Od geometrii do supergeometrii i superfizyki

Wojciech Fabjańczuk

Wydział Fizyki
Uniwersytet Warszawski

6 maja 2017

Plan działania:

1. Skąd się wzięła i do czego służy supergeometria? Metoda Faddeeva-Popova i antyprzemienne zmienne $c_1 c_2 = -c_2 c_1$.

Plan działania:

1. Skąd się wzięła i do czego służy supergeometria? Metoda Faddeeva-Popova i antyprzemienne zmienne $c_1 c_2 = -c_2 c_1$.
2. Jakie struktury pojawiają się w supergeometrii? Superalgebra liniowa i superrozmaitości.

Plan działania:

1. Skąd się wzięła i do czego służy supergeometria? Metoda Faddeeva-Popova i antyprzemienne zmienne $c_1 c_2 = -c_2 c_1$.
2. Jakie struktury pojawiają się w supergeometrii? Superalgebra liniowa i superrozmaitości.
3. W jakich dziedzinach fizyki ma zastosowanie supergeometria? Formalizm superlagranżowski i supersymetria.

Skąd się wzięła i do czego służy supergeometria? Metoda Faddeeva-Popova i antyprzemienne zmienne $c_1 c_2 = -c_2 c_1$.

Przy kwantyzacji teorii Yanga-Millsa pojawia się problem z ustaleniem cechowania. Rozwiązano go metodą Faddeeva-Popova, która wymaga użycia antyprzemiennych zmiennych i uogólnienia dla nich geometrii różniczkowej.

W kwantowej teorii pola próbujemy wyliczyć fizyczne obserwable, które są wartościami średnimi operatorów w stanie próżni $|\Omega\rangle$ ($\mathcal{T}$ to operator uporządkowania chronologicznego):

$$\langle\Omega|\mathcal{T}\mathcal{O}[A]|\Omega\rangle = \frac{\int \mathcal{D}A \; \mathcal{O}[A] \exp(i \cdot S[A])}{\int \mathcal{D}A \; \exp(i \cdot S[A])}. \tag{1}$$

W kwantowej teorii pola próbujemy wyliczyć fizyczne obserwable, które są wartościami średnimi operatorów w stanie próżni $|\Omega\rangle$ ($\mathcal{T}$ to operator uporządkowania chronologicznego):

$$\langle\Omega|\mathcal{T}\mathcal{O}[A]|\Omega\rangle = \frac{\int \mathcal{D}A \; \mathcal{O}[A] \exp(i \cdot S[A])}{\int \mathcal{D}A \; \exp(i \cdot S[A])}. \tag{1}$$

Całkowanie odbywa się nad przestrzenią potencjałów A. Wartość fizycznej obserwabli nie może się zmienić wskutek transformacji cechowania (nie zmieniających wartości $S[A]$ ani $\mathcal{O}[A]$). Na przykład w elektrodynamice klasycznej:

$$A_\mu(x) \mapsto A_\mu^\alpha(x) := A_\mu(x) + \partial_\mu \alpha(x). \tag{2}$$

W kwantowej teorii pola próbujemy wyliczyć fizyczne obserwable, które są wartościami średnimi operatorów w stanie próżni $|\Omega\rangle$ ($\mathcal{T}$ to operator uporządkowania chronologicznego):

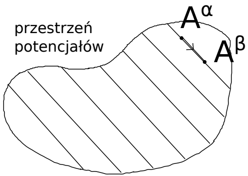
$$\langle\Omega|\mathcal{T}\mathcal{O}[A]|\Omega\rangle = \frac{\int \mathcal{D}A\ \mathcal{O}[A]\exp(i\cdot S[A])}{\int \mathcal{D}A\ \exp(i\cdot S[A])}. \tag{1}$$

Całkowanie odbywa się nad przestrzenią potencjałów A. Wartość fizycznej obserwabli nie może się zmienić wskutek transformacji cechowania (nie zmieniających wartości $S[A]$ ani $\mathcal{O}[A]$). Na przykład w elektrodynamice klasycznej:

$$A_\mu(x) \mapsto A_\mu^\alpha(x) := A_\mu(x) + \partial_\mu\alpha(x). \tag{2}$$

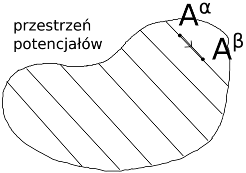
Gdy istnieją symetrie cechowania, przy całkowaniu po wszystkich potencjałach (względem miary $\mathcal{D}A$ - z jej istnieniem też są problemy!) niektóre fizyczne konfiguracje będą się powtarzać.

W przestrzeni wszystkich potencjałów można wyróżnić orbity cechowania.



Rysunek: Schematyczne przedstawienie przestrzeni potencjałów; za pomocą transformacji cechowania można przekształcić A^α w A^β.

W przestrzeni wszystkich potencjałów można wyróżnić orbity cechowania.



Rysunek: Schematyczne przedstawienie przestrzeni potencjałów; za pomocą transformacji cechowania można przekształcić A^α w A^β.

Dla wartości fizycznych obserwabli mają znaczenie orbity, a nie wszystkie możliwe potencjały.

Dla policzenia obserwabli musimy wykonać całkowanie tylko po nierównoważnych (niemożliwych do połączenia) potencjałach ($\int_{\mathcal{F}}$), co jest możliwe po wybraniu cechowania zapewniającego co najmniej ciągłą parametyzacje orbit cechowania.

Dla policzenia obserwabli musimy wykonać całkowanie tylko po nierównoważnych (niemożliwych do połączenia) potencjałach ($\int_{\mathcal{F}}$), co jest możliwe po wybraniu cechowania zapewniającego co najmniej ciągłą parametyzacje orbit cechowania.

W teorii Yanga-Millsa potencjały są macierzami i mamy:

$$\langle \Omega | \mathcal{T} \mathcal{O}[A] | \Omega \rangle = \frac{\mathrm{tr} \int_{\mathcal{F}} \mathcal{D}A \; \mathcal{O}[A] \exp(i \cdot S[A])}{\mathrm{tr} \int_{\mathcal{F}} \mathcal{D}A \; \exp(i \cdot S[A])}. \tag{3}$$

Policzenie wartości fizycznej obserwabli $\langle \Omega | \mathcal{T} \mathcal{O}[A] | \Omega \rangle$ umożliwia metoda Faddeeva-Popova.

Transformacje cechowania w teorii Yanga-Millsa można zapisać w postaci

$$A_\mu^a \mapsto (A^\alpha)_\mu^a := A_\mu^a + \frac{1}{g} D_\mu^{ab} \alpha_b,$$

gdzie α jest pewnym wektorem funkcji skalarnych na $\mathbb{R}^4$. Orbita cechowania, czyli zbiór wszystkich potencjałów, które można połączyć transformacją cechowania, może zostać sparametryzowana za pomocą wektorów α.

