第三章　微分中值定理及导数应用

本节内容要点

$f'(x)$　　$f(x)$

一. 考试内容概要

（一）微分中值定理

（二）导数的应用

二. 常考题型与典型例题

题型一　求极限

题型二　函数的极值和最值，曲线的凹向与拐点

题型三　曲线的渐近线

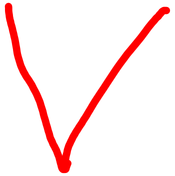
题型四　方程的根

题型五　不等式的证明

题型六　中值定理的证明题

第三章 微分中值定理与导数的应用

考试内容概要

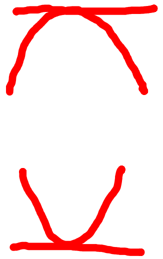


|x|

（一）微分中值定理

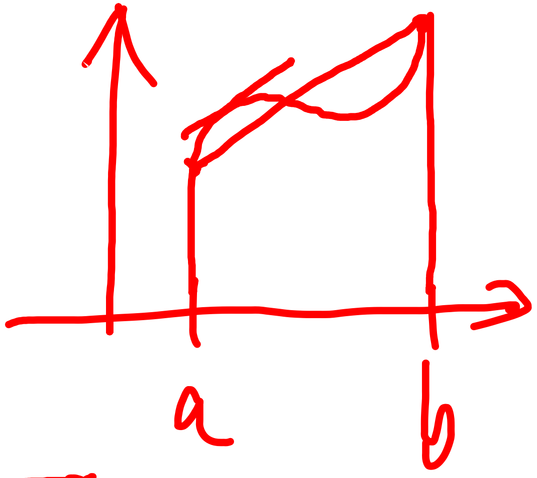
定理1（费马引理）

① + ②



如果函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导，且在 x_0 处取得极值，那么

$\boxed{f'(x_0)=0.}$



定理2（罗尔定理）

① $m = M$

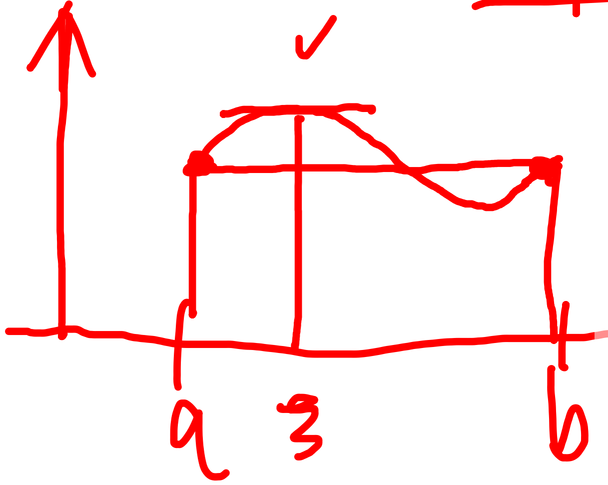
② $m \neq M$

若 1）$f(x)$ 在 $[a,b]$上连续；

2）$f(x)$ 在 (a,b) 内可导；✓

? 3）$f(a)=f(b)$； ✓

则 $\exists\xi\in(a,b)$，使 $\boxed{f'(\xi)=0.}$



定理3（拉格朗日中值定理）

$f'(\xi)=f(b)-f(a)$

$\begin{cases} y=f(t) \\ x=F(t) \end{cases}$ ✓

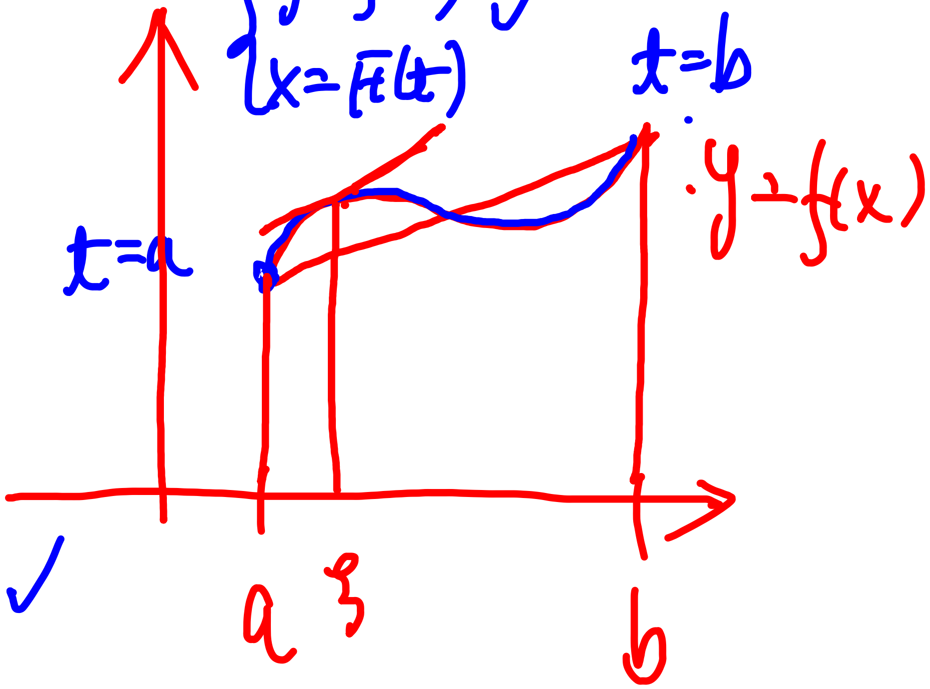
若 1）$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续；

2）$f(x)$ 在 (a,b) 内可导；

$f(a)=f(b)$

则 $\exists\xi\in(a,b)$, 使

$$\boxed{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi).}$$



① ξ

$f(x)$ $f'(x)$ ✓

② 关系

定理4（柯西中值定理）

若 1）$f(x),F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续；

2）$f(x),F(x)$ 在 (a,b) 内可导，且 $F'(x)\neq 0$；

$$\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$$

则 $\exists\xi\in(a,b)$, 使

$$\boxed{\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}}$$

* 推 *

✓ 罗 ⇄ 拉 ⇄ 柯

$f(b)=f(a)$ 特例　　$F(x)=x$

定理5（皮亚诺型余项泰勒公式）

设 $f(x)$ 在 x_0 点 n 阶可导, 那么

