# Lista 1 - ćwiczenia z B-S i wskaźników greckich

## Równanie B-S

1. Wykaż, że funkcja $\mathrm{V}(\mathrm{S},\mathrm{t})$ opisująca cenę opcji europejskiej call z czasem wygaśnięcia równym T spełnia równanie Blacka-Scholesa
$$\mathrm{V}(\mathrm{S},\mathrm{t}) = \mathrm{SN}(\mathrm{d}_1) - \mathrm{K}e^{-r(T-t)}N(d_2),$$
gdzie K jest ceną wykonania, N jest dystrybuantą rozkładu nrmalnego standardowego oraz
$$\mathrm{d}_1 = \frac{\ln\left(\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{K}}\right) + (\mathrm{r} + \frac{1}{2}\sigma^2)(\mathrm{T}-\mathrm{t})}{\sigma\sqrt{\mathrm{T}-\mathrm{t}}},\ \ \mathrm{d}_2 = \mathrm{d}_1 - \sigma\sqrt{\mathrm{T}-\mathrm{t}}$$
2. Wyprowadź wzór na cenę kontraktu forward ( korzystając z modelu BS).
3. Jak wyznaczyć wartość europejskiej opcji put przy pomocy formuły BS z zad 1.
4. Pokaż krok po kroku jak za pomocą równania B-S, ile kosztuje opcja wypłacająca za rok równowartość 1 akcji KGMH.

## Wyprowadzanie równań różniczkowych

Zakładamy, że proces ceny jest geometrycznym ruchem Browna.

1. Wyprowadź równanie różniczkowe na cenę opcji na akcję S wypłacające dywidendę D w sposób ciągły.
2. Wyprowadź równanie na cenę opcji europejskiej na walutę zakładając stałe, ciągłe oprocentowanie $r$ i $r_f$ .
3. Wyprowadź równanie na cenę opcji europejskiej call na surowiec. Załóż stałe ciągłe oprocentowanie $r$ i stały ciągły koszt przechowywania surowca (cost of carry) równy $q$.
4. Wyprowadź równanie różniczkowe na europejską opcję call na surowiec. Proszę założyć stałe ciągłe oprocentowanie i że surowiec w sposób stały i ciągły się psuje (np. gnije).
5. Wyprowadź równanie różniczkowe na cenę europejskiej opcję call na kontrakt futures. [Opcja ta pozwala wejść w kontrakt futures po określonej cenie danego dnia]. Rozważ dwa przypadki - prawo do wejścia w pozycji krótkiej I długiej.

## Wskaźniki greckie

1. Korzystając z formuły Blacka-Scholesa, wyprowadź formułę na deltę opcji call.
2. Korzystając ze wzoru na cenę opcji call binarnej wyprowadź wzór na deltę.
3. Korzystając z formuły Blacka-Scholesa, wyprowadź formułę na gammę opcji call.
4. Korzystając z parytetu call-put wyprowadź zależność między wskaźnikami greckimi dla opcji call i put.
5. Korzystając z parytetu call-put wyprowadź zależność między wskaźnikami greckimi dla opcji call i put binarnych.
6. Omów podstawowe własności wskaźników greckich i cen opcji w odniesieniu do intuicji ekonomicznych.
7. Zaproponuj, jak zbudować portfel złożony z akcji, opcji call i binary put realizujący strategię gamma hedgingu ($\Delta = 0,\ \Gamma = 0$).

## Inne

1. Za pomocą wzoru Ito udowodnij, że proces $S_t = S_0 e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma(X_t - X_0)}$jest rozwiązaniem równania $\mathrm{dS} = \mu\mathrm{Sdt} + \sigma\mathrm{SdX}$, gdzie X jest standardowym ruchem Browna.
2. Napisz pseudokod programu symulującego deltahedging europejskiej opcji call dla wygenerowanej trajektorii ceny.
3. Jakie funkcje w pakiecie R służą do wyznaczania cen instrumentów pochodnych i wskaźników greckich. Jak się ich używa?

**Lista zadań - finite difference**

**Zadanie 1.**
Niech $V(S,t)$ oznacza funkcję ceny opcji na aktywo bazowe $S$. Rozpatrzmy wartości ceny opcji $V_i^k = V(i\delta S, T - k\delta t)$ w punktach dwuwymiarowej siatki o krokach $\delta S$ dla osi $S$ oraz $\delta t$ dla osi czasu $t$, gdzie $i = 0, 1, \dots, I$ i $k = 0, 1, \dots, K$. Rozpatrzmy przybliżenie parametru delta $\Delta$ postaci

$$\frac{\partial V(S,t)}{\partial S} \approx \frac{V_{i+1}^k - V_i^k}{\delta S}.$$

Jest to tzw. przybliżenie *forward difference*. Korzystając ze wzoru Taylora pokaż, że błąd tego przybliżenie jest rzędu $O(\delta S)$.