Transformacje cechowania w teorii Yanga-Millsa można zapisać w postaci

$$A_\mu^a \mapsto (A^\alpha)_\mu^a := A_\mu^a + \frac{1}{g} D_\mu^{ab} \alpha_b,$$

gdzie α jest pewnym wektorem funkcji skalarnych na $\mathbb{R}^4$. Orbita cechowania, czyli zbiór wszystkich potencjałów, które można połączyć transformacją cechowania, może zostać sparametryzowana za pomocą wektorów α.

I sztuczka Faddeeva-Popova (magiczna jedynka)

$$1 = \int \mathcal{D}\alpha\ \delta(G[A^\alpha]) \det\left(\frac{\delta G[A^\alpha]}{\delta\alpha}\right) \tag{4}$$

W równaniu (4) całkowanie odbywa się nad przestrzenią wektorów α a pojawiająca się delta Diraca jest nieskończenie wymiarowa.

Cel

$$\langle\Omega|\mathcal{T}\mathcal{O}[A]|\Omega\rangle = \frac{\mathrm{tr}\int_{\mathcal{F}}\mathcal{D}A\ \mathcal{O}[A]\exp(i\cdot S[A])}{\mathrm{tr}\int_{\mathcal{F}}\mathcal{D}A\ \exp(i\cdot S[A])} \tag{5}$$

Zajmiemy się tylko licznikiem I w równaniu (5), bo mianownik otrzymamy podstawiając $\mathcal{O}[A] = 1$. Wstawiając "magiczną jedynkę" do licznika dostajemy

$$I = \mathrm{tr}\int_{\mathcal{F}}\mathcal{D}A\int\mathcal{D}\alpha\ \delta(G[A^\alpha])\det\left(\frac{\delta G[A^\alpha]}{\delta\alpha}\right)\mathcal{O}[A]\exp(i\cdot S[A]).$$

Cel

$$\langle\Omega|\mathcal{T}\mathcal{O}[A]|\Omega\rangle = \frac{\mathrm{tr}\int_{\mathcal{F}}\mathcal{D}A\ \mathcal{O}[A]\exp(i\cdot S[A])}{\mathrm{tr}\int_{\mathcal{F}}\mathcal{D}A\ \exp(i\cdot S[A])} \tag{5}$$

Zajmiemy się tylko licznikiem I w równaniu (5), bo mianownik otrzymamy podstawiając $\mathcal{O}[A]=1$. Wstawiając "magiczną jedynkę" do licznika dostajemy

$$I = \mathrm{tr}\int_{\mathcal{F}}\mathcal{D}A\int\mathcal{D}\alpha\ \delta(G[A^\alpha])\det\left(\frac{\delta G[A^\alpha]}{\delta\alpha}\right)\mathcal{O}[A]\exp(i\cdot S[A]).$$

Elementy $\mathcal{O}[A]$, $\mathcal{D}A$ oraz $S[A]$ są niezmiennicze na transformację cechowania $A\mapsto A^\alpha$, więc możemy je zastąpić przez $\mathcal{O}[A^\alpha]$, $\mathcal{D}A^\alpha$ oraz $S[A^\alpha]$. Potem, możemy zmienić nazwę z A^α na A, by licznik przybrał wygodną postać:

$$I = \mathrm{tr}\int_{\mathcal{F}}\mathcal{D}A\int\mathcal{D}\alpha\ \delta(G[A])\det\left(\frac{\delta G[A]}{\delta\alpha}\right)\mathcal{O}[A]\exp(i\cdot S[A]).$$

Wybierając cechowanie Feynmana 't Hoofta Landaua otrzymujemy

$$(G[A^{\alpha}])^a = \partial^{\mu} A_{\mu}^a + \frac{1}{g} \partial^{\mu} D_{\mu}^{ab} \alpha_b + w^a, \tag{6}$$

a z różniczkowania powyższego po składowych wektora α otrzymujemy macierz

$$\frac{\delta (G[A^{\alpha}])^a}{\delta \alpha^b} = \frac{1}{g} \partial^{\mu} D_{\mu}^{ab}. \tag{7}$$

Wybierając cechowanie Feynmana 't Hoofta Landaua otrzymujemy

$$(G[A^\alpha])^a = \partial^\mu A^a_\mu + \frac{1}{g}\partial^\mu D^{ab}_\mu \alpha_b + w^a, \tag{6}$$

a z różniczkowania powyższego po składowych wektora α otrzymujemy macierz

$$\frac{\delta(G[A^\alpha])^a}{\delta\alpha^b} = \frac{1}{g}\partial^\mu D^{ab}_\mu. \tag{7}$$

Do licznika I w postaci

$$I = \mathrm{tr}\int_{\mathcal{F}} \mathcal{D}A \int \mathcal{D}\alpha\ \delta(G[A])\det\left(\frac{\delta G[A]}{\delta\alpha}\right)\mathcal{O}[A]\exp(i\cdot S[A])$$

wstawiamy równania (6) oraz (7) i pamiętając, że $A = A^0$, czyli $\alpha = 0$, otrzymujemy

$$I = \mathrm{tr}\int_{\mathcal{F}} \mathcal{D}A \int \mathcal{D}\alpha\ \delta(\partial^\mu A_\mu + w)\det\left(\frac{1}{g}\partial^\mu D_\mu\right)\mathcal{O}[A]\exp(i\cdot S[A]). \tag{8}$$

Zmieniamy kolejność całkowania i otrzymujemy

$$I = \left(\int \mathcal{D}\alpha \right) \mathrm{tr} \int_{\mathcal{F}} \mathcal{D}A \; \delta(\partial^\mu A_\mu + w) \mathrm{det} \left(\frac{1}{g} \partial^\mu D_\mu \right) \mathcal{O}[A] \exp(i \cdot S[A]). \quad (9)$$

Zmieniamy kolejność całkowania i otrzymujemy

$$I = \left(\int \mathcal{D}\alpha\right) \mathrm{tr} \int_{\mathcal{F}} \mathcal{D}A \; \delta(\partial^\mu A_\mu + w) \mathrm{det}\left(\frac{1}{g}\partial^\mu D_\mu\right) \mathcal{O}[A] \exp(i \cdot S[A]). \quad (9)$$

