高数基础班（17）

17	多元函数微分法及举例（复合函数微分法；隐函数微分法）	P129-P134

第二节　多元函数微分法

本节内容要点

一. 考试内容概要

（一）复合函数微分法

（二）隐函数微分法

二. 常考题型与典型例题

题型一　复合函数的偏导数与全微分

题型二　隐函数的偏导数与全微分

考试内容概要

$y=f(u)$, $u=g(x)$ 可导 $y=f[g(x)]$

$y'_x = y'_u u'_x$

$dy = \boxed{y'_x dx} = f'(u) g'(x)$

$= y'_u u'_x dx$

$= \boxed{y'_u du}$

（一）复合函数的微分法

定理4 设 $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$ 在点 (x,y) 处有对 x 及对 y 的偏导数，函数 $z=f(u,v)$ 在对应点 (u,v) 处有连续偏导数，则 $z=f[u(x,y),v(x,y)]$ 在点 (x,y) 处的两个偏导数存在，且有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\boxed{\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\boxed{\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

z

u v

x y x y

① ②

1 2

全微分形式的不变性

设函数 $z=f(u,v)$, $u=u(x,y)$ 及 $v=v(x,y)$ 都有连续的一阶偏导数，则复合函数 $z=f[u(x,y),v(x,y)]$ 的全微分

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y=\frac{\partial z}{\partial u}\mathrm{d}u+\frac{\partial z}{\partial v}\mathrm{d}v.$$

（二）隐函数的微分法

1）由方程 $F(x,y)=0$ 确定的隐函数 $y=y(x)$

$$\boxed{y'=-\frac{F'_x}{F'_y}.}$$

2）由方程 $F(x,y,z)=0$ 确定的隐函数 $z=z(x,y)$

若 $F(x,y,z)$ 在点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 的某一邻域内有连续偏导数，且 $F(x_0,y_0,z_0)=0$, $F'_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0.$ 则方程 $F(x,y,z)=0$ 在点 (x_0,y_0,z_0) 的某邻域可唯一确定一个有连续偏导数的函数 $z=z(x,y)$, 并有

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z},}\qquad \boxed{\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z}.}$$

常 考 题 型 与 典 型 例 题

常考题型

题型一　复合函数的偏导数与全微分

题型二　隐函数的偏导数与全微分

一.复合函数偏导数与全微分

【例1】(2011年1) 设函数 $F(x,y)=\int_0^{xy}\frac{\sin t}{1+t^2}\mathrm{d}t$，则

$$\left.\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right|_{\substack{x=0\\y=2}} = \_\_\_\_\_\_\_\_.$$

【解1】 $$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{y\sin xy}{1+x^2y^2}$$ ✓

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=\frac{y^2\cos(xy)(1+x^2y^2)-2xy^3\sin xy}{(1+x^2y^2)^2}$$?

故 $$\left.\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right|_{\substack{x=0\\y=2}}=4.$$

【例1】(2011年1) 设函数 $F(x,y)=\int_0^{xy}\frac{\sin t}{1+t^2}\mathrm{d}t$，则

$\left.\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right|_{\substack{x=0\\y=2}}=$ ________. $\varphi'(0)$

先代后求

【解2】 $\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{y\sin xy}{1+x^2y^2}$ $\quad F_x(x,2)=\frac{2\sin 2x}{1+4x^2}=\varphi(x)$, $\varphi(0)=0$

$\varphi'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\varphi(x)}{x}=4$

【例2】（2011年3）设 $z=(1+\frac{x}{y})^{\frac{x}{y}}$，则 $dz\big|_{(1,1)}=$ ________. $[(1+2\ln 2)(dx-dy)]$

【解1】令 $\frac{x}{y}=u$， $z=(1+u)^u$， $dz=z'_u du$　　$d\frac{x}{y}$

$z=e^{u\ln(1+u)}$.　　$dz=e^{u\ln(1+u)}\left[\ln(1+u)+\frac{u}{1+u}\right]\frac{ydx-xdy}{y^2}$

$dz\big|_{(1,1)}=2\left[\ln 2+\frac{1}{2}\right](dx-dy)=(1+2\ln 2)(dx-dy)$　　$u=1$

【解2】$z(x,1)=(1+x)^x=e^{x\ln(1+x)}$.　　先代后求

$z_x(x,1)=e^{x\ln(1+x)}\left[\ln(1+x)+\frac{x}{1+x}\right]$，　$z_x(1,1)=2\left[\ln 2+\frac{1}{2}\right]=2\ln 2+1$

$z(1,y)=(1+\frac{1}{y})^{\frac{1}{y}}\ \underline{\underline{\frac{1}{y}=u}}\ (1+u)^u$　　$z_y(1,y)=\left[(1+u)^u\right]'_u\left(-\frac{1}{y^2}\right)$，$z_y(1,1)=-(2\ln 2+1)$

【例3】(2007年, 1) 设 $f(u,v)$ 为二元可微函数，$z = f(x^y, y^x)$，

则 $\dfrac{\partial z}{\partial x} =$ ________.

