

# 高数基础班 (11)

11	不定积分举例：定积分的概念、性质及计算方法；变上限积分	P79-P87
----	-----------------------------	---------



还不关注，  
你就慢了



# 常考题型与典型例题

常考题型

求不定积分（换元、分部）

【例18】  $\int \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【解1】 令  $\sqrt{1-x} = t$ ,  $1-x=t^2$ ,  $x=1-t^2$ ,  $dx = -2t dt$

$$\text{原式} = \int \frac{-2t}{(1+t^2)t} dt = -2 \int \frac{dt}{1+t^2} = -2 \arctan t + C = -2 \arctan \sqrt{1-x} + C$$

【解2】

$$\text{原式} = -2 \int \frac{d\sqrt{1-x}}{1+(\sqrt{1-x})^2} = -2 \arctan \sqrt{1-x} + C$$

【例19】 设  $f(x) = \begin{cases} e^x, & \underline{x \geq 0}, \\ \cos x, & x < 0, \end{cases}$  则  $\int f(x)dx = \underline{\hspace{2cm}}$ .

【解1】  $\int f(x)dx = \begin{cases} e^x + c_1, & x \geq 0 \\ \sin x + c_2, & x < 0 \end{cases}$

$$\int f(x)dx = \begin{cases} e^x + C, & x \geq 0 \\ \sin x + C, & x < 0 \end{cases}$$

$\therefore 1 + c_1 = c_2 \quad \text{令 } c_1 = C, \quad c_2 = 1 + C$

$\int f(x)dx = \begin{cases} e^x + C, & x \geq 0 \\ \sin x + 1 + C, & x < 0 \end{cases} \quad \checkmark$

【解2】  $f(x)$  连续,  $F(x) = \int_0^x f(t)dt$  是  $f(x)$  原函数,

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

$$F(x) = \begin{cases} \int_0^x e^t dt, & x \geq 0 \\ \int_0^x \cos t dt, & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} e^x - 1, & x \geq 0 \\ \sin x, & x < 0 \end{cases}$$

【例20】(2016年1, 2) 已知函数  $f(x) = \begin{cases} 2(x-1), & x < 1, \\ \ln x, & x \geq 1, \end{cases}$   $\int \ln x dx = x \ln x - x + C$

则  $f(x)$  的一个原函数是

X (A)  $F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x < 1, \\ x(\ln x - 1), & x \geq 1, \end{cases}$   $x=1?$

X (B)  $F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x < 1, \\ x(\ln x + 1) - 1, & x \geq 1, \end{cases}$   $x=1?$

X (C)  $F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x < 1, \\ x(\ln x + 1) + 1, & x \geq 1, \end{cases}$   $x=1?$

✓ (D)  $F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x < 1, \\ x(\ln x - 1) + 1, & x \geq 1, \end{cases}$   $x=1?$

【解1】  $\int f(x) dx = \begin{cases} (x-1)^2 + C_1, & x < 1 \\ x(\ln x - 1) + C_2, & x \geq 1 \end{cases}$   $C_1 = C_2$

$= \begin{cases} (x-1)^2 + C \\ x(\ln x - 1) + 1 + C \end{cases}$

【解2】 验证  $F'(x) \equiv f(x)$

【例21】计算  $\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx (a > 0)$ .

【解1】令  $x = a \sin t$

$$\frac{x}{a} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int \frac{a^2 \sin^2 t}{a \cos t} a \cos t dt = \frac{a^2}{2} \int (1 - \cos 2t) dt = \frac{a^2}{2} (t - \frac{1}{2} \sin 2t) + C \\ &= \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} - \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + C \end{aligned}$$

【解2】 $\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = -\int x d\sqrt{a^2 - x^2}$

$$\begin{aligned} &= -x \sqrt{a^2 - x^2} + \int \sqrt{a^2 - x^2} dx \\ &= -x \sqrt{a^2 - x^2} + \int \frac{a^2 - x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx \end{aligned}$$

