

Lista 1 - ćwiczenia z B-S i wskaźników greckich

Równanie B-S

1. Wykaż, że funkcja $V(S, t)$ opisująca cenę opcji europejskiej call z czasem wygaśnięcia równym T spełnia równanie Blacka-Scholesa

$$V(S, t) = SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2),$$

gdzie K jest ceną wykonania, N jest dystrybuantą rozkładu normalnego standardowego oraz

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T - t}$$

2. Wyprowadź wzór na cenę kontraktu forward (korzystając z modelu BS).
3. Jak wyznaczyć wartość europejskiej opcji put przy pomocy formuły BS z zad 1.
4. Pokaż krok po kroku jak za pomocą równania B-S, ile kosztuje opcja wypłacająca za rok równowartość 1 akcji KGMH.

Wyprowadzanie równań różniczkowych

Zakładamy, że proces ceny jest geometrycznym ruchem Browna.

1. Wyprowadź równanie różniczkowe na cenę opcji na akcję S wypłacające dywidendę D w sposób ciągły.
2. Wyprowadź równanie na cenę opcji europejskiej na walutę zakładając stałe, ciągłe oprocentowanie r i r_f .
3. Wyprowadź równanie na cenę opcji europejskiej call na surowiec. Załóż stałe ciągłe oprocentowanie r i stały ciągły koszt przechowywania surowca (cost of carry) równy q .
4. Wyprowadź równanie różniczkowe na europejską opcję call na surowiec. Proszę założyć stałe ciągłe oprocentowanie i że surowiec w sposób stały i ciągły się psuje (np. gnije).
5. Wyprowadź równanie różniczkowe na cenę europejskiej opcji call na kontrakt futures. [Opcja ta pozwala wejść w kontrakt futures po określonej cenie danego dnia]. Rozważ dwa przypadki - prawo do wejścia w pozycji krótkiej i długiej.

Wskaźniki greckie

1. Korzystając z formuły Blacka-Scholesa, wyprowadź formułę na deltę opcji call.
2. Korzystając ze wzoru na cenę opcji call binarnej wyprowadź wzór na deltę.
3. Korzystając z formuły Blacka-Scholesa, wyprowadź formułę na gammę opcji call.
4. Korzystając z parytetu call-put wyprowadź zależność między wskaźnikami greckimi dla opcji call i put.
5. Korzystając z parytetu call-put wyprowadź zależność między wskaźnikami greckimi dla opcji call i put binarnych.
6. Omów podstawowe własności wskaźników greckich i cen opcji w odniesieniu do intuicji ekonomicznych.
7. Zaproponuj, jak zbudować portfel złożony z akcji, opcji call i binarny put realizujący strategię gamma hedgingu ($\Delta = 0$, $\Gamma = 0$).

Inne

1. Za pomocą wzoru Ito udowodnij, że proces $S_t = S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma(X_t - X_0)}$ jest rozwiązaniem równania $dS = \mu S dt + \sigma S dX$, gdzie X jest standardowym ruchem Browna.
2. Napisz pseudokod programu symulującego deltahedging europejskiej opcji call dla wygenerowanej trajektorii ceny.
3. Jakie funkcje w pakiecie R służą do wyznaczania cen instrumentów pochodnych i wskaźników greckich. Jak się ich używa?