$[yx^{y-1}f_1 + y^x \ln y f_2]$

x^y

a^x

【解】

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f_1 \cdot y x^{y-1} + f_2 y^x \ln y$$

【例4】(2017年1, 2) 设函数 $f(u,v)$ 具有2阶连续导数,

$y=f(e^x,\cos x)$, 求 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}$, $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}$.

$[\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}=f_u'(1,1),\ \left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}=f_u'(1,1)+f_{uu}''(1,1)-f_v'(1,1)]$

【解】 $\dfrac{dy}{dx}=f_1\cdot e^x+f_2(-\sin x)$.

$f_2(e^x,\cos x)$

$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}=f_1(1,1)$

$\dfrac{d^2y}{dx^2}=f_{11}(1,1)+f_1(1,1)-f_2(1,1)$

$\dfrac{d^2y}{dx^2}=f_{11}e^{2x}+f_1e^x+f_{22}(\sin^2x)+f_2(-\cos x)$

$+f_{12}(-e^x\sin x)$ $\qquad f_{21}(-e^x\sin x)$

【例5】（2019年3）设函数 $f(u,v)$ 具有2阶连续偏导数，函数

$g(x,y)=xy-f(x+y,x-y)$，求 $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}$. $[1-3f_{11}-f_{22}]$

$f_{12}-f_{21}=0$

【解】$\dfrac{\partial g}{\partial x}=y-f_1-f_2$，$\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}=-[f_{11}+f_{12}]-[f_{21}+f_{22}]$

$\dfrac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}=1-[f_{11}-f_{12}]-[f_{21}-f_{22}]$

$\dfrac{\partial g}{\partial y}=x-f_1+f_2$，$\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}=-[f_{11}-f_{12}]+[f_{21}-f_{22}]$

$\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}=1-3f_{11}-f_{22}$

【例6】(2009年2) 设 $z=f(x+y,x-y,xy)$，其中 f 具有二阶连续偏导数，求 $\mathrm{d}z$ 与 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

$\mathrm{d}z=f_1\,\mathrm{d}(x+y)+f_2\,\mathrm{d}(x-y)+f_3\,\mathrm{d}(xy)$

$=f_1(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)+f_2(\mathrm{d}x-\mathrm{d}y)+f_3(y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y)$

$=(\quad)\mathrm{d}x+(\quad)\mathrm{d}y$

【解】 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f_1'+f_2'+yf_3'$　　$\dfrac{\partial z}{\partial y}=f_1'-f_2'+xf_3'$

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y=(f_1'+f_2'+yf_3')\mathrm{d}x+(f_1'-f_2'+xf_3')\mathrm{d}y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{11}''-f_{12}''+xf_{13}''+f_{21}''-f_{22}''+xf_{23}''+f_3'+y(f_{31}''-f_{32}''+xf_{33}'')$$

$$=f_{11}''+(x+y)f_{13}''-f_{22}''+(x-y)f_{23}''+xyf_{33}''+f_3'$$

【例7】（2011年1, 2） 设函数 $z=f(xy,yg(x))$，其中函数 f 具有二阶连续偏导数，函数 $g(x)$ 可导且在 $x=1$ 处取得极值 $g(1)=1$. 求 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}$.

$g'(1)=0$

【解1】由 $z=f(xy,yg(x))$ 知

$$\frac{\partial z}{\partial x}=yf_1'+yg'(x)f_2',$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_1'+y[xf_{11}''+g(x)f_{12}'']+g'(x)f_2'+yg'(x)[xf_{21}''+g(x)f_{22}''].$$

?

由题意 $g(1)=1, g'(1)=0$，在上式中令 $x=1, y=1$ 得

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}=f_1'(1,1)+f_{11}''(1,1)+f_{12}''(1,1).$$

【例7】(2011年1, 2) 设函数 $z=f(xy,yg(x))$，其中函数 f 具有二阶连续偏导数，函数 $g(x)$ 可导且在 $x=1$ 处取得极值 $g(1)=1$. 求 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}$.