分部

$$\text{原式} = -\frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C$$

【例22】(2006年2) 求  $\int \frac{\arcsine^x}{e^x} dx$ .

$$e^{-x} dx = -de^{-x}$$

【解1】  $\int \frac{\arcsine^x}{e^x} dx = -\int \arcsine^x d(e^{-x}) = -\frac{\arcsine^x}{e^x} + \int \frac{dx}{\sqrt{1-e^{2x}}}.$

$$\int \frac{e^{-x} e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} dx$$

在  $\int \frac{dx}{\sqrt{1-e^{2x}}}$  中, 令  $\sqrt{1-e^{2x}} = t$ , 则  $dx = \frac{-t dt}{1-t^2}$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-e^{2x}}} = -\int \frac{dt}{1-t^2} = -\frac{1}{2} \ln \frac{1+t}{1-t} + C$$

分部+换元

$$= -\frac{1}{2} \ln \frac{1+\sqrt{1-e^{2x}}}{1-\sqrt{1-e^{2x}}} + C$$

$$\int \frac{\arcsine^x}{e^x} dx = -\frac{\arcsine^x}{e^x} - \frac{1}{2} \ln \frac{1+\sqrt{1-e^{2x}}}{1-\sqrt{1-e^{2x}}} + C.$$

【解2】 令  $\arcsine^x = t$ , 则  $x = \ln \sin t$ ,  $dx = \frac{\cos t}{\sin t} dt$ .

$$\int \frac{\arcsine^x}{e^x} dx = \int \frac{t}{\sin t} \cdot \frac{\cos t}{\sin t} dt = -\int t d \frac{1}{\sin t}$$

$$= -\frac{t}{\sin t} + \int \frac{1}{\sin t} dt$$

$$= -\frac{t}{\sin t} - \ln |\csc t + \cot t| + C$$

$$= -\frac{\arcsine^x}{e^x} - \ln \left| \frac{1}{e^x} + \frac{\sqrt{1-e^{2x}}}{e^x} \right| + C$$

$$= -\frac{\arcsine^x}{e^x} - \ln(1 + \sqrt{1-e^{2x}}) + x + C.$$

提元+分部

【例23】(2011年3) 求不定积分  $\int \frac{\arcsin \sqrt{x} + \ln x}{\sqrt{x}} dx$ .

【解】  $\int \frac{\arcsin \sqrt{x} + \ln x}{\sqrt{x}} dx = 2 \int (\arcsin \sqrt{x} + \ln x) d\sqrt{x}$

$$= 2\sqrt{x}(\arcsin \sqrt{x} + \ln x) - \int \frac{dx}{\sqrt{1-x}} - 2 \int \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

$$= 2\sqrt{x}(\arcsin \sqrt{x} + \ln x) + \int \frac{d(1-x)}{\sqrt{1-x}} - 4\sqrt{x}$$

$$= 2\sqrt{x}(\arcsin \sqrt{x} + \ln x) + 2\sqrt{1-x} - 4\sqrt{x} + C.$$

分部 + 换元  
 $\frac{dx}{\sqrt{x}}$



【例24】(2009年2, 3) 计算不定积分  $\int \ln\left(1 + \sqrt{\frac{1+x}{x}}\right) dx \quad (x > 0)$ .

【解】 设  $\sqrt{\frac{1+x}{x}} = t$  , 则  $x = \frac{1}{t^2 - 1}$  (Handwritten:  $\int \ln(1+t) dt \cdot \frac{1}{t^2-1}$ )

$$\int \ln\left(1 + \sqrt{\frac{1+x}{x}}\right) dx = \int \ln(1+t) d\frac{1}{t^2-1} = \frac{\ln(1+t)}{t^2-1} - \int \frac{1}{t^2-1} \cdot \frac{1}{t+1} dt.$$

$$\int \frac{1}{(t^2-1)(t+1)} dt = \frac{1}{2} \int \frac{(t+1) - (t-1)}{(t^2-1)(t+1)} dt = \frac{1}{4} \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + \frac{1}{2(t+1)} + C,$$

$$\int \ln\left(1 + \sqrt{\frac{1+x}{x}}\right) dx = \frac{\ln(1+t)}{t^2-1} + \frac{1}{4} \ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right| - \frac{1}{2(t+1)} + C$$

