高数基础班（13）

反常积分举例（敛散性；计算），定积分应用（几何；物理）	P98-P105

常考题型与典型例题

常考题型

1. 反常积分敛散性

2. 反常积分计算

（一）反常积分的敛散性

【例3】（2015年2）下列反常积分中收敛的是（　）

①定义

②比较法

③p积分

（A）$\int_{2}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}dx$. 发. 定. p *

（B）$\int_{2}^{+\infty}\frac{\ln x}{x}dx = \frac{1}{2}\ln^2 x\Big|_2^{+\infty} = +\infty$ 定 发.

（C）$\int_{2}^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}dx = \ln\ln x\Big|_2^{+\infty} = +\infty$ 定 发

（D）$\int_{2}^{+\infty}\frac{x}{e^x}dx$. 定 比 *

(A). $\int_2^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x}\Big|_2^{+\infty} = +\infty$ 发. $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}}$ $p=\frac{1}{2}<1$ 发.

(B) $\int_2^{+\infty}xe^{-x}dx = -\int_2^{+\infty}x\,de^{-x} = \overset{\frac{x}{e^x}}{-xe^{-x}}\Big|_2^{+\infty} + \underbrace{\int_2^{+\infty}e^{-x}dx = -e^{-x}\Big|_2^{+\infty}}$ 收

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{x}{e^x}}{\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3}{e^x} = 0$ 收 $\int_2^{+\infty}\frac{x^{1000}}{e^x}dx$ 收

【例4】（2013年2）设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{(x-1)^{\alpha-1}}, & 1<x<e, \\ \dfrac{1}{x\ln^{\alpha+1}x}, & x\ge e.\end{cases}$

若反常积分 $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，则

（A） $\alpha<-2$.　　（B） $\alpha>2$.

（C） $-2<\alpha<0$.　　√（D） $0<\alpha<2$.

$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p}$　$p<1$ 收，$p\ge1$ 发，

$\int_1^{+\infty} f(x)dx$ 收 $=\int_1^e \frac{dx}{(x-1)^{\alpha-1}}$ 收 $+\int_e^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^{\alpha+1}x}$ 收 $=\int_e^{+\infty}\frac{d\ln x}{\ln^{\alpha+1}x} \xlongequal{\ln x=t} \int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^{\alpha+1}}$ p ✓

换元+p

$\alpha-1<1$

$\Rightarrow \alpha<2$ ✓

$0<\alpha<2$

$p=\alpha+1>1$

$\Rightarrow \alpha>0$

【例5】（2016年2）反常积分 $\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}dx,\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}dx$ 的敛散性为（　）

（A）收敛，收敛.　　　　✓（B）收敛，发散.

（C）发散，收敛.　　　　（D）发散，发散.

$-\infty$　　0^-　0　　　e^{∞}

定义

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}dx=-\int_{-\infty}^{0}e^{\frac{1}{x}}d\frac{1}{x}=-e^{\frac{1}{x}}\Big|_{-\infty}^{0}\qquad \lim_{x\to0^-}e^{\frac{1}{x}}=0\ \text{收.}$$

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}dx=-e^{\frac{1}{x}}\Big|_{0}^{+\infty}=\infty\qquad (0\quad +\infty)\ \text{发}$$

$$\lim_{x\to0^+}e^{\frac{1}{x}}=e^{+\infty}=+\infty$$

【例6】(2016年1)反常积分 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^a(1+x)^b}dx$ 收敛，则(　　)

(A) $a<1,b>1.$　　　(B) $a>1,b>1.$

(C) $a<1,a+b>1.$　　　(D) $a>1,a+b>1.$

$\frac{1}{x^{a+b}}$

$a<1$　　$a+b>1$

[解] $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^a(1+x)^b}=\int_0^1\frac{dx}{x^a(1+x)^b}+\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^a(1+x)^b}$

收敛　　收敛

$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x^a(1+x)^b}}{\frac{1}{x^a}}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{(1+x)^b}=1$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x^a(1+x)^b}}{\frac{1}{x^{a+b}}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^b}{(1+x)^b}=1$

$\int_0^1\frac{dx}{x^a}$　　$a<1$

$\int_0^1\frac{dx}{x^p}$　　$p<1$ 收敛，$p\geq1$ 发散.