Całkując obie strony po zastosowaniu $\int \mathcal{D}w \exp(-i \int d^4x \frac{w^2}{2\xi})$, lewa strona jest tylko pomnożona przez pewną funkcję ξ. Natomiast scałkowanie delty Diraca po prawej stronie fizycznie oznacza wybór cechowania, dlatego całkowanie odbywa się teraz po wszystkich potencjałach **(zmiana kolejności całkowania!)**. Po przeniesieniu funkcji ξ na prawą stronę dostaniemy

$$I = N(\xi) \left(\int \mathcal{D}\alpha\right) \mathrm{tr} \int_{\mathcal{A}} \mathcal{D}A \, \mathrm{det}\left(\frac{1}{g}\partial^\mu D_\mu\right) \mathcal{O}[A] \exp\left(i \cdot S[A] - i \int d^4x \frac{(\partial^\mu A_\mu)^2}{2\xi}\right).$$

Zmieniamy kolejność całkowania i otrzymujemy

$$I = \left(\int \mathcal{D}\alpha\right) \mathrm{tr} \int_{\mathcal{F}} \mathcal{D}A \; \delta(\partial^\mu A_\mu + w) \det\left(\frac{1}{g}\partial^\mu D_\mu\right) \mathcal{O}[A] \exp(i \cdot S[A]). \quad (9)$$

Całkując obie strony po zastosowaniu $\int \mathcal{D}w \exp(-i \int d^4x \frac{w^2}{2\xi})$, lewa strona jest tylko pomnożona przez pewną funkcję ξ. Natomiast scałkowanie delty Diraca po prawej stronie fizycznie oznacza wybór cechowania, dlatego całkowanie odbywa się teraz po wszystkich potencjałach **(zmiana kolejności całkowania!)**. Po przeniesieniu funkcji ξ na prawą stronę dostaniemy

$$I = N(\xi) \left(\int \mathcal{D}\alpha\right) \mathrm{tr} \int_{\mathcal{A}} \mathcal{D}A \det\left(\frac{1}{g}\partial^\mu D_\mu\right) \mathcal{O}[A] \exp\left(i \cdot S[A] - i \int d^4x \frac{(\partial^\mu A_\mu)^2}{2\xi}\right).$$

Wybór odpowiedniego cechowania wykonaliśmy efektywnie poprzez dodanie członu $-\mathrm{tr} \int d^4x \frac{(\partial^\mu A_\mu)^2}{2\xi}$ do działania $S[A]$.

Wyrazy $N(\xi)\left(\int \mathcal{D}\alpha\right)$ upraszczają się z mianownikiem, więc do obliczenia pozostaje już tylko

$$\operatorname{tr} \int_{\mathcal{A}} \mathcal{D}A \det\left(\frac{1}{g}\partial^{\mu} D_{\mu}\right) \mathcal{O}[A] \exp\left(i \cdot S[A] - i \int d^4x \frac{(\partial^{\mu} A^{a}_{\mu})^2}{2\xi}\right). \qquad (10)$$

Wyrazy $N(\xi)\left(\int \mathcal{D}\alpha\right)$ upraszczają się z mianownikiem, więc do obliczenia pozostaje już tylko

$$\mathrm{tr}\int_{\mathcal{A}} \mathcal{D}A \,\det\left(\frac{1}{g}\partial^{\mu} D_{\mu}\right) \mathcal{O}[A] \exp\left(i\cdot S[A] - i\int d^4x \frac{(\partial^{\mu} A^a_{\mu})^2}{2\xi}\right). \tag{10}$$

II sztuczka Faddeeva-Popova (magiczny wyznacznik)

$$\det\left(\frac{1}{g}\partial^{\mu} D_{\mu}\right) = \int \mathcal{D}\overline{c}\mathcal{D}c \exp\left(i\int d^4x \overline{c}_a(x)(-\partial^{\mu} D^{ab}_{\mu})c_b(x)\right) \tag{11}$$

W równaniu (11) składowe wektorów c i $\overline{c}$ są zespolonymi, antyprzemiennymi ($c_a(x)c_b(x) = -c_b(x)c_a(x)$) skalarnymi polami lorentzowskimi. Do policzenia całki w (11) potrzebna jest geometria różniczkowa z dodatkiem antyprzemiennych skalarów.

Wyrazy $N(\xi)\left(\int \mathcal{D}\alpha\right)$ upraszczają się z mianownikiem, więc do obliczenia pozostaje już tylko

$$\mathrm{tr} \int_{\mathcal{A}} \mathcal{D}A \, \det\left(\frac{1}{g}\partial^\mu D_\mu\right) \mathcal{O}[A] \exp\left(i \cdot S[A] - i \int d^4x \frac{(\partial^\mu A^a_\mu)^2}{2\xi}\right). \tag{10}$$

II sztuczka Faddeeva-Popova (magiczny wyznacznik)

$$\det\left(\frac{1}{g}\partial^\mu D_\mu\right) = \int \mathcal{D}\overline{c}\mathcal{D}c \exp\left(i \int d^4x \overline{c}_a(x)(-\partial^\mu D^{ab}_\mu)c_b(x)\right) \tag{11}$$

W równaniu (11) składowe wektorów c i $\overline{c}$ są zespolonymi, antyprzemiennymi ($c_a(x)c_b(x) = -c_b(x)c_a(x)$) skalarnymi polami lorentzowskimi. Do policzenia całki w (11) potrzebna jest geometria różniczkowa z dodatkiem antyprzemiennych skalarów.

Od geometrii różniczkowej dochodzimy do supergeometrii.

Ostatecznie

$$\langle\Omega|\mathcal{T}\mathcal{O}[A]|\Omega\rangle = \frac{\mathrm{tr}\int_{\mathcal{A}}\mathcal{D}A\int\mathcal{D}\bar{c}\mathcal{D}c\mathcal{O}[A]\exp(i\cdot S_{FP}[A])}{\mathrm{tr}\int_{\mathcal{A}}\mathcal{D}A\int\mathcal{D}\bar{c}\mathcal{D}c\exp(i\cdot S_{FP}[A])}, \tag{12}$$

gdzie

$$S_{FP}[A] = \int d^4x\left(-\frac{1}{4}F_a^{\mu\nu}F_{\mu\nu}^a - \frac{(\partial^\mu A_\mu^a)^2}{2\xi} + \bar{c}_a(-\partial^\mu D_\mu^{ab})c_b\right). \tag{13}$$

Ostatecznie

$$\langle\Omega|\mathcal{T}\mathcal{O}[A]|\Omega\rangle = \frac{\mathrm{tr}\int_{\mathcal{A}}\mathcal{D}A\int\mathcal{D}\overline{c}\mathcal{D}c\mathcal{O}[A]\exp(i\cdot S_{FP}[A])}{\mathrm{tr}\int_{\mathcal{A}}\mathcal{D}A\int\mathcal{D}\overline{c}\mathcal{D}c\exp(i\cdot S_{FP}[A])}, \tag{12}$$

gdzie

$$S_{FP}[A] = \int d^4x\left(-\frac{1}{4}F_a^{\mu\nu}F_{\mu\nu}^a - \frac{(\partial^\mu A_\mu^a)^2}{2\xi} + \overline{c}_a(-\partial^\mu D_\mu^{ab})c_b\right). \tag{13}$$

