Wprowadzenie do supergeometrii

Wojciech Fabjańczuk

Uniwersytet Warszawski
Wydział Fizyki

8 kwietnia 2017

Wstęp

Motywacja: Kwantowa teoria pola z cechowaniem;
metoda Faddeeva-Popova, dodanie antyprzemiennych zmiennych pozwala obliczyć całkę Feynmana!

Pytanie: jak wygląda geometria różniczkowa ze zmiennymi antyprzemiennymi?

Cel na dziś: uogólnić wyznacznik! (superjakobian, superwrońskian, ...)

Plan:

1. Superalgebra liniowa
   1. Superprzestrzenie
   2. Superalgebry
   3. Supermoduły
2. Supermacierze
   1. Parzystość i nieparzystość
   2. Odwracalność supermacierzy parzystych
   3. Bierezinian
3. Rzut oka na supergeometrię
   1. Superrozmaitości

Definicja

Superprzestrzenią wektorową nad ciałem $\mathbb{K}$ nazywamy przestrzeń wektorową $\mathbb{V}$ nad $\mathbb{K}$ wraz z parą $(\mathbb{V}_0, \ \mathbb{V}_1)$ podprzestrzeni $\mathbb{V}$ takich, że $\mathbb{V} \ = \ \mathbb{V}_0 \ \oplus \ \mathbb{V}_1$.

Elementy $\mathbb{V}_0$ są *parzyste*.
Elementy $\mathbb{V}_1$ są *nieparzyste*.

Równoważnie superprzestrzeń to $(\mathbb{V}, \alpha)$, gdzie $\alpha \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(\mathbb{V})$ spełnia $\alpha^2 = \mathrm{Id}_{\mathbb{V}}$. Wtedy

$$\mathbb{V}_0 := \ker(\alpha - \mathrm{Id}_{\mathbb{V}}),$$
$$\mathbb{V}_1 := \ker(\alpha + \mathrm{Id}_{\mathbb{V}}).$$

Definicja

Superprzestrzenią wektorową nad ciałem $\mathbb{K}$ nazywamy przestrzeń wektorową $\mathbb{V}$ nad $\mathbb{K}$ wraz z parą $(\mathbb{V}_0, \mathbb{V}_1)$ podprzestrzeni $\mathbb{V}$ takich, że $\mathbb{V} = \mathbb{V}_0 \oplus \mathbb{V}_1$.

Elementy $\mathbb{V}_0$ są *parzyste*.
Elementy $\mathbb{V}_1$ są *nieparzyste*.

Równoważnie superprzestrzeń to $(\mathbb{V}, \alpha)$, gdzie $\alpha \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(\mathbb{V})$ spełnia $\alpha^2 = \mathrm{Id}_{\mathbb{V}}$. Wtedy

$$\mathbb{V}_0 := \ker(\alpha - \mathrm{Id}_{\mathbb{V}}),$$
$$\mathbb{V}_1 := \ker(\alpha + \mathrm{Id}_{\mathbb{V}}).$$

Definicja

$\mathbb{S}$ nazywamy *superpodprzestrzenią* $\mathbb{V}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbb{S}$ jest podprzestrzenią $\mathbb{V}$ oraz $\mathbb{S} = \mathbb{S} \cap \mathbb{V}_0 \oplus \mathbb{S} \cap \mathbb{V}_1$.

Definicja

Niech $\mathbb{V}, \mathbb{W}$ będą superprzestrzeniami. Odwzorowanie liniowe $f : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ nazywamy *homomorfizmem superprzestrzeni*.

f jest *parzyste* jeśli $f(\mathbb{V}_0) \subset \mathbb{W}_0$ oraz $f(\mathbb{V}_1) \subset \mathbb{W}_1$.
f jest *nieparzyste* jeśli $f(\mathbb{V}_0) \subset \mathbb{W}_1$ oraz $f(\mathbb{V}_0) \subset \mathbb{W}_1$.

Definicja

Niech $\mathbb{V}, \mathbb{W}$ będą superprzestrzeniami. Odwzorowanie liniowe $f : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ nazywamy *homomorfizmem superprzestrzeni*.

$$f \text{ jest } \textit{parzyste} \text{ jeśli } f(\mathbb{V}_0) \subset \mathbb{W}_0 \text{ oraz } f(\mathbb{V}_1) \subset \mathbb{W}_1.$$
$$f \text{ jest } \textit{nieparzyste} \text{ jeśli } f(\mathbb{V}_0) \subset \mathbb{W}_1 \text{ oraz } f(\mathbb{V}_0) \subset \mathbb{W}_1.$$

Każdy $f \in \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{SVect}}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ spełnia $f = f_0 + f_1$ dla jednoznacznie określonego parzystego f_0 i nieparzystego f_1, ponieważ

$$\begin{aligned} f &= (\mathrm{Id}_{\mathbb{W}}) f (\mathrm{Id}_{\mathbb{V}}) = (\pi_{\mathbb{W}_0} + \pi_{\mathbb{W}_1}) f (\pi_{\mathbb{V}_0} + \pi_{\mathbb{V}_1}) = \\ &= (\pi_{\mathbb{W}_0} f \pi_{\mathbb{V}_0} + \pi_{\mathbb{W}_1} f \pi_{\mathbb{V}_1}) + (\pi_{\mathbb{W}_0} f \pi_{\mathbb{V}_1} + \pi_{\mathbb{W}_1} f \pi_{\mathbb{V}_0}). \end{aligned}$$

Wniosek

Homomorfizmy superprzestrzeni wektorowych $\mathbb{V} \to \mathbb{W}$ tworzą superprzestrzeń wektorową oznaczaną $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{SVect}}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$.

