

Projekt II - finite difference and uncertain parameters.

Wojciech Fica ^{*}, Krzysztof Krawiec [†], Wojciech Prokopowicz [‡]

9 listopada 2021

1 Wstęp

W projekcie zakładamy, że jest dziś 1 stycznia 2020 roku. Celem projektu jest zaimplementowanie metody explicite finite difference i przy jej użyciu przeprowadzenie analizy opcji:

1. opcje europejskie call knock-and-out,
2. opcje europejskie put knock-and-out,
3. opcje amerykańskie call knock-and-out,
4. opcje amerykańskie put knock-and-out.

W projekcie zakładamy niepewną zmienność z przedziału $[15\%, 25\%]$, i zapadalność rozważanych opcji na dzień 30 września 2020.

Uwaga notacyjna: W związku z powyższym, na wykresach $t = 0$ symbolizuje 1 stycznia 2020, $t = 1$ - 31 grudnia 2020, a $t = 0.7$ - 30 września 2020.

2 Wpływ zmiany parametrów na cenę opcji europejskich.

Pokażemy teraz jak wyglądają ceny opcji gdy modyfikujemy różne parametry. Zaczniemy od najprostszego modelu i będziemy stopniowo zwiększać liczbę parametrów.

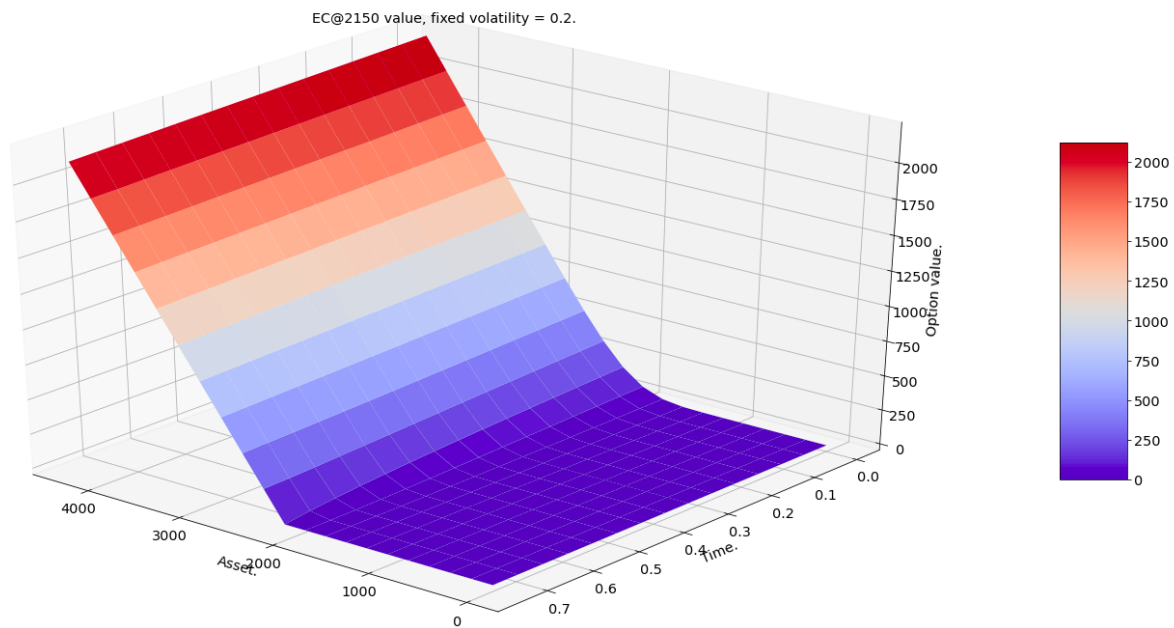
2.1 Opcje europejskie, stała zmienność.

Wykresy 1 i 2 przedstawiają cenę opcji EC@2150 i EP@2150, odpowiednio, gdy założymy stałą zmienność $\sigma = 20\%$. Otrzymane ceny w chwili $t = 0$ (1 stycznia 2020) zgadzają się ze wzorami analitycznymi wyprowadzonymi z formuły B-S.

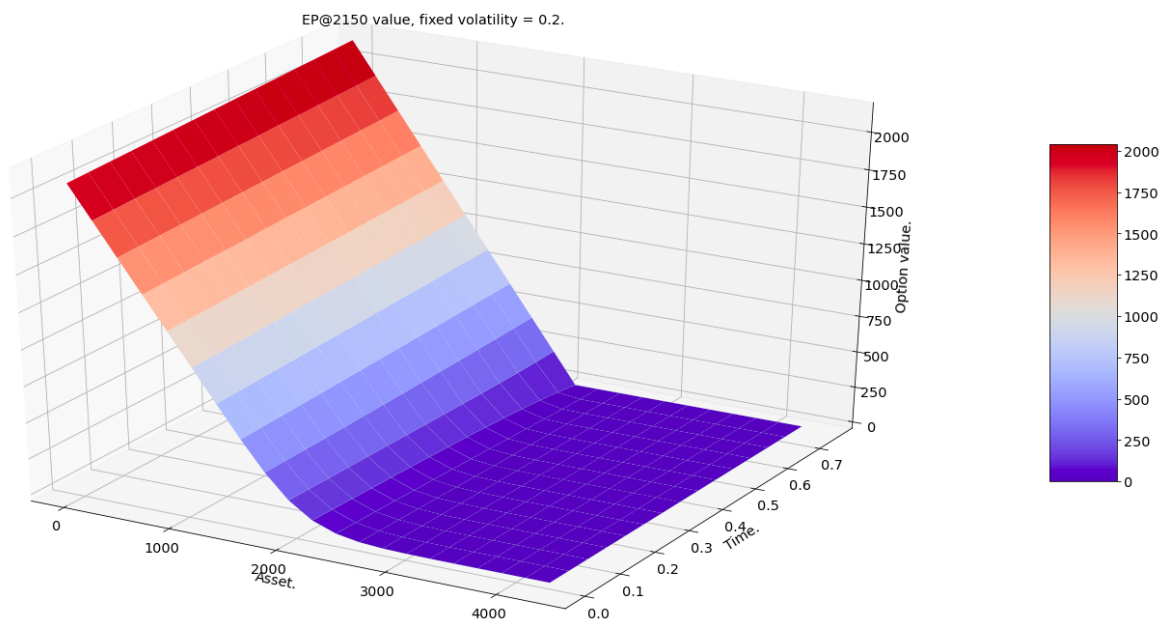
^{*}wojtekfica@gmail.com

[†]krzkra56@gmail.com

[‡]wojtpro@interia.pl



Rysunek 1: EC@2150, $\sigma = 20\%$.



Rysunek 2: EP@2150, $\sigma = 20\%$.

2.2 Opcje europejskie, nieznana zmienność.

Wykresy 3 i 4 przedstawiają cenę opcji EC@2150 i EP@2150, odpowiednio, gdy założymy stałą nieznaną zmienność $\sigma \in [15\%, 25\%]$. Aby zobaczyć różnicę z poprzednią sytuacją, gdy mieliśmy znaną stałą zmienność warto spojrzeć na wykres 5. Przedstawia on ceny opcji w 3 sytuacjach:

1. $\sigma = 15\%$.
2. $\sigma = 25\%$.
3. $\sigma \in [15\%, 25\%]$.

Widzimy, że zarówno dla opcji Call jak i Put wartość instrumentu przy nieznanej zmienności z przedziału $[15\%, 25\%]$ pokrywa się z wartością instrumentu gdybyśmy założyli zmienność stałą równą 25%. Zgadza się to z wyprowadzonym na wykładzie modelem gdzie zakładamy 'pesymistyczny scenariusz'. Poniżej wyjaśnienie. Jesteśmy w sytuacji, gdy sprzedajemy opcję i ją zabezpieczamy. Nasz portfel to

$$\Pi = -V + \Delta S.$$

Korzystając ze wzoru Ito, piszemy:

$$-d\Pi = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right)dt + \left(\frac{\partial V}{\partial S} - \Delta\right)dS$$

Eliminujemy losowość poprzez delta-hedging.

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$$

W każdym momencie zakładamy, że wartość naszego portfela rośnie o minimalną możliwą kwotę. Wtedy zwrot z takiego pesymistycznego portfela jest równy zwrotowi z inwestycji wolnej od ryzyka.

$$\min_{\sigma_{\min} < \sigma < \sigma_{\max}} (d\Pi) = r\Pi dt.$$

Stąd

$$\min_{\sigma^- < \sigma < \sigma^+} -\left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right)dt = r(-V + \frac{\partial V}{\partial S} S)dt.$$

Czyli

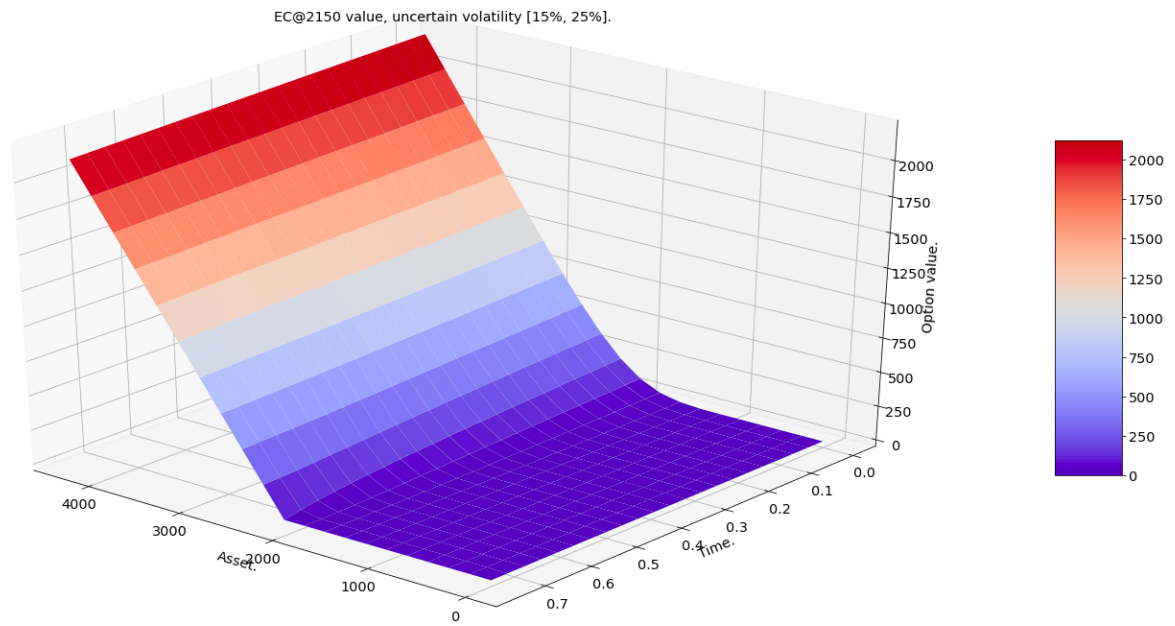
$$-\left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2(\Gamma) S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right) = r(-V + \frac{\partial V}{\partial S} S),$$

gdzie

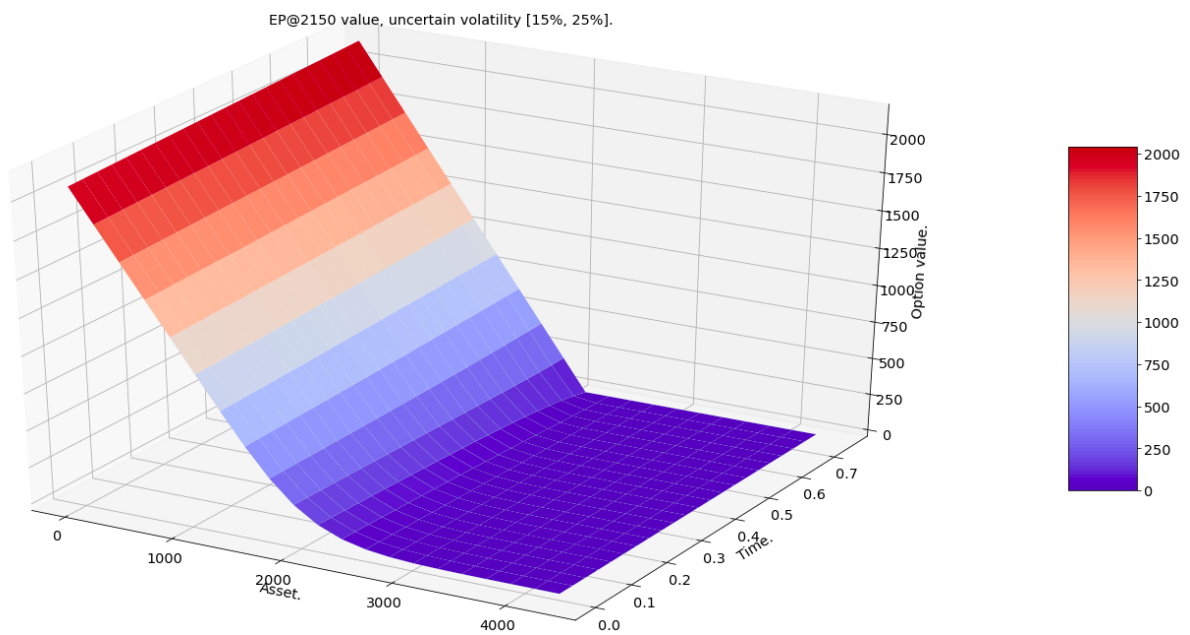
$$\sigma(\Gamma) = \begin{cases} \sigma_{\max}, & \text{jeśli } \Gamma \geq 0 \\ \sigma_{\min}, & \text{jeśli } \Gamma < 0 \end{cases}$$

W tym modelu zmienność zależy tylko od znaku gammy. A gamma dla opcji call i put jest taka sama i **stale dodatnia**.

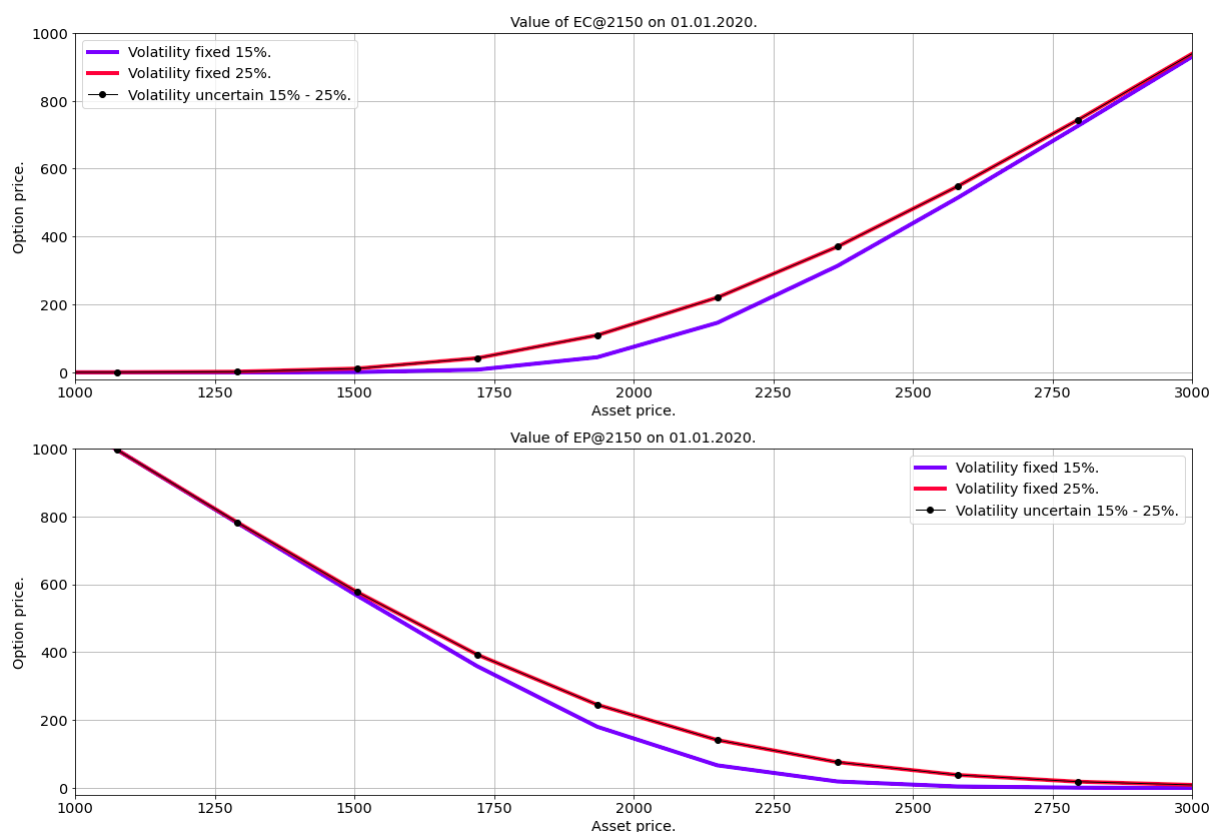
$$\Gamma_{Call} = \Gamma_{Put} = \frac{N'(d_1)}{\sigma S \sqrt{T-t}} \geq 0.$$



Rysunek 3: EC@2150, $\sigma \in [15\%, 25\%]$.



Rysunek 4: EP@2150, $\sigma \in [15\%, 25\%]$.



Rysunek 5: Wartość EC@2150 i EP@2150 w dniu 1 stycznia 2020, przy $\sigma \in [15\%, 25\%]$.

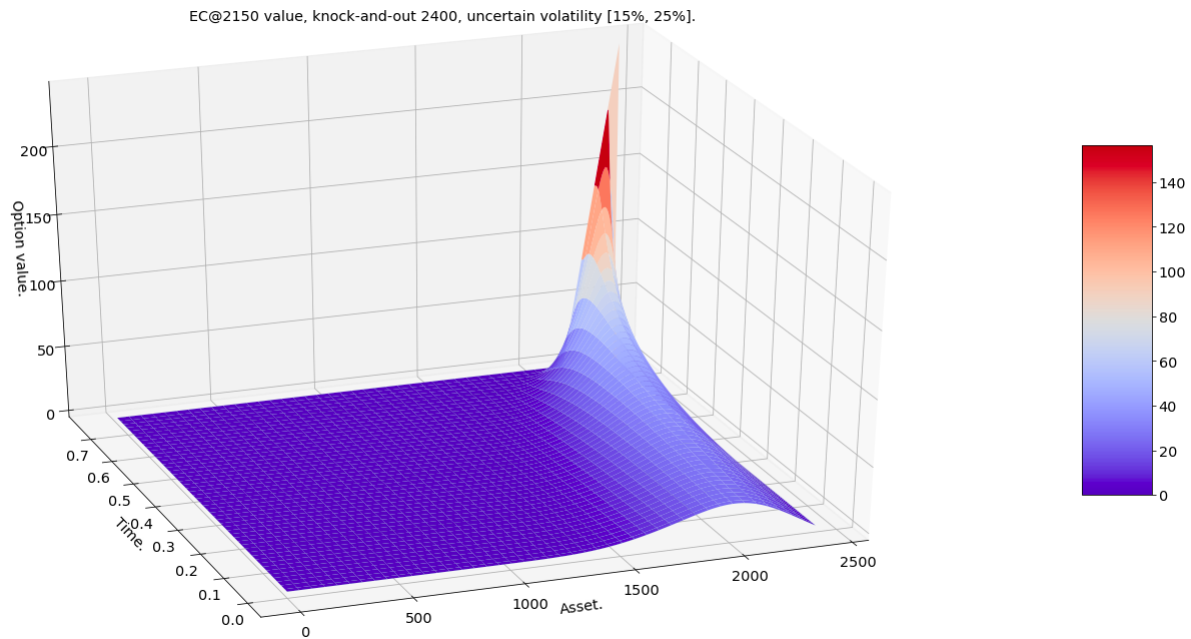
2.3 Opcje europejskie, barierowe, nieznana zmienność.

Przedstawimy teraz wyniki dla europejskiej opcji call z ceną wykonania 2150 i barierą knock-and-out 2400 przy nieznanej zmienności z przedziału $[15\%, 25\%]$.