【例25】(1994年5) 已知  $\frac{\sin x}{x}$  是  $f(x)$  的一个原函数, 求

$$\int x^3 \underline{f'(x)} dx$$

【解】  $f(x) = \left( \frac{\sin x}{x} \right)^{dx} = \underline{\frac{x \cos x - \sin x}{x^2}}$

$- 3 \int x^4 \boxed{f(x) dx}$

$$\int x^3 f'(x) dx = \int x^3 \underline{df(x)} = x^3 f(x) - 3 \int x^2 d\left(\frac{\sin x}{x}\right)$$

$$= x^3 \underline{f(x)} - 3 \left[ x^2 \frac{\sin x}{x} - 2 \int \sin x dx \right]$$

$$= x^3 \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} - 3x \sin x - 6 \cos x + C$$

$$= x^2 \cos x - 4x \sin x - 6 \cos x + C.$$

【例26】(2002年3, 4) 设  $f(\sin^2 x) = \frac{x}{\sin x}$ , 求  $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} \underline{f(x)} dx$ .

【解】 令  $u = \sin^2 x$ , 则有  $\sin x = \sqrt{u}$ ,  $x = \arcsin \sqrt{u}$ ,

$$f(x) = \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x}}.$$

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} f(x) dx = \int \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} dx$$

$$= -\int \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} d(1-x) = -2 \int \arcsin \sqrt{x} d\sqrt{1-x}$$

$$= -2\sqrt{1-x} \arcsin \sqrt{x} + 2 \int \sqrt{1-x} \frac{1}{\sqrt{1-x}} d\sqrt{x}$$

$$= -2\sqrt{1-x} \arcsin \sqrt{x} + 2\sqrt{x} + C.$$

# 第五章 定积分与反常积分

## 第一节 定积分

## 第二节 反常 积分

# 第一节 定积分

## 本节内容要点

### 一. 考试内容概要

(一) 定积分概念

(二) 定积分的性质

(三) 积分上限的函数 \*

(四) 定积分的计算 \*

## 二. 常考题型与典型例题

题型一 定积分的概念、性质及几何意义

题型二 定积分计算

题型三 变上限定积分

# 第一节 定积分

## 考试内容概要

### (一) 定积分的概念

1. 定积分的定义  $\int_a^b f(x) dx \triangleq \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \underbrace{f(\xi_i)}_{\text{数}} \underbrace{\Delta x_i}_{\text{可积}}$

【注】(1)  $\lambda \rightarrow 0$  与  $n \rightarrow \infty$  不等价;

(2)  $\int_a^b f(x) dx$  仅与  $f(x)$  和  $[a, b]$  有关;  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt$ .

(3) 极限  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$  与  $\xi_i$  的取法和区间  $[a, b]$  的分法无关.

存在

$$\int_0^1 f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \underbrace{f(\xi_i)}_{\text{数}} \underbrace{\Delta x_i}_{\text{可积}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right)$$

① 分 ✓

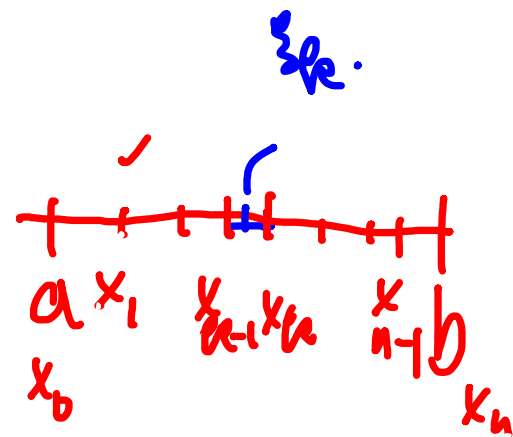
② 点 ✓

③ 和

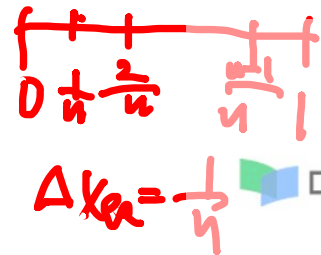
④ 数

① 存在性——可积性

② 值——计算



“ $f(\xi_k) \Delta x_k$ ”  
“微分因子”