Pytanie: czy istnieje związek parzystości homomorfizmu superprzestrzeni ze strukturą jego jądra i obrazu?

Stwierdzenie

Niech $f : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ *będzie parzystym lub nieparzystym homomorfizmem superprzestrzeni. Wtedy* $\ker(f)$ *i* $\mathrm{im}(f)$ *są superpodprzestrzeniami* $\mathbb{V}$ *i* $\mathbb{W}$*.*

Pytanie: czy istnieje związek parzystości homomorfizmu superprzestrzeni ze strukturą jego jądra i obrazu?

Stwierdzenie

Niech $f : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ będzie parzystym lub nieparzystym homomorfizmem superprzestrzeni. Wtedy $\ker(f)$ i $\mathrm{im}(f)$ są superpodprzestrzeniami $\mathbb{V}$ i $\mathbb{W}$.

Dowód.

Niech $r \in \ker(f)$. Istnieje jednoznaczny rozkład $r = r_0 + r_1$ na $r_0 \in \mathbb{V}_0, r_1 \in \mathbb{V}_1$. Widać, że

$$r \in \ker(f) \cap \mathbb{V}_0 \oplus \ker(f) \cap \mathbb{V}_1 \iff r_0, r_1 \in \ker(f).$$

Z faktu, że $f(r_0) = -f(r_1) \in \mathbb{W}_0 \cap \mathbb{W}_1$ otrzymujemy $f(r_0) = f(r_1) = 0$ i tym samym $\ker(f)$ jest superpodprzestrzenią $\mathbb{V}$. $\square$

Definicja

$\mathbb{S}$ nazywamy *superpodprzestrzenią* $\mathbb{V}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbb{S}$ jest podprzestrzenią $\mathbb{V}$ oraz $\mathbb{S} = \mathbb{S} \cap \mathbb{V}_0 \oplus \mathbb{S} \cap \mathbb{V}_1$.

Implikacja w drugą stronę nie zachodzi, istnieje prosty kontrprzykład: endomorfizm g superprzestrzeni $\mathbb{V} := \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$, $\mathbb{V}_0 := \langle e_1, e_2 \rangle$, $\mathbb{V}_1 := \langle e_3 \rangle$ przedstawiony w macierzy w bazie $\varepsilon := \{e_i\}_{i \in \overline{1,3}}$ jako

$$[g]^{\varepsilon}_{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

nie jest jednorodny, mimo że superpodprzestrzeniami są $\ker(g) = \langle e_2 \rangle \oplus \{0\}$ oraz $\mathrm{im}(g) = \langle e_1, e_2 \rangle \oplus \{0\}$.

Definicja

$\mathbb{S}$ nazywamy *superpodprzestrzenią* $\mathbb{V}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbb{S}$ jest podprzestrzenią $\mathbb{V}$ oraz $\mathbb{S} = \mathbb{S} \cap \mathbb{V}_0 \oplus \mathbb{S} \cap \mathbb{V}_1$.

Implikacja w drugą stronę nie zachodzi, istnieje prosty kontrprzykład: endomorfizm g superprzestrzeni $\mathbb{V} := \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$, $\mathbb{V}_0 := \langle e_1, e_2 \rangle$, $\mathbb{V}_1 := \langle e_3 \rangle$ przedstawiony w macierzy w bazie $\varepsilon := \{e_i\}_{i \in \overline{1,3}}$ jako

$$[g]_\varepsilon^\varepsilon = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

nie jest jednorodny, mimo że superpodprzestrzeniami są $\ker(g) = \langle e_2 \rangle \oplus \{0\}$ oraz $\operatorname{im}(g) = \langle e_1, e_2 \rangle \oplus \{0\}$.

Stwierdzenie

Niech $f : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ będzie dowolnym homomorfizmem superprzestrzeni. Jeśli $\ker(f)$ jest superpodprzestrzenią, to $\ker(f) = \ker(f_0) \cap \ker(f_1)$.