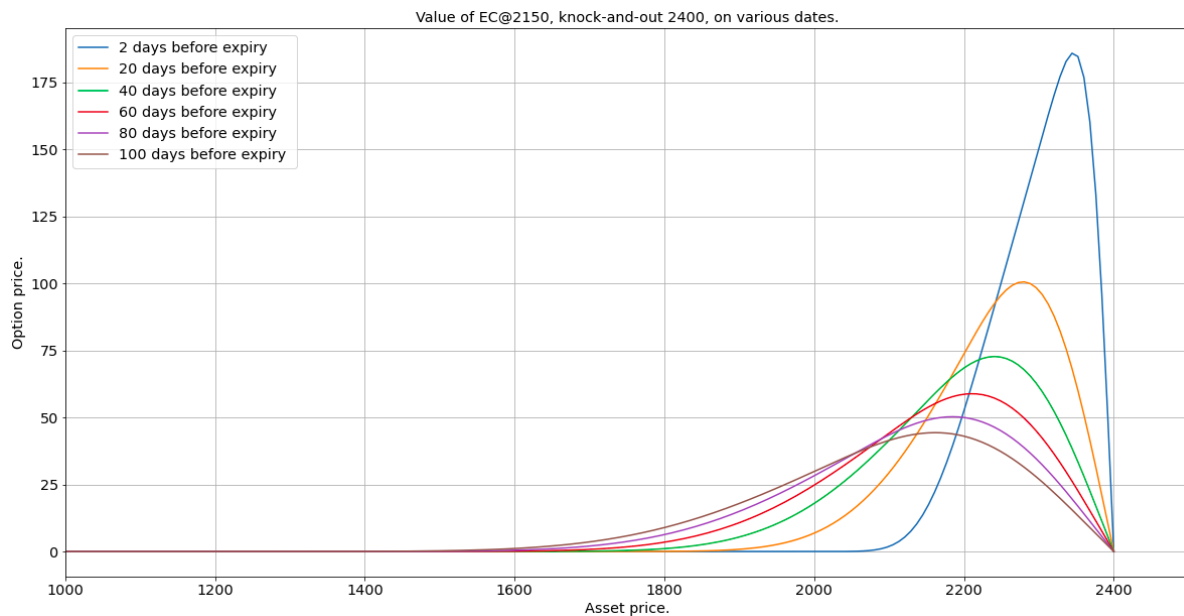
Wykres 6 przedstawia cenę opcji EC@2150 knock-and-out 2400, $\sigma \in [15\%, 25\%]$. Widzimy, że znacząco różni się on od poprzednich wykresów cen opcji call. Aby dokładniej zobrazować co się dzieje warto spojrzeć na kolejny wykres (7), który przedstawia ceny tej opcji w kilku różnych dniach. Widzimy, że im bliżej momentu wykonania,

1. tym bardziej wykres zbliża się do standardowego payoffu opcji call dla wartości z dala od bariery,
2. tym bardziej zaostrza się spadek dla wartości przy barierze.

Takie zachowanie zgadza się z intuicjami ekonomicznymi.



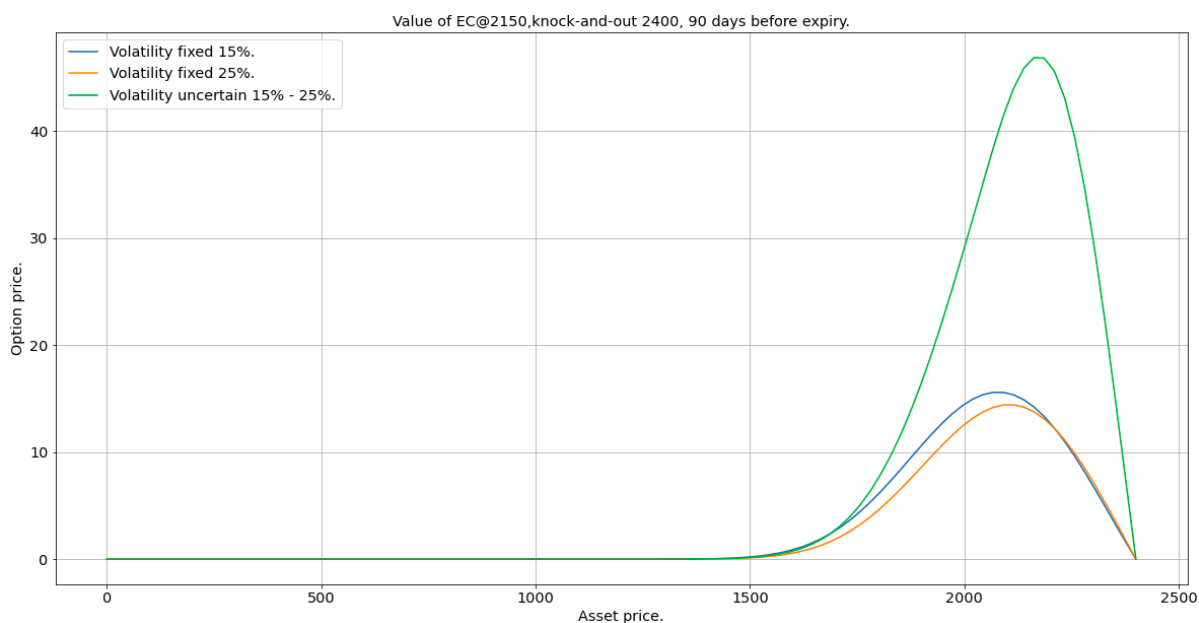
Rysunek 6: EC@2150 knock-and-out 2400, $\sigma \in [15\%, 25\%]$.



Rysunek 7: EC@2150 knock-and-out 2400, $\sigma \in [15\%, 25\%]$.

2.3.1 Zmienność pewna vs niepewna.

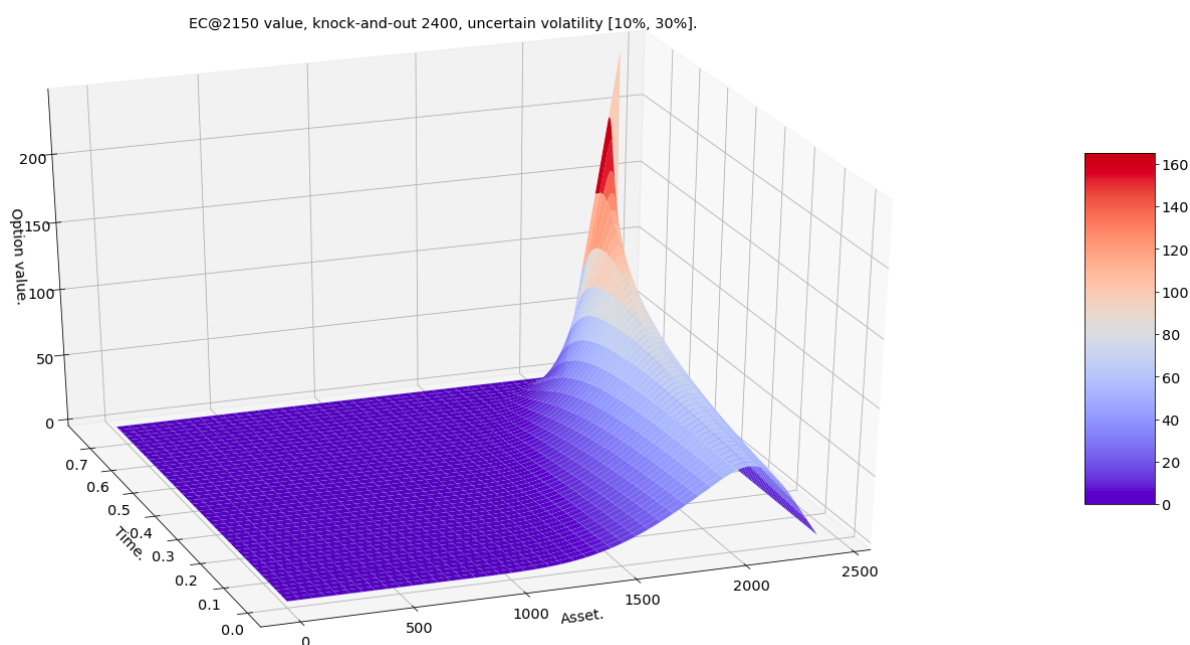
Wykres 8 pokazuje wartość opcji EC@2150 knock-and-out 2400 na 90 dni przed momentem wykonania w sytuacjach gdy mamy zmienność ustaloną oraz gdy jest ona niepewna. Widzimy, że w tym wypadku wartość opcji z $\sigma \in [15\%, 25\%]$ nie pokrywa się ani z wartością dla $\sigma = 15\%$, ani z wartością dla $\sigma = 25\%$. Zgadza się to z wyprowadzonym na wykładzie modelem.



Rysunek 8: Wartość EC@2150, knock-and-out 2400, 90 dni przed wygaśnięciem, różne zmienności.

2.3.2 Różne przedziały zmienności.

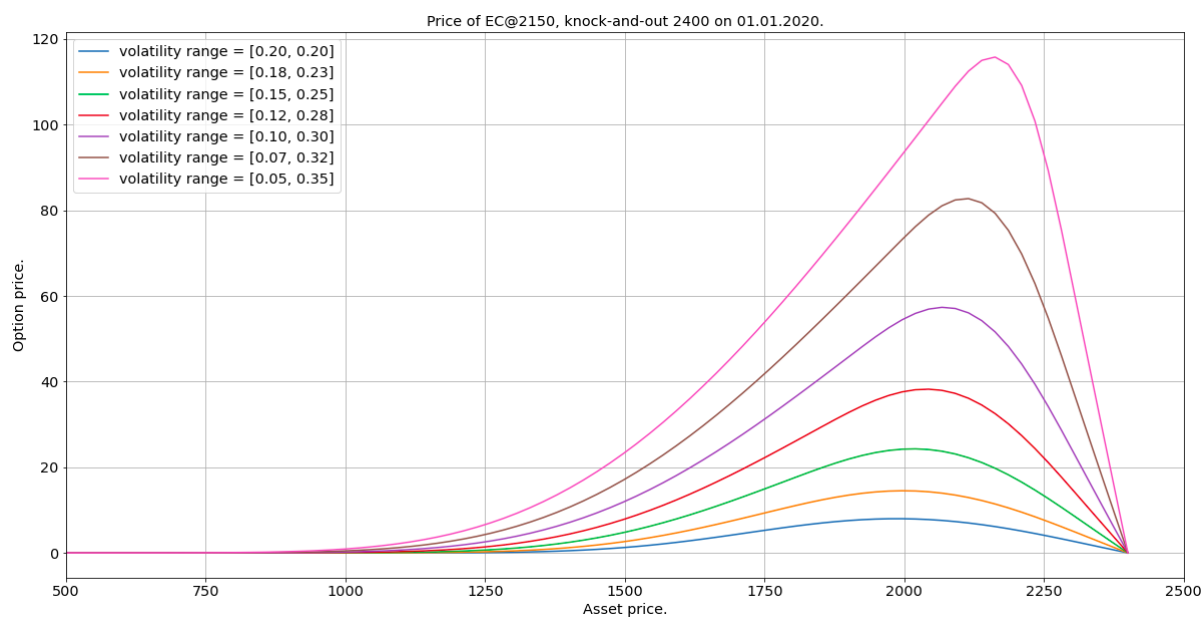
Porównamy teraz jak zmiana przedziału możliwych wartości zmienności wpływa na cenę opcji. Wykres 9 przedstawia cenę opcji EC@2150 knock-and-out 2400, $\sigma \in [10\%, 30\%]$.



Rysunek 9: EC@2150 knock-and-out 2400, $\sigma \in [10\%, 30\%]$.

Warto porównać go z wykresem 6, w którym wszystkie parametry były takie same, ale zmienność była z innego przedziału: $\sigma \in [15\%, 25\%]$. Aby lepiej to zobrazować zobaczmy

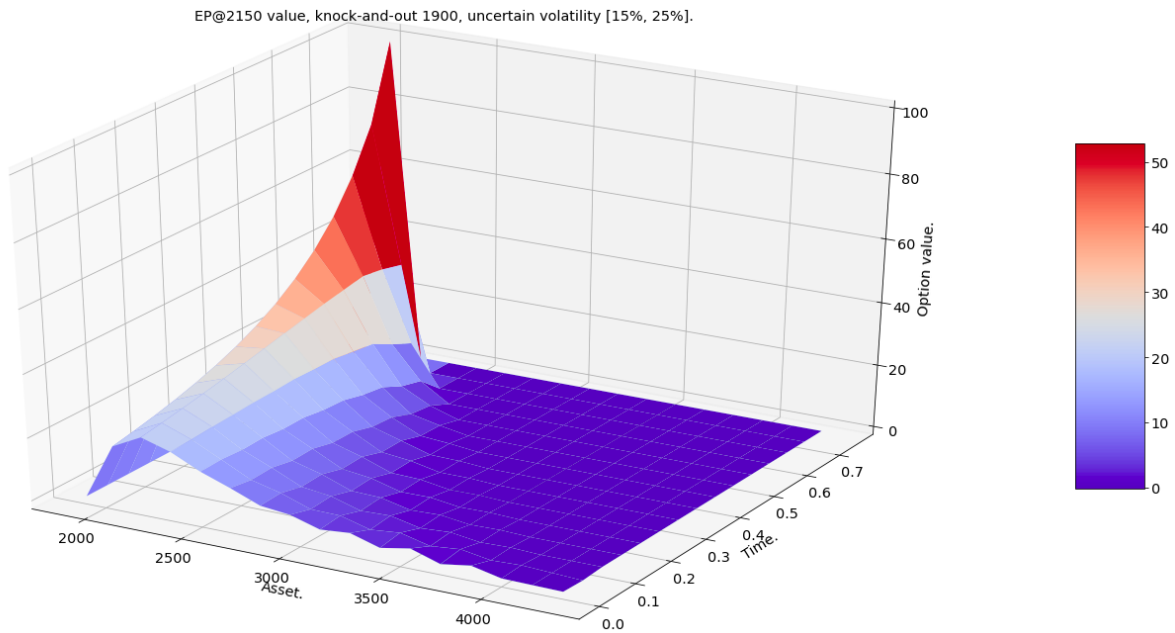
jak zmiana przedziału niepewności zmienności wpływa na cenę opcji w dniu 1 stycznia 2020 - wykres 10. Widzimy, że im szerszy przedział zmienności, tym więcej opcja jest warta.



Rysunek 10: Wartość EC@2150, knock-and-out 2400, 01.01.2020r., różne zakresy niepewnej zmienności.

2.3.3 Opcje put.

Aby raport był pełny przedstawiamy jeszcze wykres ceny opcji europejskiej put z ceną wykonania 2150 i barierą knock-and-out 1900 - wykres 11.



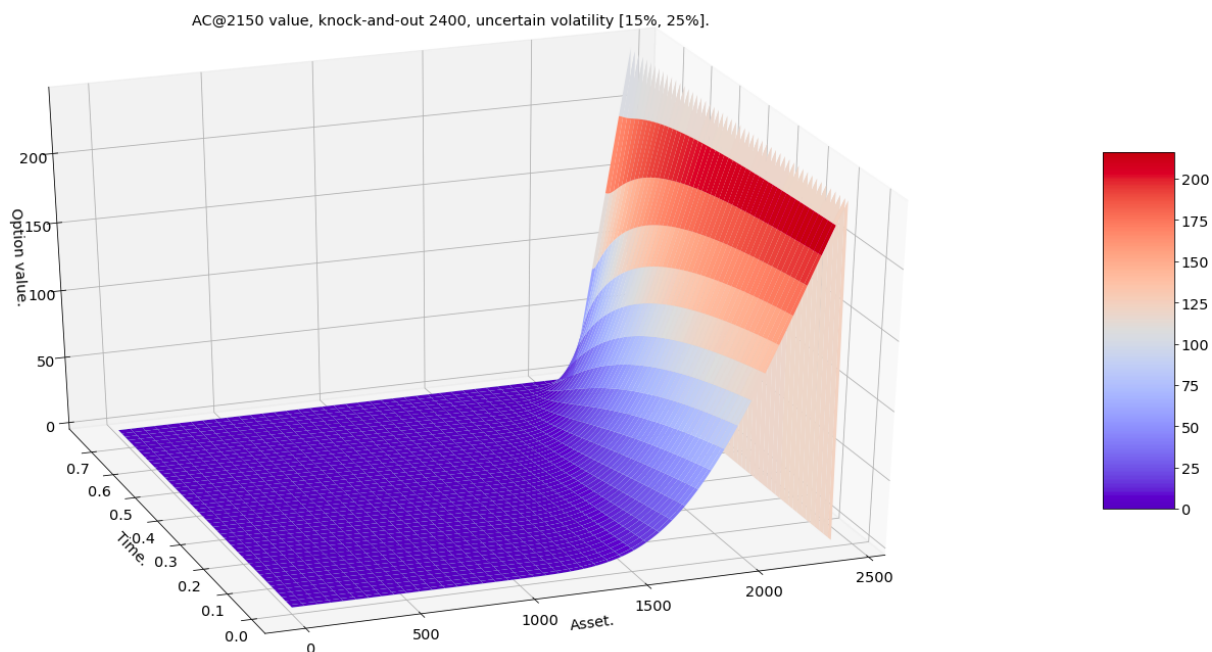
Rysunek 11: Wartość EP@2150, knock-and-out 1900, $\sigma \in [15\%, 25\%]$.

3 Wpływ zmiany parametrów na cenę opcji amerykańskich.

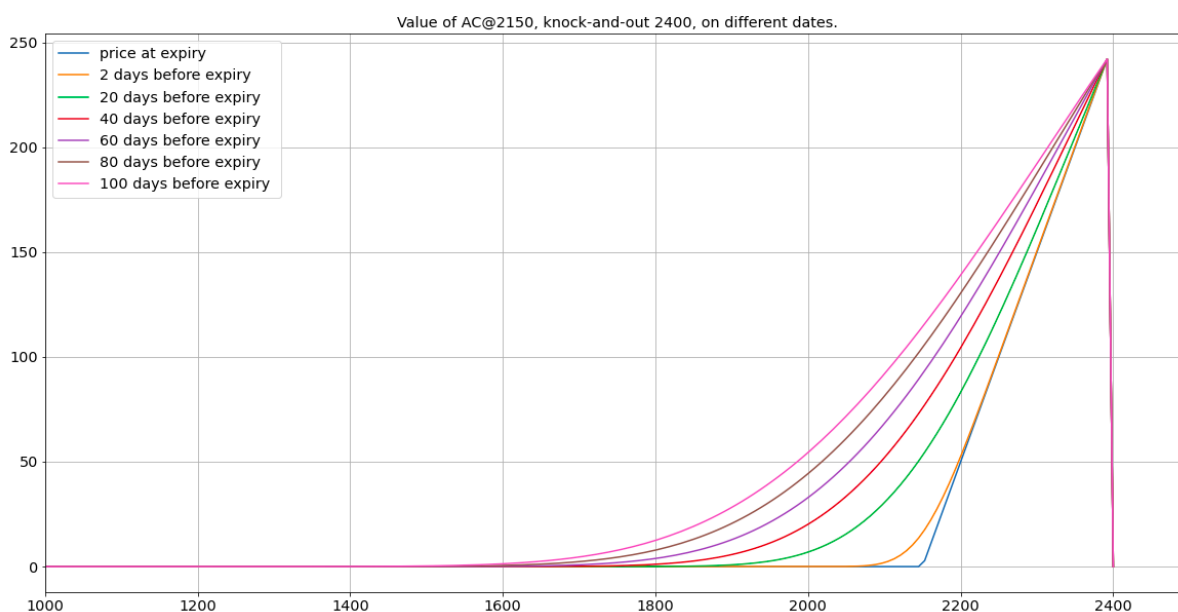
3.1 Opcje amerykańskie call.

W tym rozdziale wyjaśnimy wpływ parametrów na wartość opcji amerykańskich. Będziemy analizować opcje barierowe typu knock-and-out.