$x=1$

$g'(1)=0$

【解2】由 $z=f(xy,yg(x))$ 知

$$\frac{\partial z}{\partial x}=yf_1'+yg'(x)f_2',$$

由题意 $g(1)=1,g'(1)=0$，在上式中令 $x=1$ 得

$$z_x(1,y)=yf_1'(y,y)$$

先代后求

$$z_{xy}(1,y)=f_1'(y,y)+y[f_{11}''(y,y)+f_{12}''(y,y)]$$

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}=f_1'(1,1)+f_{11}''(1,1)+f_{12}''(1,1).$$

【例8】（2014年1，2）设函数 $f(u)$ 具有二阶连续导数，

$$z=f(e^x\cos y)\text{ 满足 }\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(4z+e^x\cos y)e^{2x}.$$

若 $f(0)=0, f'(0)=0$，求 $f(u)$ 的表达式。

【解】令 $e^x\cos y=u$，则 $z=f(u)$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'(u)e^x\cos y \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-f'(u)e^x\sin y,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''(u)e^{2x}\cos^2 y+f'(u)e^x\cos y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''(u)e^{2x}\sin^2 y-f'(u)e^x\cos y$$

$f''(u)e^{2x}$

$r^2-4=0,\ r_{1,2}=\pm 2$

$$f''(u)=4f(u)+u \qquad f''(u)-4f(u)=u$$

$$f(u)=C_1e^{2u}+C_2e^{-2u} \qquad f^*=au+b,$$

$f(u)=-\frac{1}{4}u$

$$a=-\frac{1}{4}, b=0.$$

$$f(u)=C_1e^{2u}+C_2e^{-2u}-\frac{1}{4}u$$

$$f(0)=0, f'(0)=0$$

$$C_1=\frac{1}{16}, C_2=-\frac{1}{16},$$

$$f(u)=\frac{1}{16}(e^{2u}-e^{-2u}-4u)$$

二、隐函数的偏导数与全微分

【例9】（2015年2，3）若函数 $z=z(x,y)$ 由方程

$e^{x+2y+3z}+xyz=1$ 确定，则 $dz|_{(0,0)}=$ ________.

【解1】由 $x=0,y=0$ 知 $z=0$

方程 $e^{x+2y+3z}+xyz=1$ 两端微分得

$$e^{x+2y+3z}(dx+2dy+3dz)+yzdx+xzdy+xydz=0$$

将 $x=0,y=0,z=0$ 代入上式得

$$dx+2dy+3dz=0$$

则 $dz|_{(0,0)}=-\dfrac{1}{3}(dx+2dy).$

【例9】（2015年2，3）若函数 $z = z(x, y)$ 由方程

$$e^{x+2y+3z} + xyz = 1$$ 确定，则 $dz|_{(0,0)} =$ ________.

$z_x(0,0)$　$z_y(0,0)$

【解2】由 $x = 0, y = 0$ 知 $z = 0$

$$dz|_{(0,0)} = z_x(0,0)dx + z_y(0,0)dy$$

在 $e^{x+2y+3z} + xyz = 1$ 中令 $y = 0$ 得，$e^{x+3z} = 1$，两边对 x 求导得

先代后求

$$e^{x+3z}(1 + 3z_x) = 0,$$

$$z_x(0,0) = -\frac{1}{3}$$

同理可得 $z_y(0,0) = -\dfrac{2}{3}$

则 $dz|_{(0,0)} = -\dfrac{1}{3}(dx + 2dy).$

【例10】（1988年4）已知 $u+e^u=xy$，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$.

$F(x,y,z)=0$, $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F_x}{F_z}$

【解1】等式 $u+e^u=xy$ 两端对 x 求偏导得

$$(1+e^u)\frac{\partial u}{\partial x}=y$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y}{1+e^u},$$

同理可得 $\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{x}{1+e^u}$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{(1+e^u)-e^u\frac{\partial u}{\partial y}y}{(1+e^u)^2}=\frac{1}{1+e^u}-\frac{xye^u}{(1+e^u)^3}$$

【解2】$u+e^u-xy=0$ 公式

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F_y}{F_z}$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_u}=-\frac{-y}{1+e^u}=\frac{y}{1+e^u}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_u}=-\frac{-x}{1+e^u}=\frac{x}{1+e^u}$$

【解3】微分

$$(1+e^u)du=ydx+xdy$$

$$du=\frac{y}{1+e^u}dx+\frac{x}{1+e^x}dy$$

$\dfrac{\partial u}{\partial x}$ $\dfrac{\partial u}{\partial y}$

【例11】（2010年1, 2）设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $F\left(\frac{y}{x},\frac{z}{x}\right)=0$ 确定，其中 F 为可微函数，且 $F_2'\neq 0$，则 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=$（　）.