**Zadanie 2.**
Wykaż, że błąd przybliżenia parametru $\Delta$ postaci

$$\frac{\partial V(S,t)}{\partial S} \approx \frac{V_i^k - V_{i-1}^k}{\delta S}$$

jest także rzędu $O(\delta S)$. Jest to tzw. przybliżenie *backward difference*.

**Zadanie 3.**
W końcu rozważmy przybliżenie $\Delta$ postaci

$$\frac{\partial V(S,t)}{\partial S} \approx \frac{V_{i+1}^k - V_{i-1}^k}{2\delta S},$$

które nazywamy przybliżeniem typu *central difference*. Wykaż, że w tym przypadku błąd przybliżenia jest rzędu $O(\delta S^2)$.

**Zadanie 4.**
Przybliżenia typu *forward* i *backward* można poprawić używając do ich konstrukcji więcej niż tylko dwóch punktów siatki. Stosując wzór Taylora z wyrazami rzędu drugiego włącznie udowodnij, że poniższe przybliżenie parametru $\Delta$

$$\frac{\partial V(S,t)}{\partial S} \approx \frac{3V_i^k - 4V_{i-1}^k + V_{i-2}^k}{2\delta S}$$

skutkuje błędem rzędu $O(\delta S^2)$.

**Zadanie 5.**
Udowodnij, że przybliżenie parametru $\Gamma$ postaci

$$\frac{\partial^2 V(S,t)}{\partial S^2} \approx \frac{V_{i+1}^k - 2V_i^k + V_{i-1}^k}{\delta S^2}$$

ma błąd rzędu $O(\delta S^2)$.

**Zadanie 6.**
Rozważmy warunek brzegowy na zbiorze $S = 0$ dla naszego zagadnienia: przyjmujemy, że dla $S = 0$ wypłata z opcji następuje na pewno, więc musi zachodzić

$$\mathrm{d}V(0,t) = rV(0,t)\mathrm{d}t. \tag{1}$$

Zapisz powyższy warunek w postaci numerycznej.

**Zadanie 7.**
Napisz pseudokod programu wyceniającego opcję eropejską call. W tym celu przyjmij, że $\delta S = 2E/I$, gdzie $E$ jest ceną wykonania opcji, a $I$ liczbą kroków na siatce dla ceny aktywa $S$. Następnie, niech $\delta t = \frac{0{,}9}{\sigma^2 \delta S^2}$ oraz przyjmij, że $K = [\frac{T}{\delta t}] + 1$ jest liczbą kroków na osi czasu ($T$ jest czasem do wygaśnięcia opcji). W końcu weź $\delta t = \frac{T}{K}$ (taki wybór zapewnia stabilność rozwiązania). W równaniu Blacka-Scholesa dla parametrów $\Delta$ i $\Gamma$ wykorzystaj przybliżenie typu *central difference*. Parametr $\Theta$ wylicz z równania B-S i przy jego pomocy wyliczaj kolejne wartości opcji na siatce. W punkcie $S = 0$ użyj warunku brzegowego (1), a w "nieskończoności" warunku

$$V_I^k = 2V_{I-1}^k - V_{I-2}^k. \tag{2}$$

Zastanów się dlaczego możemy zaakceptować warunek brzegowy (2)? Zaimplementuj powyższą procedurę w wybranym języku programowania i porównaj wyniki z teoretycznymi cenami wyliczonymi przy pomocy wzoru Blacka-Scholesa. Spróbuj ruszać parametrem $\delta t$. Co zaobserwowałeś\łaś?

**Zadanie 8.**
Rozważmy uogólnione równanie Blacka-Scholesa

$$\frac{\partial V}{\partial t} + a(S,t)\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + b(S,t)\frac{\partial V}{\partial S} + c(S,t)V = 0$$

dla pewnych funkcji $a > 0$, $b$ i $c$. W postaci numerycznej równanie to przyjmuje postać

$$\frac{V_i^k - V_i^{k+1}}{\delta t} + a_i^k \frac{V_{i+1}^k - 2V_i^k + V_{i-1}^k}{\delta S^2} + b_i^k \frac{V_{i+1}^k - V_{i-1}^k}{2\delta S} + c_i^k V_i^k = O(\delta t, \delta S^2). \tag{3}$$