Wykres 12 przedstawia cenę AC@2150 typu knock-and-out 2400, gdzie $\sigma \in [15\%, 25\%]$. Więcej szczegółów można zobaczyć na wykresie 13, który przedstawia ceny tej opcji w kilku różnych momentach czasu. Widzimy znaczną zmianę pomiędzy wyceną opcji amerykańskich a europejskich. Przy zbliżaniu się ceny aktywa podstawowego do bariery, ceny opcji europejskich wyraźnie traciły na wartości. Intuicyjnie można to wytłumaczyć tak, że inwestorzy obawiają się, że cena urośnie / spadnie do bariery i opcja stanie się bezwartościowa. Przy opcjach amerykańskich sytuacja wygląda całkiem inaczej. Gdy cena aktywa zbliża się do bariery, to cena opcji się nie zmniejsza, przeciwnie, zwiększa się. Dzieje się tak dlatego, ponieważ opcję amerykańską można zawsze wykonać, więc można taką opcję 'trzymać' i wykonać ją na sekundę przed uderzeniem w barierę. Dodatkowo, na wykresie 13 widać, że cena opcji amerykańskiej barierowej jest zawsze większa równa od payoffu. Opcje europejskie barierowe nie miały tej własności.



Rysunek 12: Wartość AC@2150, knock-and-out 2400, $\sigma \in [15\%, 25\%]$.



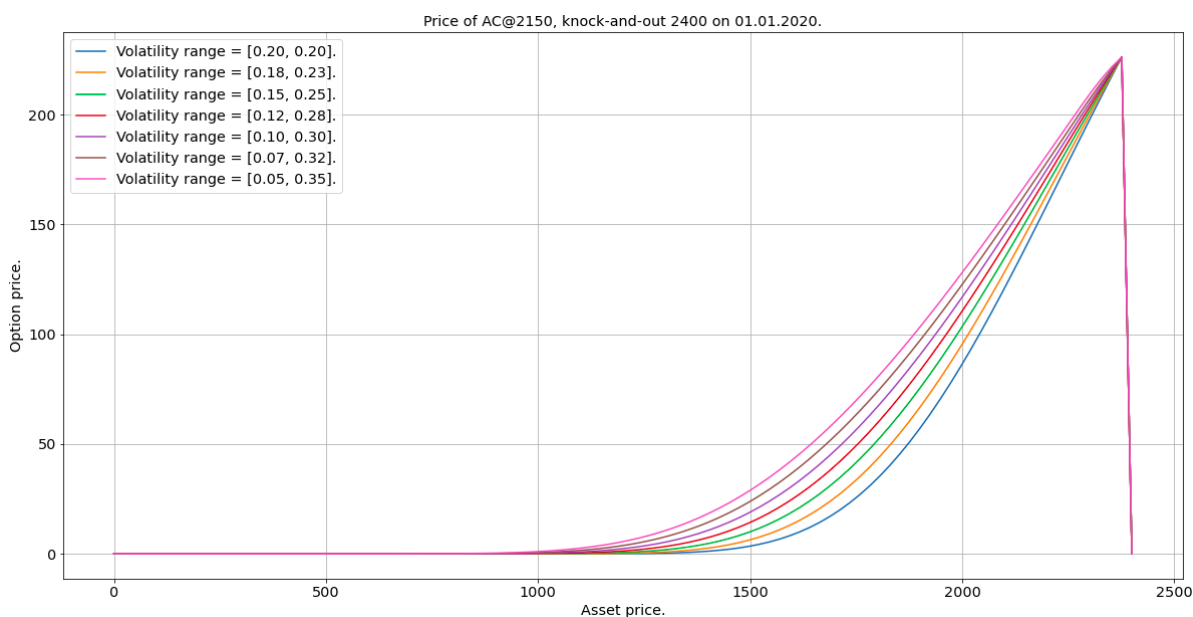
Rysunek 13: Wartość AC@2150, knock-and-out 2400, $\sigma \in [15\%, 25\%]$, różne daty.

3.1.1 Wpływ przedziału zmienności na opcje europejskie.

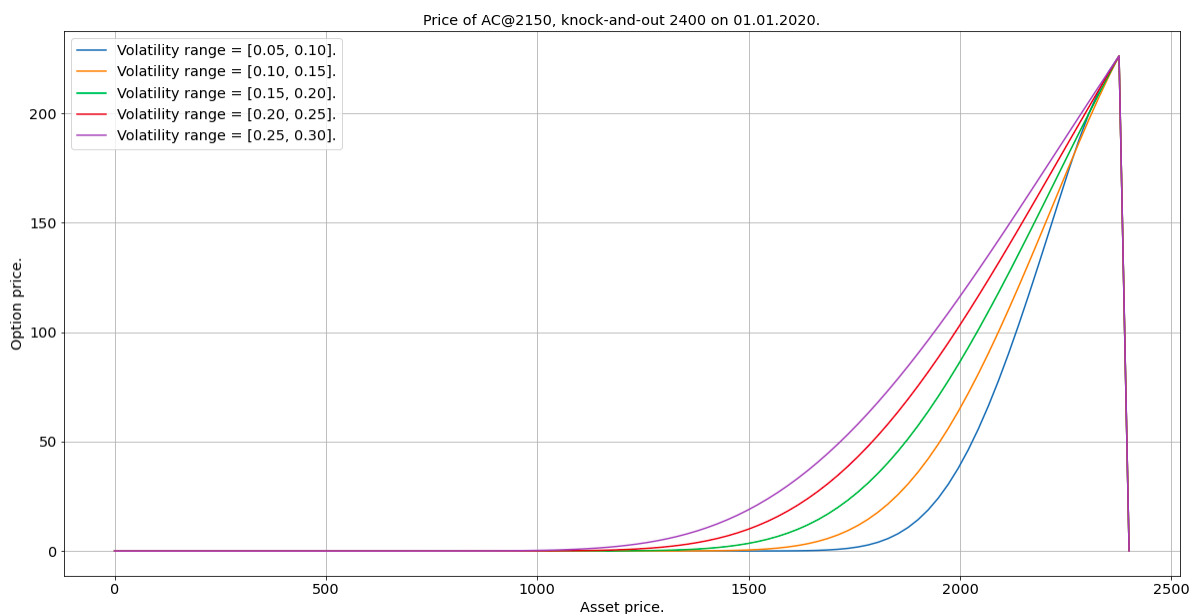
Zobaczmy teraz jak zmiana przedziału niepewnej zmienności wpływa na wycenę opcji amerykańskich w dniu 1 stycznia 2020 - wykres 14. Tak jak przy opcjach europejskich im większa zmienność, tym więcej warta jest opcja. Intuicyjnie można wysnuć hipotezę, że gdy mamy większy możliwy zakres zmienności, to musimy zabezpieczyć się na więcej możliwych scenariuszy. Chcąc to zweryfikować, popatrzymy na wykres 15. Przedstawia on

wycenę opcji amerykańskich w dniu 1 stycznia 2020 dla różnych przedziałów zmienności, ale tym razem te przedziały są rozłączne. Widzimy, że im większa zmienność, tym więcej warta jest opcja. Można to próbować wyjaśnić mówiąc, że

1. jeśli zmienność jest mała, rzędu [5%, 10%], to cena aktywa podstawowego nie zmienia się zbyt wiele przez 9 miesięcy, zatem cena opcji w dniu 1 stycznia 2020 powinna przypominać payoff z dnia 30 września 2020.
2. przy zmienności rzędu [5%, 10%] prawdopodobieństwo, że cena aktywa podstawowego urośnie lub zmaleje o 100 punktów jest mała.
3. gdy zmienność jest większa, rzędu [25%, 30%], to cena aktywa podstawowego bardziej się zmienia. Wtedy jest większa szansa i na to, że cena aktywa podstawowego urośnie o 100 punktów, i na to że zmaleje o 100 punktów w porównaniu do poprzedniego punktu.
4. w związku z tym, że przy $\sigma \in [25\%, 30\%]$ jest większa szansa na to, że cena urośnie, niż przy $\sigma \in [5\%, 10\%]$, to cena opcji przy $\sigma \in [25\%, 30\%]$ powinna być wyższa.



Rysunek 14: Wartość AC@2150, knock-and-out 2400, różne przedziały zmienności.



Rysunek 15: Wartość AC@2150, knock-and-out 2400, różne przedziały zmienności.

3.1.2 Momenty wykonania opcji amerykańskich call.

Wykres 16 przedstawia kiedy powinno się wykonać opcje amerykańską call. Widzimy, że opcję tę powinniśmy wykonać tylko i wyłącznie wtedy gdy jesteśmy na moment przed barierą.

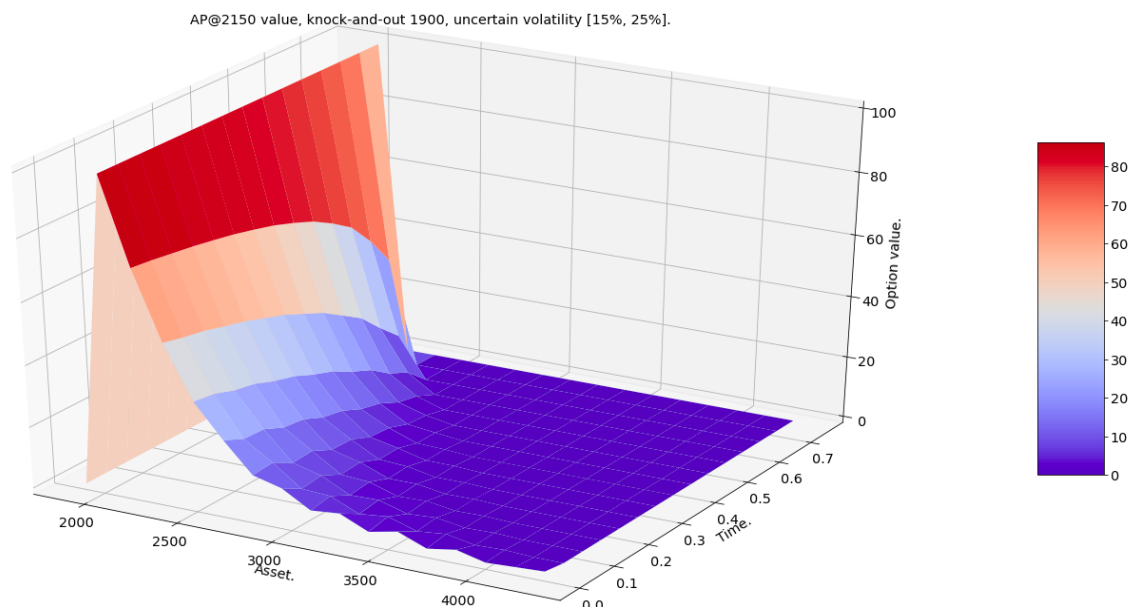


Rysunek 16: Momenty wykonania AC@2150, knock-and-out 2400, $\sigma \in [25\%, 30\%]$.

3.2 Opcje amerykańskie put.

Poniżej przedstawimy analizę opcji amerykańskich put.

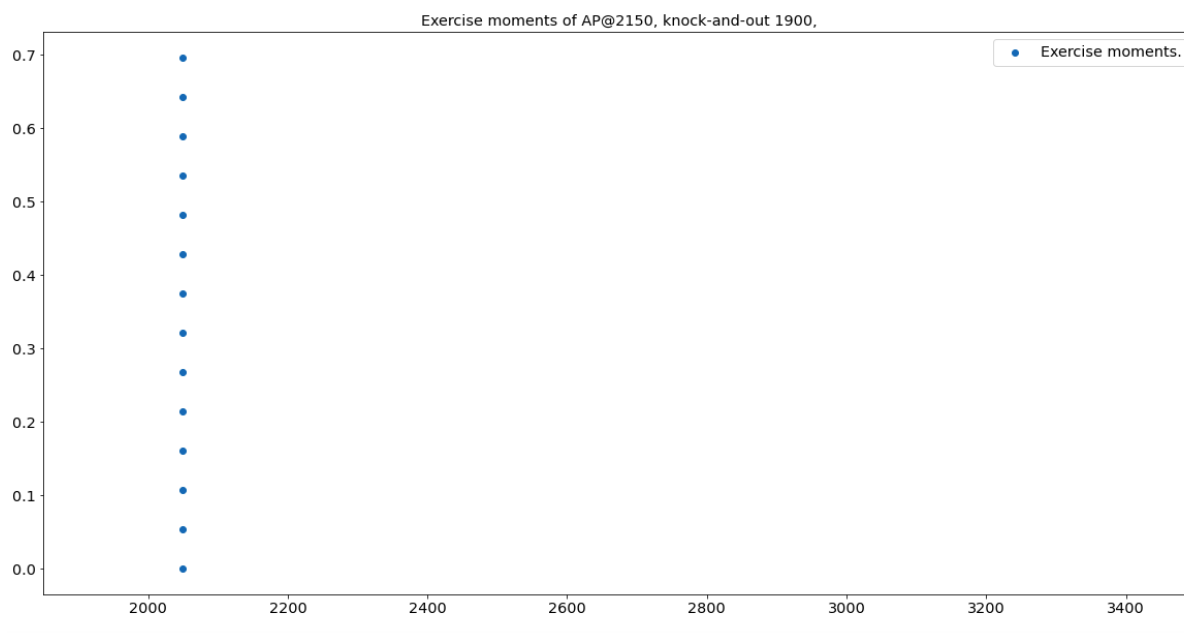
Wykres 17 przedstawia wycenę opcji amerykańskiej put z ceną wykonania 2150 i barierą 1900. Obserwujemy sytuację analogiczną do wcześniej rozważanej opcji call.



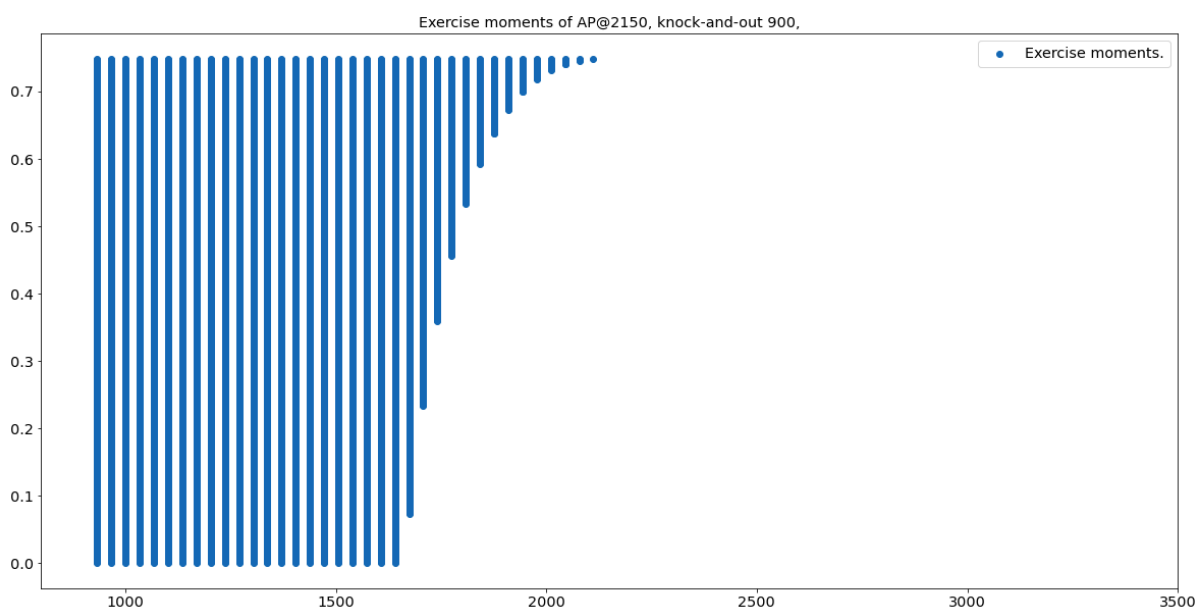
Rysunek 17: Wartość AC@2150, knock-and-out 2400, różne przedziały zmienności.

3.2.1 Momenty wykonania opcji amerykańskich put.

Wykres 18 przedstawia kiedy powinno się wykonać opcje amerykańską AP@2150, knock-and-out 1900, $\sigma \in [15\%, 25\%]$. Widzimy, że opcję tę powinniśmy wykonać tylko i wyłącznie wtedy gdy jesteśmy na moment przed barierą. Ciekawszą sytuację mamy, gdy bariera jest bardziej oddalona od ceny wykonania - wykres 19.



Rysunek 18: Momenty wykonania AP@2150, knock-and-out 1900, $\sigma \in [15\%, 25\%]$.

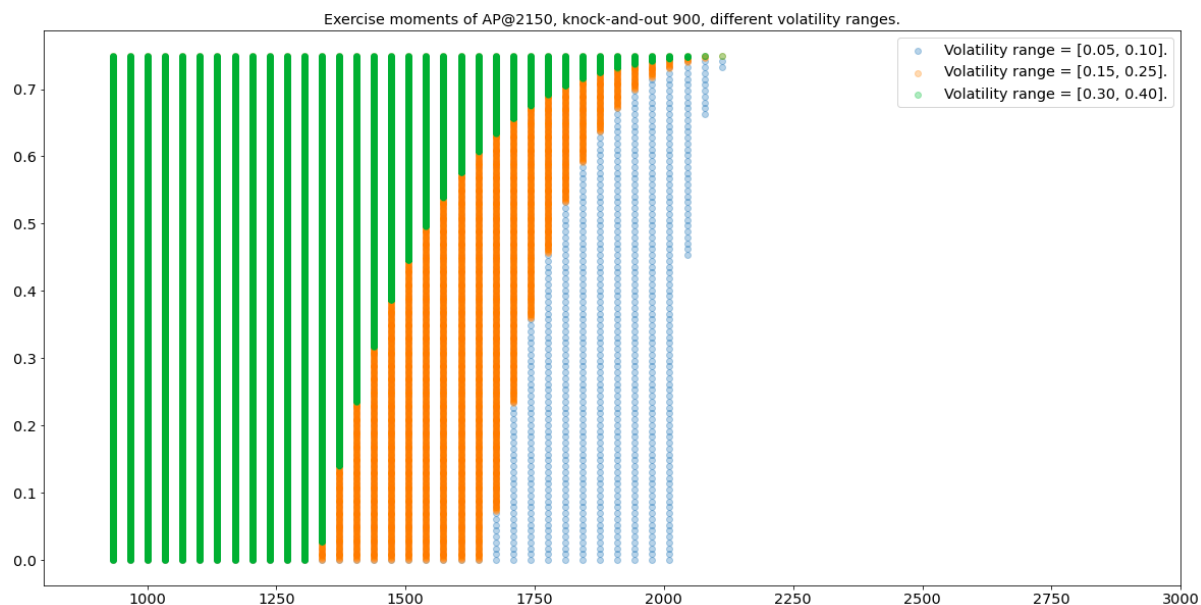


Rysunek 19: Momenty wykonania AP@2150, knock-and-out 900, $\sigma \in [15\%, 25\%]$.

Poniżej przedstawiamy, jak zmieniają się momenty wykonania przy zmianie przedziału zmienności - wykres 20. Kilka ciekawych obserwacji:

1. Im mniejsza zmienność, tym więcej momentów wykonania.
2. Przy $\sigma \in [5\%, 10\%]$, opcję AP@2150, knock-and-out 900 opłaca się wykonać już 1 stycznia jeśli wartość aktywa to co najmniej 2000.

3. Tę samą opcję, przy $\sigma \in [30\%, 40\%]$ nie opłaca się wykonać w styczniu nawet jeśli wartość aktywa podstawowego to 1400.
4. Widzimy tu 'monotoniczność' momentów wykonania względem zmienności.