$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{a+b}}$　　$p=a+b>1$

（二）反常积分的计算

【例7】（2000年, 2） $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{(x+7)\sqrt{x-2}}=$ ________. $[\frac{\pi}{3}]$

① 换元

② 凑微

【解1】令 $\sqrt{x-2}=t$，$x=2+t^2$，$dx=2t\,dt$

原式 $=\int_0^{+\infty}\frac{2t}{t(9+t^2)}dt=2\int_0^{+\infty}\frac{dt}{9+t^2}=\frac{2}{3}\arctan\frac{t}{3}\Big|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{3}$

【解2】原式 $=\int_2^{+\infty}\frac{2\,d\sqrt{x-2}}{9+(\sqrt{x-2})^2}=\frac{2}{3}\arctan\frac{\sqrt{x-2}}{3}\Big|_2^{+\infty}=\frac{\pi}{3}$

【例8】（2000年4）计算 $I=\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{e^x+e^{2-x}}$ $\left(\frac{\pi}{4e}\right)$

$$\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$$

【解】$I=\int_1^{+\infty}\frac{e^x}{e^{2x}+e^2}dx=\int_1^{+\infty}\frac{de^x}{e^2+(e^x)^2}$

$$=\frac{1}{e}\arctan\frac{e^x}{e}\Big|_1^{+\infty}$$

$$=\frac{1}{e}\left[\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right]=\frac{\pi}{4e}$$

【例9】（2013年, 1, 3） $\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{(1+x)^2}dx=$ ________. $(\ln 2)$

[解] 原式 $=-\int_1^{+\infty}\ln x\, d\frac{1}{1+x}$

$(1+x)-x$

① 换元.

② "分部"

$=-\frac{\ln x}{1+x}\Big|_1^{+\infty}+\int_1^{+\infty}\frac{1}{x(1+x)}dx$

$=\ln\frac{x}{1+x}\Big|_1^{+\infty}=-\ln\frac{1}{2}$

$=\ln 2$,

第六章　定积分应用

本节内容要点

一. 考试内容概要

（一）几何应用

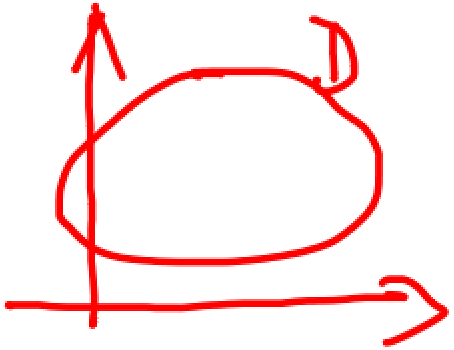
（二）物理应用

二. 常考题型与典型例题

题型一　几何应用

题型二　物理应用

(一）几何应用



$$\boxed{\iint_D 1\,d\sigma = S}$$

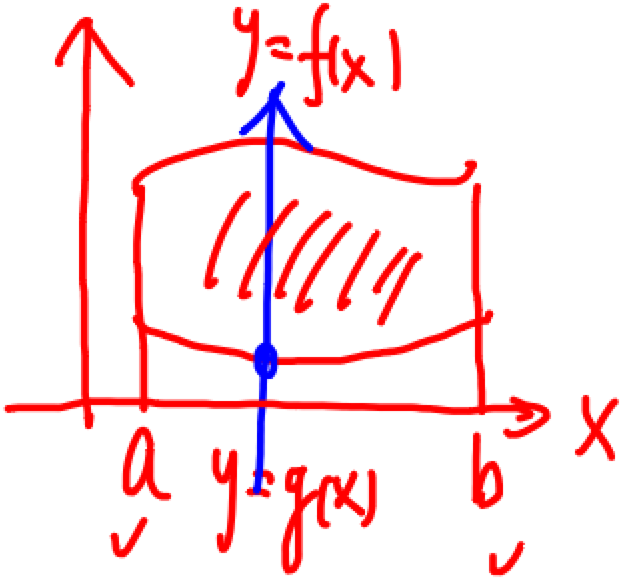
1.平面图形的面积

（1）若平面域 D 由曲线 $y=f(x), y=g(x)(f(x)\geq g(x))$,

$x=a$, $x=b$ $(a<b)$ 所围成，则

$$S=\int_a^b [f(x)-g(x)]dx$$

$$S=\iint_D 1\,d\sigma = \int_a^b dx\int_{g(x)}^{f(x)} dy$$



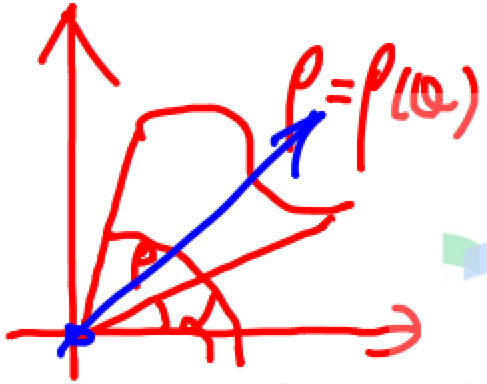
（2）若平面域 D 由曲线 $\rho=\rho(\theta), \theta=\alpha, \theta=\beta(\alpha<\beta)$