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$

多项式

其中 $R_n(x)=o(x-x_0)^n$, $(x\to x_0)$

若 $x_0=0$, 则得麦克劳林公式

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_n(x)$$

定理6（拉格朗日型余项泰勒公式）

设 $f(x)$ 在含 x_0 的区间 (a,b) 内 $n+1$ 阶可导, 那么对 $\forall x\in(a,b)$, 至少存在一个 ξ, 使

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$

其中 $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$, ξ 在 x_0 与 x 之间.

共同点:
① 多项式逼近
② $f(x)$ ~ $f^{(n)}(x)$

不同点:
1) 条件
2) 余项

皮: 局部 {极限, 极值}

拉: 整体 {最值, 不等式}

x_0? 信息多

$$(1)\quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$(2)\quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n-1})$$

$$(3)\quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$$

$$(4)\quad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} + o(x^n)$$

$$(5)\quad (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)$$

（二）导数应用

1.函数的单调性

定理7 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导。

1）若在 (a,b) 内 $f'(x)>0$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增；

2）若在 (a,b) 内 $f'(x)<0$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调减；

2.函数的极值

定义（极值） 若 $\exists\delta>0$，使得

$\forall x\in U(x_0,\delta)$ 恒有 $f(x)\geq f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在 x_0 取**极小值**.

$\forall x\in U(x_0,\delta)$ 恒有 $f(x)\leq f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在 x_0 取**极大值**.