Podsumowanie:

1. Dodanie członu $-\frac{(\partial^\mu A_\mu^a)^2}{2\xi}$ do langranżjanu odpowiada za wybranie cechowania.

Ostatecznie

$$\langle\Omega|\mathcal{T}\mathcal{O}[A]|\Omega\rangle = \frac{\mathrm{tr}\int_{\mathcal{A}}\mathcal{D}A\int\mathcal{D}\overline{c}\mathcal{D}c\mathcal{O}[A]\exp(i\cdot S_{FP}[A])}{\mathrm{tr}\int_{\mathcal{A}}\mathcal{D}A\int\mathcal{D}\overline{c}\mathcal{D}c\exp(i\cdot S_{FP}[A])}, \tag{12}$$

gdzie

$$S_{FP}[A] = \int d^4x\left(-\frac{1}{4}F_a^{\mu\nu}F^a_{\mu\nu} - \frac{(\partial^\mu A^a_\mu)^2}{2\xi} + \overline{c}_a(-\partial^\mu D^{ab}_\mu)c_b\right). \tag{13}$$

Podsumowanie:

1. Dodanie członu $-\frac{(\partial^\mu A^a_\mu)^2}{2\xi}$ do langranżjanu odpowiada za wybranie cechowania.
2. Dodanie członu $\overline{c}_a(-\partial^\mu D^{ab}_\mu)c_b$ jest dodaniem niefizycznych pól odpowiadających antyprzemiennym cząstkom skalarnym o spinie 0. Nie istnieją w rzeczywistości, ale pojawiają się w diagramach Feynmana (ich wkłady się znoszą) i umożliwiają policzenie wartości obserwabli.

Ostatecznie

$$\langle\Omega|\mathcal{T}\mathcal{O}[A]|\Omega\rangle = \frac{\operatorname{tr}\int_{\mathcal{A}}\mathcal{D}A\int\mathcal{D}\bar{c}\mathcal{D}c\,\mathcal{O}[A]\exp(i\cdot S_{FP}[A])}{\operatorname{tr}\int_{\mathcal{A}}\mathcal{D}A\int\mathcal{D}\bar{c}\mathcal{D}c\exp(i\cdot S_{FP}[A])}, \tag{12}$$

gdzie

$$S_{FP}[A] = \int d^4x\left(-\frac{1}{4}F_a^{\mu\nu}F^a_{\mu\nu} - \frac{(\partial^\mu A^a_\mu)^2}{2\xi} + \bar{c}_a(-\partial^\mu D^{ab}_\mu)c_b\right). \tag{13}$$

Podsumowanie:

1. Dodanie członu $-\frac{(\partial^\mu A^a_\mu)^2}{2\xi}$ do langranżjanu odpowiada za wybranie cechowania.
2. Dodanie członu $\bar{c}_a(-\partial^\mu D^{ab}_\mu)c_b$ jest dodaniem niefizycznych pól odpowiadających antyprzemiennym cząstkom skalarnym o spinie 0. Nie istnieją w rzeczywistości, ale pojawiają się w diagramach Feynmana (ich wkłady się znoszą) i umożliwiają policzenie wartości obserwabli.
3. Wprowadzenie antyprzemiennych zmiennych jest matematycznym trikiem ułatwiającym rachunki.

Jakie struktury pojawiają się w supergeometrii? Superalgebra liniowa.

Jakie struktury pojawiają się w supergeometrii? Superalgebra liniowa.

Opowiem o superalgebrze liniowej, czyli o superprzestrzeniach, superalgebrach i supermacierzach oraz o uogólnieniu wyznacznika, który pozwala m. in. na liczenie jakobianu transformacji zmiany współrzędnych na superrozmaitościach i superwrońskianu

W każdym punkcie rozmaitości różniczkowej istnieje przestrzeń styczna i tak samo w każdym punkcie superrozmaitości istnieje superprzestrzeń styczna.

W każdym punkcie rozmaitości różniczkowej istnieje przestrzeń styczna i tak samo w każdym punkcie superrozmaitości istnieje superprzestrzeń styczna.

Definicja

Superprzestrzenią wektorową nad ciałem $\mathbb{K}$ nazywamy przestrzeń wektorową $\mathbb{V}$ nad $\mathbb{K}$ wraz z parą $(\mathbb{V}_0, \ \mathbb{V}_1)$ podprzestrzeni $\mathbb{V}$ takich, że $\mathbb{V} = \mathbb{V}_0 \oplus \mathbb{V}_1$. Mówimy, że $v \in \mathbb{V}$ ma *parzystość* p, jeśli istnieje $p \in \mathbb{Z}_2$ takie, że $v \in \mathbb{V}_p$. Element $v \in \mathbb{V}$ jest *parzysty*, kiedy $v \in \mathbb{V}_0$, lub *nieparzysty*, kiedy $v \in \mathbb{V}_1$.

Równoważnie superprzestrzeń to $(\mathbb{V}, \alpha)$, gdzie $\alpha \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(\mathbb{V})$ spełnia $\alpha^2 = \mathrm{Id}_{\mathbb{V}}$. Wtedy

$$\mathbb{V}_0 := \ker(\alpha - \mathrm{Id}_{\mathbb{V}}),$$
$$\mathbb{V}_1 := \ker(\alpha + \mathrm{Id}_{\mathbb{V}}).$$

W każdym punkcie rozmaitości różniczkowej istnieje przestrzeń styczna i tak samo w każdym punkcie superrozmaitości istnieje superprzestrzeń styczna.

Definicja

Superprzestrzenią wektorową nad ciałem $\mathbb{K}$ nazywamy przestrzeń wektorową $\mathbb{V}$ nad $\mathbb{K}$ wraz z parą $(\mathbb{V}_0,\ \mathbb{V}_1)$ podprzestrzeni $\mathbb{V}$ takich, że $\mathbb{V} = \mathbb{V}_0 \oplus \mathbb{V}_1$. Mówimy, że $v \in \mathbb{V}$ ma *parzystość* p, jeśli istnieje $p \in \mathbb{Z}_2$ takie, że $v \in \mathbb{V}_p$. Element $v \in \mathbb{V}$ jest *parzysty*, kiedy $v \in \mathbb{V}_0$, lub *nieparzysty*, kiedy $v \in \mathbb{V}_1$.

