高数基础班（18）

18	多元函数的极值（无约束极值；条件极值）；最大最小值	P134-P141

第三节　多元函数的极值与最值

本节内容要点

一. 考试内容概要

（一）无约束极值

（二）条件极值与拉格朗日乘数法

（三）最大最小值

二. 常考题型方法与技巧

题型一　求极值（无条件）

题型二　求最大最小值

题型三　最大最小值应用题

考试内容概要

（一）无约束极值

可能极值点 $\begin{cases} \text{驻点} \\ f_x(x_0,y_0),\ f_y(x_0,y_0)\ \text{不存在} \end{cases}$

定义7 若在点 (x_0, y_0) 的某邻域内恒成立不等式

$$f(x,y) \le f(x_0,y_0) \quad (f(x,y) \ge f(x_0,y_0))$$

则称 f 在点 (x_0,y_0) 取得**极大值**（**极小值**），点 (x_0,y_0) 称为 f 的**极大值点**（**极小值点**），极大值与极小值统称为**极值**，极大值点与极小值点统称为**极值点**.

驻点 $\underset{|x|+|y|}{\overset{xy}{\rightleftarrows}}$ 极值点

定理5（极值的必要条件） 设 $z = f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 存在偏导数，且 (x_0,y_0) 为 $f(x,y)$ 的极值点，则

$$f'_x(x_0,y_0) = 0, \quad f'_y(x_0,y_0) = 0.$$

可导

定理6（极值的充分条件） 设 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域内有二阶连续偏导数，又 $f'_x(x_0,y_0)=f'_y(x_0,y_0)=0$，

记 $A=f''_{xx}(x_0,y_0)$，$B=f''_{xy}(x_0,y_0)$，$C=f''_{yy}(x_0,y_0)$，则

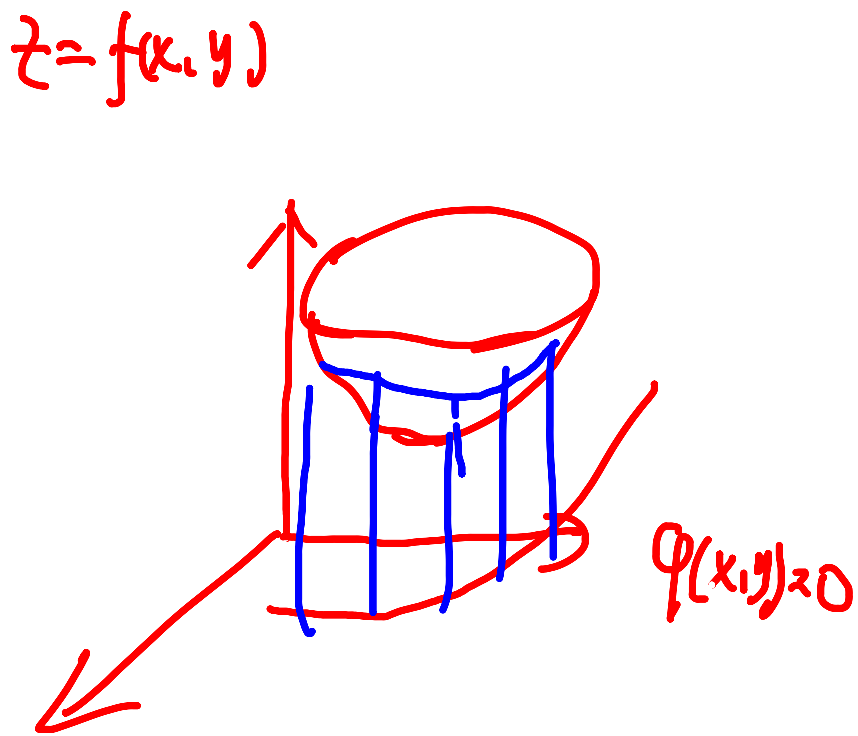
（1）当 $AC-B^2>0$ 时，有极值 $\begin{cases} A>0 & \text{极小值;} \\ A<0 & \text{极大值.} \end{cases}$

（2）当 $AC-B^2<0$ 时，无极值.

（3）当 $AC-B^2=0$ 时，不一定（一般用定义判定）.

（二）条件极值与拉格朗日乘数法

1）函数 $f(x,y)$ 在条件 $\varphi(x,y)=0$ 条件下的极值.



