżniczkowaniem na pierwszym i drugim argumencie.*

Dowód. Z definicji supernawiasu Poissona i jego superantysymetryczności mamy:

$$\begin{aligned}\{F, GH\} &= X_F(GH) = \{F, G\}H + (-1)^{p(F)p(G)}G\{F, H\},\\ \{FG, H\} &= -(-1)^{(p(F)+p(G))p(H)}\{H, FG\}\\ &= -(-1)^{(p(F)+p(G))p(H)}\{H, F\}G - (-1)^{p(G)p(H)}F\{G, H\}.\end{aligned}$$ □

Przykład 3.2.10. Niech $\{x^i, p_i, \theta^\mu, \pi_\mu\}$ będzie superukładem na $\mathcal{T}^*\mathcal{M}$ indukowanym przez superukład $\{x^i, \theta^\mu\}$ na $\mathcal{M}$. Każdej superwspółrzędnej odpowiada hamiltonowskie superpole wektorowe:

$$x^i \mapsto -\frac{\partial}{\partial p_i}, \qquad p_i \mapsto \frac{\partial}{\partial x^i}, \qquad \theta^\mu \mapsto \frac{\partial}{\partial \pi_\mu}, \qquad \pi_\mu \mapsto \frac{\partial}{\partial \theta^\mu}.$$

Supernawias Poissona ma wtedy postać:

$$\begin{aligned}&\{x^i, x^j\} = 0, \qquad \{x^i, p_j\} = -\delta^i_j, \qquad \{p_i, p_j\} = 0,\\ &\{\theta^\mu, \theta^\nu\} = 0, \qquad \{\theta^\mu, \pi_\nu\} = \delta^\mu_\nu, \qquad \{\pi_\mu, \pi_\nu\} = 0.\end{aligned}$$

Powyższa struktura, która naturalnie pojawiła się na $\mathcal{T}^*\mathcal{M}$, prowadzi do uogólnienia pojęcia rozmaitości Poissona.

Definicja 3.2.11. *Superrozmaitością Poissona* nazywamy superrozmaitość $\mathcal{M}$, na której istnieje struktura algebry Liego $(C^\infty(\mathcal{M}), \{\cdot, \cdot\})$ taka, że dla dowolnych superfunkcji F, G, H zachodzi

$$\{F, GH\} = \{F, G\}H + (-1)^{p(F)p(G)}G\{F, H\}.$$

Tak jak pokazano w tym podrozdziale, każda superrozmaitość kostyczna $\mathcal{T}^*\mathcal{M}$ posiada naturalną strukturę superrozmaitości Poissona.

Stwierdzenie 3.2.12. *Na każdej superrozmaitości kostycznej $\mathcal{T}^*\mathcal{M}$ istnieje ciąg dokładny morfizmów postaci*

$$0 \hookrightarrow \mathcal{C} \hookrightarrow C^\infty(\mathcal{T}^*\mathcal{M}) \xrightarrow{\varphi} \mathrm{Ham}(\mathcal{T}^*\mathcal{M}) \to 0.$$

gdzie $\mathcal{C}$ jest podsnopem cięć $C^\infty(\mathcal{T}^*\mathcal{M})$ takich, że dla każdego $s \in \mathcal{C}$ zachodzi $\varphi(s) = 0$, gdzie φ przyporządkowuje superfunkcjom ich superpola hamiltonowskie: $\iota_{\varphi(F)}\Omega = dF$.

Uwaga 3.2.13. Opisane w dwóch ostatnich podrozdziałach struktury można uogólnić do dowolnej superrozmaitości z niezdegenerowaną super dwuformą zamkniętą Ω.

3.2.3 Superrównania Hamiltona

W tym podrozdziale przedstawimy dwa kluczowe pojęcia formalizmu superhamiltonowskiego: superrównania hamiltona i superhamiltonian.

