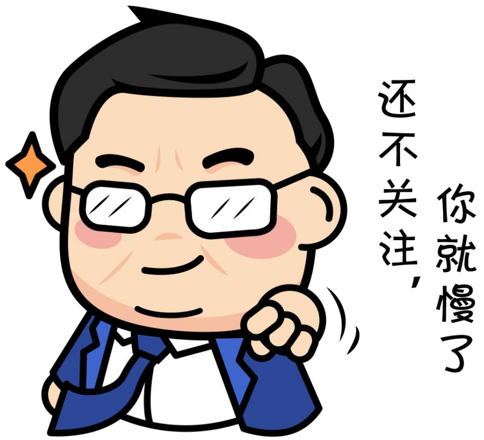
高数基础班（20）

20	常数项级数（定义、性质、敛散性的判别法及举例）	P149-P155



第十章 无穷级数

(数二不要求)

第一节 常数项级数 ✓

第二节 幂 级 数

第三节 傅里叶级数 (数三不要求)

第一节　常数项级数

本节内容要点

一. 考试内容概要

（一）级数的概念与性质

（二）级数的审敛准则

二. 常考题型与典型例题

常数项级数敛散性的判定

考试内容概要

（一）概念与性质

1. 级数的概念

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

无穷级数

$S_1 = u_1$

$S_2 = u_1 + u_2$

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} u_i$$

部分和

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} s_n = S$$

收. 发

①存在性. —— 敛散性 *

②值. —— 和

$S \approx S_n$

【例1】判定下列级数敛散性

（1）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln(1+\frac{1}{n})$;　　　　（2）$\sum\limits_{n=0}^{\infty}aq^{n}\ (a\neq 0)$.

【解】（1）$s_n=\ln(1+\frac{1}{1})+\ln(1+\frac{1}{2})+\cdots+\ln(1+\frac{1}{n})$

$$=\ln 2+\ln\frac{3}{2}+\cdots+\ln\frac{n+1}{n}$$

$$=\ln(\cancel{2}\cdot\frac{\cancel{3}}{\cancel{2}}\cdots\frac{n+1}{\cancel{n}})=\ln(n+1)$$

由于　$\lim\limits_{n\to\infty}s_n=\lim\limits_{n\to\infty}\ln(n+1)=\infty$

则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln(1+\frac{1}{n})$ 发散.

(2) $s_n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1}$

$$= \begin{cases} \dfrac{a(1-q^n)}{1-q}, & q \neq 1, \\ na, & q = 1. \end{cases}$$

$$a\underbrace{(1-1+1-1----)}_{0}$$

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \begin{cases} \dfrac{a}{1-q} & |q|<1 \quad \text{收.} \\ \infty & |q|>1 \\ \infty & q=1 \\ \dfrac{a[1-(-1)^n]}{2} & q=-1 \end{cases}$$

发.

2. 级数的性质

1）若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛于 s，则 $\sum_{n=1}^{\infty} ku_n$ 也收敛，且其和为 ks.

2）若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 分别收敛于 s, σ. 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ 收敛于 $s \pm \sigma$.

【注】 收敛±发散=发散；　　发散±发散=不确定

3） 在级数中去掉、加上或改变有限项不影响级数的敛散性.

4） 收敛级数加括号仍收敛且和不变.

【注】1）加括号收敛 $\xrightarrow{\times}$ 原级数收敛；

2）加括号发散 $\longrightarrow$ 原级数发散；

$(1-1)+(1-1)+\cdots\cdots$ 发散.

0 0

S_n

5）(级数收敛必要条件)

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 收敛} \longrightarrow \lim_{n\to\infty} u_n = 0$$

$S_n=\sqrt{n}.$

証发

$S_n - S_{n-1} = u_n.$

$\downarrow \quad \downarrow$

$S \quad S$

（二）级数的审敛准则

(1) 正项级数 $(\sum_{n=1}^{\infty} u_n, u_n \geq 0)$

S_n

基本定理： $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 $\Leftrightarrow s_n$ 上有界

$S_n \to +\infty$

$S_n \leq S_n$

1) 比较判别法：设 $u_n \leq v_n$，则

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{ 收敛} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 收敛}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 发散} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{ 发散}$$

大 小 小 大

若 u_n 发散 $\to S_n \to +\infty$

收

发

放大

$u_n \leq v_n$ 收.

$v_n \leq u_n$

发

2) 比较法极限形式：设 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=l\ (0\le l\le +\infty)$

①若 $0<l<+\infty$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 同敛散.

②若 $l=0$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛 $\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散 $\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散.