令 $F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$

$$
\begin{cases}
F_x = f'_x(x,y)+\lambda\varphi'_x(x,y)=0, \\
F_y = f'_y(x,y)+\lambda\varphi'_y(x,y)=0, \\
F_\lambda = \varphi(x,y)=0,
\end{cases}
$$

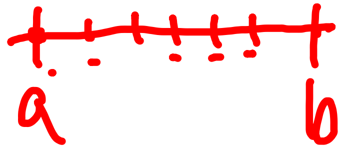
2）函数 $f(x,y,z)$ 在条件 $\varphi(x,y,z)=0, \psi(x,y,z)=0$

条件下的条件极值.

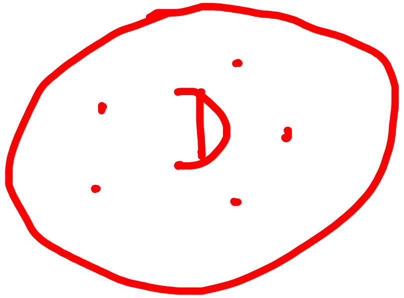
令 $F(x,y,z,\lambda,\mu)=f(x,y,z)+\lambda\varphi(x,y,z)+\mu\psi(x,y,z)$

（三）最大最小值

$f(x)$ $[a,b]$



1. 求连续函数 $f(x,y)$ 在有界闭域 D 上的最大最小值



1） 求 $f(x,y)$ 在 D 内部可能的极值点.

2） 求 $f(x,y)$ 在 D 的边界上的最大最小值. ※

3） 比较

2. 应用题

① $z=f(x,y)$

②

常考题型与典型例题

常考题型

1. 求极值(无条件)

2. 求连续函数 $f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上的最大最小值

3. 最大最小值应用题.

【例1】(2003年, 3) 设可微函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 取得极小值则下列结论正确的是

(A) $f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处的导数大于零.

(B) $f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处的导数等于零.

(C) $f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处的导数小于零.

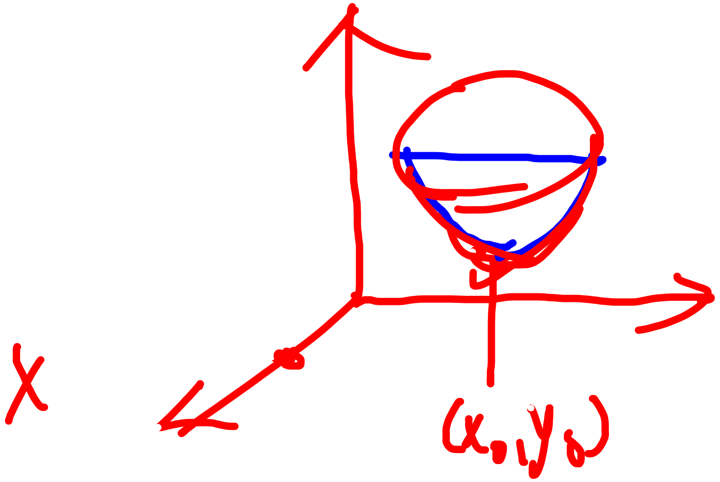
(D) $f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处的导数存在.

【解1】 $f'_y(x_0,y_0)=0$

【解2】 $f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 取极小值.

$f_y(x_0,y_0)=0$

$f(x,y_0)$ 在 $x=x_0$ 取极小值



【例2】(2009年, 2) 设函数 $z=f(x,y)$ 的全微分为

$\frac{\partial z}{\partial x}$ $\frac{\partial z}{\partial y}$

$dz = xdx + ydy$, 则点 $(0,0)$

(A) 不是 $f(x,y)$ 的连续点.

(B) 不是 $f(x,y)$ 的极值点.

(C) 是 $f(x,y)$ 的极大值点.

(D) 是 $f(x,y)$ 的极小值点.

【解1】 $\frac{\partial z}{\partial x}=0 \quad \frac{\partial z}{\partial y}=0$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=1, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=0. \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=1$

$AC-B^2=1-0>0$, 有. $A=1>0$ 极小

【例2】(2009年, 2) 设函数 $z=f(x,y)$ 的全微分为

$dz = xdx + ydy$, 则点 $(0,0)$

(A) 不是 $f(x,y)$ 的连续点.

(B) 不是 $f(x,y)$ 的极值点.

(C) 是 $f(x,y)$ 的极大值点.