Definicja

Niech $\mathbb{A}$ będzie algebrą nad $\mathbb{K}$ oraz $(\mathbb{A}, (\mathbb{A}_0, \mathbb{A}_1))$ będzie superprzestrzenią. Mówimy, że $\mathbb{A}$ jest *superalgebrą* nad $\mathbb{K}$, jeśli

$$\forall i, j \in \mathbb{Z}_2,\ \forall a \in \mathbb{A}_i, b \in \mathbb{A}_j, \qquad ab \in \mathbb{A}_{i+j}.$$

Powiemy, że $(\mathbb{A}, (\mathbb{A}_0, \mathbb{A}_1))$ jest *superprzemienna*, jeśli

$$\forall i, j \in \mathbb{Z}_2,\ \forall a \in \mathbb{A}_i, b \in \mathbb{A}_j, \qquad ab = (-1)^{ij} ba.$$

Definicja

Niech $\mathbb{A}$ będzie algebrą nad $\mathbb{K}$ oraz $(\mathbb{A}, (\mathbb{A}_0, \mathbb{A}_1))$ będzie superprzestrzenią. Mówimy, że $\mathbb{A}$ jest *superalgebrą* nad $\mathbb{K}$, jeśli

$$\forall i, j \in \mathbb{Z}_2,\ \forall a \in \mathbb{A}_i, b \in \mathbb{A}_j, \qquad ab \in \mathbb{A}_{i+j}.$$

Powiemy, że $(\mathbb{A}, (\mathbb{A}_0, \mathbb{A}_1))$ jest *superprzemienna*, jeśli

$$\forall i, j \in \mathbb{Z}_2,\ \forall a \in \mathbb{A}_i, b \in \mathbb{A}_j, \qquad ab = (-1)^{ij} ba.$$

Algebra form nad rozmaitością różniczkową jest superalgebrą superprzemienną.

$$\begin{aligned} \Omega(M) &:= \bigoplus_{k=0}^{\infty} \Omega^k(M), \\ \Omega(M)_0 &:= \bigoplus_{k=0}^{\infty} \Omega^{2k}(M), \\ \Omega(M)_1 &:= \bigoplus_{k=0}^{\infty} \Omega^{2k+1}(M). \end{aligned}$$

Iloczyn zewnętrzny jest dwuliniowy i zachodzi:

$$\forall \alpha \in \Omega^k(M),\ \forall \beta \in \Omega^l(M), \quad \alpha \wedge \beta = (-1)^{kl} \beta \wedge \alpha = (-1)^{p(\alpha)p(\beta)} \beta \wedge \alpha.$$

Definicja

Superprzestrzeń $(\mathbb{V}, (\mathbb{V}_0, \mathbb{V}_1))$ jest *prawym super* $\mathbb{A}$-*modułem* jeśli jest prawym modułem nad superalgebrą $(\mathbb{A}, (\mathbb{A}_0, \mathbb{A}_1))$ oraz

$$\forall i, j \in \mathbb{Z}_2, \ \forall v \in \mathbb{V}_i, a \in \mathbb{A}_j, \quad va \in \mathbb{V}_{i+j}.$$

Uwaga: z definicji modułu nad pierścieniem wynika, że $\mathbb{A}$ ma jedynkę!

Definicja

Superprzestrzeń $(\mathbb{V}, (\mathbb{V}_0, \mathbb{V}_1))$ jest *prawym super* $\mathbb{A}$*-modułem* jeśli jest prawym modułem nad superalgebrą $(\mathbb{A}, (\mathbb{A}_0, \mathbb{A}_1))$ oraz

$$\forall i, j \in \mathbb{Z}_2, \ \forall v \in \mathbb{V}_i, a \in \mathbb{A}_j, \quad va \in \mathbb{V}_{i+j}.$$

Uwaga: z definicji modułu nad pierścieniem wynika, że $\mathbb{A}$ ma jedynkę!

Definicja

Niech $\mathbb{V}, \mathbb{W}$ będą prawymi super $\mathbb{A}$-modułami. Homomorfizm superprzestrzeni $f : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ nazywamy *homomorfizmem prawych supermodułów*, jeśli

$$\forall a \in \mathbb{A}, v \in \mathbb{V}, \quad f(va) = f(v)a.$$

Definicja

Superprzestrzeń $(\mathbb{V}, (\mathbb{V}_0, \mathbb{V}_1))$ jest *prawym super* $\mathbb{A}$*-modułem* jeśli jest prawym modułem nad superalgebrą $(\mathbb{A}, (\mathbb{A}_0, \mathbb{A}_1))$ oraz

$$\forall i, j \in \mathbb{Z}_2,\ \forall v \in \mathbb{V}_i, a \in \mathbb{A}_j, \quad va \in \mathbb{V}_{i+j}.$$

Uwaga: z definicji modułu nad pierścieniem wynika, że $\mathbb{A}$ ma jedynkę!

