

阻尼振动和受迫振动实验

胡湔崑 核 21 2022011139

摘要

本实验的原理是阻尼振动和受迫振动的数学模型，通过专门的波尔共振仪，研究阻尼振动和受迫振动以及共振的基本规律。实验将探究不同阻尼对简谐振动的影响，了解受迫振动的幅频特性和相频特性，并研究受迫振动的瞬态过程。

1. 实验仪器

波尔共振仪：

包含弹簧（产生弹力），摆轮（测振幅），电机（激励源），控制器，闪光灯（测相位差）

2. 实验原理

A. 阻尼振动

研究力学性质，可以计算得到仪器振动的力学方程：

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} = -k\theta - \gamma \frac{d\theta}{dt} \quad (1)$$

由此，解出运动方程（即为一般性阻尼振动方程）：

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\beta \frac{d\theta}{dt} + \omega_0^2 \theta = 0 \quad (2)$$

(2) 式通解为 $\theta = A e^{i(\omega t + \varphi)}$ ，其中， $\omega = i\beta \pm \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$

在欠阻尼状态下，经过 n 个周期振动的振幅 θ_n 满足下方公式：

$$\ln \theta_n = \ln \theta_0 - \beta t_0 - n(\beta T_d) \quad (3)$$

利用 (3) 式，可求出 β 的值

B. 受迫振动

受迫振动的数学方程是在阻尼振动的基础上增加了激励项，在欠阻尼状态下，其通解通常为：

$$\theta = \theta_0 e^{-\beta t} \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} t + \varphi_0) + \theta_m \cos(\omega t - \varphi) \quad (4)$$

(4) 式中：

$$\theta_m = \frac{\omega_0^2 A_D}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\beta\omega)^2}}$$

$$\varphi = \arctan \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

根据上述两个理论式，实验将通过测量数据以图像的形式表现出理论式在不同阻尼系数下的幅频特性曲线和相频特性曲线。

C. 品质因数 Q

$$Q = 2\pi \frac{E}{|\Delta E|}$$

由上述定义计算可得，在阻尼振动条件下 $Q = \frac{\omega_0}{2\beta}$ (5)

受迫振动的幅频特性曲线同样可以推导出品质因数：

$$Q \approx \frac{\omega_r}{|\omega_+ - \omega_-|} \quad (6)$$

ω_r 为振幅最大点的角频率， ω_{\pm} 为振幅为最大振幅的 $\sqrt{2}/2$ 时的角频率。

3. 实验内容

A 组实验

A.0 根据实验理论，阻尼系数 β 的量纲为 T^{-1}

A.1 测量最小阻尼时（阻尼开关置于“0”档）的阻尼系数 β 和固有角频率 ω_0 。

根据实验要求，关闭电机，闪光灯开关，调节光电门位置，调节偏心轮玻璃板置 0，检查摆轮处在平衡位置，调节周期至“10”位，随后打开电源，拨动摆轮，开始测量。

由于同时记录周期和振幅很难，故使用手机录像功能，对整个实验过程进行全程录像，使振幅和周期在一次实验中均被测量。

表 1 测量最小阻尼状态的阻尼系数和固有角频率数据记录表

θ_i	测量								
1	161	11	147	21	135	31	124	41	113
2	160	12	146	22	134	32	123	42	112
3	158	13	145	23	133	33	121	43	111
4	157	14	143	24	132	34	120	44	110
5	155	15	142	25	131	35	119	45	109
6	154	16	141	26	129	36	118	46	107
7	153	17	140	27	128	37	117	47	107
8	151	18	139	28	127	38	116	48	106
9	150	19	138	29	126	39	115	49	105
10	149	20	137	30	125	40	114	50	104
Td	15.568		15.526		15.489		15.455		15.423