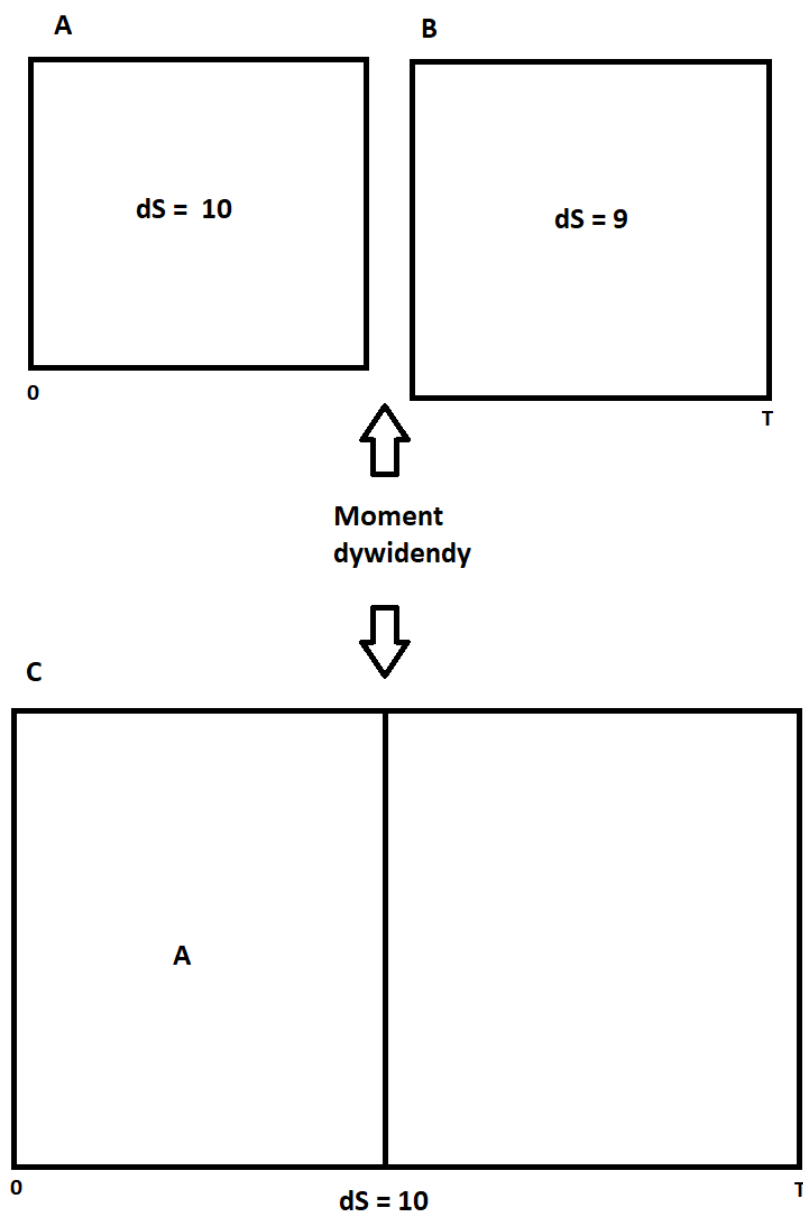
Rysunek 20: Momenty wykonania AP@2150, knock-and-out 900, różne przedziały zmienności.

4 Dywidendy

W tym rozdziale zbadamy wpływ dywidendy procentowej na cenę opcji. Posłużymy się ponownie metodą *explicite fine difference*, uwzględniając wypłatę dywidendy. Głównym problemem który nie pozwalał na zwykłe zastosowanie tego algorytmu była zmiana dS (argumentu odpowiadającego za krok po indeksie) w trakcie życia opcji. Rysunek 21 przedstawia koncepcję rozwiązania tego problemu. W poniższych rozważaniach parametry będą wynosić odpowiednio (w przypadku zmiany zostanie to zaznaczone):

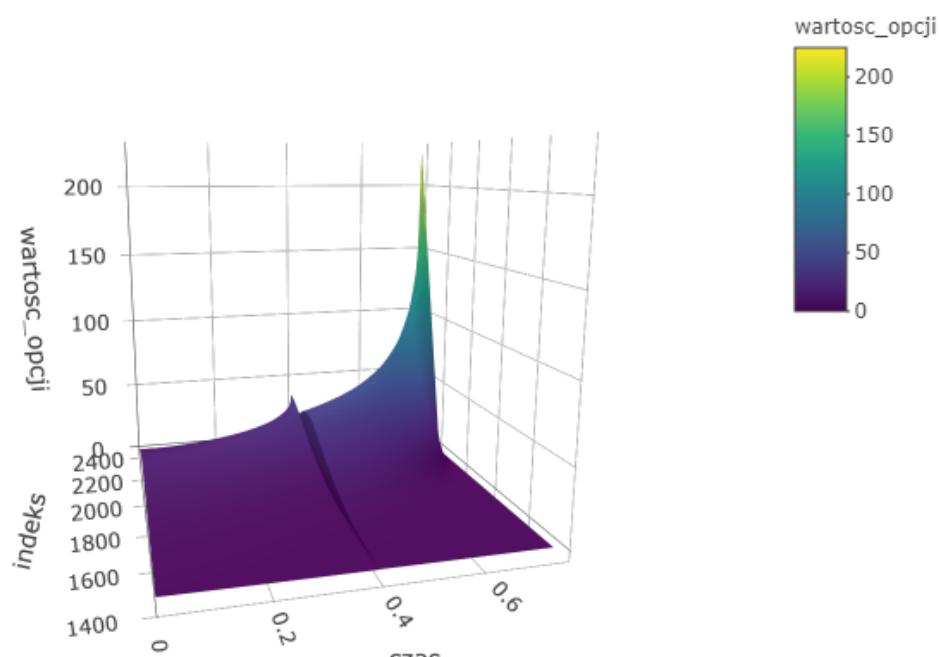
- zmienność roczna: $[15\%, 25\%]$
- cena wykonania: 2150
- moment wypłaty dywidendy: 0.4
- wysokość dywidendy: 0.4
- bariera:
 - call: 2400
 - put: 1900

Wszystkie wykresy trójwymiarowe zaprezentowane w raporcie zostały zamieszczone w załączniku. Dla uproszczenia i skrócenia opcje europejskie barierowe call z dywidendą będą nazywane europejskimi opcjami call, pozostałe przypadki nazwane będą analogicznie.



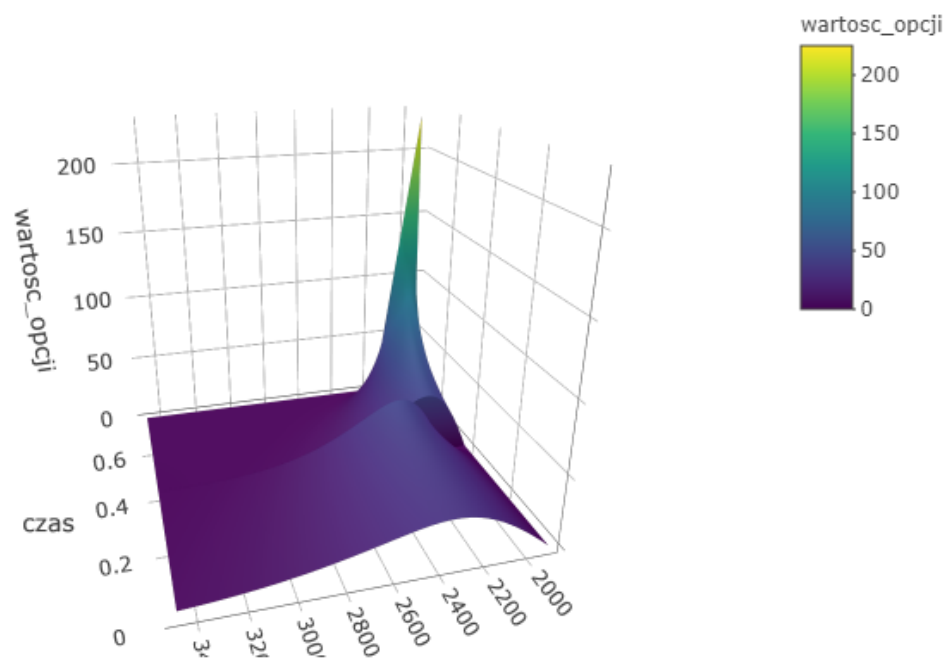
Rysunek 21: Schemat przedstawiający modyfikację algorytmu explicit fine difference do wypłaty dywidend procentowych (w przykładzie dywidenda wynosi 10%, a $dS = 10$). Macierz B wyliczona została przy pomocy niezmodyfikowanego algorytmu dla odpowiednio zmienionego argumentu dS , następnie przy jej pomocy oraz odpowiedniemu przesunięciu indeksu została wyliczona macierz A. Kolejnym krokiem było wyliczenie macierzy C z domyślnym krokiem bez uwzględniania dywidendy, a następnie wpisanie wyników z macierzy A do momentu wypłaty dywidendy. Macierz C jest macierzą wynikową.

4.1 Opcje europejskie



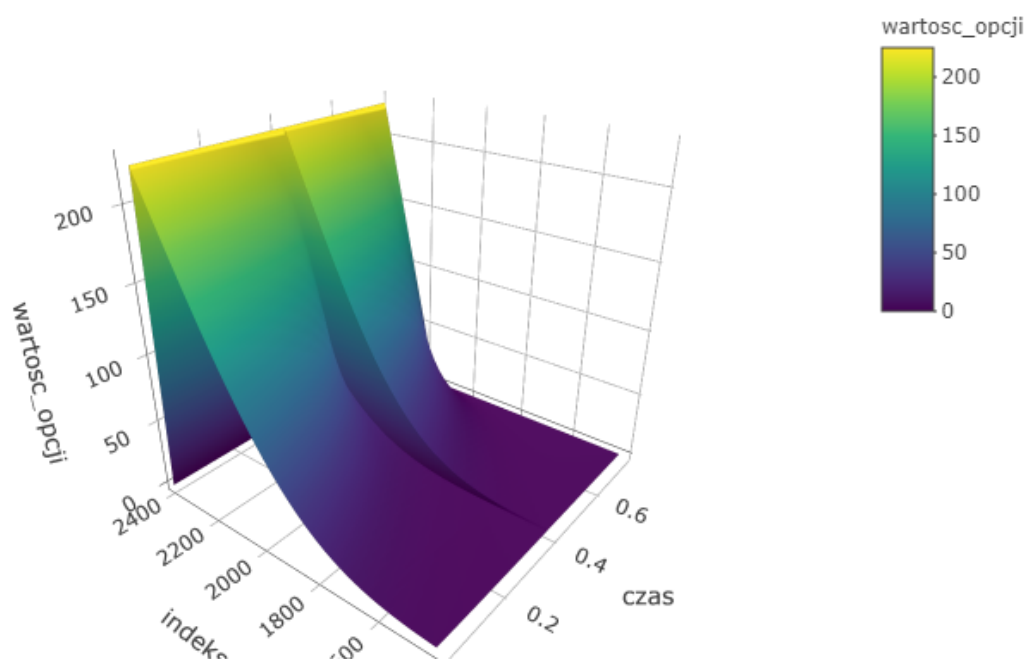
Rysunek 22: Wartość europejskiej opcji call z dywidendą wypłaconą w czasie $t = 0.4$ w wysokości 10%.

Wykres 22 przedstawia wartość europejskiej opcji call z dywidendą wypłaconą w chwili 0.4. Widać na nim że dywidenda spowodowała przesunięcie w chwili jej wypłaty. Powód tego jest bardzo intuicyjny, jeżeli jesteśmy krótką chwilę przed wypłatą dywidendy i chcielibyśmy kupić opcję to koszt będzie podobny jakbyśmy chwilę po wypłacie dywidendy kupili tą samą opcję tylko dla adekwatnie zmniejszonego indeksu. Sytuacja z opcją europejską put (przedstawiona na wykresie 23) wygląda analogicznie jak w przypadku opcji europejskiej call. W chwili wypłaty dywidendy następuje przesunięcie, a powód jego wystąpienia jest taki sam.

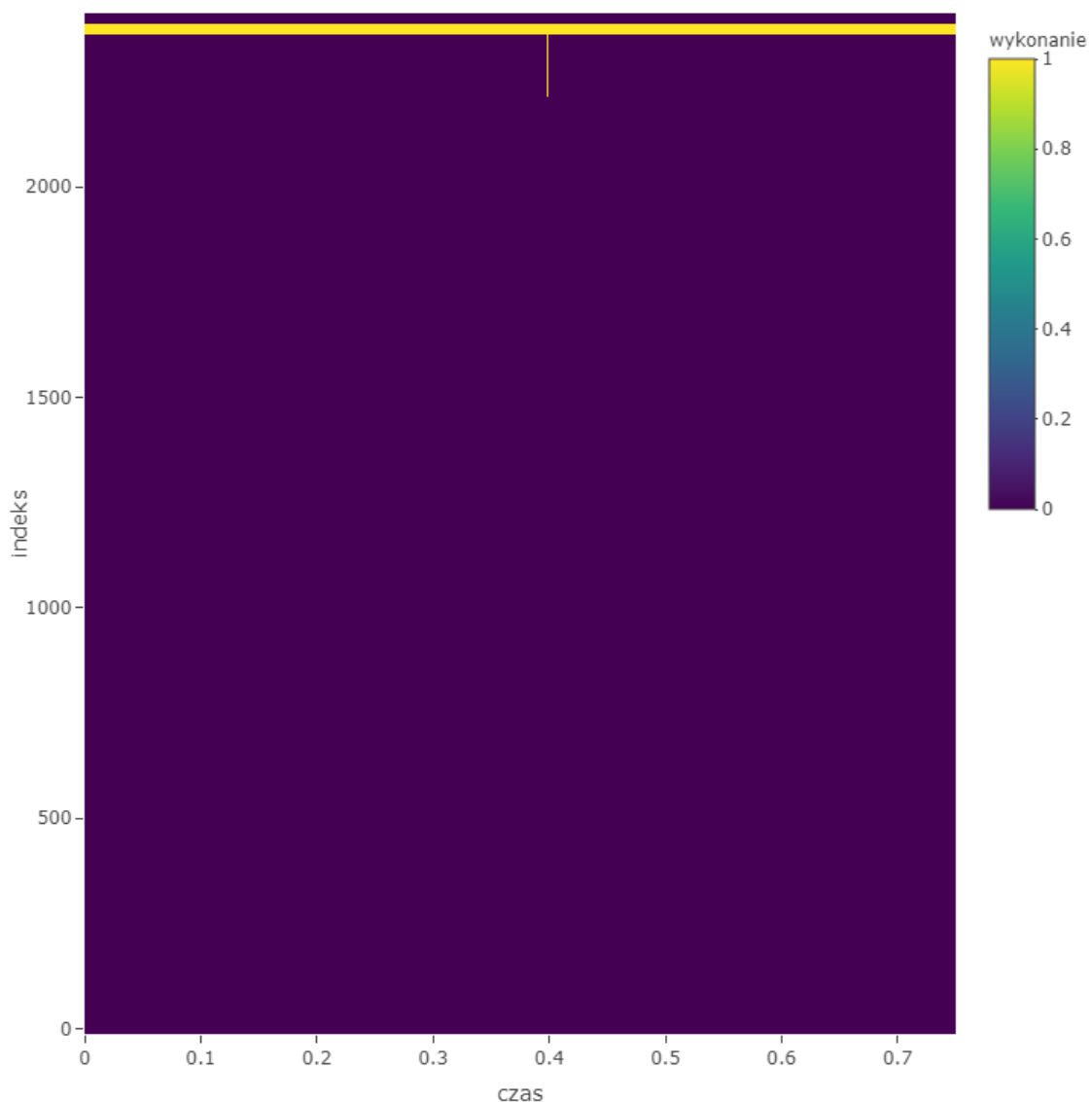


Rysunek 23: Wartość europejskiej opcji put z dywidendą wypłaconą w czasie $t = 0.4$ w wysokości 10%.

4.2 Opcje amerykańskie

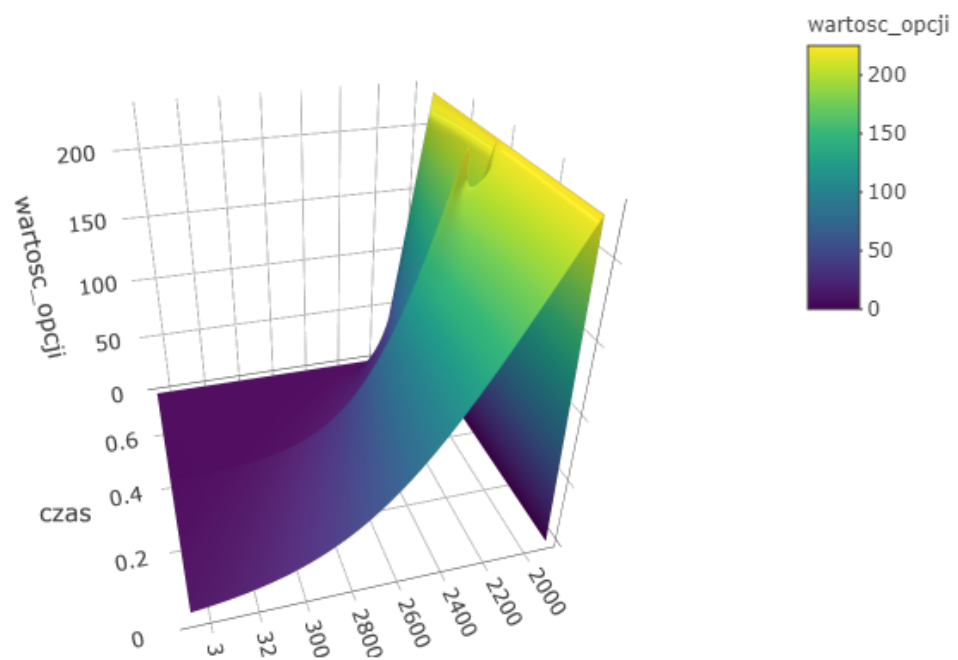


Rysunek 24: Wartość amerykańskiej opcji call z dywidendą wypłaconą w czasie $t = 0.4$ w wysokości 10%.

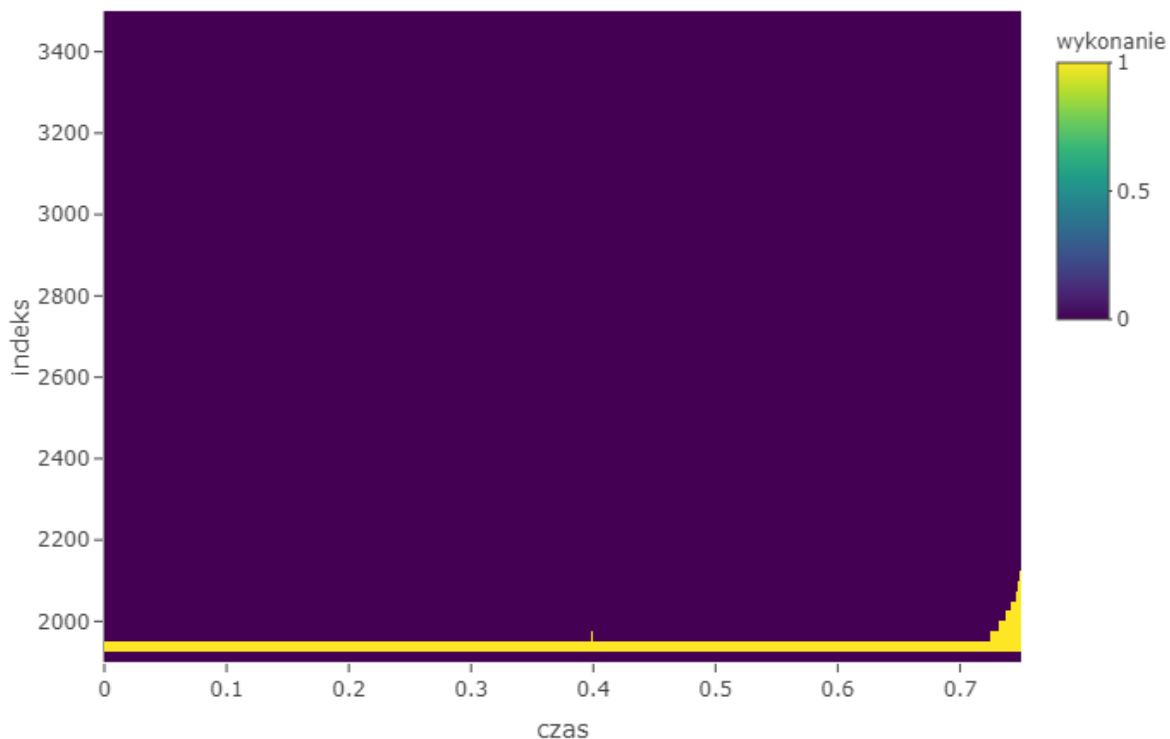


Rysunek 25: Na żółto zaznaczone są momenty w których opłacalne jest wykonanie amerykańskiej opcji call z wykresu 24.