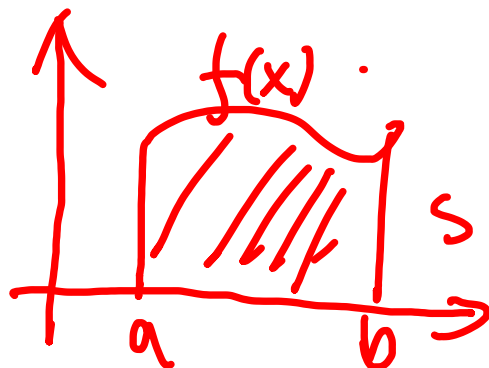


## 2. 定积分存在的充分条件

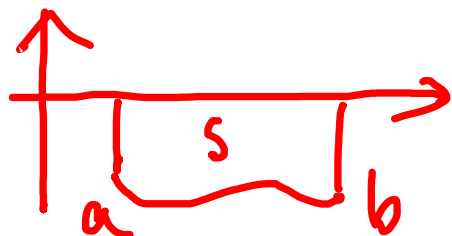
- (1)  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续;
- (2)  $f(x)$  在  $[a, b]$  上有界且只有有限个间断点;
- (3)  $f(x)$  在  $[a, b]$  上仅有有限个第一类间断点;

## 3. 定积分的几何意义

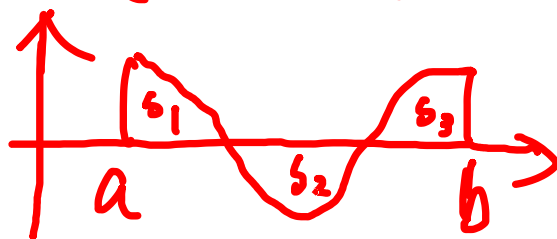
①'  $f(x) > 0$



②  $f(x) < 0$



③  $f(x)$  正负皆有



可积  $\longleftrightarrow$  有界

$$D(x) = \begin{cases} 1 & \text{有理数} \\ 0 & \text{无理数} \end{cases}$$

$$\int_0^1 D(x) dx = 1$$

$$\int_a^b f(x) dx = S$$

$$\int_a^b f(x) dx = -S$$

$$\int_a^b f(x) dx = S_1 + S_3 - S_2$$



## (二) 定积分的性质

### 1) 不等式:

(1) 若  $f(x) \leq g(x)$ , 则  $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$ .

(2) 若  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 则

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a).$$

(3)  $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$ .

### 2) 中值定理:

(1) 若  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 则

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a) \quad a < \xi < b$$

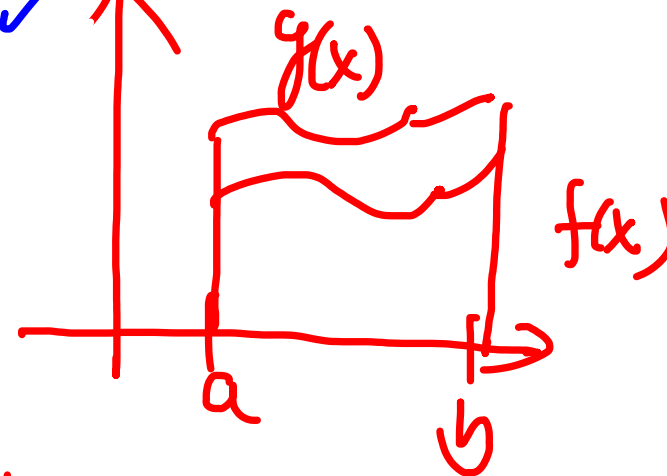
(2) 若  $f(x), g(x)$  在  $[a, b]$  上连续,  $g(x)$  不变号, 则