以（3）式为理论式进行最小二乘法直线拟合分析，得到阻尼系数及其不确定度：

$$\beta = 5.749 \times 10^{-3}$$

$$U_{\beta} = t \times s_{\beta} = 2.6 \times 10^{-5}$$

因此，阻尼系数为 $\beta = (5.749 \pm 0.026) \times 10^{-3} s^{-1}$

A.2 用最小阻尼时的阻尼系数 β 和振动周期 T_d 计算固有角频率 ω_0 。

通过（1）中计算出的阻尼系数和平均周期，可以得到振动角频率和阻尼系数，由理论式（2）的通解可得出固有角频率计算公式，经过计算可得：

$$\omega_0 = 4.056s^{-1}$$

经过比较，发现固有频率和振动频率相差很小，可以确定此时为弱阻尼状态。

A.3 测量 1 挡，3 挡，5 挡三种阻尼状态的振幅，并求出阻尼系数。

与（1）中相同，把阻尼状态置于不同档位，测量数据：

表 2 测量 1 挡，3 挡，5 挡状态的阻尼系数数据记录表

A3	第一种	1挡		第二种	3挡		第三种	5挡	
测量	θ_i		Td	θ_i		Td	θ_i		Td
1	130	95	1.55	137	84	1.552	126	50	1.549
2	120	88	1.547	121	74	1.547	100	40	1.541
3	111	81	1.544	107	66	1.543	79	32	1.536
4	103	75	1.542	95	58	1.54	63	25	1.532

与（1）中相同，做直线拟合，得出结论如下：

$$1 \text{ 挡: } \beta = (5.09 \pm 0.07) \times 10^{-2} s^{-1}$$

$$3 \text{ 挡: } \beta = (7.9 \pm 0.1) \times 10^{-2} s^{-1}$$

$$5 \text{ 挡: } \beta = (14.9 \pm 0.2) \times 10^{-2} s^{-1}$$

A.4 利用 A.1 和 A.3 中得出的不同阻尼系数，计算品质因数。

由理论式（5）可知，仅需阻尼系数和固有频率就可以算出品质因数，经过计算得出结论如下：

$$Q_0 = 352$$

$$Q_1 = 39$$

$$Q_3 = 25$$

$$Q_5 = 13$$

B 组实验

B.1 当振幅 θ_m 达到最大，振动系统发生共振。此时，系统频率 ω 为共振频率。写出

共振频率、及共振处振幅最大值的表达式（与品质因数 Q 有关吗？）和相位差 φ 。

经过理论计算，得出公式如下：

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$$

$$\theta_m = Q \frac{\omega_0 A_D}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$$

$$\varphi = \arctan \frac{\omega}{\beta}$$

B.2 如何判断受迫振动达到稳态？

受迫振动稳态状态下，摆轮周期和振幅均不改变。在实验中，振幅变化相对更明显，容易观察，故可以通过受迫振动振幅不改变确定受迫振动达到稳态。

B.3 测试幅频特性和相频特性

打开电机开关，开关置于“强迫力”，调节电机频率以测量不同频率下受迫振动的幅频和相频特性。

振幅由控制器显示屏直接读出，相位差通过闪光灯闪烁玻璃板，观察留下细线的位置，确定激励源与实际振动的相位差，数据记录如下：

表 3 测量 2 挡，4 挡，5 挡状态的幅频，相频特性曲线数据记录表

2挡			4挡			5挡		
频率	振幅	相位差	频率	振幅	相位差	频率	振幅	相位差
1.451	33	164	1.469	39	152	1.46	33	144
1.467	41	163	1.479	44	147	1.471	37	142
1.481	51	157	1.489	51	144	1.483	43	137
1.499	68	150	1.499	59	136	1.493	48	131
1.514	87	140	1.508	67	127	1.508	56	118
1.530	109	127	1.516	72	120	1.520	62	108
1.540	124	115	1.527	81	107	1.529	64	97
1.550	135	97	1.536	83	95	1.537	65	88
1.559	123	67	1.544	82	82	1.548	63	75
1.564	95	45	1.551	77	68	1.558	57	62
1.572	70	33	1.564	65	51	1.568	52	53
1.583	54	24	1.579	52	36	1.578	47	46
1.594	45	19	1.592	43	30	1.589	41	37
1.605	39	16	1.603	38	27	1.600	36	34
1.615	34	15	1.616	33	25	1.610	33	33