所围成，则

$$S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\theta)\,d\theta \Longleftarrow$$

$$S=\iint_D 1\,d\sigma = \int_\alpha^\beta d\theta\int_0^{\rho(\theta)} \rho\, d\rho$$

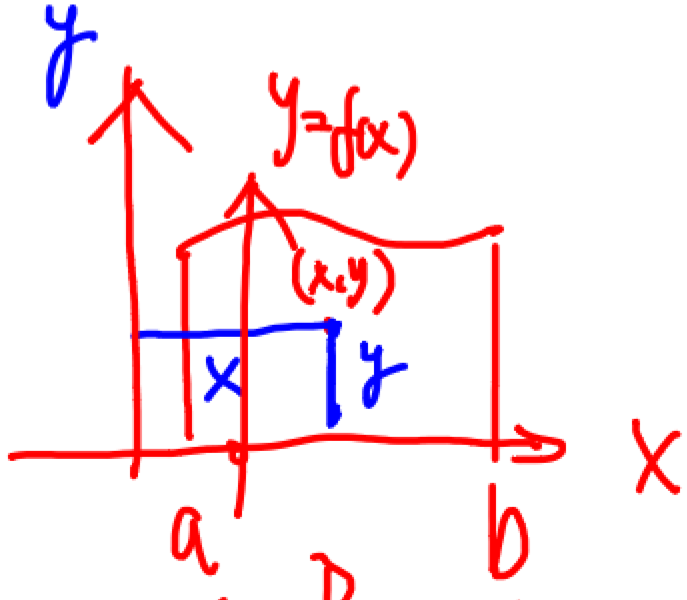
$=$



2. 旋转体体积

若平面域 D 由曲线 $y=f(x),(f(x)\geq 0)$,

$x=a, x=b\,(a<b)$ 所围成，则



1）区域 D 绕 x 轴旋转一周所得到的旋转体积为

$$V_x=\pi\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$$

$$V_x=2\pi\iint_D y\,d\sigma=2\pi\int_a^b dx\int_0^{f(x)} y\,dy=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx$$

2）区域 D 绕 y 轴旋转一周所得到的旋转体积为

$$V_y=2\pi\int_a^b xf(x)\,\mathrm{d}x$$

$$V_y=2\pi\iint_D x\,d\sigma=2\pi\int_a^b dx\int_0^{f(x)} x\,dy=2\pi\int_a^b xf(x)\,dx$$

$$2\pi\, r(x,y)\,d\sigma$$

$$r(x,y)=\frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\boxed{V=2\pi\iint_D r(x,y)\,d\sigma}$$

3. 曲线弧长（数三不要求）

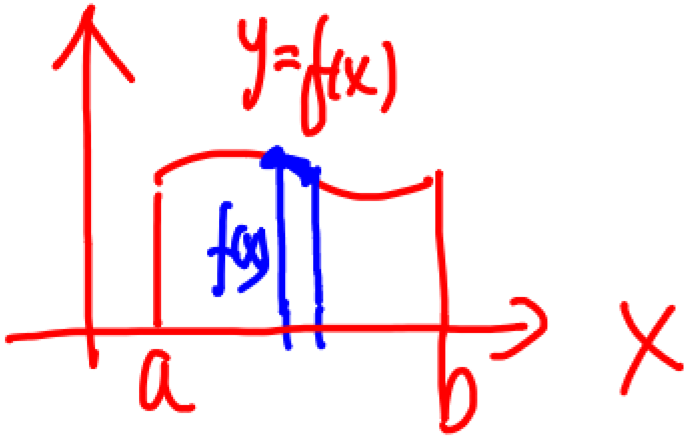
1) $C: y = y(x), \quad a \le x \le b. \qquad s = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\,dx$

2) $C: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \alpha \le t \le \beta. \qquad s = \int_\alpha^\beta \sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt$