Definicja 3.2.14. Powiemy, że superfunkcja $H \in C^\infty(\mathcal{T}^*\mathcal{M})$ jest *superhamiltonianem* pewnego układu fizycznego, jeśli dynamikę tego układu opisuje potok superpola X_H będącego rozwiązaniem *superrównania Hamiltona*

$$\iota_{X_H}\Omega = dH. \tag{3.9}$$

Stwierdzenie 3.2.15. *Niech* $x^i, p_i, \theta^\mu, \pi_\mu$ *będą lokalnymi superwspółrzędnymi na* $\mathcal{T}^*\mathcal{M}$ *i superfunkcja* H *posiada parzystość* $p(H)$*. Wtedy rozwiązanie (3.9) jest postaci*

$$X_H = \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial x^i} - \frac{\partial H}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial p_i} - (-1)^{p(H)}\frac{\partial H}{\partial \theta^\mu}\frac{\partial}{\partial \pi_\mu} - (-1)^{p(H)}\frac{\partial H}{\partial \pi_\mu}\frac{\partial}{\partial \theta^\mu}.$$

Dowód. Lewa strona równania (3.9) przyjmuje postać

$$X_{x^i}dp_i - X_{p_i}dx^i + X_{\pi_\mu}d\theta^\mu + X_{\theta^\mu}d\pi_\mu,$$

zaś prawa

$$\begin{aligned} &dx^i\frac{\partial H}{\partial x^i} + dp_i\frac{\partial H}{\partial p_i} + d\theta^\mu\frac{\partial H}{\partial \theta^\mu} + d\pi_\mu\frac{\partial H}{\partial \pi_\mu} \\ =&\frac{\partial H}{\partial x^i}dx^i + \frac{\partial H}{\partial p_i}dp_i - (-1)^{p(H)}\frac{\partial H}{\partial \theta^\mu}d\theta^\mu - (-1)^{p(H)}\frac{\partial H}{\partial \pi_\mu}d\pi_\mu. \end{aligned}$$

Z porównania obydwu przekształconych stron równania otrzymujemy tezę. □

Dynamikę układu fizycznego opisują składowe potoku X_H, czyli w zadanych superwspółrzędnych $x^i, p_i, \theta^\mu, \pi_\mu$ rozwiązania równań różniczkowych

$$\begin{aligned} \frac{dx^i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_i}, & \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x^i}, \\ \frac{d\theta^\mu}{dt} &= -(-1)^{p(H)}\frac{\partial H}{\partial \pi_\mu}, & \frac{d\pi_\mu}{dt} &= -(-1)^{p(H)}\frac{\partial H}{\partial \theta^\mu}. \end{aligned} \tag{3.10}$$

W przypadku gdy superrozmaitość $\mathcal{M} := (M, C^\infty(M))$, powyższe równania dają równania Hamiltona z mechaniki klasycznej.

Przykład 3.2.16. Określmy lokalnie na $U \subset \mathcal{T}^*\mathcal{M}$ superhamiltonian postaci

$$H = \frac{1}{2}p_i p_i + \pi_\mu\theta^\mu + V(\overrightarrow{x}),$$

gdzie $V(\overrightarrow{x})$ jest funkcją parzystą. Na podstawie (3.10) widać, że

$$\frac{dx^i}{dt} = p_i, \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial V}{\partial x^i}, \qquad \frac{d\theta^\mu}{dt} = -\theta^\mu, \qquad \frac{d\pi_\mu}{dt} = \pi_\mu.$$

Z dwóch pierwszych równości wynika, że część klasyczną potoku opisuje równanie oscylatora harmonicznego:

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} = -\frac{\partial V}{\partial x^i}.$$

3.3 Supertransformacja Legendre'a

Przejście pomiędzy formalizmem superlagranżowskim a superhamiltonowskim zapewnia supertransformacja Legendre'a. Znajomość superlagranżjanu wystarcza do znalezienia superhamiltonianu i superrównań Hamiltona. W dalszym ciągu tego podrozdziału założymy, że superlagranżjan L będzie parzysty.