注：此处原本应使用同 A 中的三挡测量，但因为仪器在 1 挡存在故障，故又更改为测量这三挡。

B.4 将不同阻尼系数下的幅频特性曲线画在一副图中，相频特性曲线画在一副图中。

图 1 幅频特性曲线

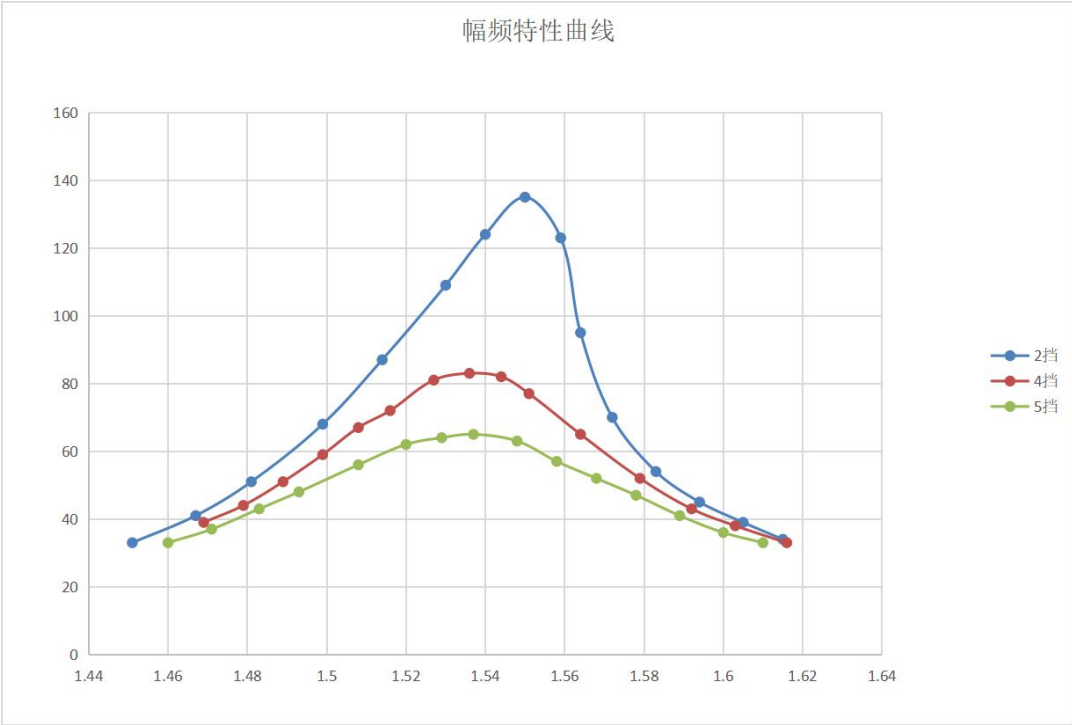
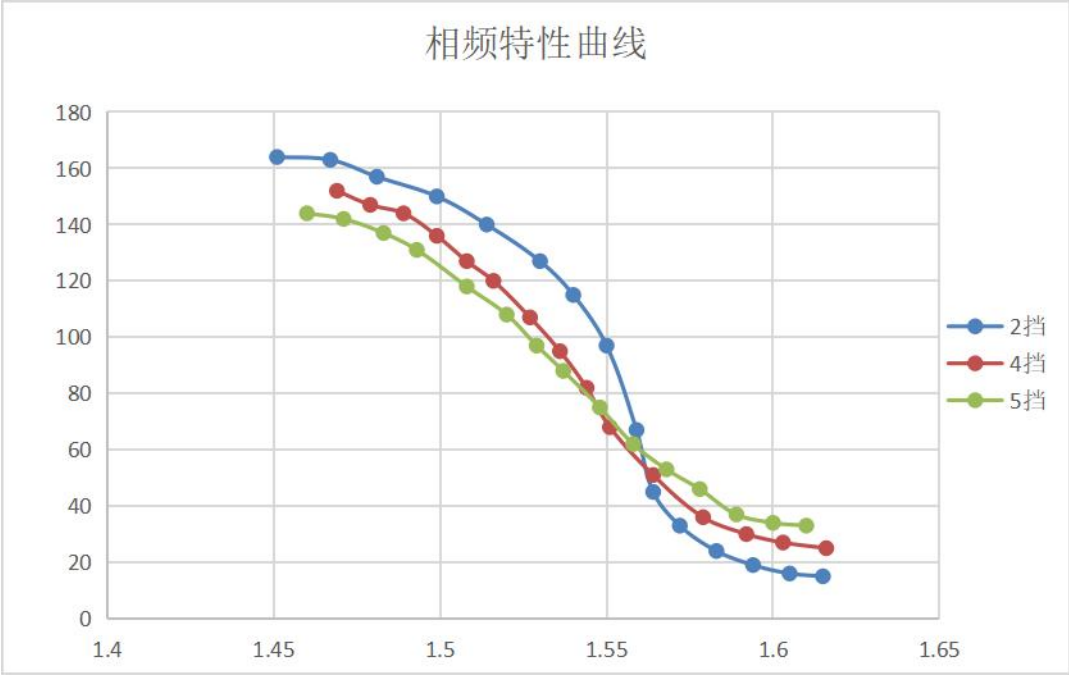