Sprowadź równanie (3) do postaci

$$V_i^{k+1} = A_i^k V_{i-1}^k + (1 + B_i^k)V_i^k + C_i^k V_{i+1}^k, \tag{4}$$

gdzie $A_i^k = \nu_1 a_i^k - \frac{1}{2}\nu_2 b_i^k$, $B_i^k = -2\nu_1 a_i^k + \delta t c_i^k$, $C_i^k = \nu_1 a_i^k + \frac{1}{2}\nu_2 b_i^k$ oraz $\nu_1 = \frac{\delta t}{\delta S^2}$ i $\nu_2 = \frac{\delta t}{\delta S}$. Ponadto wykaż, że w równaniu (4) błąd jest rzędu $O(\delta t^2,\, \delta t\, \delta S^2)$.

**Zadanie 9.**
Wykaż, że w przypadku klasycznego równania Blacka-Scholesa współczynniki $A, B, C$ w równaniu (4) wynoszą odpowiednio $A_i^k = \frac{1}{2}(\sigma^2 i^2 - ri)\delta t$, $B_i^k = -(\sigma^2 i^2 + r)\delta t$ oraz $C_i^k = \frac{1}{2}(\sigma^2 i^2 + ri)\delta t$.

**Zadanie 10.**
Proszę napisać pseudokod, który posłuży do sporządzenia trójwymiarowego wykresu wartości opcji w zależności od ceny akcji i zmienności przy użyciu metody explicite finite difference dla

1. opcji europejskiej call
2. opcji europejskiej put
3. opcji amerykańskiej call
4. opcji amerykańskiej put

Dla każdej z opcji proszę rozważyć warianty

1. bez dywidendy
2. z dywidendą płatną jednorazowo w połowie życia opcji w wysokości x% ceny akcji.
3. z dywidendą płatną jednorazowo w połowie życia opcji w wysokości znanej kwoty x.

## Lista 3 - Równania różniczkowe nieliniowe

1. Na wykładzie wyprowadziliśmy modyfikację równania B-S dla przypadku ze zmiennością z zadanego przedziału.  Proszę wyprowadzić analogiczne równanie dla stopy procentowej z zadanego przedziału $r \in [r^-, r^+]$.
2. Analogicznie jak w zadaniu 1 proszę wyprowadzić równanie B-S dla opcji na walutę w sytuacji, gdy ciągłe oprocentowanie tej waluty $r_f > 0$ jest z zadanego przedziału $[r_f^-, r_f^+]$.
3. Proszę wyprowadzić modyfikację równania B-S dla przypadku, w którym pożyczamy i lokujemy na inny procent.
4. Proszę wyprowadzić równanie B-S na koszt strategii zabezpieczającej sprzedaną opcję put, gdy krótka sprzedaż instrumentu podstawowego jest niedostępna.
5. Proszę wyprowadzić równanie B-S, gdy krótka sprzedaż instrumentu podstawowego kosztuje zgodnie z zadaną stopą $R > 0$.
6. Proszę wymyśleć pseudokod do rozwiązania typu finite difference wybranego powyższego równania i zrozumiale go zaprezentować.
7. Proszę wymyśleć pseudokod do weryfikacji  ceny zabezpieczenia dla wybranego powyższego równania poprzez symulację strategii hedgingowej

## Lista 4 - Opcje wielowymiarowe

1. Wyprowadź równanie różniczkowe na europejską opcję call na iloraz dwóch skorelowanych indeksów giełdowych. Jak można je rozwiązać znanymi nam metodami?