(D) 是 $f(x,y)$ 的极小值点.

【解2】

① 偏积分

$\frac{\partial z}{\partial x} = x$

$z = \int x\,dx = \frac{x^2}{2} + \varphi(y)$

$\frac{\partial z}{\partial y} = y$

$\frac{\partial z}{\partial y} = \varphi'(y)$　　$\varphi'(y) = y$

$\varphi(y) = \int y\,dy = \frac{1}{2}y^2 + c$

$\boxed{z = \frac{1}{2}(x^2+y^2)+c}$

② 凑微分

$dz = xdx + ydy = d\frac{1}{2}x^2 + d\frac{1}{2}y^2 = d\frac{1}{2}(x^2+y^2)$

$z = \frac{1}{2}(x^2+y^2)+c$

【例2】(2009年, 2) 设函数 $z = f(x,y)$ 的全微分为

$dz = xdx + ydy$, 则点 $(0,0)$

(A) 不是 $f(x,y)$ 的连续点.

(B) 不是 $f(x,y)$ 的极值点.

(C) 是 $f(x,y)$ 的极大值点.

(D) 是 $f(x,y)$ 的极小值点.

【解3】排除法 $z = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}(x^2+y^2)$

【例3】(2017年3) 二元函数 $z = xy(3-x-y)$ 的极值点是（　）

（A）$(0,0)$,　　（B）$(0,3)$,　　（C）$(3,0)$,　　（D）$(1,1)$.

【解】由 $\begin{cases} z_x = y(3-2x-y) = 0 \\ z_y = x(3-2y-x) = 0 \end{cases}$ 驻点 $(0,0), (0,3), (3,0), (1,1)$.

$z_{xx} = -2y, z_{yy} = -2x, z_{xy} = 3-2x-2y.$

在 $(0,0)$ 点　$AC-B^2 = -9 < 0$，无极值；

在 $(0,3)$ 点　$AC-B^2 = -9 < 0$，无极值；

在 $(3,0)$ 点　$AC-B^2 = -9 < 0$，无极值；

在 $(1,1)$ 点　$AC-B^2 = 3 > 0$，有极值；

【例4】(2009年, 1, 3) 求二元函数 $f(x,y)=x^2(2+y^2)+y\ln y$ 的极值.

$x=0$ $y=\frac{1}{e}$

【解】1 $f'_x(x,y)=2x(2+y^2)$, $f'_y(x,y)=2x^2y+\ln y+1.=0$

令 $\begin{cases} f'_x(x,y)=0, \\ f'_y(x,y)=0, \end{cases}$ 解得唯一驻点 $\left(0,\frac{1}{e}\right)$. 由于

2 $A=f''_{xx}\left(0,\frac{1}{e}\right)=2(2+y^2)\Big|_{\left(0,\frac{1}{e}\right)}=2\left(2+\frac{1}{e^2}\right)$, ✓

$B=f''_{xy}\left(0,\frac{1}{e}\right)=4xy\Big|_{\left(0,\frac{1}{e}\right)}=0$, ✓

$C=f''_{yy}\left(0,\frac{1}{e}\right)=\left(2x^2+\frac{1}{y}\right)\Bigg|_{\left(0,\frac{1}{e}\right)}=e$, ✓

所以 $AC-B^2=2e\left(2+\frac{1}{e^2}\right)>0$ $A>0$. 极小值为 $f\left(0,\frac{1}{e}\right)=-\frac{1}{e}$.

【例5】(2008年2) 求函数 $u = x^2 + y^2 + z^2$ 在约束条件 $\boxed{z = x^2 + y^2}$ ≥ 0 和 $x + y + z = 4$ 下的最大值和最小值.

【解】① $F(x,y,z,\lambda,\mu) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(x^2 + y^2 - z) + \mu(x + y + z - 4).$

$$\text{令}\begin{cases} F'_x = 2x + 2\lambda x + \mu = 0, \\ F'_y = 2y + 2\lambda y + \mu = 0, \\ F'_z = 2z - \lambda + \mu = 0, \\ F'_\lambda = x^2 + y^2 - z = 0, \\ F'_\mu = x + y + z - 4 = 0, \end{cases}$$

$x(1+\lambda) = y(1+\lambda)$

$(1+\lambda)(x-y) = 0$.