③若 $l=+\infty$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散 $\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛 $\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛，

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho$

两个常用级数

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 当 $p>1$ 时收敛，当 $p\le 1$ 时发散；

$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho$

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}aq^n\ (a>0,q>0)$ 当 $q<1$ 时收敛，当 $q\ge 1$ 时发散.

3) **比值法**：设 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ $\begin{cases}\text{收敛}, & \rho<1, \\ \text{发散}, & \rho>1, \\ \text{不一定}, & \rho=1,\end{cases}$

n^p · $\ln n$ · 1) 2)

$\sqrt[n]{a\ln^n}\to \ln$

4) **根值法**：设 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ $\begin{cases}\text{收敛}, & \rho<1, \\ \text{发散}, & \rho>1, \\ \text{不一定}, & \rho=1,\end{cases}$

比

a^n · $n!$ · n^n

3) 4)

	优	缺
1) 2)	适用广	不易算
3) 4)	方便	适用窄

3)·4) 1)·2)

$n\geq\frac{1}{n}$

5) 积分判别法： 设 $f(x)$ 是 $[1,+\infty)$ 上单调减, 非负的连续函数，且 $a_n = f(n)$

则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ 同敛散.

【例2】证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 当 $p>1$ 时收敛，当 $p\le 1$ 时发散.

$a_n = \frac{1}{n^p} = f(n)$, $f(x) = \frac{1}{x^p}$

$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$

$p>1$ 收, $p\le 1$ 发

$p>1$ 收, $p\le 1$ 发

【例3】判定级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln^p n}$ 的敛散性.

发

$\frac{1}{n\ln n} < \frac{1}{n}$ 发

发

[证]. $f(x) = \frac{1}{x\ln x}$ $[2,+\infty)$.

$a_n = \frac{1}{n\ln n} = f(n)$.

$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\ln x} = \ln\ln x\Big|_2^{+\infty} = +\infty$

(2) 交错级数 $\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n, u_n > 0\right)$

莱不尼兹准则：若（1）u_n 单调减；?   （2）$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ ✓

$\Leftarrow\!\!\!\!\times$ 则 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 收敛.

【注】 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 收敛. $\overset{\times}{\Longleftrightarrow}$ u_n 单调减且 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$

【例】 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n+(-1)^n}}$ 收敛，但 $u_n = \frac{1}{2^{n+(-1)^n}}$ 并不递减.

$$u_{2n+1} = \frac{1}{2^{2n+1-1}} = \frac{1}{2^{2n}}$$

$$u_{2n} = \frac{1}{2^{2n+1}}$$

$$\sum \frac{1}{2^{n+(-1)^n}}$$

$$\sqrt[n]{\frac{1}{2^{n+(-1)^n}}} = \frac{1}{2^{1+\frac{(-1)^n}{n}}} \to \frac{1}{2} < 1$$

(3) 任意项级数

1) 绝对收敛与条件收敛概念

(1) 若 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 必收敛，此时称 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛

(2) 若 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 发散，则称 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛

2) 绝对收敛和条件收敛的基本结论

①绝对收敛的级数一定收敛, 即 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

②条件收敛的级数的所有正项(或负项)构成的级数一定发散. 即:

$u_n>0$ $u_n<0$

$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 条件收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n+|u_n|}{2}$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n-|u_n|}{2}$ 发散.

常考题型与典型例题

常考题型

常数项级数敛散性判定

【例4】（2015年3）下列级数中发散的是（　）

收(A) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}$.　　a^n.

收(B) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\ln(1+\frac{1}{n})$.

√(C) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n+1}{\ln n}$.

收(D) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$.

【解1】直接法

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n+1}{\ln n}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln n}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$$

交　　正

收 + 发 = 发

$\frac{1}{\ln n}>\frac{1}{n}$

$\ln n<n$

【解2】排除法

(A) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n}}{3}=\frac{1}{3}<1$

$\lim_{n\to\infty}\frac{n^p}{(n+1)^p}=1$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^p}$

(B) $\ln(1+\frac{1}{n})\sim\frac{1}{n}$.

$\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}\,n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$ 收.