定理8（极值的必要条件）

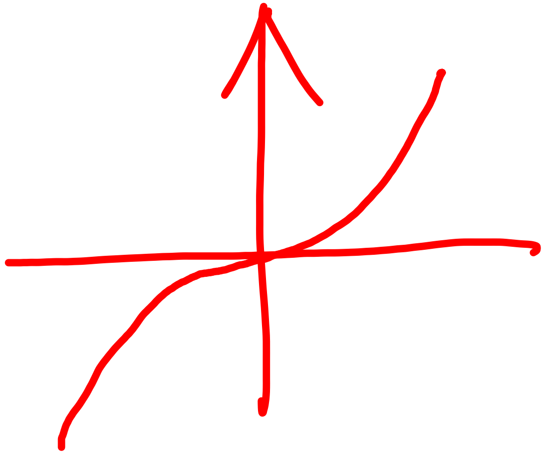
若 $f(x)$ 在 x_0 处可导，且在 x_0 处取得极值，则

$\rightarrow$ $f'(x_0)=0$

$|x|$

极值点 $\overset{\not\rightarrow}{\underset{\not\leftarrow}{}}$ 驻点

x^3



f(x)可导 $\rightleftarrows$

可能极值点 $\begin{cases} f'(x_0)=0 \\ f'(x_0)\text{不存在} \end{cases}$

定理9（极值的第一充分条件）

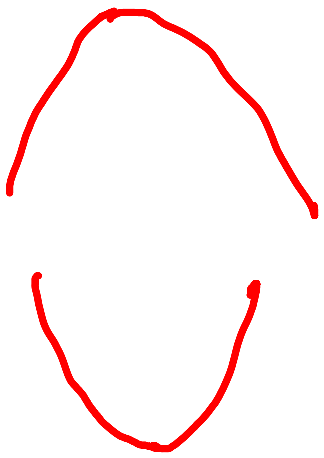
① ② $f(x_0)$不存在

设 $f(x)$ 在 $\mathring{U}(x_0,\delta)$ 内可导, 且 $f'(x_0)=0$（或 $f(x)$ 在 x_0 处连续）

（1）若 $x<x_0$ 时， $f'(x)\geq 0$; $x>x_0$ 时， $f'(x)\leq 0$, 则 f 在 x_0 处取极大值.

（2）若 $x<x_0$ 时, $f'(x)\leq 0$; $x>x_0$ 时, $f'(x)\geq 0$, 则 f 在 x_0 处取极小值.

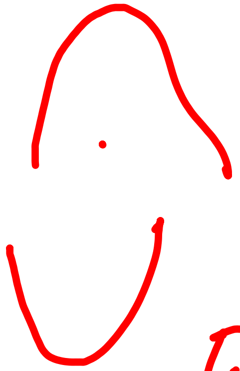
（3）若 $f'(x)$ 在 x_0 的两侧不变号，则 f 在 x_0 无极值.



定理10（极值的第二充分条件） 设 $f'(x_0)=0, f''(x_0)\neq 0$

（1）当 $f''(x_0)<0$， $f(x)$ 在 x_0 处取极大值.

（2）当 $f''(x_0)>0$， $f(x)$ 在 x_0 处取极小值.