3) $C: \rho = \rho(\theta), \quad \alpha \le \theta \le \beta. \qquad s = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\,d\theta$

4. 旋转体侧面积（数三不要求）

$$S = 2\pi \int_a^b \overset{y(x)}{f(x)} \sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx$$



$2\pi f(x)$ dx ds

（二）物理应用（数三不要求）

1. 压力；
2. 变力做功；
3. 引力；

常考题型与典型例题

常考题型

1.几何应用

2.物理应用

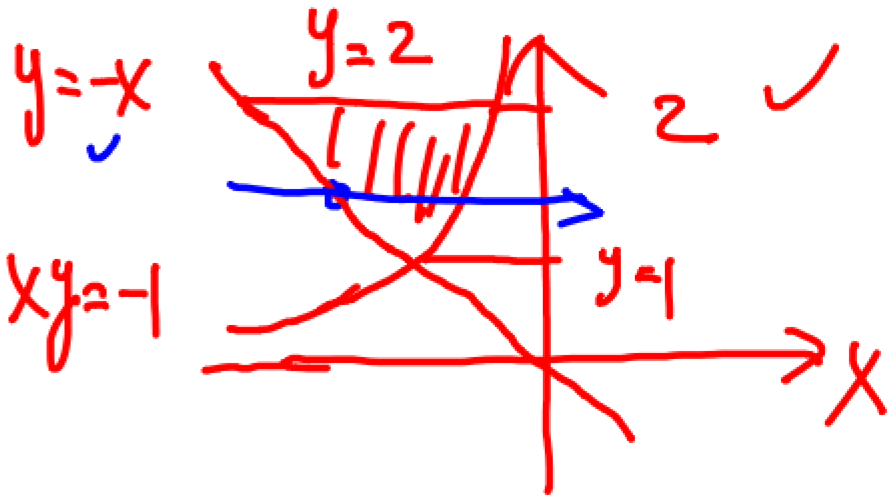
（一） 几何应用

【例1】（2014年, 3）设 D 是由曲线 $xy+1=0$ 与直线 $y+x=0$ 及 $y=2$ 围成的有界区域，则 D 的面积为 ______ $(\frac{3}{2}-\ln 2)$

【解】$S=\iint_D 1\,d\sigma$ *

$$=\int_1^2 dy\int_{-y}^{-\frac{1}{y}}dx$$

$$=\int_1^2\left(y-\frac{1}{y}\right)dy=\left(\frac{1}{2}y^2-\ln y\right)\Big|_1^2=\frac{2}{3}-\ln 2$$



【例2】（2013年，2）设封闭曲线 L 的极坐标方程为

$r=\cos 3\theta\,(-\frac{\pi}{6}\le\theta\le\frac{\pi}{6})$，则 L 所围平面图形的面积是 ____ $[\frac{\pi}{12}]$

$$S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\theta)\,d\theta$$

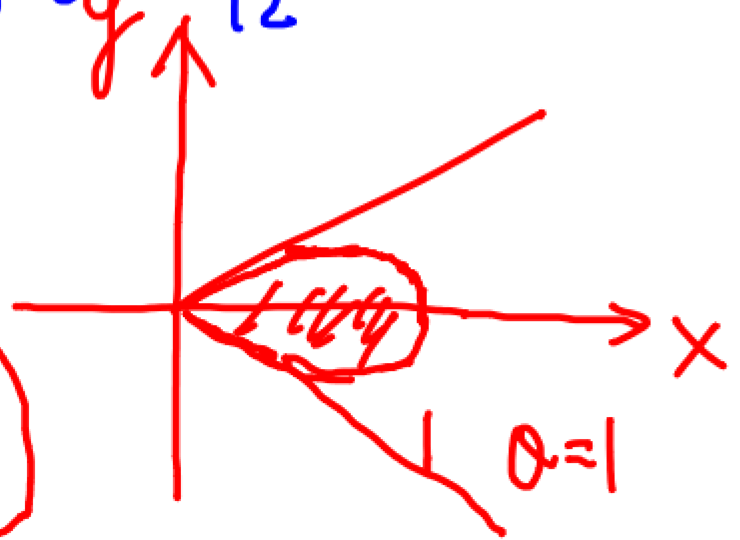
$$S=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\cos^2 3\theta\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos^2 3\theta\,d\theta$$

① $$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}(1+\cos 6\theta)\,d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\left(\theta+\frac{1}{6}\sin 6\theta\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{6}+0\right)=\frac{\pi}{12}$$

② $3\theta=t$

$$\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{12}$$



【例3】（2015年2, 3） 设 $A>0$，D 是由曲线段 $y=A\sin x\ (0\le x\le \frac{\pi}{2})$ 及直线 $y=0, x=\frac{\pi}{2}$ 所围成的平面区域，V_1,V_2 分别表示 D 绕 x 轴与 y 轴旋转所成旋转体的体积. 若 $V_1=V_2$，求 A 的值.