Definicja 3.3.1. Niech L będzie parzystym superlagranżjanem na $\mathcal{TM}$. *Supertransformacją Legendre'a* dla L nazywamy homomorfizm superrozmaitości $D_L : \mathcal{TM} \to \mathcal{T}^*\mathcal{M}$ określony w lokalnych współrzędnych przez relacje [7]:

$$D_L^*(x^i) := x^i, \qquad D_L^*(\theta^\mu) := \theta^\mu, \qquad D_L^*(p_i) := \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}, \qquad D_L^*(\pi_\mu) := \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}^\mu}. \tag{3.11}$$

Stwierdzenie 3.3.2. *Supertransformacja Legendre'a D_L jest izomorfizmem superrozmaitości wtedy i tylko wtedy, gdy odwzorowanie styczne do L ma maksymalny rząd w każdym punkcie.*

Stwierdzenie 3.3.3. *Niech L będzie parzystym superlagranżjanem na $\mathcal{TM}$ i niech D_L będzie supertransformacją Legendre'a $\mathcal{TM} \to \mathcal{T}^*\mathcal{M}$. Wtedy $\Theta_L = D_L^*\Theta$ oraz $\Omega_L = D_L^*\Omega$.*

Dowód. W lokalnych superwspółrzędnych na $\mathcal{T}^*\mathcal{M}$ indukowanych przez superwspółrzędne na $\mathcal{M}$ otrzymamy na mocy relacji (3.11), że

$$D_L^*\Theta = D_L^*(p_i dx^i - \pi_\mu d\theta^\mu) = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} dx^i - \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}^\mu} d\theta^\mu = \Theta_L.$$

Z tego wynika również

$$D_L^*\Omega = -D_L^* d\Theta = -dD_L^*\Theta = \Omega_L.$$

□

Załóżmy, że supertransformacja Legendre'a dla superlagranżjanu L jest izomorfizmem superrozmaitości. Wynika z tego istnienie na $\mathcal{T}^*\mathcal{M}$ superfunkcji L_*, $\dot{x}^i_*$, $\dot{\theta}^\mu_*$ superwspółrzędnych $x^i, p_i, \theta^\mu, \pi_\mu$ takich, że $D_L^* L_* = L$, $D_L^*\dot{x}^i_* = \dot{x}^i$ oraz $D_L^*\dot{\theta}^\mu_* = \dot{\theta}^\mu$. Wtedy superhamiltonian H_L jest postaci

$$H_L = \dot{x}^i_* p_i + \dot{\theta}^\mu_* \pi_\mu - L_*.$$

W szczególności jego cofnięcie jest superenergią $D_L^* H_L = E_L$.

Przykład 3.3.4. Niech $g_{ij}(x)$ oraz $\eta_{\mu\nu}(x)$ będą macierzami metryk na przestrzeniach superwspółrzędnych parzystych oraz nieparzystych. Niech ponadto $g_{ij} = g_{ji}$ oraz $\eta_{\mu\nu} = -\eta_{\nu\mu}$. Zdefiniujmy superlagranżjan L w postaci

$$L := \frac{1}{2} g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j + \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\dot{\theta}^\mu\dot{\theta}^\nu$$

Supertransformacja Legendre'a przybiera postać

$$D_L^*(x^i_*) = x^i, \qquad D_L^*(\theta^\mu_*) = \theta^\mu, \qquad D_L^*(p_i) = g_{ij}\dot{x}^j, \qquad D_L^*(\pi_\mu) = \eta_{\mu\nu}\dot{\theta}^\nu.$$

Wobec tego superenergia i superhamiltonian dane są wzorami

$$E_L = g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j + \eta_{\mu\nu}\dot{\theta}^\mu\dot{\theta}^\nu - L = L, \qquad H_L = \frac{1}{2} g^{ij} p_i p_j + \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\pi_\mu\pi_\nu.$$

Warto zauważyć, że kiedy L jest jednorodny stopnia k względem zmiennych $\dot{x}^i, \dot{\theta}^\mu$, to $E_L = (k-1)L$.