Równoważnie superprzestrzeń to $(\mathbb{V}, \alpha)$, gdzie $\alpha \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(\mathbb{V})$ spełnia $\alpha^2 = \mathrm{Id}_{\mathbb{V}}$. Wtedy

$$\mathbb{V}_0 := \ker(\alpha - \mathrm{Id}_{\mathbb{V}}),$$
$$\mathbb{V}_1 := \ker(\alpha + \mathrm{Id}_{\mathbb{V}}).$$

Definicja

$\mathbb{S}$ nazywamy *superpodprzestrzenią* $\mathbb{V}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbb{S}$ jest podprzestrzenią $\mathbb{V}$ oraz $\mathbb{S} = \mathbb{S} \cap \mathbb{V}_0 \oplus \mathbb{S} \cap \mathbb{V}_1$.

Po wprowadzeniu struktury superprzestrzeni można zająć się badaniem własności odwzorowań pomiędzy nimi.

Po wprowadzeniu struktury superprzestrzeni można zająć się badaniem własności odwzorowań pomiędzy nimi.

Definicja

Niech $\mathbb{V}, \mathbb{W}$ będą superprzestrzeniami. Odwzorowanie liniowe $f : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ nazywamy *homomorfizmem superprzestrzeni*.

f jest *parzyste* jeśli $f(\mathbb{V}_0) \subset \mathbb{W}_0$ oraz $f(\mathbb{V}_1) \subset \mathbb{W}_1$.
f jest *nieparzyste* jeśli $f(\mathbb{V}_0) \subset \mathbb{W}_1$ oraz $f(\mathbb{V}_0) \subset \mathbb{W}_1$.

Po wprowadzeniu struktury superprzestrzeni można zająć się badaniem własności odwzorowań pomiędzy nimi.

Definicja

Niech $\mathbb{V}, \mathbb{W}$ będą superprzestrzeniami. Odwzorowanie liniowe $f : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ nazywamy *homomorfizmem superprzestrzeni*.

$$f \text{ jest } \textit{parzyste} \text{ jeśli } f(\mathbb{V}_0) \subset \mathbb{W}_0 \text{ oraz } f(\mathbb{V}_1) \subset \mathbb{W}_1.$$
$$f \text{ jest } \textit{nieparzyste} \text{ jeśli } f(\mathbb{V}_0) \subset \mathbb{W}_1 \text{ oraz } f(\mathbb{V}_0) \subset \mathbb{W}_1.$$

Każdy $f \in \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{SVect}}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ spełnia $f = f_0 + f_1$ dla jednoznacznie określonego parzystego f_0 i nieparzystego f_1, ponieważ

$$\begin{aligned} f = (\mathrm{Id}_{\mathbb{W}}) f (\mathrm{Id}_{\mathbb{V}}) &= (\pi_{\mathbb{W}_0} + \pi_{\mathbb{W}_1}) f (\pi_{\mathbb{V}_0} + \pi_{\mathbb{V}_1}) = \\ &= (\pi_{\mathbb{W}_0} f \pi_{\mathbb{V}_0} + \pi_{\mathbb{W}_1} f \pi_{\mathbb{V}_1}) + (\pi_{\mathbb{W}_0} f \pi_{\mathbb{V}_1} + \pi_{\mathbb{W}_1} f \pi_{\mathbb{V}_0}). \end{aligned}$$

Wniosek

Homomorfizmy superprzestrzeni wektorowych $\mathbb{V} \to \mathbb{W}$ *tworzą superprzestrzeń wektorową oznaczaną* $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{SVect}}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$.

Wyniki

Pytanie: czy istnieje związek parzystości homomorfizmu superprzestrzeni ze strukturą jego jądra i obrazu?

Wyniki

Pytanie: czy istnieje związek parzystości homomorfizmu superprzestrzeni ze strukturą jego jądra i obrazu?

Stwierdzenie

Niech $f : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ *będzie parzystym lub nieparzystym homomorfizmem superprzestrzeni. Wtedy* $\ker(f)$ *i* $\mathrm{im}(f)$ *są superpodprzestrzeniami* $\mathbb{V}$ *i* $\mathbb{W}$*.*

Wyniki

Pytanie: czy istnieje związek parzystości homomorfizmu superprzestrzeni ze strukturą jego jądra i obrazu?

Stwierdzenie

Niech $f : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ będzie parzystym lub nieparzystym homomorfizmem superprzestrzeni. Wtedy $\ker(f)$ i $\mathrm{im}(f)$ są superpodprzestrzeniami $\mathbb{V}$ i $\mathbb{W}$.

Implikacja w drugą stronę nie zachodzi, istnieje prosty kontrprzykład.

Stwierdzenie

Niech $f : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ będzie dowolnym homomorfizmem superprzestrzeni. Jeśli $\ker(f)$ jest superpodprzestrzenią, to $\ker(f) = \ker(f_0) \cap \ker(f_1)$.

Superalgebry mają uogólnić ciało liczbowe tak, by mogło zawierać jednocześnie zwykłe, przemienne zmienne liczbowe i zmienne antyprzemienne.

Superalgebry mają uogólnić ciało liczbowe tak, by mogło zawierać jednocześnie zwykłe, przemienne zmienne liczbowe i zmienne antyprzemienne.

Definicja

Niech $\mathbb{A}$ będzie algebrą nad $\mathbb{K}$ oraz $(\mathbb{A}, (\mathbb{A}_0, \mathbb{A}_1))$ będzie superprzestrzenią. Mówimy, że $\mathbb{A}$ jest *superalgebrą* nad $\mathbb{K}$, jeśli

$$\forall i, j \in \mathbb{Z}_2,\ \forall a \in \mathbb{A}_i, b \in \mathbb{A}_j, \qquad ab \in \mathbb{A}_{i+j}.$$

Powiemy, że $(\mathbb{A}, (\mathbb{A}_0, \mathbb{A}_1))$ jest *superprzemienna*, jeśli

$$\forall i, j \in \mathbb{Z}_2,\ \forall a \in \mathbb{A}_i, b \in \mathbb{A}_j, \qquad ab = (-1)^{ij} ba.$$

Superalgebry mają uogólnić ciało liczbowe tak, by mogło zawierać jednocześnie zwykłe, przemienne zmienne liczbowe i zmienne antyprzemienne.