（A） x　　（B） z　　（C） $-x$　　（D） $-z$

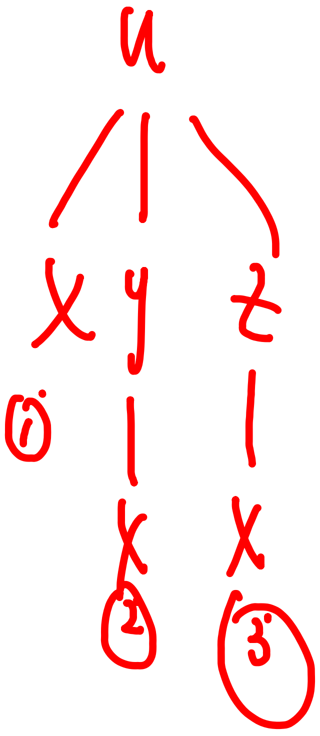
【解】 x $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{-\frac{y}{x^2}F_1-\frac{z}{x^2}F_2}{\frac{1}{x}F_2}$， y $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{1}{x}F_1}{\frac{1}{x}F_2}$，

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{-\frac{y}{x}F_1-\frac{z}{x}F_2}{\frac{1}{x}F_2}-\frac{\frac{y}{x}F_1}{\frac{1}{x}F_2}=z$$

故应选（B）.

【例12】（2001年3）设 $u=f(x,y,z)$ 有连续的一阶偏导数，又函数 $y=y(x)$ 及 $z=z(x)$ 分别由下列两式确定：

$$e^{xy}-xy=2 \quad \text{和} \quad e^{x}=\int_0^{x-z}\frac{\sin t}{t}\,dt,$$ 求 $\dfrac{du}{dx}$.



【解1】 $$\frac{du}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dx}. \qquad (1)$$

由 $e^{xy}-xy=2$ 两边对 x 求导，得

$$e^{xy}\left(y+x\frac{dy}{dx}\right)-\left(y+x\frac{dy}{dx}\right)=0, \qquad \frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}.$$

又由 $e^{x}=\int_0^{x-z}\frac{\sin t}{t}\,dt$ 两边对 x 求导，得

$$e^{x}=\frac{\sin(x-z)}{x-z}\cdot\left(1-\frac{dz}{dx}\right), \qquad \frac{dz}{dx}=1-\frac{e^{x}(x-z)}{\sin(x-z)}.$$

$$\frac{du}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{y}{x}\frac{\partial f}{\partial y}+\left[1-\frac{e^{x}(x-z)}{\sin(x-z)}\right]\frac{\partial f}{\partial z}.$$

【例12】(2001年3) 设 $u=f(x,y,z)$ 有连续的一阶偏导数，

又函数 $y=y(x)$ 及 $z=z(x)$ 分别由下列两式确定：

$e^{xy}-xy=2$ 和 $e^{x}=\int_0^{x-z}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$，求 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.

【解2】 $$du=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz \qquad (1)$$

等式 $e^{xy}-xy=2$ 两端微分得

$$e^{xy}(ydx+xdy)-(ydx+xdy)=0, \Rightarrow dy=-\frac{y}{x}dx$$

等式 $e^{x}=\int_0^{x-z}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$ 两端微分得

$$e^{x}dx=\frac{\sin(x-z)}{x-z}(dx-dz) \qquad dz=(1-\frac{e^{x}(x-z)}{\sin(x-z)})dx.$$

$$du=[\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{y}{x}\frac{\partial f}{\partial y}+\left[1-\frac{e^{x}(x-z)}{\sin(x-z)}\right]\frac{\partial f}{\partial z}]dx$$

【例13】（2008年3）设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $x^2+y^2-z=\varphi(x+y+z)$ 所确定的函数，其中 φ 具有二阶导数，且 $\varphi'\neq -1$.

（I）求 $\mathrm{d}z$

（II）记 $u(x,y)=\dfrac{1}{x-y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}-\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)$，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$

【解1】（I）设 $F(x,y,z)=x^2+y^2-z-\varphi(x+y+z)$，则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x'}{F_z'}=\frac{2x-\varphi'}{1+\varphi'}\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y'}{F_z'}=\frac{2y-\varphi'}{1+\varphi'}$$

$$\frac{2(x-y)}{1+\varphi'}$$

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y=\frac{1}{1+\varphi'}[(2x-\varphi')\mathrm{d}x+(2y-\varphi')\mathrm{d}y].$$

（II）由于 $u(x,y)=\dfrac{2}{1+\varphi'(x+y+z)}$，所以

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{-2}{(1+\varphi')^2}\left(1+\frac{\partial z}{\partial x}\right)\varphi''=-\frac{2(2x+1)\varphi''}{(1+\varphi')^3}.$$

【例13】（2008年3）设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $x^2+y^2-z=\varphi(x+y+z)$ 所确定的函数，其中 φ 具有二阶导数，且 $\varphi'\neq -1$.

（I）求 dz

（II）记 $u(x,y)=\dfrac{1}{x-y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}-\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)$，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$

【解2】（I）对等式 $x^2+y^2-z=\varphi(x+y+z)$ 两端求微分，得

$$2x\,dx+2y\,dy-dz=\varphi'\cdot(dx+dy+dz).$$

解出 dz，得

$$dz=\frac{2x-\varphi'}{1+\varphi'}dx+\frac{2y-\varphi'}{1+\varphi'}dy.$$

（II）同解1.


还不关注，
你就慢了