Na wykresie 24 po raz kolejny obserwujemy zmianę ceny w momencie wypłaty dywidendy powód jest dokładnie taki sam jak wcześniej z tym wyjątkiem, że dotyczy się to tylko momentów gdzie „europejskość” ceny była wyższa niż aktualnego payoffu. Wykres 34 przedstawia momenty w których warto wykonać opcję, jak w przypadku wersji bez wypłaty dywidendy opcję opłaca się wykonać tuż przed barierą, oraz w zupełnie nowym miejscu, a dokładnie moment przed wypłatą dywidendy gdy czekanie „średnio” daje nam niższy payoff niż aktualny.

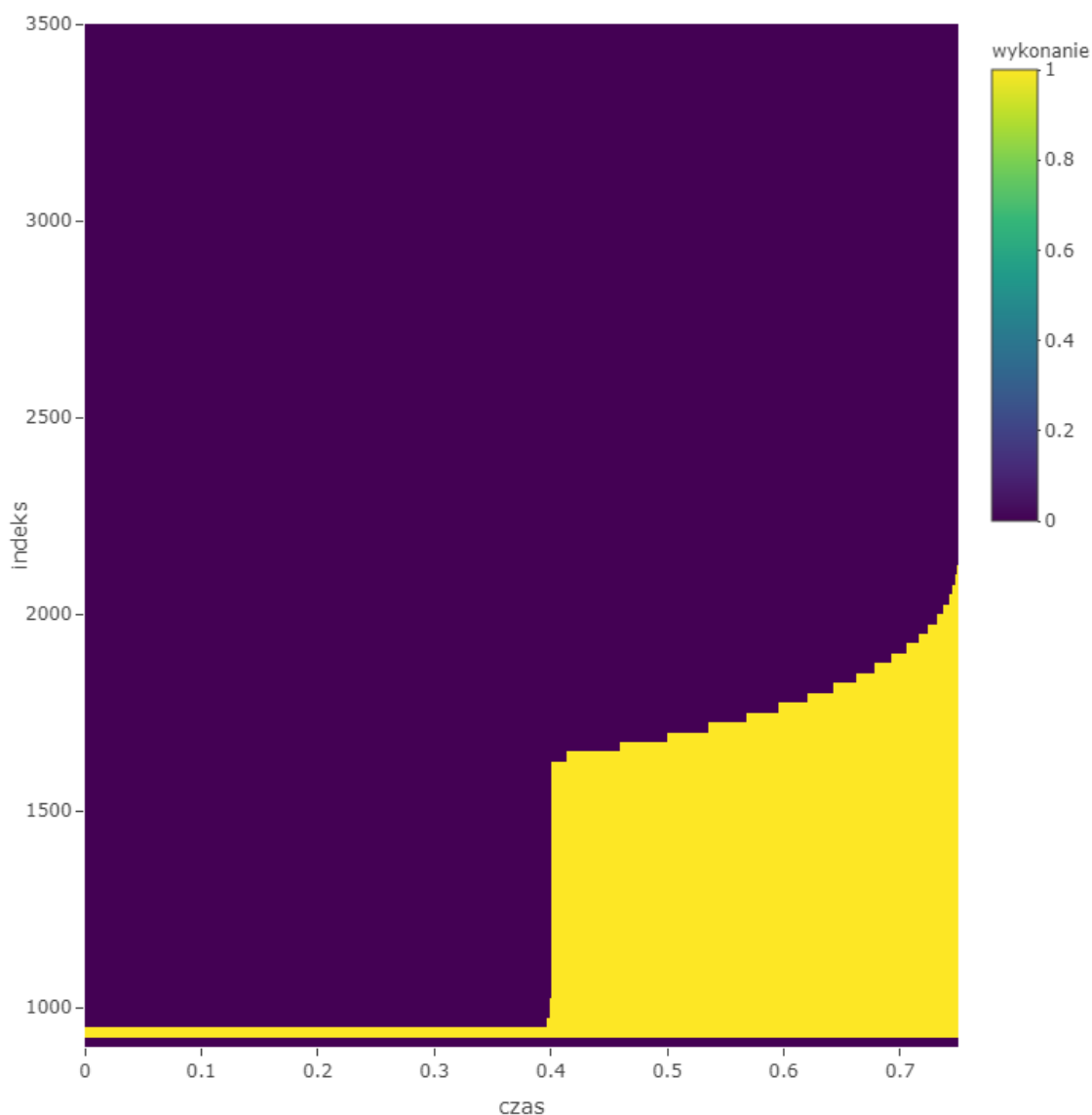


Rysunek 26: Wartość amerykańskiej opcji put z dywidendą wypłaconą w czasie $t = 0.4$ w wysokości 10%.



Rysunek 27: Na żółto zaznaczone są momenty w których opłacalne jest wykonanie amerykańskiej opcji put z wykresu 26.

W przypadku opcji put sytuacja znowu wygląda analogicznie jak w call, jednak w odróżnieniu do tej drugiej opcja sprzedaży zyskuje na niskiej wartości indeksu. W rezultacie przed dywidendą w okolicy wartości indeksu równej 2200 pojawia się „cypel” związany jest on z tym, że „europejskość” jest znacznie wyższa od aktualnego payoffu, tzn. bardziej opłaca nam się czekać niż wykonać opcję w chwili obecnej. I rzeczywiście po wypłaceniu dywidendy znajdziemy się w miejscu bliskim maksymalnego payoffu. Natomiast wraz ze spadkiem wartości indeksu, dywidenda powoduje że w następnym kroku uderzamy w barierę. Z tego powodu wykonanie opcji jest w tym miejscu bardziej opłacalne (sytuację ilustruje wykres 27), różnica wartości oczekiwanej z przyszłości z aktualnym payoffem, powoduje charakterystyczny skok nazwany wcześniej „cypelkiem”.



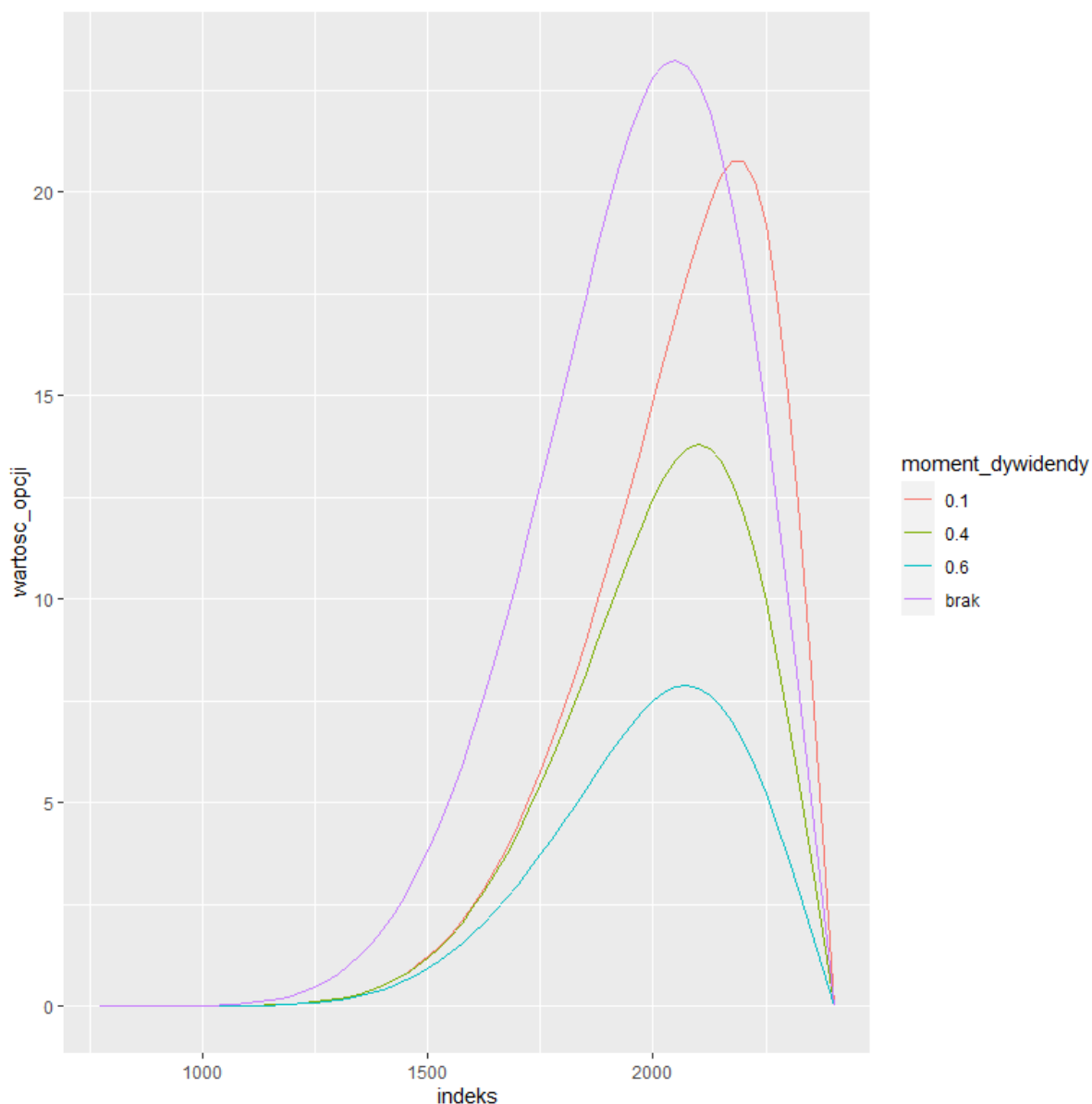
Rysunek 28: Na żółto zaznaczone są momenty w których opłacalne jest wykonanie amerykańskiej opcji call z barierą równą 900.

Postanowiliśmy porównać momenty wykonania dla bariery równej 900 (jak w przypadku opcji bez dywidendy; wykres 19). Z wykresu 28 można odczytać, że wykonanie opcji przed wypłatą dywidendy jest nieopłacalne. Oczywiście wyjątkiem od tej reguły są miejsca kiedy wartość indeksu znajduje się przy barierze, albo gdy dywidenda spowoduje że uderzymy w barierę.

4.3 Wpływ parametrów

W tym rozdziale skupimy się na zmianie parametrów odpowiadających za wypłatę dywidendy.

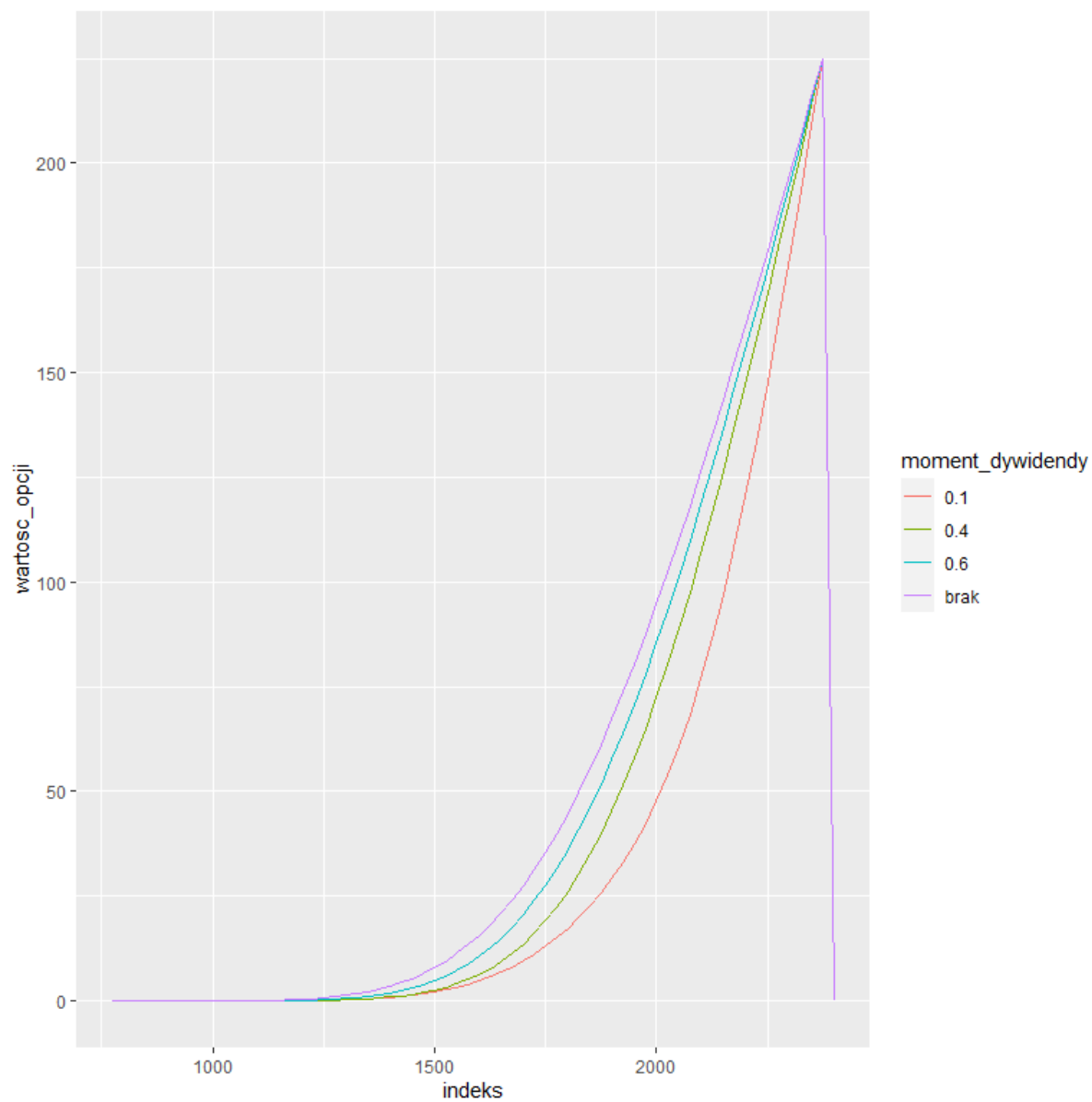
4.3.1 Moment wypłaty dywidendy



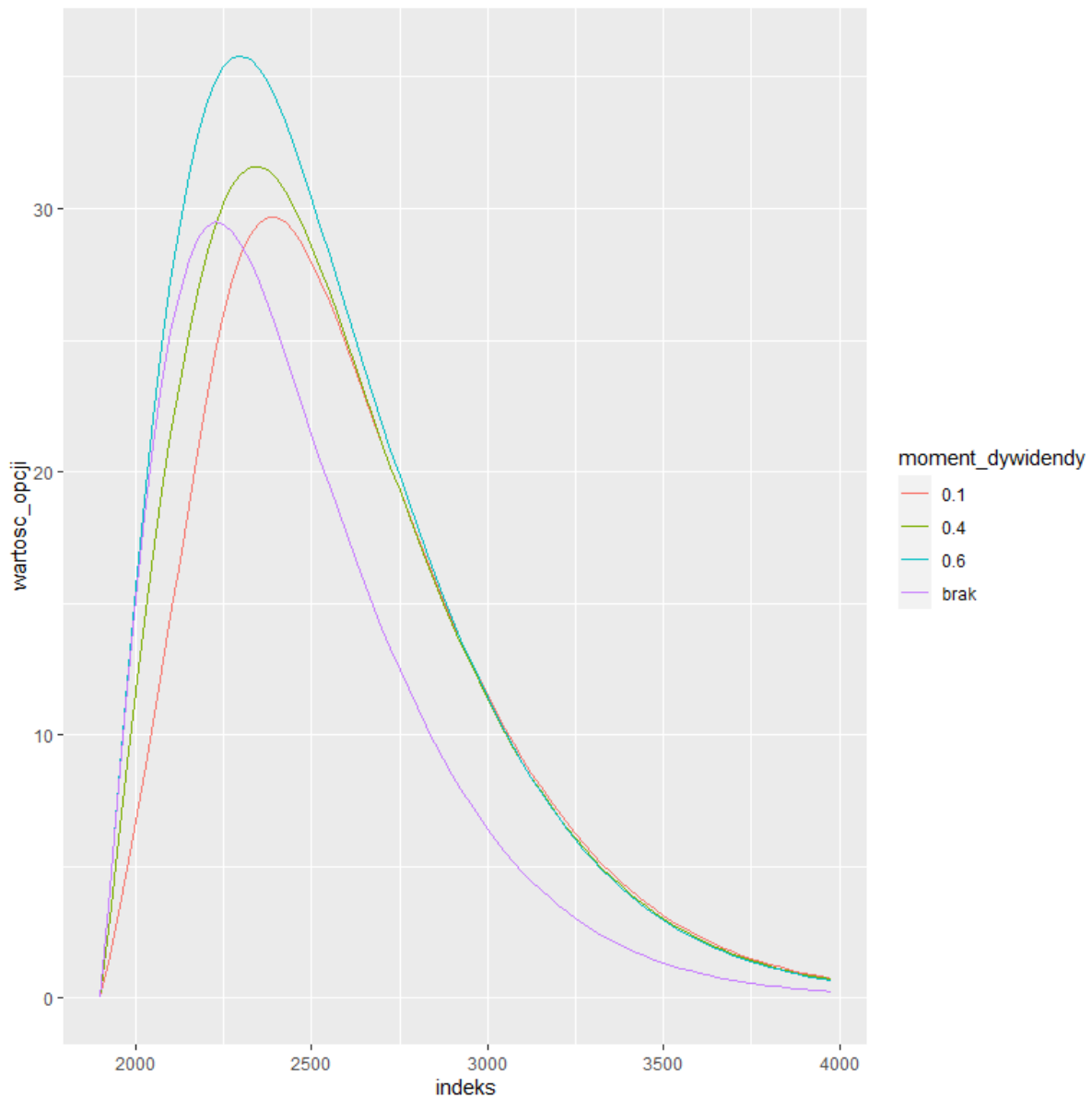
Rysunek 29: Cena opcji call europejskiej ze względu na moment zapadania dywidendy

Moment wypłaty dywidendy ma spory wpływ na wycenę opcji. Wykres 29 przedstawia wartość opcji europejskiej call, ze względu na moment wypłacenia dywidendy. Oczwisty jest fakt, że dla większości przypadków dywidenda spowoduje spadek cen opcji, jedynie sytuacja w której mamy dużą szansę uderzenia w barierę oraz stosunkowo szybkie wykonanie dywidendy, zwiększa nam cenę. Wraz z późniejszym wykonaniem dywidendy maleje cena opcji, wiąże się to z dość oczywistym faktem, iż szansa na uderzenie w barierę rośnie, wiąże się to z ograniczeniem wysokości payoffu (im później zostanie wykonana dywidenda tym mamy mniejszą szansę na wysoki payoff). Natomiast w przypadku opcji amerykańskiej call, obserwujemy odwrotną tendencję (wykres 30) spowodowane jest to poprzez krótszy okres w którym mamy szansę na wykonanie opcji przed samą barierą (

warto zwrócić w tym momencie uwagę na fakt, że wartości opcji o różnych momentach wypłaty dywidend, są równe od momentu wypłaty ostatniej dywidendy).