Definicja

Niech $\mathbb{A}$ będzie algebrą nad $\mathbb{K}$ oraz $(\mathbb{A}, (\mathbb{A}_0, \mathbb{A}_1))$ będzie superprzestrzenią. Mówimy, że $\mathbb{A}$ jest *superalgebrą* nad $\mathbb{K}$, jeśli

$$\forall i, j \in \mathbb{Z}_2,\ \forall a \in \mathbb{A}_i, b \in \mathbb{A}_j, \qquad ab \in \mathbb{A}_{i+j}.$$

Powiemy, że $(\mathbb{A}, (\mathbb{A}_0, \mathbb{A}_1))$ jest *superprzemienna*, jeśli

$$\forall i, j \in \mathbb{Z}_2,\ \forall a \in \mathbb{A}_i, b \in \mathbb{A}_j, \qquad ab = (-1)^{ij} ba.$$

Algebra form nad rozmaitością różniczkową jest superalgebrą superprzemienną.

$$\Omega(M) := \bigoplus_{k=0}^{\infty} \Omega^k(M),$$
$$\Omega(M)_0 := \bigoplus_{k=0}^{\infty} \Omega^{2k}(M),$$
$$\Omega(M)_1 := \bigoplus_{k=0}^{\infty} \Omega^{2k+1}(M).$$

Iloczyn zewnętrzny jest dwuliniowy i zachodzi:

$$\forall \alpha \in \Omega^k(M),\ \forall \beta \in \Omega^l(M), \quad \alpha \wedge \beta = (-1)^{kl} \beta \wedge \alpha = (-1)^{p(\alpha)p(\beta)} \beta \wedge \alpha.$$

Szczególnie ważne są superróżniczkowania, czyli endomorfizmy superalgebr spełniające uogólnienie reguły Leibniza. Superpola wektorowe są właśnie superróżniczkowaniami.

Szczególnie ważne są superróżniczkowania, czyli endomorfizmy superalgebr spełniające uogólnienie reguły Leibniza. Superpola wektorowe są właśnie superróżniczkowaniami.

Definicja

Niech $\mathbb{A}$ będzie superprzemienną superalgebrą nad $\mathbb{K}$. Powiemy, że endomorfizm superprzestrzeni $D : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ o parzystości $p(D)$ jest *superróżniczkowaniem* jeśli spełnia *superregułę Leibniza*:

$$\forall k \in \mathbb{Z}_2, \forall a \in \mathbb{A}_k, b \in \mathbb{A}, \quad D(ab) = D(a)b + (-1)^{p(D)k} aD(b).$$

Superróżniczkowaniami nazywamy kombinacje liniowe nad superalgebrą *superróżniczkowań* z parzystością.

Szczególnie ważne są superróżniczkowania, czyli endomorfizmy superalgebr spełniające uogólnienie reguły Leibniza. Superpola wektorowe są właśnie superróżniczkowaniami.

Definicja

Niech $\mathbb{A}$ będzie superprzemienną superalgebrą nad $\mathbb{K}$. Powiemy, że endomorfizm superprzestrzeni $D : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ o parzystości $p(D)$ jest *superróżniczkowaniem* jeśli spełnia *superregułę Leibniza*:

$$\forall k \in \mathbb{Z}_2, \forall a \in \mathbb{A}_k, b \in \mathbb{A}, \quad D(ab) = D(a)b + (-1)^{p(D)k} aD(b).$$

Superróżniczkowaniami nazywamy kombinacje liniowe nad superalgebrą *superróżniczkowań* z parzystością.

W przykładzie superalgebry form nad rozmaitością różniczkową, różniczka zewnętrzna d jest superróżniczkowaniem, ponieważ

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta.$$

Supermacierze są macierzami o współczynnikach w superalgebrze. Uogólnienie wyznacznika dla supermacierzy jest ważne przy liczeniu jakobianu transformacji zmiennych podczas całkowania superform na superrozmaitościach.

Supermacierze są macierzami o współczynnikach w superalgebrze. Uogólnienie wyznacznika dla supermacierzy jest ważne przy liczeniu jakobianu transformacji zmiennych podczas całkowania superform na superrozmaitościach.

Definicja

Supermacierzami nad $\mathbb{A}$ nazywamy macierze o współczynnikach z $\mathbb{A}$. Czwórkę (r, s, m, n) nazywamy *superwymiarem* supermacierzy, jeśli ma ona wymiar $(r + s) \times (m + n)$.

Supermacierze są macierzami o współczynnikach w superalgebrze. Uogólnienie wyznacznika dla supermacierzy jest ważne przy liczeniu jakobianu transformacji zmiennych podczas całkowania superform na superrozmaitościach.

Definicja

Supermacierzami nad $\mathbb{A}$ nazywamy macierze o współczynnikach z $\mathbb{A}$. Czwórkę (r, s, m, n) nazywamy *superwymiarem* supermacierzy, jeśli ma ona wymiar $(r+s) \times (m+n)$.

Definicja

Niech Λ będzie supermacierzą superwymiaru (r, s, m, n) postaci:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} G_{r\times m} & P_{r\times n} \\ Q_{s\times m} & H_{s\times n} \end{bmatrix}.$$

Λ jest *parzysta*, jeśli $\Lambda = \begin{bmatrix} \mathbb{A}_0 & \mathbb{A}_1 \\ \mathbb{A}_1 & \mathbb{A}_0 \end{bmatrix}$, lub *nieparzysta*, jeśli $\Lambda = \begin{bmatrix} \mathbb{A}_1 & \mathbb{A}_0 \\ \mathbb{A}_0 & \mathbb{A}_1 \end{bmatrix}$.

Supermacierze są macierzami o współczynnikach w superalgebrze. Uogólnienie wyznacznika dla supermacierzy jest ważne przy liczeniu jakobianu transformacji zmiennych podczas całkowania superform na superrozmaitościach.

Definicja

Supermacierzami nad $\mathbb{A}$ nazywamy macierze o współczynnikach z $\mathbb{A}$. Czwórkę (r, s, m, n) nazywamy *superwymiarem* supermacierzy, jeśli ma ona wymiar $(r + s) \times (m + n)$.

Definicja

Niech Λ będzie supermacierzą superwymiaru (r, s, m, n) postaci:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} G_{r \times m} & P_{r \times n} \\ Q_{s \times m} & H_{s \times n} \end{bmatrix}.$$

Λ jest *parzysta*, jeśli $\Lambda = \begin{bmatrix} \mathbb{A}_0 & \mathbb{A}_1 \\ \mathbb{A}_1 & \mathbb{A}_0 \end{bmatrix}$, lub *nieparzysta*, jeśli $\Lambda = \begin{bmatrix} \mathbb{A}_1 & \mathbb{A}_0 \\ \mathbb{A}_0 & \mathbb{A}_1 \end{bmatrix}$.

Supermacierze są reprezentacjami homomorfizmów supermodułów.