1

2

3.函数的最大最小值

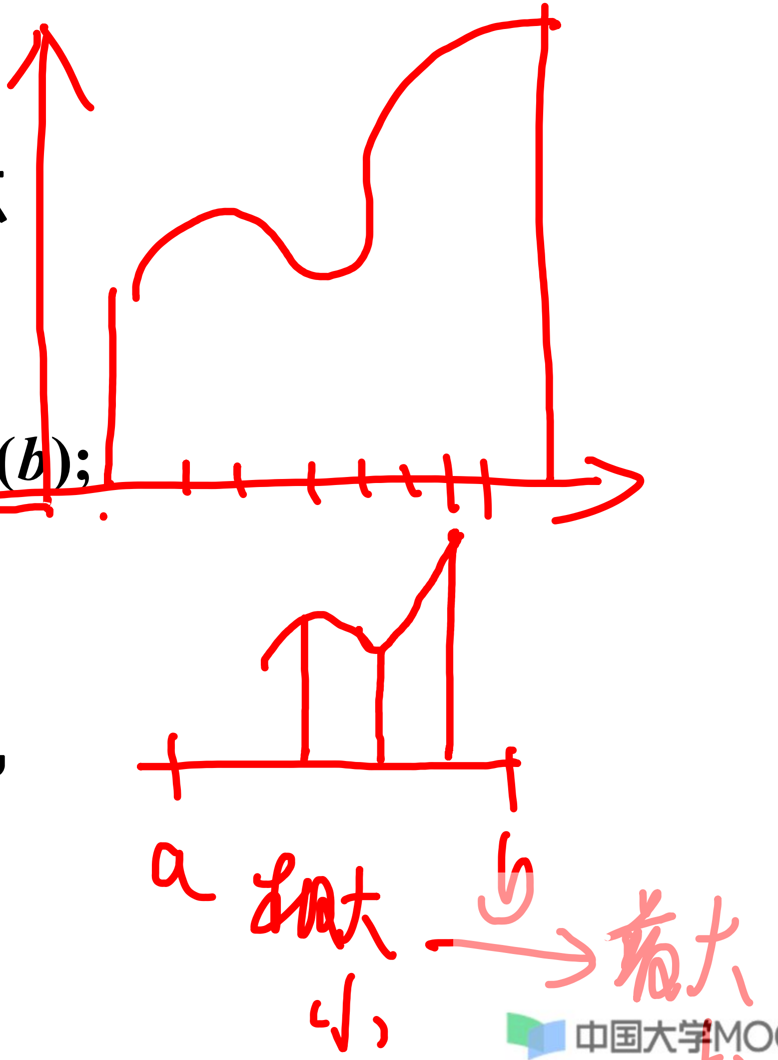
（1）求连续函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最值

第一步： 求出 $f(x)$ 在 (a,b) 内的驻点和不可导的点 ① ②

$x_1,x_2,\cdots x_n$;

第二步： 求出函数值 $f(x_1),f(x_2),\cdots f(x_n),f(a),f(b)$;

第三步： 比较以上各点函数值.



【注】 若连续函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内仅有唯一极值点，

（2）最大最小值的应用题

第一步： 建立目标函数 $y=f(x)$

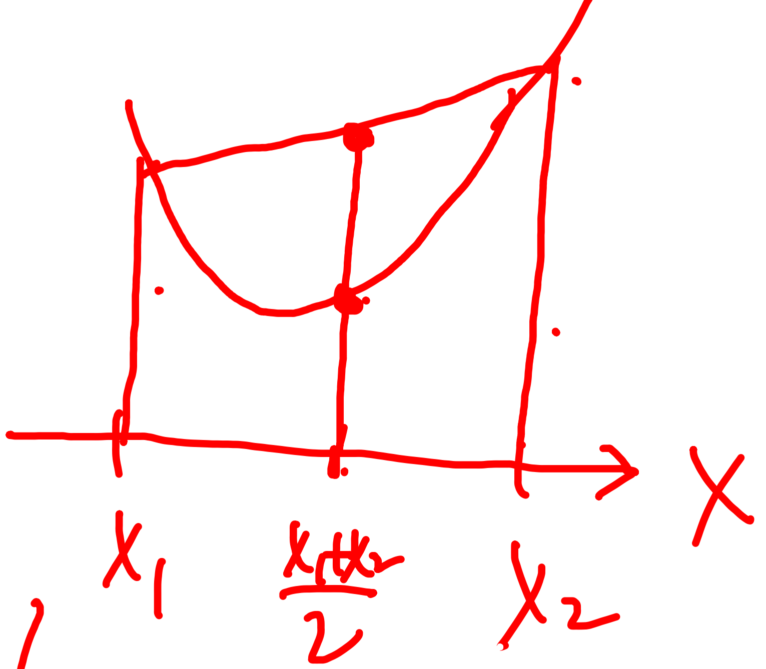
第二步：

4.曲线的凹凸性

定义 3

凹 $\quad f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)<\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$

