

# Stochastyczna matematyka finansowa

## Projekt nr 1

### Model

Przyjmijmy, że dziś jest **2018-03-28**. Niech  $S_t^1$  i  $S_t^2$  oznaczają odpowiednio wartość indeksu WIG20 oraz cenę akcji KGHM w chwili  $t$ . Załóżmy, że dynamika cen opisana jest następującymi równaniami:

$$\log\left(\frac{S_{t+1}^i}{S_t^i}\right) = \alpha_i N_t^i + \beta_i, \text{ dla } i = 1, 2,$$

gdzie  $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$ , a  $N_t^i$  są zmiennymi losowymi ze standardowego rozkładu normalnego  $\mathcal{N}(0, 1)$  oraz:

- $N_t^i, N_s^j$  są niezależne dla  $t \neq s$  oraz dowolnych  $i, j$ ,
- $N_t^1, N_t^2$  mają stałą korelację  $\rho$ .

Oprócz tego rozważamy instrument  $S_t^0$ , który należy interpretować jako wolny od ryzyka.

### Instrumenty do wyceny i analizy

Rozważ następujące opcje:

- A – notowana na GPW opcja *call* z kursem wykonania 2200 zapadająca w grudniu 2018,
- B – opcja A z dodatkową klauzulą *up-and-out* z barierą równą kursowi wykonania +200,
- C – opcja A z dodatkową klauzulą *up-and-in* z barierą równą kursowi wykonania +200,
- D – opcja A z dodatkowym tzw. *warunkiem typu paryskiego* – wypłata nastąpi, jeśli kurs będzie powyżej bariery (kurs wykonania +200) przez 10 dni z rzędu,
- E – opcja *call* na WIG20 typu *lookback*, tj. z kursem wykonania równym minimum trajektorii (z taką samą zapadalnością jak opcja A) z dodatkowym tzw. *warunkiem binarnym* – wypłata nastąpi tylko jeżeli cena akcji KGHM w chwili wykonania przekroczy cenę tej akcji z dnia **2018-03-28**.

*Uwaga:* opcja A ma być faktycznie notowaną w tym czasie na GPW, natomiast o opcjach B-E przyjmij, że są wyemitowane dokładnie **2018-03-28**, tzn. wcześniejsza trajektoria aktywów nie ma znaczenia dla ich warunków dodatkowych.

### Polecenia

#### Część I

1. Zapoznaj się ze standardami opcji na GPW oraz z dokumentem zawierającym kluczowe informacje dla nabywców i wystawców opcji na GPW (dokumenty te znajdziesz na stronie GPW). Jaki symbol ma rozważana przez nas opcja?
2. Uzupełnij kalibrację modelu uwzględniając WIG20, KGHM i instrument  $S_t^0$ .
3. Wycen opcję A używając wzoru Blacka-Scholesa. Znajdź cenę historyczną tej opcji z dnia **2018-03-28** i porównaj z Twoimi wyliczeniami. Jakie masz obserwacje? Z czego mogą wynikać różnice?
4. Podobne porównanie zrób na datę **2018-10-01** (tj. wyceny własnej oraz historycznej). Jakie byłyby wypłaty wszystkich opcji A-E gdyby wygasły **2018-10-01**?

## Część II

1. Znajdź cenę wolną od arbitrażu dla powyższych opcji A-E, wyznaczając odpowiednie wartości oczekiwane, przy użyciu metod Monte Carlo, dla skalibrowanego w punkcie 2. modelu. Zrób to na dwa sposoby, które powinny dać takie same wyniki:
  - używając miary martyngałowej,
  - używając miary rzeczywistej korzystając z odpowiedniej pochodnej Radona-Nikodyma.
2. Porównaj wycenę opcji A metodą Monte Carlo z wyceną z punktu 3 w części I. Jakie masz obserwacje?
3. Przeanalizuj wrażliwość powyższych wyników na małe ruchy poszczególnych parametrów modelu. Wskaż parametry niematerialne dla wyceny i wyjaśnij, jaki jest zysk z posiadania takiej wiedzy. Czy potrafisz wyjaśnić analitycznie, skąd wynika ich niematerialność?
4. Przeanalizuj wrażliwość wyceny na liczbę scenariuszy użytych w metodzie Monte Carlo. Jakie techniki możesz zastosować, by poprawić zbieżność metody Monte Carlo?
5. Postaw się w pozycji instytucji, która chciałaby sprzedawać opcje A-E.
  - Czy kwota wyznaczona w punkcie 1. części II będzie wystarczająca do wyprodukowania danego instrumentu za pomocą strategii samofinansującej?
  - Jakie wady ma Twoja praca z punktu 1. dla zastosowań praktycznych?
  - Wymień i opisz wszystkie ryzyka, jakie widzisz w kontekście wyceny i analizy z tego projektu. W jaki sposób można byłoby się z nimi uporać?
6. Stwórz bibliotekę (wraz z dokumentacją) zawierającą wykorzystane w projekcie funkcjonalności. Opracuj testy sprawdzające poprawność zaimplementowanych funkcji. Biblioteka powinna spełniać standardy przyjęte w języku programowania, którego użyjesz.