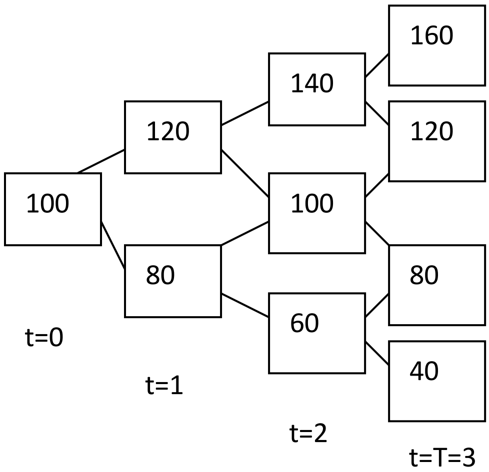
## Lista 5 - Model dwumianowy

1. Proszę pokazać , że dla racjonalnych założeń w wielookresowym dwumianowym modelu rynku opcji amerykańskiej call nie opłaca się wykonać przed chwilą wygaśnięcia. Jakie założenia są istotne dla prawdziwości tego twierdzenia?
2. Dany jest n-okresowy model dwumianowy, w którym cena początkowa to S. W każdym kroku cena akcji może wzrosnąć lub spaść o stałą kwotę y. Cena amerykańskiej opcji kupna po K (do chwili n) wynosi x. Stopa wolna od ryzyka dla każdego okresu wynosi r. Napisz wzór na cenę europejskiej opcji sprzedaży po K w chwili n.
3. Mamy dane 4-okresowe drzewo, w którym cena może w każdej chwili wzrosnąć lub spaść o kwotę 3%. Cena początkowa to 100. Inwestor w chwili 0 posiada opcję binarną call po 100, która wygasa w chwili 4. Ile powinien dokupić binarnych opcji put po 100 , aby uzyskać pozycję, której delta jest równa 0 ( a zatem niewrażliwą na ruchy akcji). Ciągła stopa wolna od ryzyka wynosi 1%.
4. Obecnie cena akcji wynosi 50 zł. W ciągu każdego z dwóch kolejnych trzymiesięcznych okresów może ona wzrosnąć lub spaść o 10% w stosunku do ceny z poprzedniego okresu. Stopa wolna od ryzyka jest równa 5% w skali roku (kapitalizacja ciągła). Niech $\mathrm{P_E P_A}$ cenę analogicznej opcji amerykańskiej. Wyznacz wartość $\mathrm{P_A} - \mathrm{P}_E$ Odpowiedź podaj z dokładnością do 1 grosza.
5. Obecnie cena akcji wynosi 75 zł. W ciągu każdego z siedmiu kolejnych trzymiesięcznych okresów może ona wzrosnąć lub spaść o 4% w stosunku do ceny z poprzedniego okresu. Stopa wolna od ryzyka jest równa 5% w skali roku (kapitalizacja ciągła). Niech $\mathrm{C_E}$ oznacza cenę 6-cio miesięcznej europejskiej opcji call z ceną wykonania równą 55 zł, zaś $\mathrm{C_A}$cenę analogicznej opcji amerykańskiej. Wyznacz wartość $\mathrm{C_A} - \mathrm{C_E}$ Odpowiedź podaj z dokładnością do 1 grosza.
6. Obecnie cena akcji wynosi 80 PLN. W ciągu każdego miesiąca może ona wzrosnąć lub spaść o 13%. Stopa wolna od ryzyka jest równa 6% w skali roku (kapitalizacja ciągła).
   Rozważmy instrument pochodny, który za 2 lata wypłaci tyle złotych, ile było wzrostów ceny akcji w tym okresie. Wyznacz cenę tego instrumentu z dokładnością do 5 groszy.
7. a) Obecnie cena akcji wynosi 80 PLN. W ciągu każdego z dwóch kolejnych 6-cio miesięcznych okresów może ona wzrosnąć lub spaść o 12%. Stopa wolna od ryzyka jest równa 7% w skali roku (kapitalizacja ciągła).
   Jaka jest dziś wartość rocznej europejskiej opcji call z ceną wykonania równą 80 PLN? Odpowiedź podaj z dokładnością do 50 groszy

   b) Załóż, że na rynku są inwestorzy, którzy uważają, że taka opcja jest warta o 1 zł więcej niż wskazuje Twoja wycena z punktu a). Jak to wykorzystasz? Opisz dokładnie skład Twojego portfela w kolejnych krokach zakładając, że cena akcji będzie szła cały czas w górę.

8. Rozpatrzmy roczną europejską opcję kupna na USD z ceną wykonania 3.64 (PLN/USD). Zakładając, że bieżący kurs wymiany wynosi 3.55 PLN/USD, wyznacz cenę stu takich opcji w modelu dwumianowym trzyokresowym, w którym cena instrumentu podstawowego w każdym następnym kroku powstaje przez pomnożenie lub podzielenie ceny z poprzedniego kroku o tę samą wartość 1.0594.

   Przyjmij ponadto, że wolne od ryzyka ciągłe stopy procentowe wynoszą 20% w Polsce i 8% w USA.
   Odpowiedź podaj z dokładnością do 1 grosza.




