（注：实验报告按照“课程须知”中的要求撰写即可，本模板**仅供“完整报告”参考**。同学完全可以按照自己对实验的理解和习惯的方式来撰写报告，包括且不限于使用的字体、字号、文本编辑软件、数据拟合软件、作图软件等。

文中楷体字部分为说明或注释性内容，不是实验报告内容。）

弹簧振子实验

姓名 班级 学号

摘要

本实验的原理为熟知的物理概念，意图使我们熟悉实验测量、数据处理和不确定度评估方法。实验分别利用胡克定律和弹簧振子周期公式两种方法通过测量数据和最小二乘法直线拟合得到劲度系数及其不确定度。利用周期公式得到的劲度系数不确定度偏大。通过分析误差来源和实验问题并对周期公式进行修正后，解决了该问题。两种方法得到的劲度系数很好地符合。

1. 实验仪器

支架，用于固定弹簧。

待测弹簧。

砝码钩和 7 个砝码。

游标高度尺，量程 0~500 mm，分辨力 0.01 mm，用于测量弹簧伸长量。

电子天平，量程 0~200 g，分辨力 0.01 g。用于测量砝码、砝码钩和弹簧质量。

秒表，分辨力 0.001 s，用于测量弹簧振子周期。

2. 实验内容

A）由胡克定律测定弹簧的劲度系数

一根弹簧下端悬挂质量为m_i的砝码构成弹簧振子。当振子静止时，砝码所受重力与弹簧的弹性恢复力F相平衡，$F = m_i g$，其中$g = 9.801$为重力加速度。由胡克定律可知，弹性恢复力F与弹簧伸长量$l = (x_0 - x_1)$的关系为：

$$F = kl \Rightarrow m_i g = -kx_i + kx_0 \qquad (1)$$

其中k为弹簧劲度系数，x_i为用游标高度尺对准测量的弹簧或砝码下端某一标志线或标志面的高度，x_0为弹簧未伸长时标志线的高度。根据（1）式对$m_i g$和x_i做直线拟合可求得弹簧的劲度系数k。

实验涉及两个物理量的测量：砝码质量和弹簧伸长量。砝码质量测量的误差数量级估计为 1‰以下（砝码质量为 10 g 数量级、电子天平的误差限Δ_{Ins}近似取其分辨力）。游标高度尺的测量误差数量级更小（伸长量为 100 mm 数量级，游标高度尺的分辨力虽然仅有 0.01 mm，误差为万分之一量级）。实验测量的主要误差来源为弹簧伸长量的测量，包括选取合适的测量标志线以及游标高度尺与标志线的对准误差，其数量级估计为 0.1 mm，相对误差为 1‰数量级。

此外，测量弹簧伸长量时需尽量使弹簧和砝码保持静止、避免晃动。游标高度尺使用时可先粗调、再细调微调螺丝，使其尽量对准标志线。

表 1　由胡克定律测定弹簧劲度系数实验数据

砝码数量	砝码质量m_i（g）	高度尺读数x_i（mm）	$F = m_i g$（N）	高度尺读数x_i（m）
1	11.31	354.70	0.110849	0.35470
2	22.62	340.94	0.221699	0.34094
3	33.93	327.36	0.332548	0.32736
4	45.24	313.34	0.443397	0.31334
5	56.55	299.74	0.554247	0.29974
6	67.86	285.98	0.665096	0.28598
7	79.17	272.28	0.775945	0.27228

对弹簧悬挂 1~7 个砝码时的砝码质量和标志线的位置进行测量，所得实验数据及拟合用数据的计算值见表 1。利用（1）式和 Excel 程序的 linest 函数对$m_i g$和x_i做最小二乘法直线拟合、利用 Excel 程序的 tinv 函数计算t因子，可得到：

$$k = 8.06590$$
$$s_k = 0.00994$$
$$U_k = tinv(1-0.95, 7-2) \times s_k = 0.02554$$

因此，弹簧的劲度系数为$k = (8.066 \pm 0.026)$ N/s。

劲度系数k的相对不确定度U_k/k仅为约 3‰，表明弹簧的弹性恢复力与伸长量之间的线性关系非常好。U_k/k约 3‰的相对不确定度与之前估计的伸长量的测量误差接近，结果合理。

B）研究弹簧振子的振动特性，验证周期公式

假设弹簧的质量很轻可忽略。如用外力使弹簧振子离开平衡位置然后释放，则振子将以平衡位置为中心作上下振动。根据牛顿第二定律，振子的运动方程为：

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \qquad （2）$$

振动周期为：

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad （3）$$

实验测量量为周期T和砝码质量m。为了用最小二乘法直线拟合方法求弹簧劲度系数k，对（3）式两边取平方，可得：

$$T^2 = \frac{4\pi^2 m}{k} \qquad （4）$$

即对T^2和$4\pi^2 m$做直线拟合即可求得弹簧的劲度系数k。

测量振动周期T时，秒表的仪器误差限（0.001 s）的影响可忽略。误差主要来源于振动周期起止时刻的测量误差，包括判定振子经过某标志线的误差和眼、脑、手的反应延迟等。估计误差为 0.1 s 数量级。为了减小周期测量的误差，实验中未直接测量一次振动的周期T，而是测量 100 个周期$100T$。此外，由于只悬挂一个砝码时振子不能仅在垂直方向上持续振动 100 个周期，因此从 2 个砝码开始测量。

表 2　由周期公式测定弹簧劲度系数实验数据

砝码数量	砝码+砝码钩质量m_i（g）	$100T_i$（s）	T_i^2（s^2）	$4\pi^2 m_i$（kg）
2	44.94	52.955	0.280423	1.77416
3	56.25	57.935	0.335646	2.22066
4	67.56	62.420	0.389626	2.66716
5	78.87	66.615	0.443756	3.11366
6	90.18	70.610	0.498577	3.56016
7	101.49	74.457	0.554384	4.00666