## Wyniki

Opracuj raport (w formie PDF) zawierający wszystkie powyższe punkty, krótką prezentację z uzyskanymi wynikami oraz bibliotekę zawierającą niezbędne funkcje wraz z dokumentacją. Część II raportu powinna rozpoczynać ścisła i przejrzysta część teoretyczna, w której powyższy model i właściwy problem będą przedstawione w języku matematycznym, z powołaniem się na odpowiednie twierdzenia. Rozumowania powinny być czytelne i obejmować wszystko (i tylko) to, co jest wykorzystywane w Twoim projekcie. Druga część raportu zawierać ma przeprowadzone wyliczenia i analizy, z uwzględnieniem wszystkich opisanych powyżej poleceń. Biblioteka (i dokumentacja) ma stanowić załącznik do raportu. Wszystkie części raportu mają tworzyć spójną całość.

## Uwagi

Preferowane (ale nie jedyne dopuszczalne) narzędzia komputerowe (może być jednocześnie kilka) to: R, Python, C++. Zmienne z rozkładu normalnego można generować przy użyciu dowolnych bibliotek. Oceniana będzie również jakość kodu.

Przygotowanie projektu składać się będzie z pięciu etapów:

- Przygotowanie części I projektu. Omówienie treści, wyników i analiz dotyczących poleceń oraz pytań postawionych w tej części. Wybór metod matematycznych oraz narzędzi informatycznych służących do implementacji, podział pracy na uczestników grup projektowych. Dodatkowo omówienie konstrukcji opcji A-E. **[termin: 2021-10-28]**
- Opracowanie „na papierze” podejścia do części II. Metodologia wyceny z powołaniem się na odpowiednie twierdzenia. Opis stosowanych metod Monte-Carlo w kontekście obu sposobów z punktu 1. Propozycja analizy wrażliwości, o której mowa w punktach 3. i 4. Wstępne omówienie zagadnienia stworzenia biblioteki (użyta technologia i określenie funkcjonalności, które zostaną zaimplementowane). **[termin: 2021-11-04]**

- Wstępne wyniki do punktów 1-4 części II. W szczególności omówienie symulacji komputerowych oraz wstępnych wyników wyceny i analizy wrażliwości. Skomentowanie zauważonych niezgodności i problemów. Prezentacja wersji alfa biblioteki wraz z testami i dokumentacją. [**termin: 2021-11-18**]
- Omówienie ostatecznych wyników dotyczących każdego punktu projektu. Zaprezentowanie stosownych wizualizacji. Przedstawienie wersji beta biblioteki. [**termin: 2021-11-25**]
- Prezentacja wyników pracy nad projektem na rzutniku, przed wszystkimi grupami, prowadzącymi oraz zaproszonymi gośćmi (z możliwością zadawania pytań przez słuchaczy). [**termin: 2021-12-02**]
- Wysłanie ostatecznego raportu oraz biblioteki z dokumentacją. [**termin: 2021-12-05**]

Do końcowej oceny projektu brany pod uwagę będzie ostateczny raport oraz prezentacja. Oprócz tej końcowej oceny projektu (takiej samej dla całej grupy projektowej), każda osoba za ten projekt może dostać o 0.5 stopnia podwyższoną ocenę za aktywność na spotkaniach projektowych z prowadzącym oraz, niezależnie, o 0.5 stopnia podwyższoną oceną za bardzo dobrą prezentację wyników.