Definicja

Niech $\mathbb{V}, \mathbb{W}$ będą prawymi super $\mathbb{A}$-modułami. Homomorfizm superprzestrzeni $f : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ nazywamy *homomorfizmem prawych supermodułów*, jeśli

$$\forall a \in \mathbb{A}, v \in \mathbb{V}, \quad f(va) = f(v)a.$$

$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{SMod}}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ jest superpodprzestrzenią $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{SVect}}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$, ponieważ

$$f_0(va) + f_1(va) = f(va) = f(v)a = f_0(v)a + f_1(v)a.$$

Definicja

Superprzestrzeń $(\mathbb{V}, (\mathbb{V}_0, \mathbb{V}_1))$ jest *prawym super* $\mathbb{A}$*-modułem* jeśli jest prawym modułem nad superalgebrą $(\mathbb{A}, (\mathbb{A}_0, \mathbb{A}_1))$ oraz

$$\forall i, j \in \mathbb{Z}_2, \ \forall v \in \mathbb{V}_i, a \in \mathbb{A}_j, \quad va \in \mathbb{V}_{i+j}.$$

Uwaga: z definicji modułu nad pierścieniem wynika, że $\mathbb{A}$ ma jedynkę!

Definicja

Niech $\mathbb{V}, \mathbb{W}$ będą prawymi super $\mathbb{A}$-modułami. Homomorfizm superprzestrzeni $f : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ nazywamy *homomorfizmem prawych supermodułów*, jeśli

$$\forall a \in \mathbb{A}, v \in \mathbb{V}, \quad f(va) = f(v)a.$$

$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{SMod}}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ jest superpodprzestrzenią $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{SVect}}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$, ponieważ

$$f_0(va) + f_1(va) = f(va) = f(v)a = f_0(v)a + f_1(v)a.$$

$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{SMod}}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ jest lewym super $\mathbb{A}$-modułem.

Definicja

Superprzestrzeń $\mathbb{V}$ jest *prawym super* $\mathbb{A}$*-modułem* jeśli jest prawym modułem nad superalgebrą $\mathbb{A}$ oraz

$$\forall i, j \in \mathbb{Z}_2, \ \forall v \in \mathbb{V}_i, a \in \mathbb{A}_j, \quad va \in \mathbb{V}_{i+j}.$$

Definicja

Niech $\mathbb{V}$ będzie prawym super $\mathbb{A}$-modułem. Jeśli istnieją $v_1, \ldots, v_m \in \mathbb{V}_0$ oraz $v_{m+1}, \ldots, v_{m+n} \in \mathbb{V}_1$ takie, że dla każdego $v \in \mathbb{V}$ istnieje dokładnie jeden $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{m+n}) \in \mathbb{A}^{m+n}$ o własności

$$v = \sum_{k=1}^{m+n} v_k \alpha_k,$$

to mówimy, że układ wektorów $\{v_1, \ldots v_{m+n}\}$ jest *super bazą* w $\mathbb{V}$. Samo $\mathbb{V}$ nazywamy *wolnym* prawym super $\mathbb{A}$-modułem, zaś (m, n) nazywamy *super wymiarem* $\mathbb{V}$.

Fakt

Niech $\mathbb{V}$ będzie wolnym prawym super $\mathbb{A}$-modułem super wymiaru (m, n) z super bazą $\{v_1, \dots v_{m+n}\}$. Jeśli $v \in \mathbb{V}_0$, to istnieje $(\alpha_1, \dots, \alpha_{m+n}) \in \mathbb{A}_0^m \times \mathbb{A}_1^n$ spełniający

$$v = \sum_{k=1}^{m+n} v_k \alpha_k. \tag{1}$$

Fakt

Niech $\mathbb{V}$ będzie wolnym prawym super $\mathbb{A}$-modułem super wymiaru (m, n) z super bazą $\{v_1, \ldots v_{m+n}\}$. Jeśli $v \in \mathbb{V}_0$, to istnieje $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{m+n}) \in \mathbb{A}_0^m \times \mathbb{A}_1^n$ spełniający

$$v = \sum_{k=1}^{m+n} v_k \alpha_k. \tag{1}$$

Dowód.

Istnieje dokładnie jeden $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{m+n}) \in \mathbb{A}^{m+n}$ dla którego zachodzi (1). Niech α_k^0, α_k^1 oznaczają odpowiednio rzuty na $\mathbb{A}_0$ oraz $\mathbb{A}_1$ współczynnika $\alpha_k \in \mathbb{A}$. Zauważmy, że

$$v - \left(\sum_{i=1}^{m} v_i \alpha_i^0 + \sum_{j=m+1}^{m+n} v_j \alpha_j^1 \right) = \left(\sum_{i=1}^{m} v_i \alpha_i^1 + \sum_{j=m+1}^{m+n} v_j \alpha_j^0 \right).$$

Skoro $v \in \mathbb{V}_0$ oraz $\mathbb{V}_0 \cap \mathbb{V}_1 = 0$, to $v = \left(\sum_{i=1}^{m} v_i \alpha_i^0 + \sum_{j=m+1}^{m+n} v_j \alpha_j^1 \right)$. □

Wniosek

Jeżeli $\mathbb{V}$ *jest wolnym prawym super* $\mathbb{A}$*-modułem super wymiaru* (m, n)*, to*

$$(\mathbb{V}, (\mathbb{V}_0, \mathbb{V}_1)) \simeq (\mathbb{A}^{m+n}, (\mathbb{A}_0^m \times \mathbb{A}_1^n, \mathbb{A}_1^m \times \mathbb{A}_0^n))$$