图 2 相频特性曲线



注：从幅频和相频特性曲线可以看出，1 挡出现的明显故障不仅仅存在于 1 挡中，而在 2 挡中同样明显存在。猜测可能是设备自身原因，导致在阻尼较小的情况下，理论值与仪器测量值均存在较大偏差。

B. 5 从幅频特性曲线计算品质因数。

由理论式（6）可知，品质因数如下：

$$Q_2 = 35$$

$$Q_4 = 20$$

$$Q_5 = 17$$

比较下，品质因数与 A. 4 仅能做到量级一致，并没有很强的相似性。

C 组实验

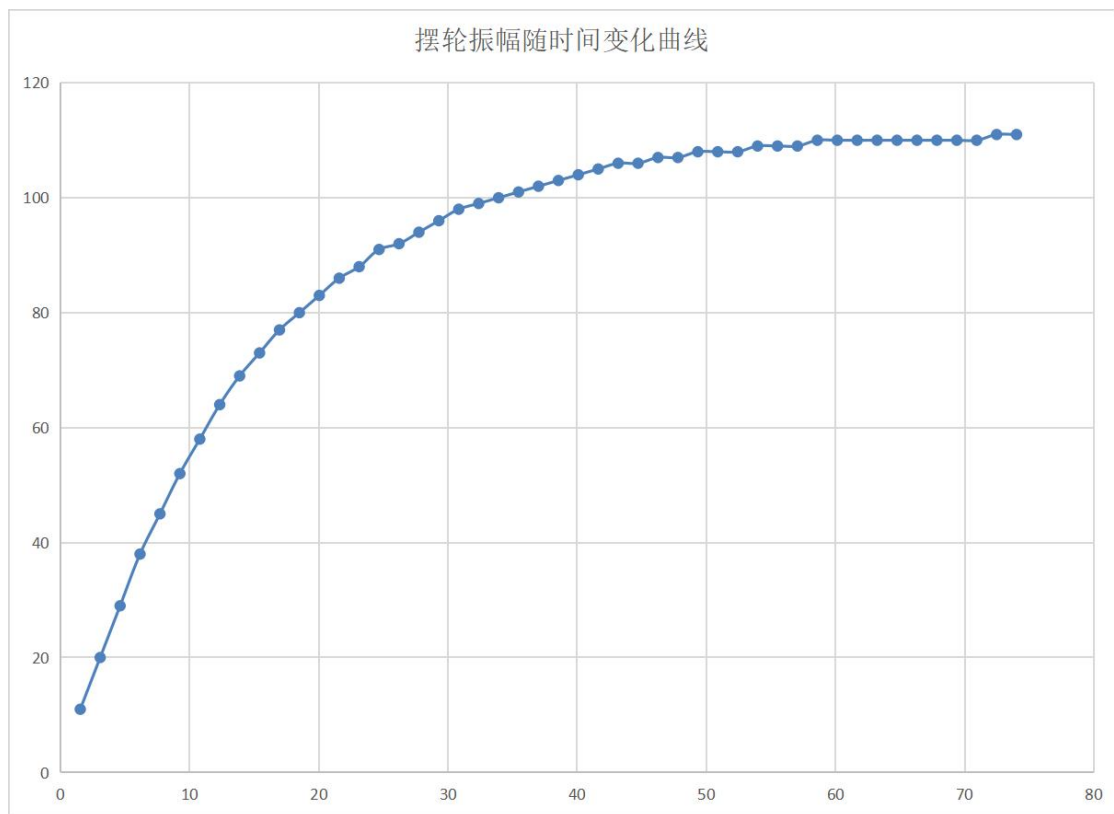
C. 1 测量受迫振动的暂态情况

将摆轮从静止开始启动，测量摆轮振幅随周期数的变化。由上述实验可知，在振动中，周期基本不变化，因此可以由周期数推导运动时间，最终给出摆轮在共振条件下振幅随时间变化的图像。

表 4 受迫振动暂态过程实验数据记录表

n	T	θ	n	T	θ	n	T	θ
1	1.542	11	21	32.382	99	41	63.222	110
2	3.084	20	22	33.924	100	42	64.764	110
3	4.626	29	23	35.466	101	43	66.306	110
4	6.168	38	24	37.008	102	44	67.848	110
5	7.71	45	25	38.55	103	45	69.39	110
6	9.252	52	26	40.092	104	46	70.932	110
7	10.794	58	27	41.634	105	47	72.474	111
8	12.336	64	28	43.176	106	48	74.016	111