1. Wyceń europejską opcję sprzedaży z ceną wykonania 100 zł. Przyjmij, że w każdym okresie jest oprocentowanie 10%.
   a) 3  b)4  c)5  d)6  e)7

2. Jak powinien zachować się inwestor, jeśli cena opcji z zadania 1 jest 2.5. Rozważ scenariusz (↘,↘,↗), aby zarobić nie inwestując własnych środków.
3. Wyceń opcję amerykańską sprzedaży z ceną wykonania 100. Przyjmij oprocentowanie 10%.
   a) 3  b)4  c)5  d)6  e)7

4. Wyceń opcję asset-or-nothing wypłacającą na koniec wartość akcji, ale tylko, jeśli przekroczy ona 110 (zerową stopą procentowa).
5. Wyceń opcję typu azjatyckiego z funkcja wypłacającą $\frac{S_1+S_2+S_3+S_4}{4}$, jeśli ta wartość przekroczy 80 (zerowa stopa procentowa).
6. Wyceń opcję dającą wypłatę na koniec 100 pod warunkiem, że cena akcji nie przekroczyła 110 ani 50 w żadnym momencie

# Lista 6 - fixed income

1. Dziesięcioletnia obligacja wypłaca kupony w wysokości 110 zł na koniec każdego roku z kolejnych dziesiąciu lat. Na koniec dziesięciu lat dodatkowo wypłaca nominał w wysokości 1000 zł. Dziś kosztuje ona 1000 zł. Znajdź
   a. wewnętrzną stopę procentową nominalną,
   b. odpowiadającą jej stopę ciągłą
   c. duration Macaulay'a. Co ona nam mówi?
2. Kupiłeś(aś) trzy obligacje:
   a. Obligacja A z kuponami półrocznymi z oprocentowaniem 4% (tzn. 2% co pół roku) i duracją 21,46 o wartości 980.
   b. Obligacja 15-letnia B z duracją 12,35 o wartości 1015.
   c. Obligacja C z duracją 16,67 o wartości 1500.

   Zaraz po Twoim zakupie wszystkie efektywne stopy zwrotu (wewnętrzne stopy zwrotu) na rynku podniosły się o 0,3% (stopa ciągła). O ile w przybliżeniu spadła wartość Twojego portfela?
   *Uwaga1: duracja oznacza durację Macaulay'a.*
   *Uwaga2: gdybyś miał(a) problem ze zrozumieniem zwrotu „w przybliżeniu", to chodzi tu o aproksymację liniową względem ciągłej stopy procentowej.*
3. Opisz jak wycenić obligację 5-letnią o nominale 1000 zł, wypłacającą na końcu każdego roku LIBOR 1R + 1% z nominału, a na końcu 5 roku dodatkowo nominał. Załóż, że jest możliwość inwestowania na rynku międzybankowym w całym okresie życia obligacji oraz że znasz wszystkie ceny obligacji z dnia wyceny.
4. Oblicz wartość obecną ciągu płatności płatnych na końcowych lat 1,2,3,4,…99, 100,100,100,100,100,99,98,..,2,1. Do wyliczeń zastosuj stopę procentową 5%.
5. Rozważ obligację nieskończoną, tj. taką która nigdy nie wypłaca nominału. Obligacja ta wypłaca na końcu każdego roku kupon w wysokości 1 zł w nieskończoność. Wyznacz jej durację przy założeniu, że stopa ciągła wolna od ryzyka wynosi $r$=5%.
6. Rozważ dwie obligacje 10 letnie, jedną z kuponem 3% (obligacje A), drugą z kuponem 6% (obligacje B). Stopa procentowa wynosi $i = 3\%$. Posiadasz obecnie 10 000 zł w obligacjach A. Za jaką kwotę powinieneś kupić/sprzedać obligacji B, aby wartość Twojego całego portfela była (praktycznie) niewrażliwa na małe zmiany stopy procentowej? Znak minus w odpowiedzi oznacza, że powinieneś kupić obligacje B. *Wskazówka: użyj wzoru aproksymującego zmianę wartości obligacji*
7. Rozważ obligację 10-letnią, której obecna wartość wynosi 1 mln zł. Jej nominał wynosi 1 mln, a kupon wynosi 5% i jest płacony co roku. Wylicz jej durację. Niech A oznacza dokładną wartość tej obligacji, gdyby stopa % wzrosła o 0.5%, zaś B oznacza tą samą wartość tej obligacji, ale wyliczoną przy pomocy aproksymacji wzorem używającym duracji. W odpowiedziach wpisz, ile wynosi błąd tej aproksymacji, tj. |A-B|?
8. Kredyt jest spłacany w równych ratach w wysokości 1000 zł płatnych na końcu kolejnych 5 lat. Wyznacz część kapitałową płatną w drugiej racie. Wartość kredytu została ustalona przy stopie nominalnej 4%.
9. Przedstaw historię niewypłacalności obligacji firmy PCZ.
10. Przedstaw historię niewypłacalności obligacji firmy GETBACK.
11. Przedstaw historię niewypłacalności obligacji innej firmy niż wymieniona powyżej.
12. Przedstaw historię niewypłacalności obligacji rządowych wybranego kraju.