Przykład 3.3.5. Zdarza się, że supertransformacja Legendre'a nie jest izomorfizmem. Rozważmy superlagranżjan

$$L = \frac{i}{2}\theta^\mu\dot{\theta}^\mu + \frac{m}{2}\dot{q}^i\dot{q}^i - V(\overrightarrow{q}) - \theta^\mu\theta^\nu V_{\mu\nu}(\overrightarrow{q}).$$

Wtedy

$$D_L^*(\pi_\mu) = \frac{i}{2}\theta^\mu \quad \Rightarrow \quad D_L^*(\pi_\mu - \frac{i}{2}\theta^\mu) = 0.$$

Zatem superlagranżjanowi L odpowiada wiele superhamiltonianów H_L.

Na podstawie Przykładu 3.3.5 widać, że kiedy supertransformacja Legendre'a nie jest izomorfizmem, formalizm superhamiltonowski nie jest dobrze określony. Żeby uporać się z tym problemem wprowadza się dodatkowe struktury takie jak więzy, supernawiasy Diraca, czy supertrójkę Tulczyjewa [11, 23].

3.3.1 Niezmienniki superlagranżowskie

Definicja 3.3.6. *Niezmiennikiem superlagranżowskim* superlagranżjanu $L \in C^\infty(\mathcal{TM})$ nazywamy superpole wektorowe $X \in \mathrm{Der}\mathcal{TM}$ takie, że

$$XL = \widehat{\sigma},$$

dla pewnej zamkniętej superformy $\sigma := \sigma_i dx^i + \sigma_\mu d\theta^\mu$ na $\mathcal{TM}$ oraz indukowanej przez nią superfunkcji $\widehat{\sigma} := \sigma_i\dot{x}^i + \sigma_\mu\dot{\theta}^\mu$.

Superpole wektorowe $X \in \mathrm{Der}\mathcal{M}$ można przenieść na $\mathrm{Der}\mathcal{TM}$ za pomocą superpodniesienia pionowego S, otrzymując superpole wektorowe SX. Pozwala to sformułować superwersję twierdzenia Noether [8].

Stwierdzenie 3.3.7. *Niech Y będzie superpolem z $\mathrm{Der}\mathcal{M}$ takim, że $\iota_Y S$ będzie niezmiennikiem superlagranżowskim L. Wtedy dla h określonego przez równość $dh = \iota_{SY}\Omega_L$ otrzymujemy stałą ruchu postaci*

$$J := \iota_{(\iota_Y S)}\Theta_L - h.$$

Przykład 3.3.8. Rozważmy superlagranżjan pokazany wcześniej w Przykładzie 2.1.14:

$$L = \frac{i}{2}\theta^\mu\dot{\theta}^\mu + \frac{m}{2}\dot{q}^i\dot{q}^i - V(\overrightarrow{q}) - \theta^\mu\theta^\nu V_{\mu\nu}(\overrightarrow{q}).$$

Pokażemy trywialną stałą ruchu wynikającą z tego superlagranżjanu. Zauważmy, że superpole $Y = \theta^\mu\frac{\partial}{\partial\theta^\mu}$ jest niezmiennikiem superlagranżowskim L:

$$\iota_Y S = \theta^\mu\frac{\partial}{\partial\dot{\theta}^\mu} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} (\iota_Y S)L = 0, \\ \iota_{SY}\Omega_L = 0, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \sigma = 0, \\ h \in \mathbb{C}. \end{cases}$$

Ponieważ jedno-superforma Cartana jest postaci $\Theta_L = m\dot{q}^i dq^i - \frac{i}{2}\theta^\mu d\theta^\mu$, nasza stała ruchu jest trywialna:

$$\iota_{(\iota_Y S)}\Theta_L = 0 \quad \Rightarrow \quad J \in \mathbb{C}.$$

Zakończenie

Superalgebra liniowa i supergeometria służą uogólnieniu geometrii różniczkowej tak, by różniczkowanie i całkowanie mogło się odbywać na strukturze bardziej rozbudowanej niż rozmaitość. W pracy pokazano takie struktury – superrozmaitości różniczkowe – po uprzednim wprowadzeniu niezbędnych algebraicznych pojęć takich jak superprzestrzeń, superalgebra, supermoduł i supermacierz.