9	13.878	69	29	44.718	106			(稳态)
10	15.42	73	30	46.26	107			
11	16.962	77	31	47.802	107			
12	18.504	80	32	49.344	108			
13	20.046	83	33	50.886	108			
14	21.588	86	34	52.428	108			
15	23.13	88	35	53.97	109			
16	24.672	91	36	55.512	109			
17	26.214	92	37	57.054	109			
18	27.756	94	38	58.596	110			
19	29.298	96	39	60.138	110			
20	30.84	98	40	61.68	110			

图 3 摆轮振幅随时间变化曲线



C.2 写出 C.1 题的振动系统达到稳态后，电机在一个周期内提供的平均输入功率的表达式。

由品质因数的定义式和能量的表达式可知：

$$P = \frac{\omega_0 k \theta_m^2}{2Q}$$

P 为一个周期内的平均功率

4. 实验分析

本次实验我遇到了一个存在故障的仪器，在发现仪器故障的过程中，我结合了理论分析，以及基本一些合理推断，最终确定了仪器的 1 挡存在问题。1 挡的问题是直观的，容易被发现的，在我做实验的时候就发现了。

但是，在我换用 2 挡之后，我并没有发现存在像 1 挡一样的明显不合理故障。而在我进行数据处理时，我惊讶的发现在 1 挡中存在的问题仍旧影响着实验结论，由此可见，不是所有的仪器问题都是能通过肉眼观察的，在实验之后，通过数据处理分析实验的可靠性同样重要。

原始数据

（老师已拍照，本人无签字版）