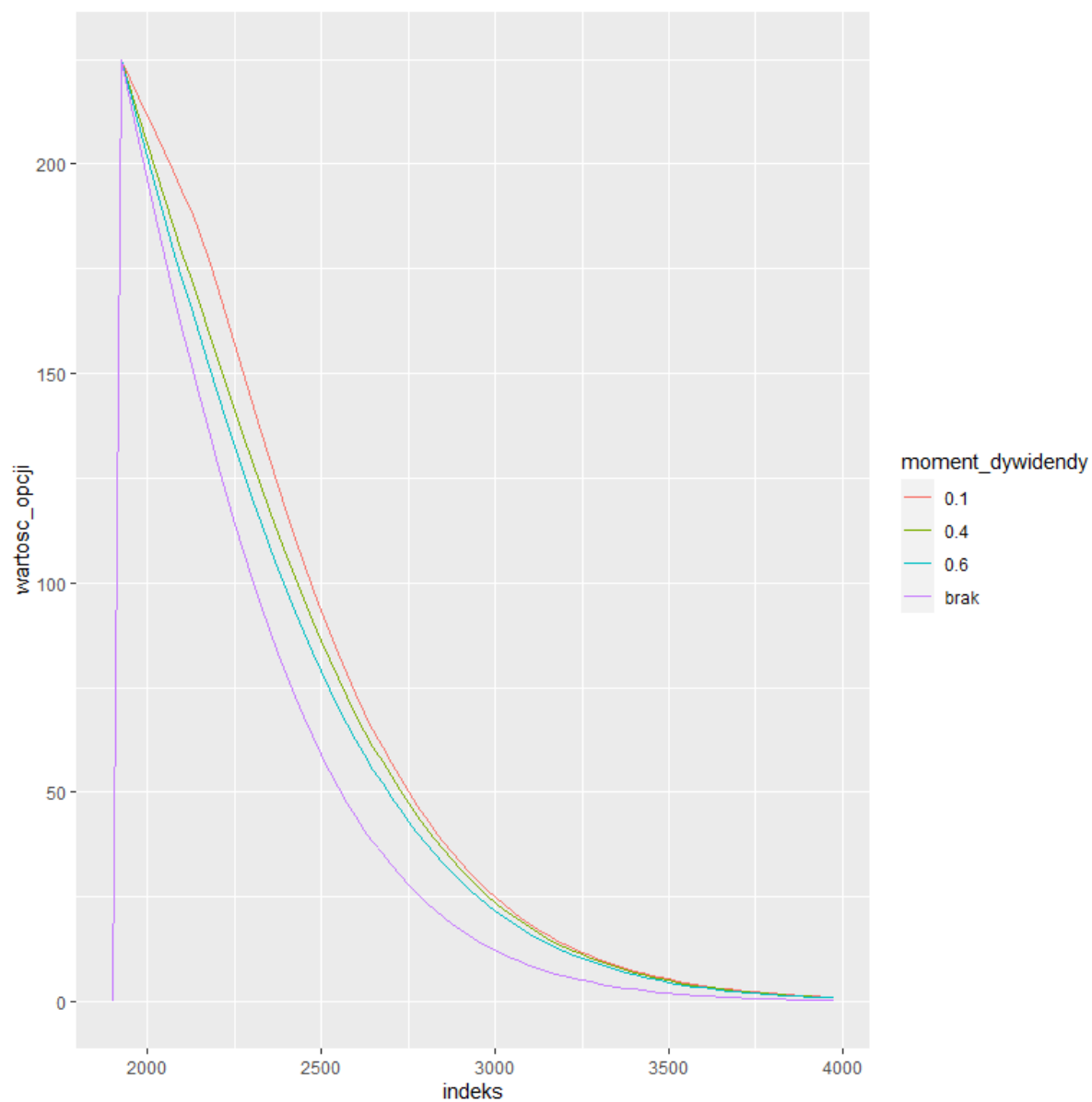


Rysunek 30: Cena opcji call amerykańskiej ze względu na moment wypłaty dywidendy.



Rysunek 31: Cena opcji put europejskiej ze względu na moment zapadania dywidendy

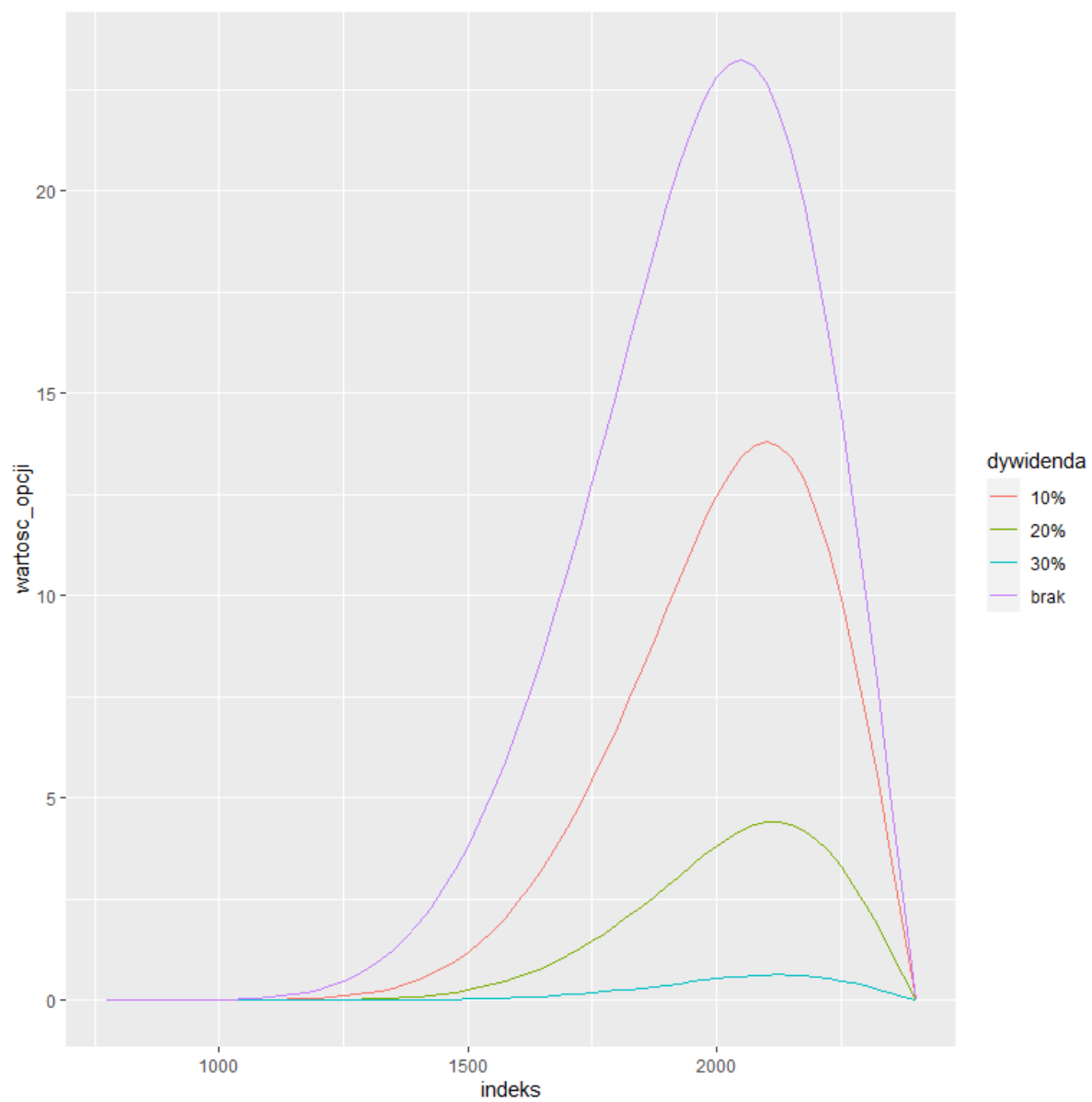
W przypadku opcji put sytuacja wygląda, odwrotnie wraz z opóźnianiem wypłaty dywidendy rośnie cena opcji, analogicznie późniejsza dywidenda zmniejsza szansę na uderzenie w barierę. Z kolei w przypadku amerykańskiej opcji put (wykres 32), szybsza wypłata dywidendy powoduje że będziemy mieć większą szansę do przedwczesnego wykonania opcji (czyli uzyskania optymalnego payoffu). Przy zbyt wczesnej wypłacie dywidendy ($t_d = 0.1$) w pewnym momencie widać „nałeciałość europejskości” która, jak już wcześniej wspominaliśmy była w pewnym momencie znacznie wyższa od payoffu („cypelek”).



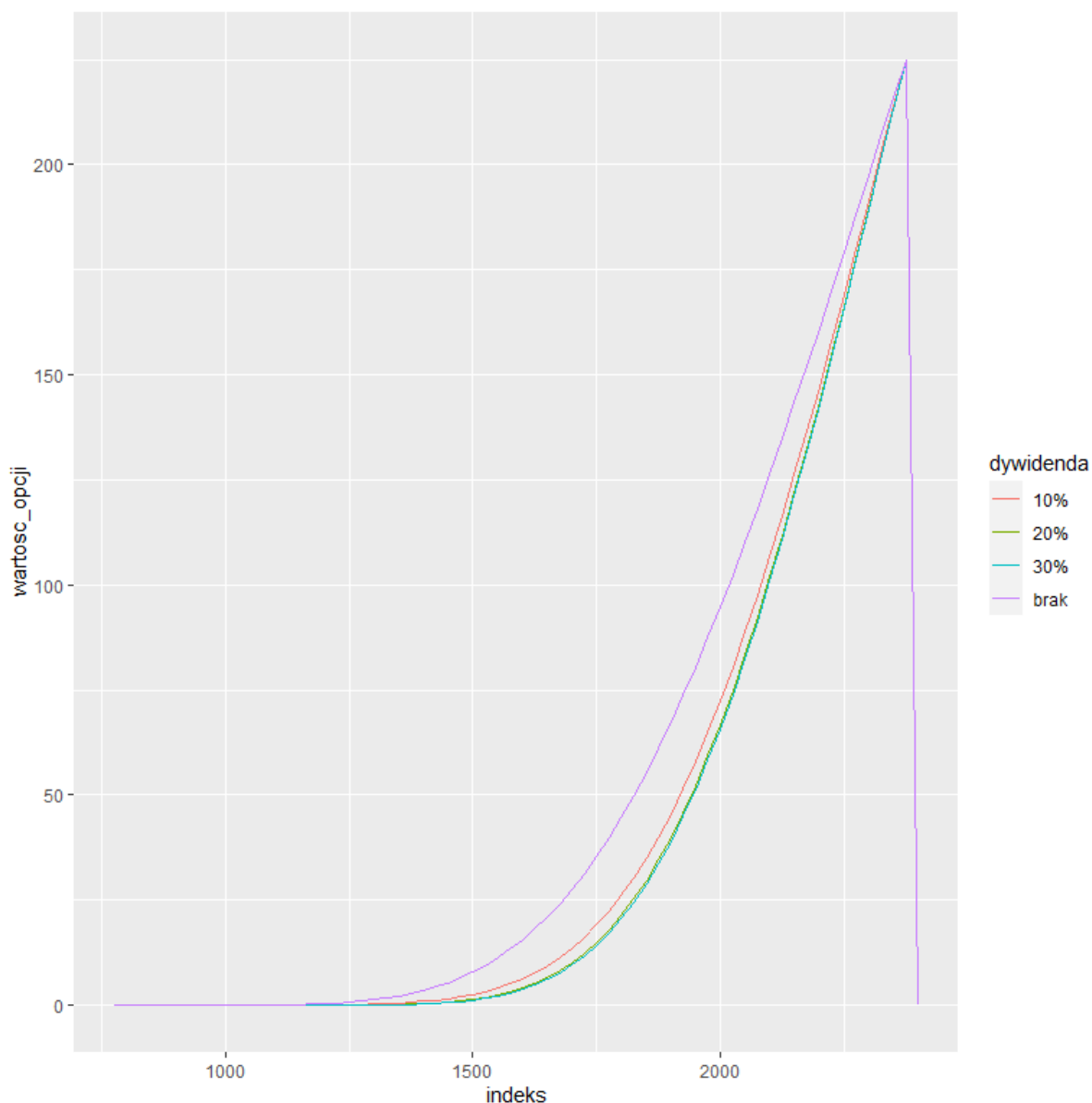
Rysunek 32: Cena opcji put amerykańskiej ze względu na moment wypłaty dywidendy.

4.3.2 Zmiana wysokości dywidendy

Zmiana wysokości dywidendy w przypadku opcji call europejskiej (wykres 33) oraz amerykańskiej (wykres 34) powoduje, że ceny akcji spadają wraz z wzrostem dywidendy, fakt ten jest oczywisty i nie wymaga komentarza.



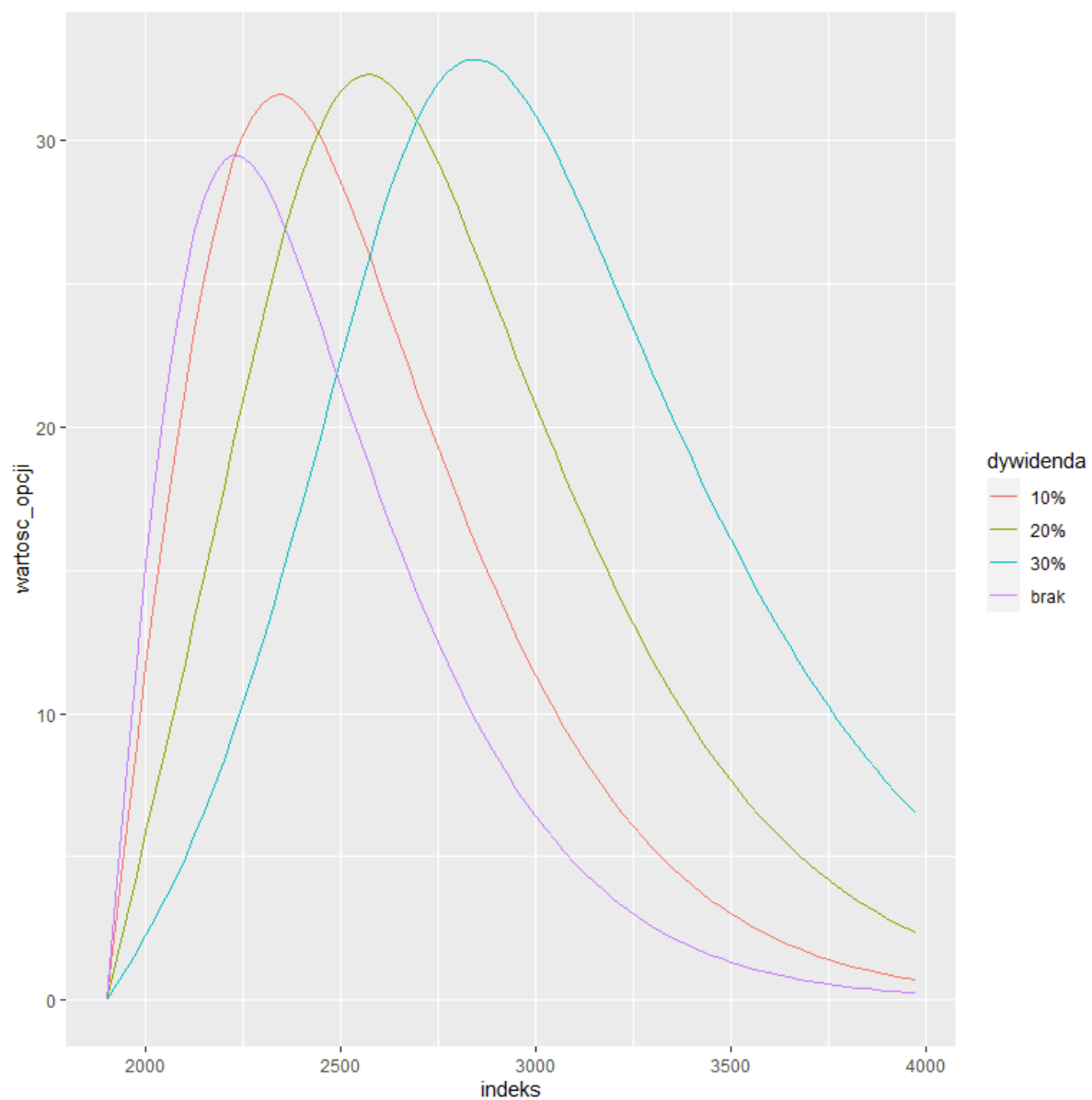
Rysunek 33: Cena opcji call europejskiej ze względu na wysokość dywidendy



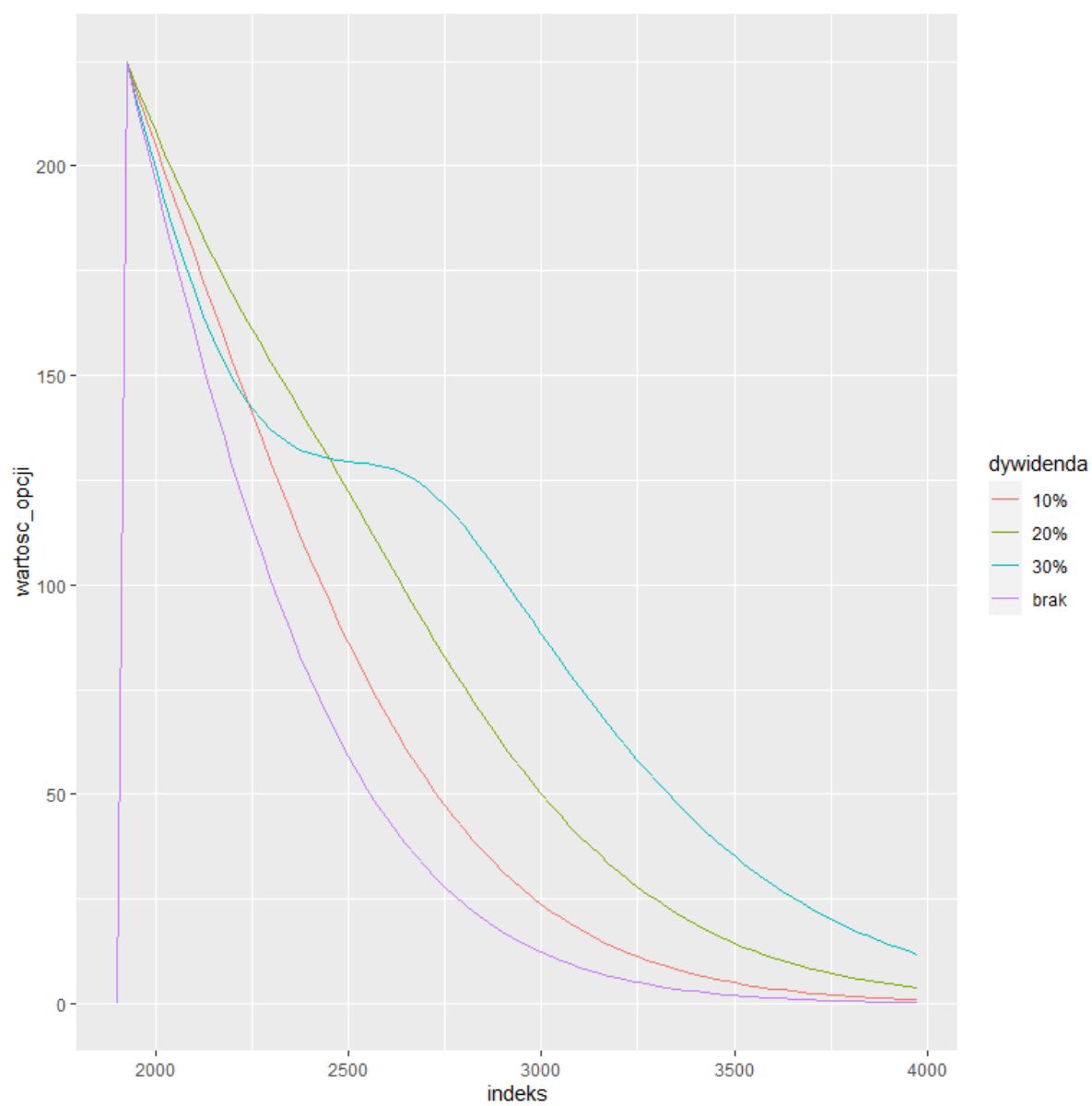
Rysunek 34: Cena opcji call amerykańskiej ze względu na wysokość dywidendy