$[A=\frac{8}{\pi}]$

【解】 $V_x=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} A^2\sin^2 x\,dx=\pi A^2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{A^2\pi^2}{4}$

$V_y=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} x(A\sin x)\,dx$

$=-2\pi A\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,d\cos x=-2\pi A\left[x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx\right]$

$=-2\pi A[0-1]=2\pi A$

$\frac{A^2\pi^2}{4}=2\pi A$

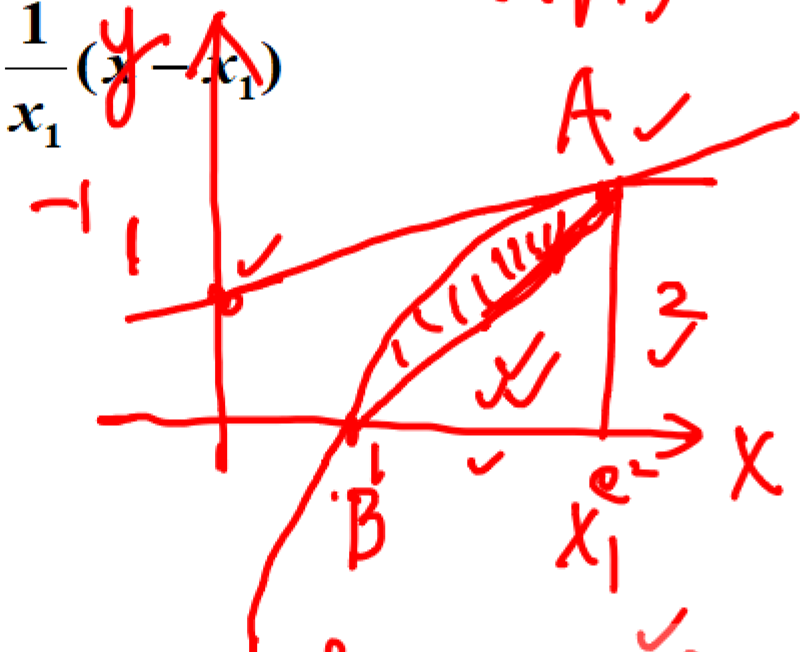
$\pi A=8\Rightarrow A=\frac{8}{\pi}$

【例4】（2012年，数二）过点 $(0,1)$ 作曲线 $L: y=\ln x$ 的切线，切点为 A，又 L 与 x 轴交于 B 点，区域 D 由 L 与直线 AB 围成. 求区域 D 的面积及 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

$y=\ln x$

(x_1, y_1)

【解】设切点 A 的坐标为 (x_1,y_1)，则切线方程为 $y-\overset{\ln x_1}{y_1}=\frac{1}{x_1}(x-x_1)$



将点 $(0,1)$ 代入，得 $x_1=e^2, y_1=2.$

所求面积为 $S=\int_1^{e^2}\ln x dx-\frac{1}{2}(e^2-1)\cdot 2$

$$=x\ln x\Big|_1^{e^2}-\int_1^{e^2}dx-e^2+1=2$$

所求体积为 $V=\pi\int_1^{e^2}\ln^2 x dx-\frac{\pi}{3}\cdot 4\cdot(e^2-1)$

$$=\pi(x\ln^2 x-2x\ln x+2x)\Big|_1^{e^2}-\frac{4\pi}{3}(e^2-1)=\frac{2\pi}{3}(e^2-1).$$

$y-1=kx$，$y=1+kx$

$\begin{cases}\ln x=1+kx\\ \frac{1}{x}=k\end{cases}\Rightarrow x=e^2,\ k=e^{-2}$

【例5】（2011年1，2）曲线 $y=\int_0^x \tan t dt (0\le x\le \frac{\pi}{4})$ 的弧长

$s=$________.