Parzyste supermacierze odwracalne superwymiaru (m, n, m, n) ze współczynnikami w $\mathbb{A}$ tworzą grupę multiplikatywną oznaczaną $\mathrm{GL}(\mathbb{A}, m, n)$.

Parzyste supermacierze odwracalne superwymiaru (m, n, m, n) ze współczynnikami w $\mathbb{A}$ tworzą grupę multiplikatywną oznaczaną $\mathrm{GL}(\mathbb{A}, m, n)$.

Definicja

Bierezinianem nazywamy odwzorowanie $\mathrm{ber} : \mathrm{GL}(\mathbb{A}, m, n) \to \mathbb{A}_0$ spełniające dwa warunki:

(1) Dla $G \in \mathrm{GL}(\mathbb{A}_0, m)$ oraz $H \in \mathrm{GL}(\mathbb{A}_0, n)$ mamy

$$\mathrm{ber}\begin{pmatrix} G & 0 \\ 0 & H \end{pmatrix} = \det(G)\det(H^{-1}).$$

(2) Dla $\Lambda, \Omega \in \mathrm{GL}(\mathbb{A}, m, n)$ zachodzi $\mathrm{ber}(\Lambda\Omega) = \mathrm{ber}(\Lambda)\mathrm{ber}(\Omega)$.

Parzyste supermacierze odwracalne superwymiaru (m, n, m, n) ze współczynnikami w $\mathbb{A}$ tworzą grupę multiplikatywną oznaczaną $\mathrm{GL}(\mathbb{A}, m, n)$.

Definicja

Bierezinianem nazywamy odwzorowanie $\mathrm{ber} : \mathrm{GL}(\mathbb{A}, m, n) \to \mathbb{A}_0$ spełniające dwa warunki:

(1) Dla $G \in \mathrm{GL}(\mathbb{A}_0, m)$ oraz $H \in \mathrm{GL}(\mathbb{A}_0, n)$ mamy

$$\mathrm{ber}\begin{pmatrix} G & 0 \\ 0 & H \end{pmatrix} = \det(G)\det(H^{-1}).$$

(2) Dla $\Lambda, \Omega \in \mathrm{GL}(\mathbb{A}, m, n)$ zachodzi $\mathrm{ber}(\Lambda\Omega) = \mathrm{ber}(\Lambda)\mathrm{ber}(\Omega)$.

Twierdzenie

Bierezinian istnieje i jest jednoznacznie określony przez:

$$\mathrm{ber}\begin{pmatrix} G & P \\ Q & H \end{pmatrix} = \det(G - PH^{-1}Q)\det(H^{-1}) = \det(G)\det(H - QG^{-1}P)^{-1}.$$

Podsumowując:

1. Odpowiedni przestrzeni stycznej dla superrozmaitości ma strukturę superprzestrzeni.

Podsumowując:

1. Odpowiednik przestrzeni stycznej dla superrozmaitości ma strukturę superprzestrzeni.
2. Wprowadzenie superalgebry miało na celu uogólnienie ciała liczbowego, nad którym uprawiamy analizę matematyczną.

Podsumowując:

1. Odpowiednik przestrzeni stycznej dla superrozmaitości ma strukturę superprzestrzeni.
2. Wprowadzenie superalgebry miało na celu uogólnienie ciała liczbowego, nad którym uprawiamy analizę matematyczną.
3. Superróżniczkowania to endomorfizmy superalgebr, które spełniają superregułę Leibniza.

Podsumowując:

1. Odpowiednik przestrzeni stycznej dla superrozmaitości ma strukturę superprzestrzeni.
2. Wprowadzenie superalgebry miało na celu uogólnienie ciała liczbowego, nad którym uprawiamy analizę matematyczną.
3. Superróżniczkowania to endomorfizmy superalgebr, które spełniają superregułę Leibniza.
4. Supermacierze i bierezinian (superwyznacznik) umożliwiają przeprowadzanie zamiany zmiennych podczas całkowania superform na superrozmaitościach.

Jakie struktury pojawiają się w supergeometrii? Superrozmaitości.

Pokrótce opowiem czym superrozmaitości różnią się od zwykłych rozmaitości.

Jakie struktury pojawiają się w supergeometrii? Superrozmaitości.

Pokrótce opowiem czym superrozmaitości różnią się od zwykłych rozmaitości.

W jakich dziedzinach fizyki ma zastosowanie supergeometria? Formalizm superlagranżowski i supersymetria.

Pokażę prosty przykład superlagranżjanu i opiszę procedurę otrzymywania równań ruchu. Wspomnę, czym są supersymetrie.

Superrozmaitości są boiskiem dla supersymetrii i formalizmu superlagranżowskiego.

Superrozmaitości są boiskiem dla supersymetrii i formalizmu superlagranżowskiego.

Definicja

Niech M będzie rozmaitością różniczkową wymiaru m. Niech ponadto $n \in \mathbb{Z}_+$ oraz $\mathcal{A}_M$ będzie snopem z kategorii otwartych podzbiorów M do kategorii superalgebr takim, że

(1) istnieje otwarte pokrycie $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ rozmaitości M spełniające warunek

$$\mathcal{A}_M(U_\alpha) \simeq C^\infty(U_\alpha) \otimes \Lambda\mathbb{R}^n, \quad \forall \alpha \in A,$$

(2) istnieje snop $\mathcal{N}$ wszystkich elementów nilpotentnych snopu $\mathcal{A}_M$ oraz $\mathcal{A}_M/\mathcal{N}$ jest izomorficzny do snopu C^∞ funkcji gładkich na M.

Parę $(M, \mathcal{A}_M)$ nazywamy *superrozmaitością* o *superwymiarze* (m, n). Ponadto każdy zbiór otwarty $U \subset M$ taki, że $\mathcal{A}(U) \simeq C^\infty(U) \otimes \Lambda\mathbb{R}^n$ nazywamy *rozdzielającym*.

Przykładem superrozmaitości jest $\mathbb{R}^{m|n}$, gdzie pojawia się n bazowych antyprzemiennych zmiennych β_i ($\beta_i\beta_j = -\beta_j\beta_i$).

Definition

Superrozmaitością $\mathbb{R}^{m|n}$ nazywamy parę $(\mathbb{R}^m, C^\infty \otimes \Lambda\mathbb{R}^n)$, gdzie $C^\infty \otimes \Lambda\mathbb{R}^n$ rozumiemy przez snop taki, że

$$\mathbb{R}^m \supset U \mapsto C^\infty(U) \otimes \Lambda\mathbb{R}^n.$$

Przykładem superrozmaitości jest $\mathbb{R}^{m|n}$, gdzie pojawia się n bazowych antyprzemiennych zmiennych β_i ($\beta_i\beta_j = -\beta_j\beta_i$).