Ciekawą sytuację można zaobserwować w przypadku opcji europejskiej put przedstawionej na wykresie 35. Wraz z wzrostem dywidendy, maksymalna cena opcji przyjmowana jest dla coraz większych wartości indeksu oraz nieznacznie rośnie. Pierwszą własność łatwo wytłumaczyć, jest ona konsekwencją zmiany wartości indeksu w momencie wypłaty dywidendy. Jeżeli odległość od bariery jest zbyt niska, uderzymy w nią. W przypadku opcji amerykańskiej sytuacja się nieco komplikuje dla dywidend 10% oraz 20% wykres zachowuje się przewidywalnie, czyli cena rośnie wraz z wzrostem dywidendy. Wysoka dywidenda, w postaci 30% wypłaty, zmienia jednak to zachowanie. Przed wypłatą dywidendy „cypelek” zmienia się w „górze” co obrazuje wykres 36. Tak duża zmiana w cenie indeksu, przy tak niewielkiej zmianie czasu, powoduje że dla zbyt niskich wartości aktywa, opcja zachowuje się bardzo podobnie do opcji w której nie wystąpi dywidenda. Natomiast od pewnego momentu dywidenda zaczyna „obiecować” wysoki zysk pomimo faktu, że payoff w tych miejscach jest równy 0. Oczywiście tak wysokie dywidendy nie

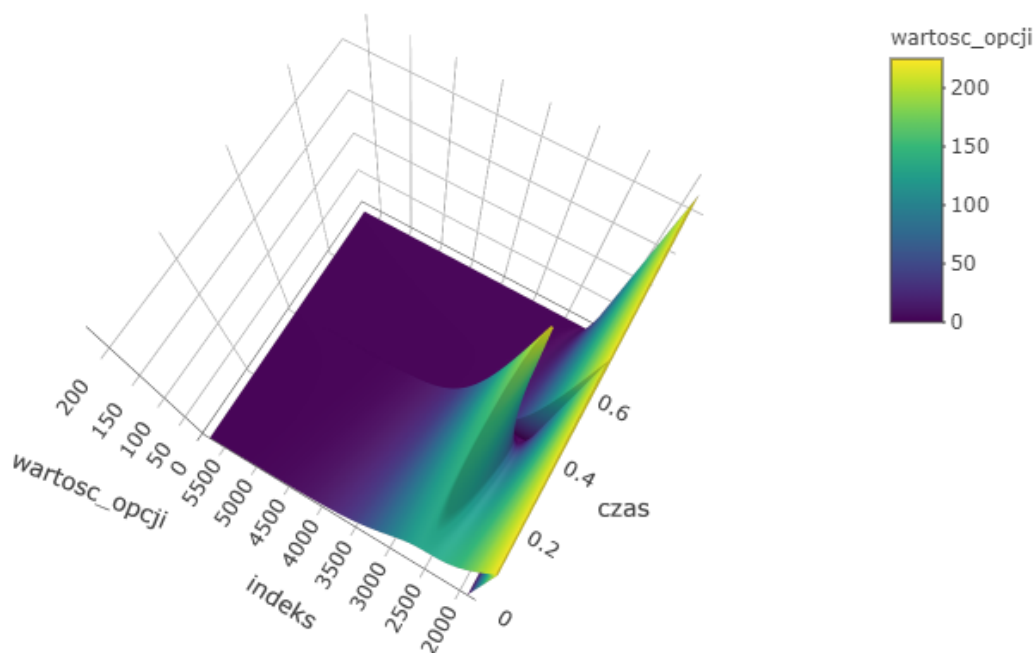
występują na rynku, więc ta anomalia jest jedynie ciekawostką.



Rysunek 35: Cena opcji put europejskiej ze względu na wysokość dywidendy



Rysunek 36: Amerykańska opcja put z dywidendą 30%



Rysunek 37: Cena opcji put amerykańskiej ze względu na wysokość dywidendy

Zaimplementowaliśmy również dywidendy kwotowe jednakże przy odpowiednim doborze parametrów otrzymaliśmy zbliżone wykresy co wiązało się z identycznymi wnioskami. Z tego powodu nie znalazły się w raporcie.

5 Sprawdzenie wyników

Metoda finite-difference jest uznaną i sprawdzoną metodą wyceny opcji, ale zawsze istnieje szansa, że podczas implementacji popełniliśmy błąd. Aby nabrać przekonania co do prawdziwości otrzymanych wyników możemy użyć innych znanych nam metod wyceny, które może nie będą działały w takiej ogólności jak finite-difference, ale za to są nieco łatwiejsze w implementacji.

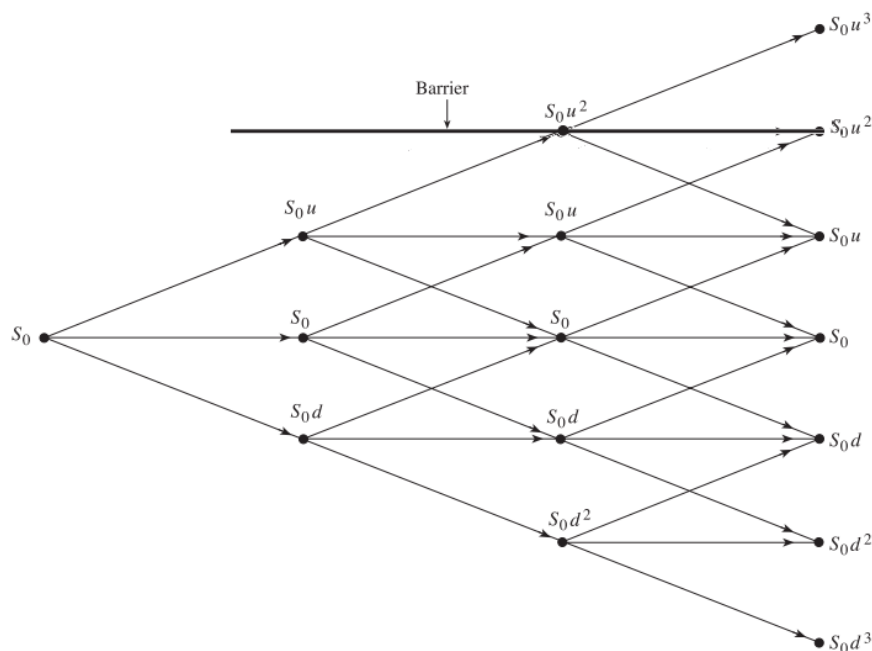
Wybrane metody wyceny opcji:

1. Jawne wzory (spełniające równanie Blacka-Scholesa): istnieją dla europejskich opcji barierowych,
2. Drzewo trójmianowe: metoda pozwala wycenić barierowe opcje europejskie i amerykańskie (możliwość wprowadzenia dywidendy procentowej),
3. Metoda Monte Carlo: w swej podstawowej formie nadaje się do wyceny europejskich opcji barierowych z dywidendą procentową bądź kwotową.

Należy zauważyć, że powyższe metody nie dają nam od razu całej siatki wyceny opcji, a jedynie jej wartość w chwili zero dla konkretnej wartości początkowej aktywa bazowego. Innym zaletą finite-difference jest możliwość wprowadzenia do modelu niepewnej zmienności, na co nie pozwalają pozostałe metody.

5.1 Drzewo trójmianowe

Model wyceny opcji barierowych za pomocą drzewa trójmianowego jest naturalnym rozszerzeniem metody drzewa dwumianowego. W tym wypadku zakładamy, że w każdym kroku czasu dt cena aktywa bazowego wykonuje albo skok do góry, albo w dół, albo pozostaje na tym samym poziomie. Wysokość skoków dobieramy zgodnie ze zmiennością i wielkością dt oraz tak aby bariera wypadła na jednym z poziomów cen aktywa (patrz Rysunek 38). W ten sposób zapewniamy, że bariera stosowana podczas wyceny jest dokładnie taka jak ta zadana.



Rysunek 38: Drzewo trójmianowe

Prawdopodobieństwa przejść są tak dobrane aby ruchy cen akcji odpowiadały światowi neutralnemu na ryzyko. Wyceny dokonujemy dla kolejnych kolumn drzewa (podążając z prawej do lewej) w każdym wierzchołku wpisując wartość opcji odpowiadającą temu wierzchołkowi wyliczoną jako zdyskontowana wartość oczekiwana opcji w następnym kroku.

Warto zauważyć, że łatwo możemy wprowadzić w tym modelu dywidendę procentową (ceny aktywa zaliczą spadek w momencie dywidendy), ale nie kwotową, ponieważ taki spadek spowoduje, że wierzchołki drzewa przestaną się rekombinować (sklejać) po momencie dywidendy.

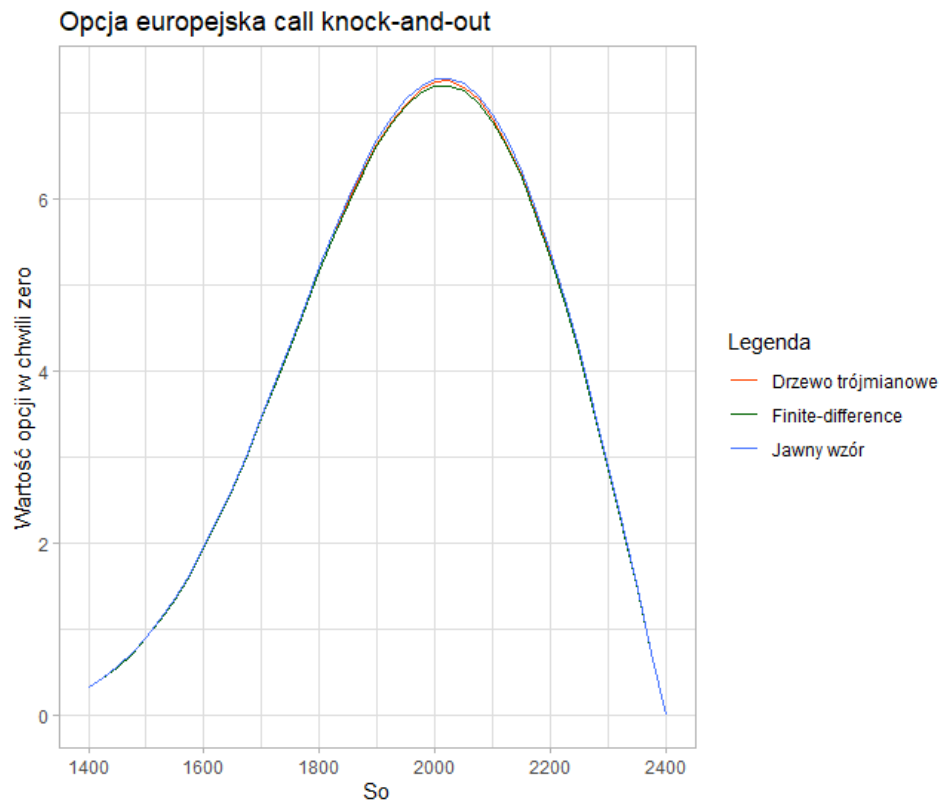
5.2 Opcje europejskie i amerykańskie bez dywidendy

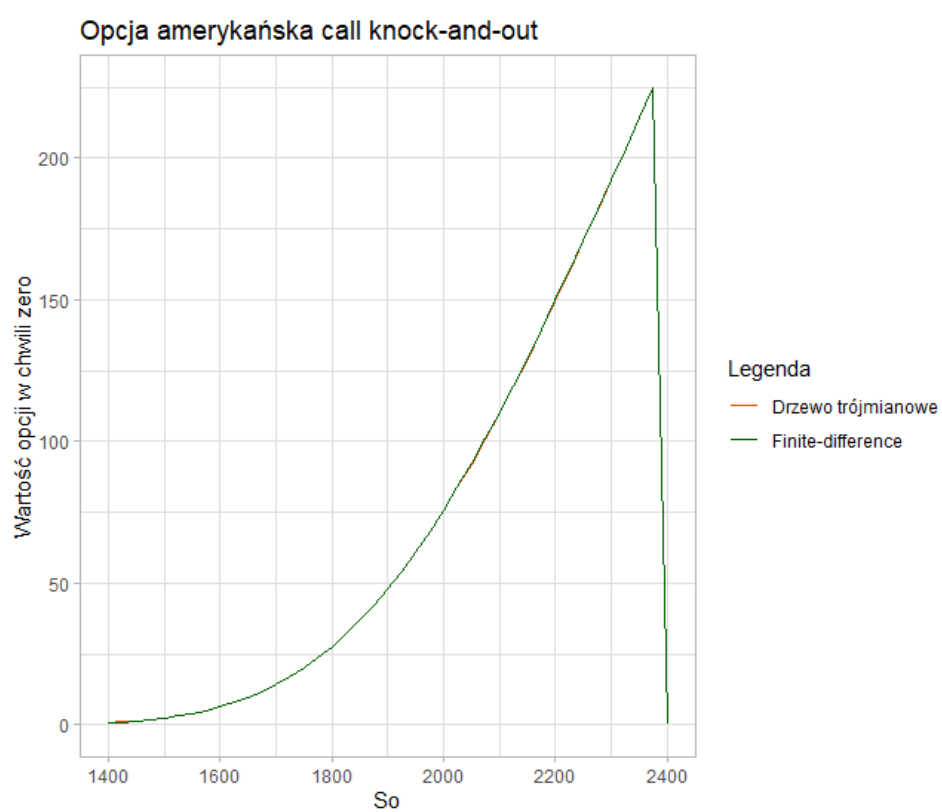
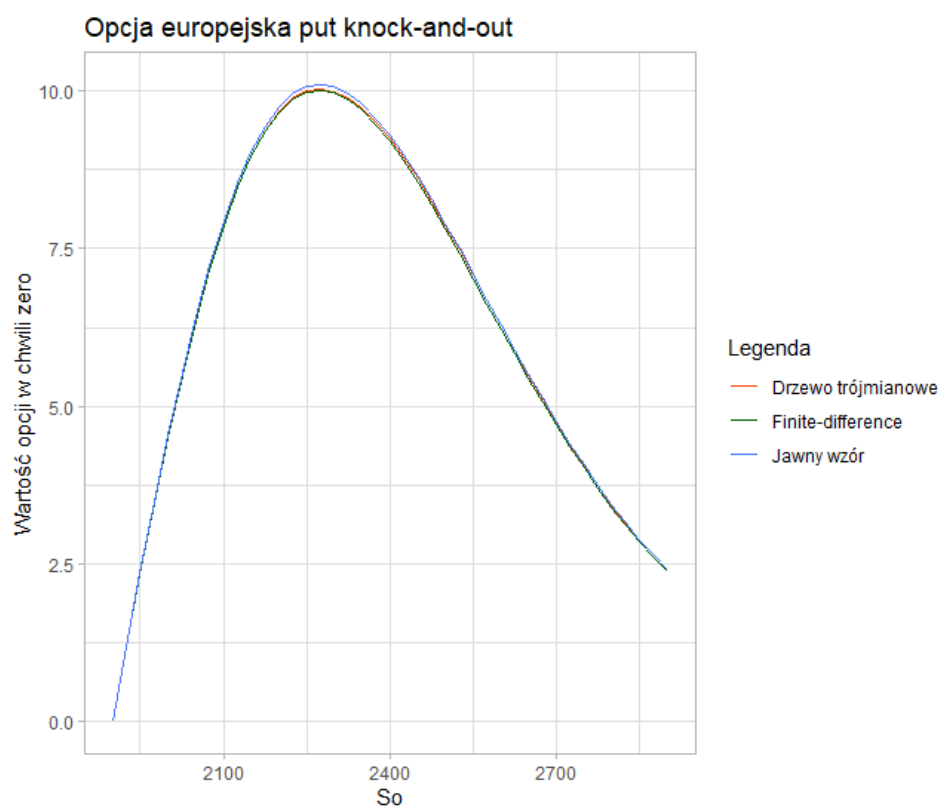
Dla ustalenia uwagi w tym rozdziale, jeśli nie zostanie stwierdzone inaczej będziemy rozważać następujące parametry opcji:

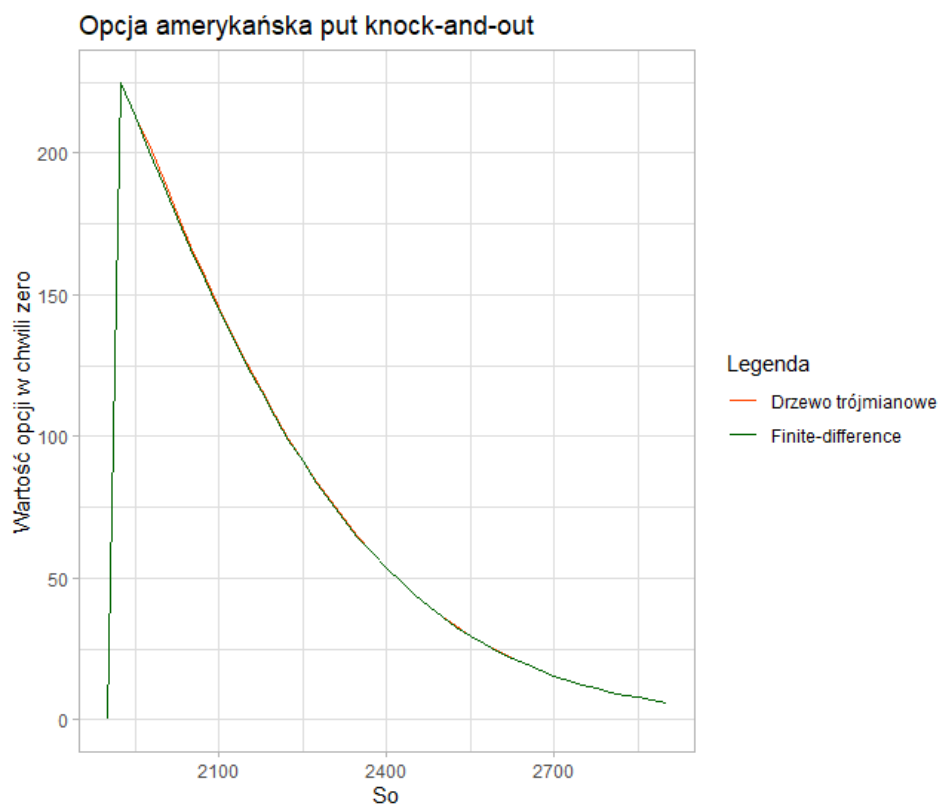
- cena wykonania: 2100,
- bariera dla opcji call: 2400,
- bariera dla opcji put: 1900,

- zmienność roczna: 20%,
- stopa procentowa: 1.5%.

Dokonujemy wyceny opcji na chwilę zero dla różnych wartości początkowych aktywa bazowego (S_0).