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx, \quad a \leq \xi \leq b$$

① 积分不等式  
② 极限 (夹逼)

$[a \leq b]$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 x^n dx = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} x^n dx$$



估值.

$$|a+b| \leq |a| + |b|$$

$$m \leq f(x) \leq M$$

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a)$$

$$F(b) - F(a) \stackrel{f(\xi)}{=} F'(\xi)(b-a)$$

$$a < \xi < b$$

中国大学MOOC

有道考神

① 证明  
② 变号取极限

### (三) 积分上限的函数 $\int_a^x f(t) dt = F(x)$ ✓

**定理:** 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 则  $\int_a^x f(t) dt$  在  $[a, b]$  上可导且  $(\int_a^x f(t) dt)' = f(x)$ .

① 微分 - 积分

② 原函数存在性.

$$(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t) dt)' = f(\psi(x))\psi'(x) - f(\varphi(x))\varphi'(x)$$

$$(\int_{e^x}^{x^2} f(t) dt)' = f(x^2) \cdot 2x - f(e^x) e^x$$

**定理:** 设  $f(x)$  连续, ✓

$$\int_a^k = \int_a^0 + \int_0^k$$

(1) 若  $f(x)$  是奇函数, 则  $\int_0^x f(t) dt$  是偶函数;

(2) 若  $f(x)$  是偶函数, 则  $\int_0^x f(t) dt$  是奇函数;

$$(\int_0^{\sin x} f(t) dt)' = f(\sin x) \cos x$$

$$(\int_{\cos x}^1 f(t) dt)' = -f(\cos x) (-\sin x)$$

[证] 令  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ ,

$$F(-x) = \int_0^{-x} f(t) dt \xrightarrow{t=-u} \int_0^x f(-u) (-du) = \int_0^x f(u) du = F(x)$$

## (四) 定积分的计算

1) 牛顿-莱布尼兹公式  $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$

2) 换元法  $\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$

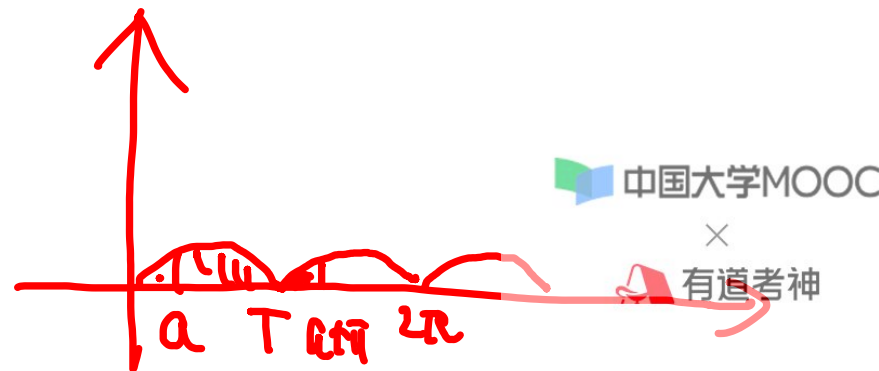
$x = \varphi(t)$

3) 分部积分法  $\int_a^b \underline{u} dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du.$

4) 利用奇偶性, 周期性

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \begin{cases} 0, & f(x) \text{ 为奇函数,} \\ 2 \int_0^a f(x) dx, & f(x) \text{ 为偶函数.} \end{cases}$$

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx.$$



5) 利用公式  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx$

$$(1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \begin{cases} \frac{n-1}{n} \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{1}{2} \frac{\pi}{2}, & n \text{ 偶} \\ \frac{n-1}{n} \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{2}{3}, & n \text{ 奇} \end{cases}$$

$f(x) \neq f(\pi-x)$

(2)  $\int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x dx = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{16}$$

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx$$

$$= \frac{\pi}{2} (-\arctan(\cos x)) \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2} \left[ \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \right] = \frac{\pi^2}{4}$$



×