(C) $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{n!}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}=\frac{1}{e}<1$

1^∞

$=1$ ✗

【例5】（2013年3）设 $\{a_n\}$ 为正项数列，下列选项正确的是（　）

✗（A）若 $a_n > a_{n+1}$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛；

✗（B）若 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛，则 $a_n > a_{n+1}$；

✗（C）若 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则存在常数 $p>1$，使 $\lim_{n\to\infty}n^p a_n$ 存在；

✓（D）若存在常数 $p>1$，使 $\lim_{n\to\infty}n^p a_n$ 存在，则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛．

$a_n = (1+\frac{1}{n})$

$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$ 收敛，

$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{n\ln^2 n}}{\frac{1}{n^p}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n^{p-1}}{\ln^2 n} = +\infty$

【解1】直接法

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\frac{1}{n^p}}$ 存在 $A\neq 0$，$=0$

$\frac{1}{n^p}$ 收敛，

$a_n < \frac{1}{n^p}$，收敛，

【解2】排除法

$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^2 x} = -\frac{1}{\ln x}\Big|_2^{+\infty}$

收敛，

【例4】（09年1）设有两个数列 $\{a_n\},\{b_n\}$，若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$，则（　　）

(A) 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛. $=\sum \frac{1}{n}$

(B) 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 发散. $\sum \frac{1}{n^2}$

(C) 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 收敛时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2$ 收敛;

(D) 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 发散时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2$ 发散.

$b_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$　　$a_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

$b_n=\frac{1}{n}$　　$a_n=\frac{1}{n}$

$\sum \frac{1}{n^4}$

$a_n \to 0$

$\sum b_n$ 收敛 $\to \sum b_n a_n$ 收敛

(正项)

【解1】直接法　$\sum\limits_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 收敛 $\to \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n^2$ 收敛

$|b_n| \to 0 \Rightarrow |b_n|<1 \Rightarrow |b_n| > b_n^2$

$\sum b_n$ 收敛 $\not\to$ 　$b_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

【解2】排除法

$a_n \to 0$　　$|a_n|<1$　　$a_n^2<1 \Rightarrow a_n^2 b_n^2 \le b_n^2$

【例5】(2011年3) 设 $\{u_n\}$ 是数列，则下列命题正确的是(　　)

(A) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$ 收敛.

(B) 若 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

(C) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}-u_{2n})$ 收敛.

(D) 若 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}-u_{2n})$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

$1-1$

$u_n=1$ 发

$(1-1)+(1-1)+(1-)-$

$0 \quad 0 \quad 0$

收

发

$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\cdots$ 收

$\sum(u_{2n-1}-u_{2n})$

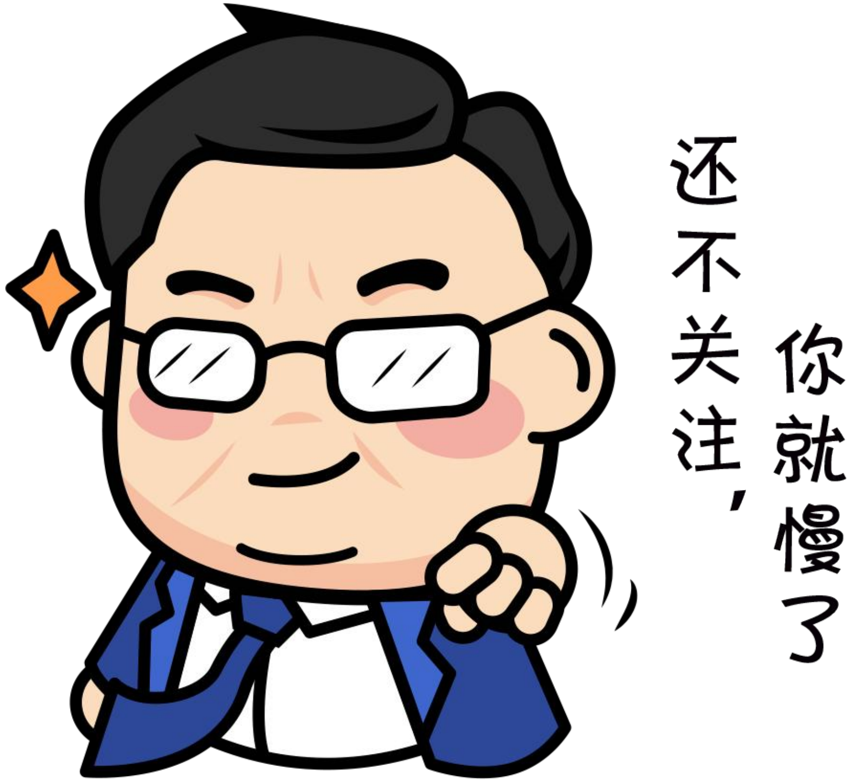
$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}\right)$

$=1+\frac{1}{2}+\cdots\frac{1}{n}\cdots\to+\infty$

发

【解1】直接法

【解2】排除法


还不关注，
你就慢了