Definition

Superrozmaitością $\mathbb{R}^{m|n}$ nazywamy parę $(\mathbb{R}^m, C^\infty \otimes \Lambda\mathbb{R}^n)$, gdzie $C^\infty \otimes \Lambda\mathbb{R}^n$ rozumiemy przez snop taki, że

$$\mathbb{R}^m \supset U \mapsto C^\infty(U) \otimes \Lambda\mathbb{R}^n.$$

Ponieważ $\Lambda\mathbb{R}^n$ jest izomorficzna do algebry nad $\mathbb{R}$ generowanej przez $1, \beta_1, \ldots, \beta_n$ poprzez relacje komutacyjne

$$1\beta_i = \beta_i = \beta_i 1, \quad \beta_i\beta_j = -\beta_j\beta_i, \quad i, j \in \{1, \ldots, n\}, \tag{14}$$

to funkcje nad rozmaitością $\mathbb{R}^{m|n}$ są postaci

Przykładem superrozmaitości jest $\mathbb{R}^{m|n}$, gdzie pojawia się n bazowych antyprzemiennych zmiennych β_i ($\beta_i\beta_j = -\beta_j\beta_i$).

Definition

Superrozmaitością $\mathbb{R}^{m|n}$ nazywamy parę $(\mathbb{R}^m, C^\infty \otimes \Lambda\mathbb{R}^n)$, gdzie $C^\infty \otimes \Lambda\mathbb{R}^n$ rozumiemy przez snop taki, że

$$\mathbb{R}^m \supset U \mapsto C^\infty(U) \otimes \Lambda\mathbb{R}^n.$$

Ponieważ $\Lambda\mathbb{R}^n$ jest izomorficzna do algebry nad $\mathbb{R}$ generowanej przez $1, \beta_1, \ldots, \beta_n$ poprzez relacje komutacyjne

$$1\beta_i = \beta_i = \beta_i 1, \quad \beta_i\beta_j = -\beta_j\beta_i, \quad i,j \in \{1,\ldots,n\}, \tag{14}$$

to funkcje nad rozmaitością $\mathbb{R}^{m|n}$ są postaci

$$\Phi = \sum_{\underline{\lambda} \in M^n} \Phi_{\underline{\lambda}}(x_1,\ldots,x_m)\beta_{[\underline{\lambda}]},$$

gdzie $\underline{\lambda} := \lambda_1,\ldots,\lambda_k$ oraz $\beta_{[\underline{\lambda}]} = \beta_{\lambda_1}\ldots\beta_{\lambda_k}$.

Rozważmy na superrozmaitości $\mathbb{R}^{6|6}$ z układem współrzędnych $\{x_i, \dot{x}_i, \beta_i, \dot{\beta}_i\}$ superlagranżjan klasycznej cząstki nierelatywistycznej

$$L = \frac{1}{2}(\dot{q}^i)^2 + \frac{1}{2}\dot{\beta}^i\beta^i - V_1(q) - \beta^i\beta^j V_{ij}(q). \tag{15}$$

Znalezienie superrównań ruchu można sprowadzić do następujących kroków:

1. zastosowanie supertransformacji Legendre'a do znalezienia superhamiltonianu $H = \dot{q}^i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} + \dot{\theta}^i \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}^i} - L$,

Rozważmy na superrozmaitości $\mathbb{R}^{6|6}$ z układem współrzędnych $\{x_i, \dot{x}_i, \beta_i, \dot{\beta}_i\}$ superlagranżjan klasycznej cząstki nierelatywistycznej

$$L = \frac{1}{2}(\dot{q}^i)^2 + \frac{1}{2}\dot{\beta}^i\beta^i - V_1(q) - \beta^i\beta^j V_{ij}(q). \tag{15}$$

Znalezienie superrównań ruchu można sprowadzić do następujących kroków:

1. zastosowanie supertransformacji Legendre'a do znalezienia superhamiltonianu $H = \dot{q}^i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} + \dot{\theta}^i \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}^i} - L$,
2. policzenie superróżniczki lagranżjanu dL,

Rozważmy na superrozmaitości $\mathbb{R}^{6|6}$ z układem współrzędnych $\{x_i, \dot{x}_i, \beta_i, \dot{\beta}_i\}$ superlagranżjan klasycznej cząstki nierelatywistycznej

$$L = \frac{1}{2}(\dot{q}^i)^2 + \frac{1}{2}\dot{\beta}^i \beta^i - V_1(q) - \beta^i \beta^j V_{ij}(q). \tag{15}$$

Znalezienie superrównań ruchu można sprowadzić do następujących kroków:

1. zastosowanie supertransformacji Legendre'a do znalezienia superhamiltonianu $H = \dot{q}^i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} + \dot{\theta}^i \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}^i} - L$,
2. policzenie superróżniczki lagranżjanu dL,
3. znalezienie superformy Maurera-Cartana $-d\Theta$ dla $\Theta = dL \circ S$, przy czym $S = dx^i \otimes \frac{\partial}{\partial \dot{x}^i} + d\beta^i \otimes \frac{\partial}{\partial \dot{\beta}^i}$,
4. znalezienie superpola Γ takiego, że $\iota_\Gamma(-d\Theta) = dE$,
5. znalezienie potoku superpola Γ - potok jest funkcją na superrozmaitości $\mathbb{R}^{6|6}$, **której składowe są rozwiązaniami superrównań Eulera-Lagrange'a.**

Supersymetrie są nieparzystymi superpolami wektorowymi X na superrozmaitości, takimi, że $[X, X] = 0$.

Supersymetrie są nieparzystymi superpolami wektorowymi X na superrozmaitości, takimi, że $[X, X] = 0$.

Podsumowanie:

1. Formalizm superrozmaitości pozwala na wprowadzanie funkcji mieszających zmienne przemienne (bozonowe) z antyprzemiennymi (fermionowymi).

Bibliografia

- Fiorenza D., "An introduction to the Batalin-Vilkovisky formalism", *Comptes Rendus des Rencontres Mathematiques de Glanon*, 2003.
- Flicker F., notatki o metodzie Faddeeva-Popova, `http://www.felixflicker.com/pdf/Ghosts.pdf`, dostęp 05.05.2017.
- Lamers J., "Algebraic Aspects of the Berezinian", praca magisterska, Uniwersytet w Utrechcie, 2012.
- de Lucas J., Skrypt do wykładu "Metody supergeometryczne i ich zastosowania"
- Rogers A., "Supermanifolds: Theory and Applications", World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapur, 2007.
- Varadarajan V.S., "Supersymmetry for mathematicians: an introduction", Courant lecture notes, Vol. 11, American Mathematical Society, Providence, RI, 2004.