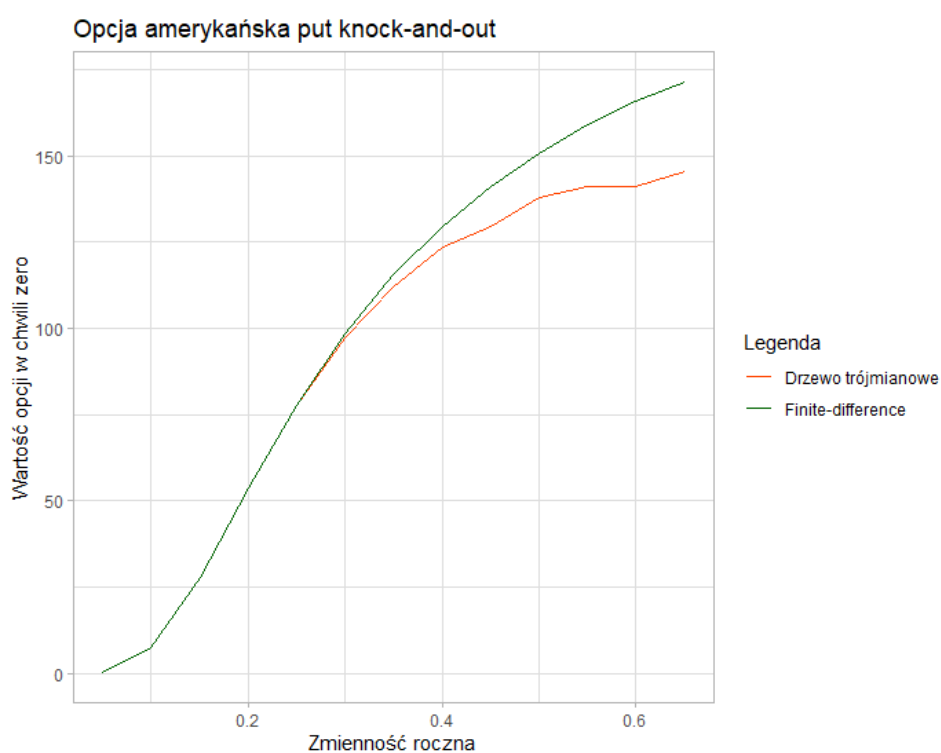
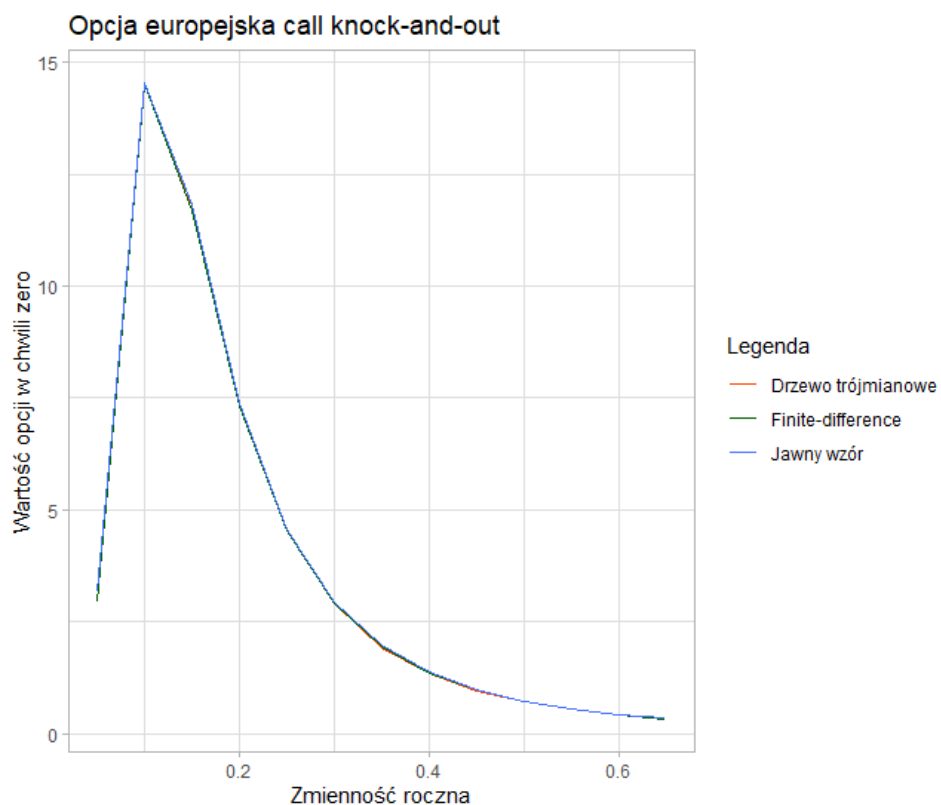




Rodzaj opcji	EC	EP	AC	AP
Maksymalna różnica	0.086	0.095	0.37	2.65

Widzimy, że nasze wyceny pokrywają się niemal idealnie. Oczywiście pokazaliśmy zgodność tylko dla jakichś przykładowych parametrów, ale szansa, że to nam się udało przez przypadek jest raczej znikoma.

Ważnym parametrem podczas wyceny była zmienność. Możemy zatem popatrzeć na wyceny opcji dla różnych wartości zmienności. Niech S_0 dla opcji call wynosi 2000, a dla opcji put - 2400.



Ponownie obserwujemy zgodność wycen. Jedyna rozbieżność zaczyna pojawiać się dla opcji amerykańskiej z wysoką zmiennością. Jest to spowodowane za małą liczbą kroków przy wycenie drzewem trójmianowym. Większa zmienność przekłada się na większe skoki cen aktywa, przez co następuje niedoszacowanie wartości opcji amerykańskiej (możliwość

wczesnego wykonania tuż przed barierą). Zwiększenie liczby kroków w algorytmie powoduje zbliżenie się wyceny do finite-difference (w zamian algorytm staje się powolny).

5.3 Metoda Monte Carlo

Wartość opcji może być wyznaczona jako zdyskontowana wartość oczekiwana payoffu, jeśli trajektorie kursu aktywa będą modelowane przez geometryczny ruch Browna w świecie neutralnym na ryzyko, tzn. będą spełniały:

$$dS = rSdt + \sigma SdX,$$

gdzie X jest standardowym ruchem Browna. Wartość opcji wynosi wtedy:

$$f = e^{-rT} E[\text{payoff}(S)].$$

Metoda Monte Carlo polega więc na tym, aby wygenerować M takich trajektorii obliczyć ich payoff, wyciągnąć średnią i ją zdyskontować. Mocne Prawo Wielkich Liczb mówi nam, że tak otrzymana wartość μ opcji będzie zbiegać do f , gdy $M \rightarrow \infty$.

Ponadto możemy wyznaczyć przedział ufności, w którym f znajdzie się z prawdopodobieństwem 95%:

$$\left(\mu - \frac{1.96\omega}{\sqrt{M}}, \mu + \frac{1.96\omega}{\sqrt{M}} \right),$$

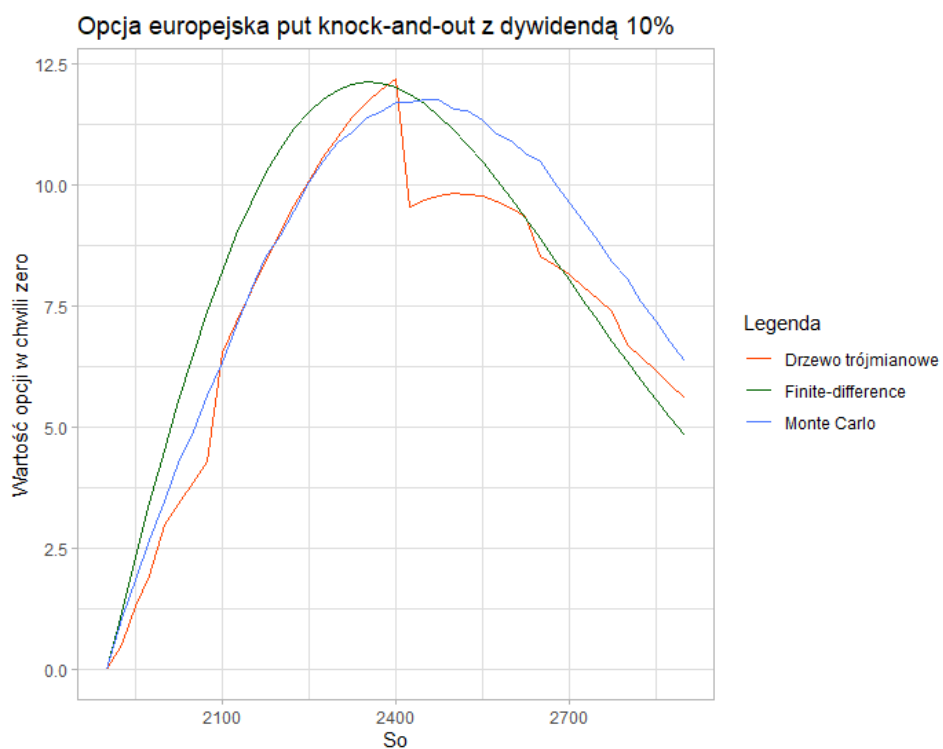
gdzie ω jest odchyleniem standardowym z otrzymanych payoffów.

Metoda ta jest bardzo prosta w użyciu i łatwa w modyfikacji (np. wprowadzenie dywidendy), ciężiej jest ją dostosować do wyceny opcji amerykańskich (nie będziemy tego robić). Największym mankamentem jest konieczność wygenerowania bardzo wielu trajektorii, aby uzyskać sensowny przedział ufności.

5.4 Opcje z dywidendą

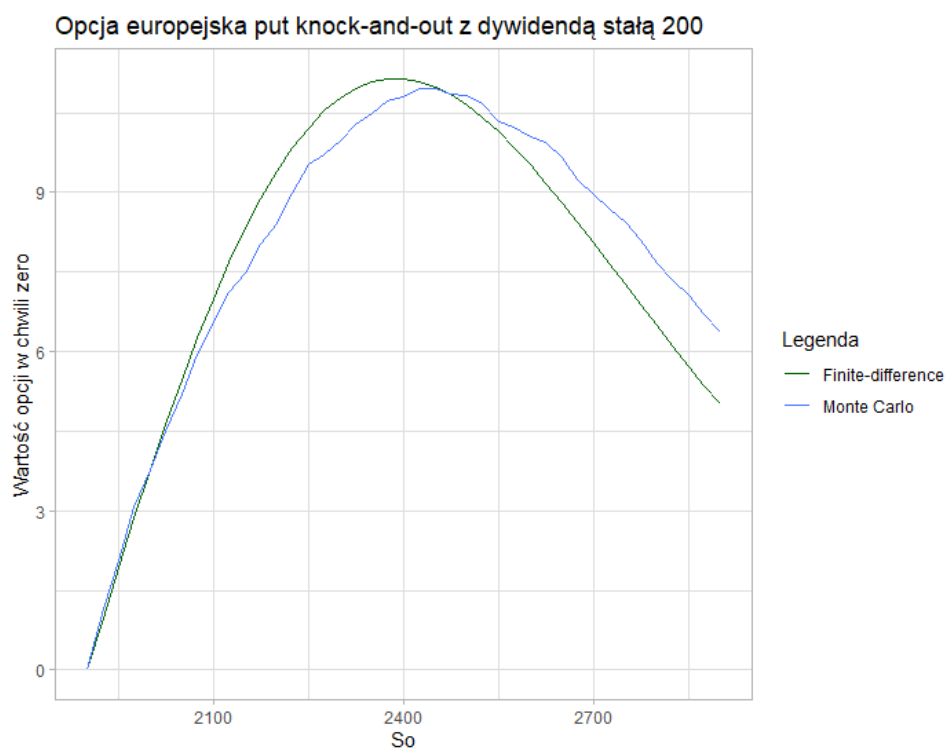
W tym rozdziale zakładamy, że dywidenda jest wypłacana w połowie życia opcji.

W metodzie Monte Carlo generowaliśmy $M = 50000$ trajektorii, co dawało przedziały ufności (na poziomie istotności $\alpha = 0.05$) nie dłuższe niż 0.6.

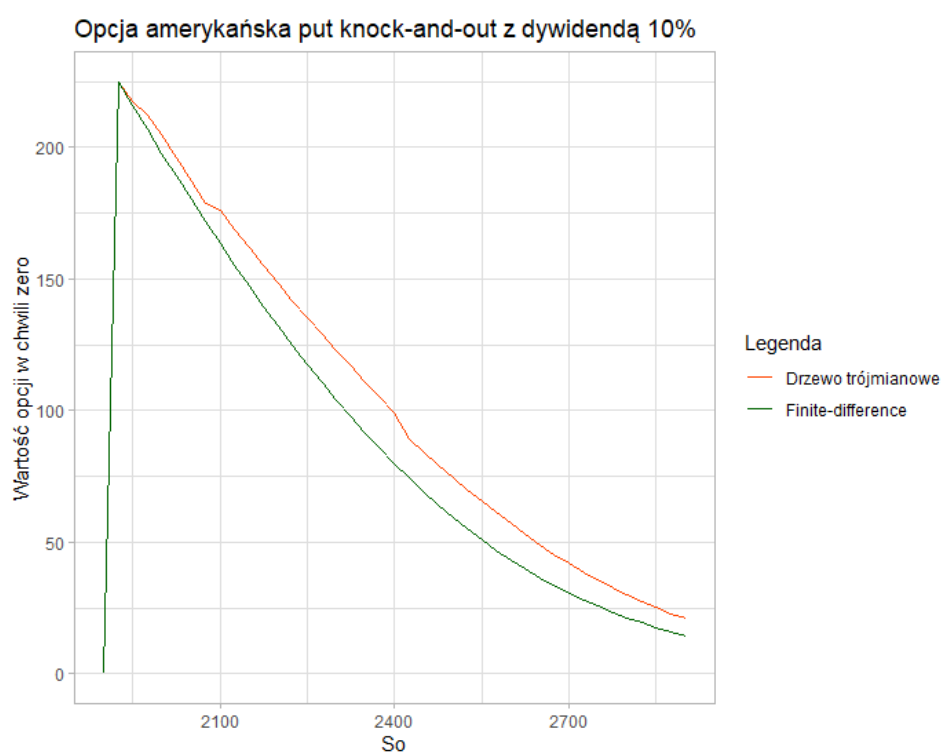


Rysunek 39:

Na Rysunku 39 mamy przedstawioną wycenę opcji europejskiej put z dywidendą procentową trzema metodami. Choć nie pokrywają się już tak idealnie jak poprzednio, to nadal są to bardzo zbliżone wyceny. Widać jednak, że dywidenda wprowadziła dosyć gwałtowną zmianę w procesie wyceny, z którą różne metody różnie sobie poradziły. Zauważmy na przykład, że bariera w drzewie trójmianowym po momencie dywidendy nie musi już leżeć nie jakimś poziomie cen aktywa, na czym nam zależało.



Rysunek 40:



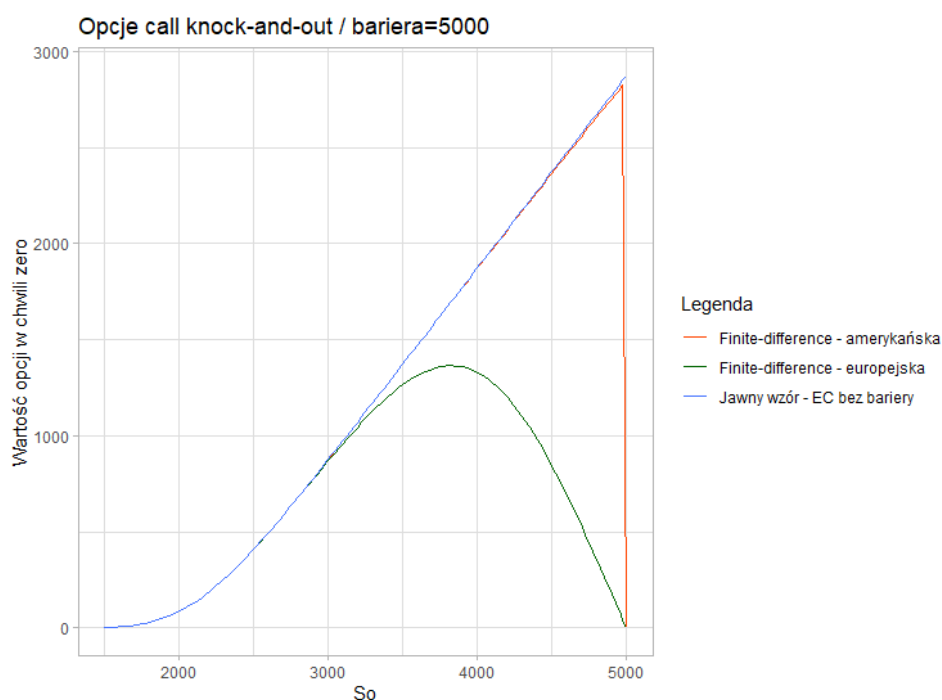
Rysunek 41:

Rysunek 40 przedstawia porównanie dla dywidendy kwotowej, a Rysunek 41 dla opcji amerykańskiej. Są to ponownie bardzo zbliżone wyniki. Niestety nie posiadamy zaim-

plementowanej metody, która pomogłaby nam sprawdzić wycenę finite-difference opcji amerykańskiej z dywidendą kwotową.

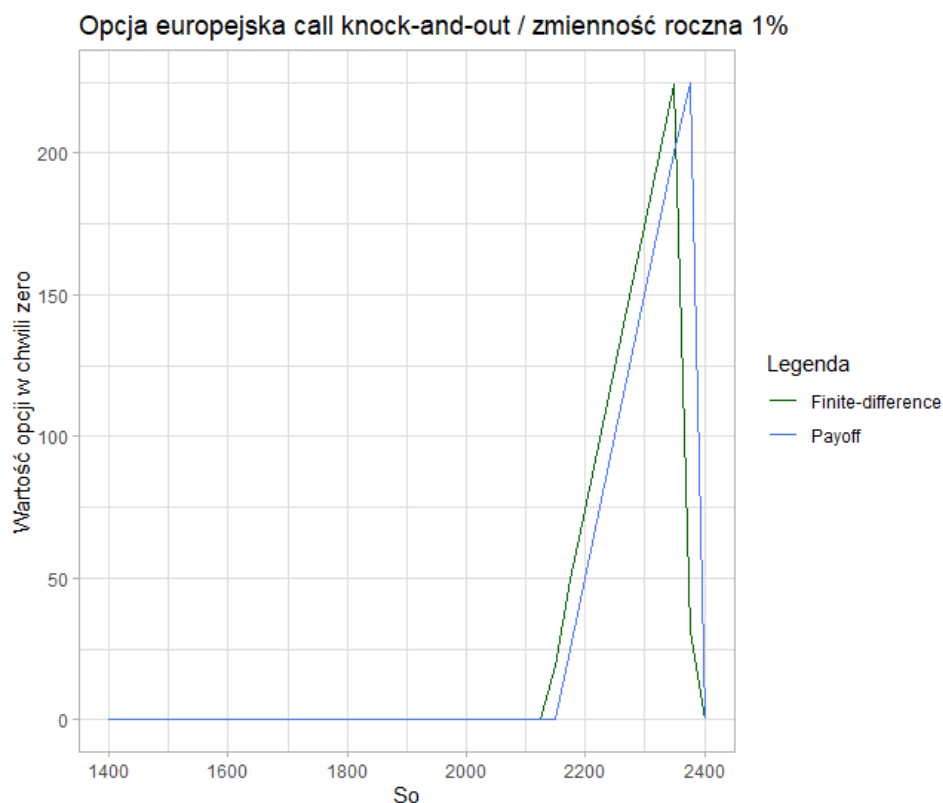
5.5 Warunki brzegowe

Jeszcze innym sposobem aby upewnić się, że nie popełniło się błędu w trakcie implementacji jest sprawdzenie pewnych skrajnych przypadków, co do których mamy silne intuicje lub nawet pewność, jeśli chodzi o to, co powinno wyjść.



Rysunek 42:

Rysunek 42 pokazuje, co się dzieje jeśli odsuniemy barierę daleko od ceny wykonania. Zauważmy, że wycena europejskiej opcji barierowej dla wartości początkowych aktywa poniżej 3000 jest niemal identyczna jak wycena zwykłej opcji europejskiej.



Rysunek 43:

Rysunek 43 ma za to obrazować, co się dzieje, gdy zmienność roczna zbliża się do zera. Można o tym myśleć w ten sposób, że sytuacja, w której mamy małą zmienność roczną jest analogiczna do sytuacji, w której zmienność jest większa, ale za to znajdujemy się blisko momentu wykonania, tzn. jest mało czasu na to aby cena aktywa znacznie się zmieniła. Z tego powodu wycena opcji jest bardzo zbliżona do payoffu.

Nasze intuicje oraz wyceny innymi metodami zgadzają się z otrzymanymi wynikami dla finite-difference, zatem możemy przypuszczać, że nasza implementacja jest poprawna.

Duża dokładność wyników, szybkie działanie oraz łatwość w dostosowaniu algorytmu do sytuacji (np. dywidendy, niepewna zmienność), czyni go dobrym narzędziem do wyceny instrumentów finansowych. Warto też dodać, że algorytm zwraca całą siatkę wyceny.