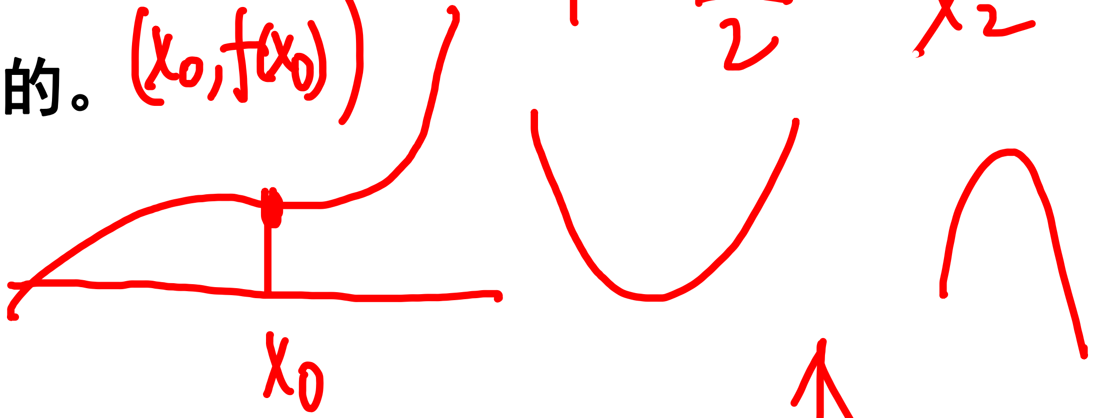
凸 $\quad f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)>\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$