$[\ln(1+\sqrt{2})]$

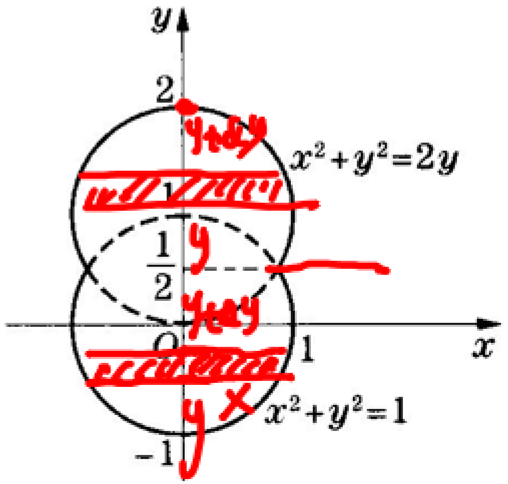
[解] $s=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{1+y'^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{1+\tan^2 x}\,dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec x\,dx$

$\overset{*}{=}\ln(\sec x+\tan x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\ln(\sqrt{2}+1)$

（二） 物理应用

【例6】（2011年2）一容器的内侧是由图中曲线绕 y 轴旋转一周而成的曲面，该曲线由 $x^2+y^2=2y(y\geq\frac{1}{2})$ 与 $x^2+y^2=1(y\leq\frac{1}{2})$ 连接而成.



$W=F\cdot S$

$F=V\rho g$

$=\pi(2y-y^2)dy$

$\pi x^2 dy=\pi(1-y^2)dy$

$F=\pi(1-y^2)\cdot 10^3 g(2-y)dy$

（I）求容器的容积；

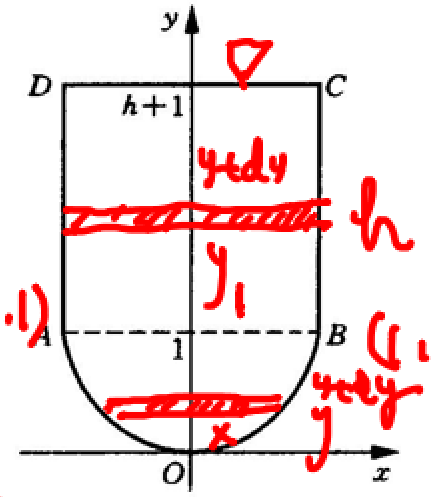
（II）若将容器内盛满的水从容器顶部全部抽出，至少需要做多少功？

（长度单位：m，重力加速度为$g\,m/s^2$，水的密度为$10^3kg/m^3$）

【解】 $V=2\pi\int_{-1}^{\frac{1}{2}}x^2\,dy=2\pi\int_{-1}^{\frac{1}{2}}(1-y^2)\,dy=\frac{9\pi}{4}.$

$$W=10^3\int_{-1}^{\frac{1}{2}}\pi(1-y^2)(2-y)g\,dy+10^3\int_{\frac{1}{2}}^{2}\pi[2y-y^2)](2-y)g\,dy=\frac{27}{8}\pi\rho g$$

【例7】（2002年2） 某闸门的形状与大小如图所示，其中 y 轴为对称轴，闸门的上部为矩形 $ABCD$，DC=2m，下部由二次抛物线与线段 AB 所围成，当水面与闸门的上端相平时，欲使闸门矩形部分承受的水压力与闸门下部承受的水压力之比为5：4，闸门矩形部分的高 h 应为多少



$(h+1-y)\rho g\,(2x)\,dy$

$2\sqrt{y}$

$y=x^2$

$\rho g h S$

$2\sqrt{y}\,dy$

压强 $p=\rho g h$

$P=pA$

【解】 $$P_1=2\int_1^{h+1}\rho g(h+1-y)\,\mathrm{d}y=2\rho g\left[(h+1)y-\frac{y^2}{2}\right]_1^{h+1}=\rho g h^2,$$

$$P_2=2\int_0^1\rho g(h+1-y)\sqrt{y}\,\mathrm{d}y=2\rho g\left[\frac{2}{3}(h+1)y^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{5}y^{\frac{5}{2}}\right]_0^1$$

$$=4\rho g\left(\frac{1}{3}h+\frac{2}{15}\right).\qquad \frac{h^2}{4\left(\frac{1}{3}h+\frac{2}{15}\right)}=\frac{5}{4}.\qquad h=2\qquad h=-\frac{1}{3}$$


还不关注，
你就慢了