Wniosek

Jeżeli $\mathbb{V}$ jest wolnym prawym super $\mathbb{A}$-modułem super wymiaru (m, n), to

$$(\mathbb{V}, (\mathbb{V}_0, \mathbb{V}_1)) \simeq (\mathbb{A}^{m+n}, (\mathbb{A}_0^m \times \mathbb{A}_1^n, \mathbb{A}_1^m \times \mathbb{A}_0^n))$$

Niech $f : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ będzie homomorfizmem prawych wolnych super $\mathbb{A}$-modułów o super wymiarach (m, n) i (r, s), oraz superbazach $\{v_j\}_{j\in\overline{1,m+n}}$ i $\{w_i\}_{i\in\overline{1,r+s}}$.

$$f\left(\sum_{j=1}^{m+n} v_j x_j\right) = \sum_{j=1}^{m+n} f(v_j)x_j = \sum_{j=1}^{m+n}\sum_{i=1}^{r+s} w_i f_{ij} x_j = \sum_{i=1}^{r+s} w_i \left(\sum_{j=1}^{m+n} f_{ij} x_j\right),$$

gdzie $x_j, f_{ij} \in \mathbb{A}$. Współczynniki f_{ij} tworzą macierz f w tych super bazach.

Definicja

Supermacierzami nazywamy macierze homomorfizmów supermodułów wolnych.

Definicja

Supermacierzami nazywamy macierze homomorfizmów supermodułów wolnych.

Fakt

Niech $f : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ *będzie homomorfizmem prawych wolnych super* $\mathbb{A}$*-modułów o super wymiarach* (m, n) *i* (r, s) *i jego macierz* Λ *będzie postaci*

$$\Lambda = \begin{bmatrix} G_{r\times m} & P_{r\times n} \\ Q_{s\times m} & H_{s\times n} \end{bmatrix}.$$

Jeśli f *jest parzyste, to* $\Lambda = \begin{bmatrix} \mathbb{A}_0 & \mathbb{A}_1 \\ \mathbb{A}_1 & \mathbb{A}_0 \end{bmatrix}$, *a jeśli nieparzyste, to* $\Lambda = \begin{bmatrix} \mathbb{A}_1 & \mathbb{A}_0 \\ \mathbb{A}_0 & \mathbb{A}_1 \end{bmatrix}$.

Definicja

Supermacierzami nazywamy macierze homomorfizmów supermodułów wolnych.

Fakt

Niech $f : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ będzie homomorfizmem prawych wolnych super $\mathbb{A}$-modułów o super wymiarach (m, n) i (r, s) i jego macierz Λ będzie postaci

$$\Lambda = \begin{bmatrix} G_{r\times m} & P_{r\times n} \\ Q_{s\times m} & H_{s\times n} \end{bmatrix}.$$

Jeśli f jest parzyste, to $\Lambda = \begin{bmatrix} \mathbb{A}_0 & \mathbb{A}_1 \\ \mathbb{A}_1 & \mathbb{A}_0 \end{bmatrix}$, a jeśli nieparzyste, to $\Lambda = \begin{bmatrix} \mathbb{A}_1 & \mathbb{A}_0 \\ \mathbb{A}_0 & \mathbb{A}_1 \end{bmatrix}$.

Wniosek

Supermacierze zmiany super bazy muszą być parzyste i odwracalne!

Twierdzenie

Supermacierz parzysta

$$\Lambda = \begin{bmatrix} G & P \\ Q & H \end{bmatrix},$$

jest odwracalna wtedy i tylko wtedy, gdy G i H są odwracalne. Supermacierz odwrotna ma postać

$$\Lambda^{-1} = \begin{bmatrix} (G - PH^{-1}Q)^{-1} & -G^{-1}P(H - QG^{-1}P)^{-1} \\ -H^{-1}Q(G - PH^{-1}Q)^{-1} & (H - QG^{-1}P)^{-1} \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Niech $\mathbb{A}$ będzie superprzemienną superalgebrą z jedynką.
$\mathcal{N} := \mathbb{A}_1 + \mathbb{A}_1^2$,
$\overline{\mathbb{A}} := \mathbb{A}/\mathcal{N}$.
Dla dowolnej supermacierzy Λ o współczynnikach w $\mathbb{A}$ konstruujemy $\overline{\Lambda}$ poprzez zastąpienie każdego elementu Λ jego obrazem w rzutowaniu $\mathbb{A} \to \overline{\mathbb{A}}$.

Niech $\mathbb{A}$ będzie superprzemienną superalgebrą z jedynką.
$\mathcal{N} := \mathbb{A}_1 + \mathbb{A}_1^2$,
$\overline{\mathbb{A}} := \mathbb{A}/\mathcal{N}$.
Dla dowolnej supermacierzy Λ o współczynnikach w $\mathbb{A}$ konstruujemy $\overline{\Lambda}$ poprzez zastąpienie każdego elementu Λ jego obrazem w rzutowaniu $\mathbb{A} \to \overline{\mathbb{A}}$.