定理 11 若在区间 I 上 $f''(x)>0\ (<0)$，则曲线 $y=f(x)$ 在 I 上是凹（凸）的。

$(x_0,f(x_0))$

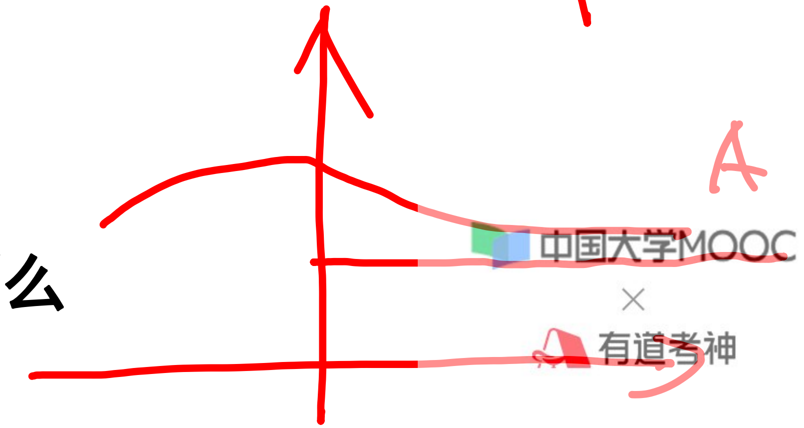
定义4（拐点）



判定（必要条件与充分条件）

$f(x)=\arctan x$

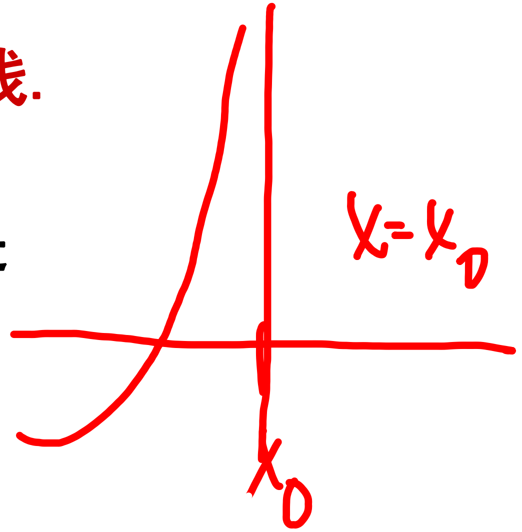
5.曲线的渐近线

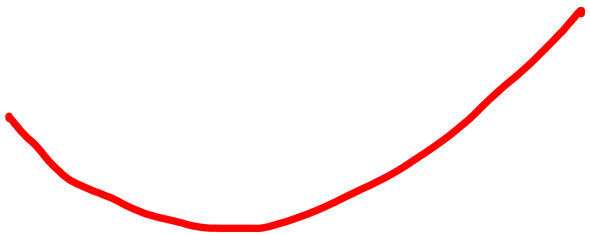


1) 若 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ ($\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$, 或 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$) 那么 $y=A$ 是曲线 $y=f(x)$ 的水平渐近线.

2） 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$，那么 $x=x_0$ 是 $y=f(x)$ 的垂直渐近线.

3） 若 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a$，$b=\lim\limits_{x\to\infty}\big(f(x)-ax\big)$，那么 $y=ax+b$ 是 $y=f(x)$ 的斜渐近线.

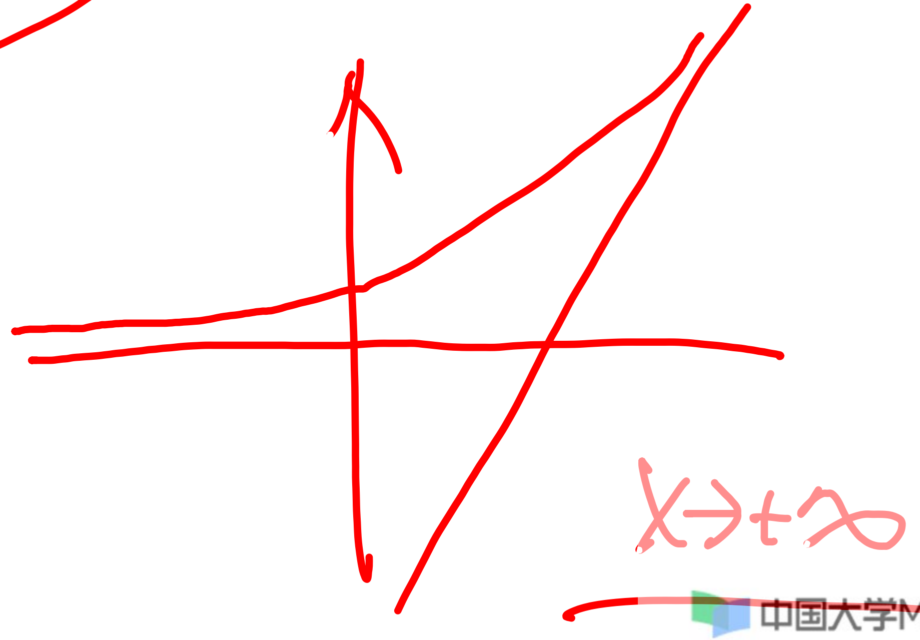




6.函数的作图

7.曲线的弧微分与曲率(数三不要求)

曲率 $K=\dfrac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$ （直角）



曲率半径 $R=\dfrac{1}{K}$

8. 导数在经济学中的应用（仅数三要求）

1.经济学中常见的函数

1）需求函数： $x=\varphi(p)$

x 为某产品的需求量，其 p 为价格. 需求函数的反函数

$p=\varphi^{-1}(x)$ 称为价格函数.

2）供给函数： $x=\psi(p)$

x 为某产品的供给量，p 为价格.

3）成本函数： $C=C(x)=C_1+C_2(x)$.