Przedstawiono supergeometryczne odpowiedniki standardowych struktur na rozmaitości różniczkowej: superpola wektorowe, superformy różniczkowe, superkomutatory, superróżniczki zewnętrzne i jeszcze więcej. Zademonstrowano tez supergeometryczne konstrukcje takie jak superrozmaitość styczna i kostyczna.

W ostatnim rozdziale skupiono się na wybranemu zastosowaniu supergeometrii w fizyce teoretycznej – supermechanice klasycznej. Wykorzystano zdefiniowane pojęcia do opisu formalizmu superlagranżowskiego i superhamiltonowskiego, który okazał się przydatny w omówieniu przykładów nierelatywistycznej, klasycznej cząstki ze spinem oraz superoscylatora harmonicznego.

Cel pracy został osiągnięty, ponieważ zawiera ona przekrój zagadnień niezbędnych dla zrozumienia podstaw supergeometrii opracowanych w możliwie najprzystępniejszy sposób.

Bibliografia

[1] Alvarez-Gaumé L. *Supersymmetry and the Atiyah-Singer index theorem*, Comm. Math. Phys. **90**, no. 2, 161–173 (1983).

[2] Bartocci C., Bruzzo U., Hernández-Ruipérez D. *The geometry of supermanifolds*, Mathematics and its Applications **71**, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1991.

[3] Batchelor, M. *The Structure of Supermanifolds*, praca doktorska, Massachusetts Institute of Technology, ProQuest LLC, Ann Arbor, 1978.

[4] Berezin F.A. *Introduction to superanalysis*, Mathematical Physics and Applied Mathematics, **9**, D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, 1987.

[5] Berezin F.A., Marinov M.S. *Particle spin dynamic as the Grassmann variant of Classical Mechanics*, Ann. Phys. **104**, no. 2, 336–362 (1977).

[6] Bruce A.J., Grabowska K., Moreno G. *On a geometric framework for Lagrangian supermechanics*, arXiv:1606.02604v2.

[7] Cariñena J.F., Figueroa H. *Hamiltonian versus Lagrangian formulations of supermechanics*, J. Phys. A **30**, no. 8, 2705–2724 (1997).

[8] Cariñena J.F., Figueroa H. *A geometrical version of Noether's theorem in supermechanics*, Rep. Math. Phys. **34**, no. 3, 277–303 (1994).

[9] Casalbuoni R. *The classical mechanics for bose-fermi systems*, Il Nuovo Cimento A **33**, no. 3, 389–431 (1976).

[10] Carmeli C., Caston L., Fioresi R. *Mathematical foundations of supersymmetry*, EMS Series of Lectures in Mathematics, EMS Publishing House, Zurich, 2011.

[11] Cattaneo A., Schätz F. *Introduction to supergeometry*, Rev. Math. Phys. **23**, no. 6, 669–690, (2011).

[12] Covolo T. *Cohomological approach to the graded Berezinian*, J. Noncommut. Geom. **9**, no. 2, 543–565 (2015).

[13] Covolo T., Grabowski J., Poncin N. *$\mathbb{Z}_2^n$-Supergeometry II: Batchelor-Gawedzki Theorem*, arXiv:1408.2939v2.

[14] Deligne P., Morgan J. *Notes on Supersymmetry* in: *Quantum fields and strings: A course for mathematicians*, AMS, Institute for Advanced Study, Princeton, 1999.

[15] DeWitt B. *Supermanifolds*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge University Press, Cambridge, 1992.

[16] Dubois-Violette M. *Lectures on graded differential algebras and noncommutative geometry*, in: *Noncommutative Differential Geometry and its Applications to Physics*, Kluwer Academic Publishers, 2008, pp. 245-306.

[17] Duplij S., Siegel W., Bagger J. *Concise Encyclopedia of supersymmetry and noncommutative structures in mathematics and physics*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2004.

[18] Duplij S. *On supermatrix idempotent operator semigroups*, Linear Algebra Appl. **360**, 59–81 (2003).

[19] Fiorenza D. *An introduction to the Batalin-Vilkovisky formalism*, Comptes Rendus Rencontres Math. de Glanon, 2003.