Lemat

Supermacierz Λ jest odwracalna wtedy i tylko wtedy, gdy $\overline{\Lambda}$ jest odwracalna.

Niech $\mathbb{A}$ będzie superprzemienną superalgebrą z jedynką.
$\mathcal{N} := \mathbb{A}_1 + \mathbb{A}_1^2$,
$\overline{\mathbb{A}} := \mathbb{A}/\mathcal{N}$.
Dla dowolnej supermacierzy Λ o współczynnikach w $\mathbb{A}$ konstruujemy $\overline{\Lambda}$ poprzez zastąpienie każdego elementu Λ jego obrazem w rzutowaniu $\mathbb{A} \to \overline{\mathbb{A}}$.

Lemat

Supermacierz Λ jest odwracalna wtedy i tylko wtedy, gdy $\overline{\Lambda}$ jest odwracalna.

Dowód.

Załóżmy, że Λ jest odwracalna. Wtedy istnieje Γ takie, że $\Lambda\Gamma = \mathbb{I}$, wobec tego $\overline{\Lambda\Gamma} = \overline{\mathbb{I}}$ i $\overline{\Lambda}$ jest odwracalna. W drugą stronę, jeśli $\overline{\Lambda\Gamma} = \overline{\mathbb{I}}$, to $\Lambda\Gamma = \mathbb{I} + X$, gdzie X jest supermacierzą o współczynnikach z $\mathcal{N}$. Elementy X są kombinacjami liniowymi skończonego zbioru elementów $\mathbb{A}_1$, więc X jest nilpotentne oraz $\Lambda\Gamma(\mathbb{I} + X)^{-1} = \mathbb{I}$. $\square$

Lemat

Niech Λ będzie supermacierzą parzystą. Macierze $(G - PH^{-1}Q)^{-1}$ oraz $(H - QG^{-1}P)^{-1}$ istnieją wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją G^{-1} oraz H^{-1}.

Lemat

Niech Λ będzie supermacierzą parzystą. Macierze $(G - PH^{-1}Q)^{-1}$ oraz $(H - QG^{-1}P)^{-1}$ istnieją wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją G^{-1} oraz H^{-1}.

Dowód.

Niech G^{-1} i H^{-1} istnieją. Zauważmy, że

$$(G - PH^{-1}Q)^{-1} = G^{-1}(\mathbb{I}_m - PH^{-1}QG^{-1})^{-1} = G^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}(PH^{-1}QG^{-1})^n.$$

Elementy skończenie wymiarowych macierzy P i Q należą do $\mathrm{span}\{\theta_1, \ldots \theta_{2N}\}$ dla pewnych $\theta_1, \ldots, \theta_{2N} \in \mathbb{A}_1$. Wobec tego szereg potęgowy w równości powyżej jest sumą co najwyżej $N + 1$ wyrazów i $(G - PH^{-1}Q)^{-1}$ istnieje. Podobnie $(H - QG^{-1}P)^{-1}$ istnieje. W drugą stronę, istnienie G^{-1} oraz H^{-1} wynika bezpośrednio z istnienia $G - PH^{-1}Q$ oraz $H - QG^{-1}P$. □

Twierdzenie

Supermacierz Λ jest odwracalna wtedy i tylko wtedy, gdy G i H są odwracalne. Supermacierz odwrotna ma postać

$$\Lambda^{-1} = \begin{bmatrix} (G - PH^{-1}Q)^{-1} & -G^{-1}P(H - QG^{-1}P)^{-1} \\ -H^{-1}Q(G - PH^{-1}Q)^{-1} & (H - QG^{-1}P)^{-1} \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Twierdzenie

Supermacierz Λ jest odwracalna wtedy i tylko wtedy, gdy G i H są odwracalne. Supermacierz odwrotna ma postać

$$\Lambda^{-1} = \begin{bmatrix} (G - PH^{-1}Q)^{-1} & -G^{-1}P(H - QG^{-1}P)^{-1} \\ -H^{-1}Q(G - PH^{-1}Q)^{-1} & (H - QG^{-1}P)^{-1} \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Dowód.

Skoro

$$\overline{\Lambda} = \begin{bmatrix} \overline{G} & 0 \\ 0 & \overline{H} \end{bmatrix},$$

odwracalność Λ jest równoważna jednoczesnej odwracalności G i H. Postać macierzy odwrotnej można zweryfikować obliczając $\Lambda\Lambda^{-1}$. □

Twierdzenie

Supermacierz Λ jest odwracalna wtedy i tylko wtedy, gdy G i H są odwracalne. Supermacierz odwrotna ma postać

$$\Lambda^{-1} = \begin{bmatrix} (G - PH^{-1}Q)^{-1} & -G^{-1}P(H - QG^{-1}P)^{-1} \\ -H^{-1}Q(G - PH^{-1}Q)^{-1} & (H - QG^{-1}P)^{-1} \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Dowód.