C_1 为固定成本，$C_2(x)$ 为可变成本，x 表示产量.

平均成本 $AC=\overline{C}=\dfrac{C}{x}=\dfrac{C_1}{x}+\dfrac{C_2(x)}{x}$

4）收益函数 $R = R(x) = px$

销售量 x 与销售单价 p 之积.

5）利润函数 $L = L(x) = R(x) - C(x)$

（x： 销售量）

2.边际函数与边际分析

1）边际函数：设 $y = f(x)$ 可导，则称 $f'(x)$ 为边际函数，

$f'(x_0)$ 称为 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的边际值.

（a）边际成本 $MC = C'(q)$ q 是产量

（b）边际收益 $MR = R'(q)$ q 是产量

（c）边际利润 $ML = L'(q)$ q 是销售量

3.弹性函数与弹性分析

①弹性函数：设 $y=f(x)$ 可导，

$$\eta=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y/y}{\Delta x/x}=f'(x)\frac{x}{y}=\frac{f'(x)}{f(x)}x$$

（a）需求的价格弹性： $\eta_d=\dfrac{p}{\varphi(p)}\varphi'(p).\quad (\eta_d<0)$

$$\eta_d=-\frac{p}{\varphi(p)}\varphi'(p)\qquad (\eta_d>0)$$

（b）供给的价格弹性：

$$\eta_s=\frac{p}{\psi(p)}\psi'(p)$$

【例1】(2014) 设某商品的需求函数为 $Q=40-2p$（p 为商品的价格），则该商品的边际收益为 ____________.

【解】由题设知收益函数为

$$R=pQ=\frac{40-Q}{2}\cdot Q$$

则边际收益为

$$\frac{dR}{dQ}=20-Q$$

【注】边际收益是“当商品的需求量在Q 的基础上再增加一件所获得的收益”，所以边际收益为 $\frac{dR}{dQ}$. 部分考生错误的将 $\frac{dR}{dp}$ 当作边际收益.

【例2】(2017) 设生产某产品的平均成本 $\overline{C}(Q)=1+e^{-Q}$，其中产量为 Q，则边际成本为 ________.

【解】成本 $C(Q)=\overline{C}(Q)Q=Q(1+e^{-Q})$

边际成本为 $\dfrac{dC}{dQ}=(1+e^{-Q})-Qe^{-Q}=1+(1-Q)e^{-Q}$

【例3】(2009)设某产品的需求函数为 $Q=Q(p)$：其对应价格 p 的弹性 $\xi_p=0.2$，则当需求量为10000件时，价格增加1元会使产品收益增加 12000 元。

【解】由题设知 $-\dfrac{p}{Q}\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}p}=\varepsilon_p=0.2$

收益函数 $R=Qp$

收益微分为

$$\mathrm{d}R=pdQ+Qdp=Q(1+\frac{p}{Q}\frac{dQ}{dp})dp=Q(1-\varepsilon_p)dp$$

当 $Q=10000, dp=1$ 时，产品的收益增加

$$\mathrm{d}R=10000\times(1-0.2)\times1=8000\text{（元）}$$

【例4】（2010） 设某商品的收益函数为 $R(p)$，收益弹性为 $1+p^3$，其中 p 为价格，且 $R(1)=1$，则 $R(p)=$ ______.

【解】 由题意知 $\dfrac{p}{R}\cdot\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}p}=1+p^3$，即

$$\frac{\mathrm{d}R}{R}=\left(\frac{1}{p}+p^2\right)\mathrm{d}p$$

$$\ln R=\ln p+\frac{1}{3}p^3+C$$

$R(p)=p\mathrm{e}^{\frac{1}{3}p^3+C}$，由 $R(1)=1$ 得 $C=-\dfrac{1}{3}$，故

$$R(p)=p\mathrm{e}^{\frac{1}{3}(p^3-1)}$$

还不关注，你就慢了