[20] Frankel T. *The geometry of physics. An introduction*, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

[21] Friedan D. *Notes on string theory and two-dimensional conformal field theory*, *Workshop on unified string theories (Santa Barbara, Calif., 1985)*, 162–213, World Sci. Publishing, Singapore, 1986.

[22] Galvao C.A.P., Teitelboim C. *Classical supersymmetric particles*, J. Math. Phys. **21**, no. 7, 1863 (1980).

[23] Grabowski J., Grabowska K., Urbanski P. *Tulczyjew triples in the constrained dynamics of strings*, Nuovo Cimento C **38**, no. 162, (2015).

[24] Gervais J.L., Sakita B. *Field theory interpretation of supergauges in dual models*, Nuclear Phys. B **34**, 632–639 (1971).

[25] Hélein F. *A representation formula for maps on supermanifolds*, J. Math. Phys. **49**, no. 2, 023506 (2008).

[26] Ibort A., Marín-Solano J. *Geometrical foundations of Lagrangian supermechanics and supersymmetry*, Rep. Math. Phys. **32**, no. 3, 385–409 (1993).

[27] Inoue A. *Lectures on Super Analysis – Why necessary and What's that? Towards a new approach to a system of PDEs*, arXiv:1504.03049v4.

[28] Jadczyk A., Pilch K. *Superspaces and supersymmetries*, Comm. Math. Phys. **78**, no. 3, 373–390 (1980/81).

[29] Kantor I., Trishin I. *On the Cayley-Hamilton equation in the supercase*, Comm. in Algebra **27**, no. 1, 233–259 (1999).

[30] Kostant B. *Graded manifolds, graded Lie theory, and prequantization*, Differential Geometrical Methods in Physics, Lecture Notes in Math. **570**, Springer, Berlin, 1977, 177–306.

[31] Lamers J. *Algebraic Aspects of the Berezinian*, praca magisterska, Uniwersytet w Utrechcie, 2012.

[32] Lang S. *Algebra*, Graduate Texts in Mathematics **211**, Springer-Verlag, New York, 2002.

[33] Lehrer G.I., Zhang R.B. *Invariants of the orthosymplectic Lie superalgebra and super Pfaffians*, Mathematische Zeitschrift **286**, no. 3–4, 893–917 (2017).

[34] Leĭtes D. *Introduction to the theory of supermanifolds*, Uspekhi Mat. Nauk **35**, no. 1(211), 3–57 (1980).

[35] Marín-Solano J. *Fundamentos de supergeomecánica Lagrangiana, Hamiltoniana y supersymetria*, praca doktorska, Uniwersytet Complutense w Madrycie, 1999.

[36] Mañes J., Zumino B. *WKB method, SUSY quantum mechanics and the index theorem*, Nuclear Phys. B **270**, no. 4, 651–686 (1986).

[37] Monterde J., Sánchez-Valenzuela O.A. *Existence and uniqueness of solutions to superdifferential equations*, J. Geom. Phys. **10**, no. 4, 315–343 (1993).

[38] Rogers A. *Supermanifolds. Theory and applications*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, 2007.

[39] Ryder L.H. *Quantum field theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1996.

[40] Sachse C. *A Categorical Formulation of Superalgebra and Supergeometry*, arXiv:0802.4067.

[41] Schmitt T. *Supergeometry and quantum field theory, or: what is a classical configuration?* Rev. Math. Phys. **9**, no. 8, 993–1052 (1997).

[42] Schwarz J.H. *The Early History of String Theory and Supersymmetry*, CALT-68-2858, arXiv:1201.0981.

[43] Trishin I.M. *On representations of the Cayley-Hamilton equation in the supercase*, Comm. in Algebra, **27**, no. 1, 261–287 (1999).

[44] Varadarajan V.S. *Supersymmetry for mathematicians: an introduction*, Courant Lecture Notes in Mathematics **11**, American Mathematical Society, Providence, 2004.

[45] Witten E. *Supersymmetry and Morse theory*, J. Differential Geom. **17**, no. 4, 661–692 (1982).

Skorowidz