Skoro

$$\overline{\Lambda} = \begin{bmatrix} \overline{G} & 0 \\ 0 & \overline{H} \end{bmatrix},$$

odwracalność Λ jest równoważna jednoczesnej odwracalności G i H. Postać macierzy odwrotnej można zweryfikować obliczając $\Lambda\Lambda^{-1}$. □

Parzyste supermacierze odwracalne ze współczynnikami w $\mathbb{A}$ tworzą grupę multiplikatywną oznaczaną $\mathrm{GL}_{(m,n)}(\mathbb{A})$.

Definicja

Bierezinianem nazywamy odwzorowanie $\mathrm{ber} : \mathrm{GL}_{(m,n)}(\mathbb{A}) \to \mathbb{A}_0$ spełniające dwa warunki:

(1) Dla $G \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{A}_0)$ oraz $H \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_0)$ mamy

$$\mathrm{ber}\begin{pmatrix} G & 0 \\ 0 & H \end{pmatrix} = \det(G)\det(H^{-1}).$$

(2) Dla $\Lambda, \Omega \in \mathrm{GL}_{(m,n)}(\mathbb{A})$ zachodzi $\mathrm{ber}(\Lambda\Omega) = \mathrm{ber}(\Lambda)\mathrm{ber}(\Omega)$.

Definicja

Bierezinianem nazywamy odwzorowanie $\mathrm{ber} : \mathrm{GL}_{(m,n)}(\mathbb{A}) \to \mathbb{A}_0$ spełniające dwa warunki:

(1) Dla $G \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{A}_0)$ oraz $H \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_0)$ mamy

$$\mathrm{ber}\begin{pmatrix} G & 0 \\ 0 & H \end{pmatrix} = \det(G)\det(H^{-1}).$$

(2) Dla $\Lambda, \Omega \in \mathrm{GL}_{(m,n)}(\mathbb{A})$ zachodzi $\mathrm{ber}(\Lambda\Omega) = \mathrm{ber}(\Lambda)\mathrm{ber}(\Omega)$.

Lemat

Dla parzystych supermacierzy blokowo trójkątnych

$$\mathrm{ber}\begin{pmatrix} G & P \\ 0 & H \end{pmatrix} = \mathrm{ber}\begin{pmatrix} G & 0 \\ Q & H \end{pmatrix} = \det(G)\det(H^{-1}).$$

Dowód.

Zauważmy, że

$$\begin{bmatrix} G & P \\ 0 & H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G & 0 \\ 0 & -H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{I}_m & G^{-1}P \\ 0 & -\mathbb{I}_n \end{bmatrix}$$

oraz

$$\begin{bmatrix} \mathbb{I}_m & G^{-1}P \\ 0 & -\mathbb{I}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{I}_m & -\frac{1}{2}G^{-1}P \\ 0 & \mathbb{I}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{I}_m & 0 \\ 0 & -\mathbb{I}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{I}_m & \frac{1}{2}G^{-1}P \\ 0 & \mathbb{I}_n \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \mathbb{I}_m & -\frac{1}{2}G^{-1}P \\ 0 & \mathbb{I}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{I}_m & 0 \\ 0 & -\mathbb{I}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{I}_m & -\frac{1}{2}G^{-1}P \\ 0 & \mathbb{I}_n \end{bmatrix}^{-1}.$$

Z tego i z warunków $(1), (2)$ otrzymujemy

$$\mathrm{ber}\begin{pmatrix} G & P \\ 0 & H \end{pmatrix} = \mathrm{ber}\begin{pmatrix} G & 0 \\ 0 & -H \end{pmatrix} \mathrm{ber}\begin{pmatrix} \mathbb{I}_m & 0 \\ 0 & -\mathbb{I}_n \end{pmatrix} = \det(G)\det(H^{-1}).$$

Drugi przypadek wykazujemy analogicznie. □

Twierdzenie

$$\textit{Niech} \quad \Lambda = \begin{bmatrix} G & P \\ Q & H \end{bmatrix} \in \mathrm{GL}_{(m,n)}(\mathbb{A}).$$

$$\textit{Wtedy} \quad \mathrm{ber}(\Lambda) = \det(G - PH^{-1}Q)\det(H^{-1}). \tag{4}$$

Twierdzenie

$$\textit{Niech} \quad \Lambda = \begin{bmatrix} G & P \\ Q & H \end{bmatrix} \in \mathrm{GL}_{(m,n)}(\mathbb{A}).$$

$$\textit{Wtedy} \quad \mathrm{ber}(\Lambda) = \det(G - PH^{-1}Q)\det(H^{-1}). \tag{4}$$

Dowód.

$$\begin{bmatrix} G & P \\ Q & H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{Id}_m & PH^{-1} \\ 0 & \mathrm{Id}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G - PH^{-1}Q & 0 \\ 0 & H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{Id}_m & 0 \\ H^{-1}Q & \mathrm{Id}_n \end{bmatrix}.$$

Stąd mamy $\mathrm{ber}\begin{pmatrix} G & P \\ Q & H \end{pmatrix} = \det(G - PH^{-1}Q)\det(H^{-1})$. □

Wniosek

Jeśli bierezinian istnieje, to jest jednoznacznie określony wzorem (4).