对弹簧振子悬挂 2~7 个砝码时砝码与砝码钩的总质量和振动周期进行测量，所得实验数据及拟合用数据的计算结果见表 2。利用（4）式和 Excel 程序的 linest 函数对T^2和$4\pi^2 m$做截距为 0 的最小二乘法直线拟合、利用 Excel 程序的 tinv 函数计算t因子，可得到：

斜率$b = 0.142869$

斜率标准偏差$s_b = 0.002417$

斜率不确定度$U_b = tinv(1-0.95, 6-1) \times s_b = 0.006212$

因此，弹簧的劲度系数为$k = 1/b = 6.99943$，由不确定度传递公式可得$U_k = \left|\frac{\partial k}{\partial b}\right| U_b = \frac{1}{b^2} U_b = 0.30435$。即弹簧的劲度系数为$k = (7.0 \pm 0.3)$ N/s。

该方法所得劲度系数k的相对不确定度U_k/k约为 4%，比实验中周期测量和砝码质量测量的相对误差大一个数量级，也比 A 部分用胡克定律得到的劲度系数的不确定度大一个数量级。此外，劲度系数结果（$k = 7.0$ N/s）也与 A 部分（$k = 8.066$ N/s）相差较多。对 B 部分的原始数据和数据处理过程进行检查，未发现有误。对拟合自变量和因变量数据作图。如图 1 所示，T^2与$4\pi^2 m$之间的线性关系很好，但截距不为 0。重新考虑实验原理和实验方法，发现在原理部分假设弹簧的质量很轻、可忽略不计。但实测弹簧的质量为$m_0 = 35.03$ g，与砝码质量的数量级相同，其对振动周期的影响不能忽略。

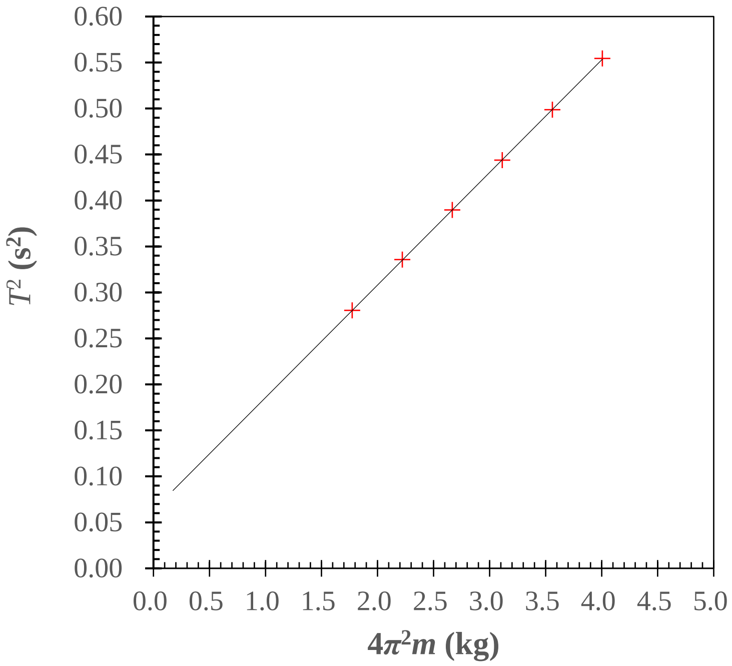

图 1　T^2与$4\pi^2 m$关系图

对周期公式进行修改。假设弹簧以等效质量cm_0参加振子的振动，c为等效系数，周期公式可改写为：

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m + cm_0}{k}} \tag{5}$$

对上式两边取平方，拟合公式变为：

$$T^2 = \frac{4\pi^2 m}{k} + \frac{4\pi^2 cm_0}{k} \tag{6}$$

利用上式和 Excel 程序的 linest 函数对T^2和$4\pi^2 m$作截距不为 0 的最小二乘法直线拟合、利用 tinv 函数计算t因子，可得到：

斜率$b = 0.122395$

斜率标准偏差$s_b = 0.000319$

斜率不确定度$U_b = tinv(1 - 0.95, 6 - 2) \times s_b = 0.000886$

进而可得弹簧的劲度系数为$k = 1/b = 8.17028$，$U_k = \left|\frac{\partial k}{\partial b}\right| U_b = \frac{1}{b^2} U_b = 0.05915$。因此，弹簧的劲度系数为$k = (8.17 \pm 0.06)$ N/s。其相对不确定度约为 7‰，与周期测量和砝码质量测量的相对误差数量级接近，也与 A 部分劲度系数的相对不确定度数量级接近。

此外，用胡克定律得到的弹簧劲度系数为$k = (8.066 \pm 0.026)$ N/s。用周期公式得到的弹簧劲度系数为$k = (8.17 \pm 0.06)$ N/s。两种方法所得劲度系数之差（0.104）与其不确定度之和（0.086）接近，也表明实验结果是合理的。

3. 分析讨论（举例）

1. 学习了用两种方法测量同一个物理量，并对实验结果进行比较、分析判断其是否合理的方法。

2. （从理论上推导（6）式中圆柱形弹簧的等效质量系数c的参考值。）

3. （根据（6）式最小二乘法直线拟合所得截距及其不确定度，计算等效系数c及其不确定度，并与理论推导的参考值相比较。）

4. （说明为了减小实验中弹簧伸长量、振子周期等参数的测量误差，采取了哪些方法。）

原始数据

（附上上课教师签字的原始数据。）