① $\lambda = -1 \Rightarrow \mu = 0 \Rightarrow 2z = -1$

$z = -\frac{1}{2}$ ✗

② $\boxed{x = y}$

$z = 2x^2$

$2x^2 + 2x - 4 = 0$

$x^2 + x - 2 = 0$

$(x+2)(x-1) = 0$

$x_1 = 1$

$x_2 = -2$

解方程组，得 $(x_1, y_1, z_1) = (1,1,2)$, $(x_2, y_2, z_2) = (-2,-2,8)$.

② 故所求的最大值为72，最小值为6.

【例6】（2005年2）已知 $z=f(x,y)$ 的全微分 $\mathrm{d}z=2x\,\mathrm{d}x-2y\,\mathrm{d}y$

$\mathrm{d}x^2-\mathrm{d}y^2=\mathrm{d}(x^2-y^2)$

且 $f(1,1)=2$. 求 $f(x,y)$ 在 $D=\left\{(x,y)\middle|x^2+\dfrac{y^2}{4}\le 1\right\}$上的最大最小值.

【解1】① 由 $\mathrm{d}z=2x\,\mathrm{d}x-2y\,\mathrm{d}y$

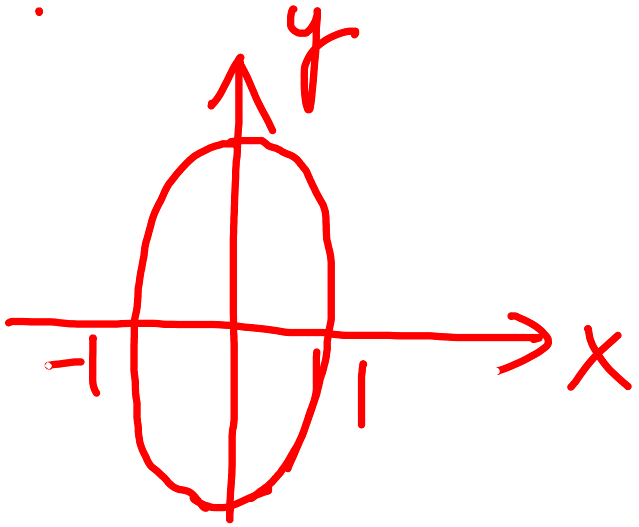
化条件为无条件.

可知 $z=f(x,y)=x^2-y^2+C$.

再由 $f(1,1)=2$，得 $C=2$，故 $z=f(x,y)=x^2-y^2+2$.

令 $\dfrac{\partial f}{\partial x}=2x=0,\dfrac{\partial f}{\partial y}=-2y=0$, 解得驻点 $(0,0)$

② 在椭圆 $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$ 上， $z=x^2-(4-4x^2)+2$



即 $z=5x^2-2\quad(-1\le x\le 1)$,

其最大值为 $z\big|_{x=\pm1}=3$，最小值为 $z\big|_{x=0}=-2$. 再与 $f(0,0)=2$

③ 比较, 可知 $f(x,y)$ 在椭圆域 D 上的最大值为3，最小值为 -2.

【解2】 同解法一，得驻点 $(0,0)$

拉格朗日

设 $L = x^2 - y^2 + 2 + \lambda\left(x^2 + \dfrac{y^2}{4} - 1\right)$

令 $\begin{cases} L'_x = 2x + 2\lambda x = 0, \\ L'_y = -2y + \dfrac{\lambda}{2}y = 0, \\ L'_\lambda = x^2 + \dfrac{y^2}{4} - 1 = 0, \end{cases}$

$2(1+\lambda)x=0$

$x=0 \quad y=\pm 2$

$y=0 \quad x=\pm 1$

解得4个可能的极值点 $(0,2),(0,-2),(1,0)$ 和 $(-1,0)$

又 $f(0,2)=-2, f(0,-2)=-2, f(1,0)=3, f(-1,0)=3$，再与 $f(0,0)=2$ 比较，得 $f(x,y)$ 在 D 上的最大值为3，最小值为 -2.

【解3】 同解法一，得驻点 $(0,0)$

椭圆 $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$ 的参数方程为 $x=\cos t, y=2\sin t$.

则 $z=f(x,y)=x^2-y^2+2=\cos^2 t-4\sin^2 t+2$

$$=3-5\sin^2 t$$

故 $f_{\max}=3, f_{\min}=-2$

$f(0,0)=2$

① 拉

② 化条件为无条件

i) 直角

ii) 参数 *


还不关注，
你就慢了