Fakt

Jeśli bierezinian istnieje, to wzór $\mathrm{ber}(\Lambda) = \det(G - PH^{-1}Q)\det(H^{-1})$ *jest równoważny z* $\mathrm{ber}(\Lambda) = \det(G)\det(H - QG^{-1}P)^{-1}$.

Dowód.

Rozważmy $\begin{bmatrix} G & P \\ Q & H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{Id}_m & 0 \\ QG^{-1} & \mathrm{Id}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G & 0 \\ 0 & H - QG^{-1}P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{Id}_m & G^{-1}P \\ 0 & \mathrm{Id}_n \end{bmatrix}$. □

Fakt

Jeśli bierezinian istnieje, to wzór $\mathrm{ber}(\Lambda) = \det(G - PH^{-1}Q)\det(H^{-1})$ *jest równoważny z* $\mathrm{ber}(\Lambda) = \det(G)\det(H - QG^{-1}P)^{-1}$.

Dowód.

Rozważmy $\begin{bmatrix} G & P \\ Q & H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{Id}_m & 0 \\ QG^{-1} & \mathrm{Id}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G & 0 \\ 0 & H - QG^{-1}P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{Id}_m & G^{-1}P \\ 0 & \mathrm{Id}_n \end{bmatrix}$. □

Do udowodnienia pozostało już tylko

Fakt

Jeśli bierezinian istnieje, to wzór $\mathrm{ber}(\Lambda) = \det(G - PH^{-1}Q)\det(H^{-1})$ *jest równoważny z* $\mathrm{ber}(\Lambda) = \det(G)\det(H - QG^{-1}P)^{-1}$.

Dowód.

Rozważmy $\begin{bmatrix} G & P \\ Q & H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{Id}_m & 0 \\ QG^{-1} & \mathrm{Id}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G & 0 \\ 0 & H - QG^{-1}P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{Id}_m & G^{-1}P \\ 0 & \mathrm{Id}_n \end{bmatrix}$. □

Do udowodnienia pozostało już tylko

Twierdzenie

Bierezinian istnieje.

Definicja

Superrozmaitością o *super wymiarze* (m, n) nazywamy parę $(M, \mathcal{A}_M)$, gdzie M jest rozmaitością różniczkową wymiaru m i $\mathcal{A}_M$ jest snopem z kategorii otwartych podzbiorów M do kategorii superalgebr takim, że

- istnieje otwarte pokrycie $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ rozmaitości M spełniające
$$\forall \alpha \in A, \quad \mathcal{A}_M(U_\alpha) \simeq C^\infty(U_\alpha) \otimes \Lambda\mathbb{R}^n,$$
- Jeżeli $\mathfrak{N}$ jest snopem elementów nilpotentnych snopu $\mathcal{A}_M$, to $(M, \mathcal{A}_M/\mathfrak{N})$ jest izomorficzny z $(M, C^\infty(M))$.

Definicja

Superrozmaitością o *super wymiarze* (m, n) nazywamy parę $(M, \mathcal{A}_M)$, gdzie M jest rozmaitością różniczkową wymiaru m i $\mathcal{A}_M$ jest snopem z kategorii otwartych podzbiorów M do kategorii superalgebr takim, że

- istnieje otwarte pokrycie $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ rozmaitości M spełniające

$$\forall \alpha \in A, \quad \mathcal{A}_M(U_\alpha) \simeq C^\infty(U_\alpha) \otimes \Lambda \mathbb{R}^n,$$

- Jeżeli $\mathfrak{N}$ jest snopem elementów nilpotentnych snopu $\mathcal{A}_M$, to $(M, \mathcal{A}_M/\mathfrak{N})$ jest izomorficzny z $(M, C^\infty(M))$.

Superpole wektorowe odpowiadające superoscylatorowi harmonicznemu:

$$X = \dot{q}^a \frac{\partial}{\partial q^a} - q^a \frac{\partial}{\partial \dot{q}^a} + \dot{\theta}^a \frac{\partial}{\partial \theta^a} - \theta^a \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}^a}.$$

Jego potok opisuje dynamikę układu.

Bibliografia

- Fiorenza D., “An introduction to the Batalin-Vilkovisky formalism”, *Comptes Rendus des Rencontres Mathematiques de Glanon*, 2003.
- Lamers J., “Algebraic Aspects of the Berezinian”, praca magisterska, Uniwersytet w Utrechcie, 2012.
- Rogers A., “Supermanifolds: Theory and Applications”, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapur, 2007.
- Varadarajan V.S., “Supersymmetry for mathematicians: an introduction”, Courant lecture notes, Vol. 11, American Mathematical Society, Providence, RI, 2004.