第二章　导数与微分

本章内容要点

一. 考试内容概要

（一）导数与微分的概念

（二）导数公式与求导法则

（三）高阶导数

二. 常考题型与典型例题

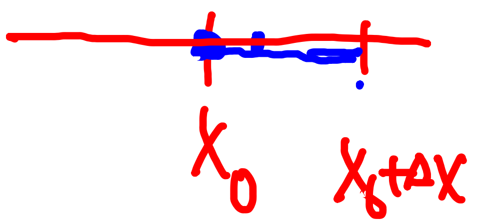
题型一 导数定义

题型二 复合函数、隐函数、参数方程求导

题型三 高阶导数

题型四 导数应用

第二章 导数与微分



考试内容概要

(一) 导数与微分的概念

1. 导数的概念

$x_0+\Delta x = x$

定义1 (导数) $$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\boxed{\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}}$$

动 静

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \qquad f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

定义2 (左导数) $$f'_-(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

定义3 (右导数) $$f'_+(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

定理1 可导 $\Leftrightarrow$ 左右导数都存在且相等

(a,b) $[a,b]$

定义4(区间上可导及导函数)

【例1】(1994年3) 设 $f(x)=\begin{cases}\frac{2}{3}x^3, & x\le 1,\\ x^2, & x>1,\end{cases}$ 则 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的( ).

(A) 左、右导数都存在

(B) 左导数存在但右导数不存在

(C) 左导数不存在但右导数存在

(D) 左、右导数都不存在

$f(x)$

[解1]

$f'_-(1)=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{\frac{2}{3}x^3-\frac{2}{3}}{(x-1)}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{\frac{2}{3}(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}=2$

存

$f'_+(1)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x^2-\frac{2}{3}}{x-1}=\infty$ 不存在

[解2] $f'_-(1)=\left(\frac{2}{3}x^3\right)'\Big|_{x=1}=2x^2\Big|_{x=1}=2$

$f'_+(1)=(x^2)'\Big|_{x=1}=2x\Big|_{x=1}=2$ X

$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}x^2=1\ne f(1)$，$\Rightarrow f'_+(1)$不存在

【例2】(1990年4, 5) 设函数 $f(x)$ 对任意 x 均满足等式

$f(1+x)=af(x)$，且有 $f'(0)=b$，其中 a,b 为非零常数，则（ ）.

(A) $f(x)$ 在 $x=1$ 处不可导;

(B) $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，且 $f'(1)=a$;

(C) $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，且 $f'(1)=b$;

(D) $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，且 $f'(1)=ab$.

$$f'(1)=a\cdot\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

$$f'(1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{af(\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$$

$$f(1)=af(0)$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{af(\Delta x)-af(0)}{\Delta x}$$

$$=ab$$

2. 微分的概念

变

定义5（微分） 如果 $\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$ 可以表示为

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x) \qquad (\Delta x \to 0)$$

①线性

②主部

则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可微，称 $A\Delta x$ 为微分，记为

$$\mathrm{d}\,y = A\Delta x$$

定理2 函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处可微的充分必要条件是 $f(x)$ 在点 x_0 处可导，且有

$$\mathrm{d}\,y = f'(x_0)\Delta x = f'(x_0)\,\mathrm{d}\,x.$$

【例3】(1988年1,2,3) 若函数 $y=f(x)$ 有 $f'(x_0)=\frac{1}{2}$，则当 $\Delta x\to 0$ 时，该函数在 $x=x_0$ 处的微分 $\mathrm{d}y$ 是（　）

（A）与 Δx 等价的无穷小；

（B）与 Δx 同阶的无穷小；

（C）比 Δx 低阶的无穷小；

（D）比 Δx 高阶的无穷小.

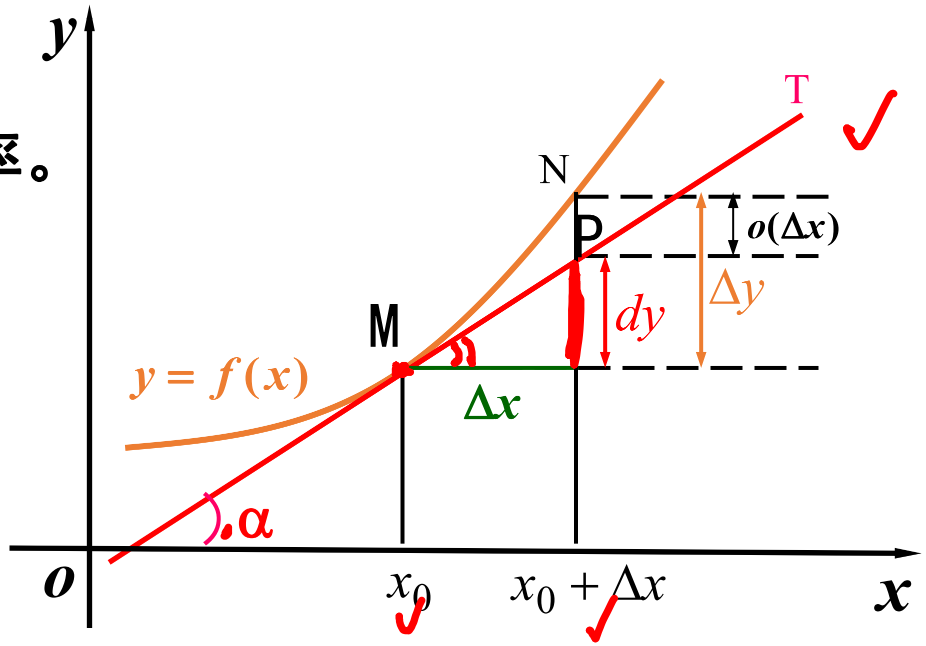
$$\frac{dy}{\Delta x}, \quad dy = f'(x_0)dx = \frac{1}{2}\Delta x, \quad \frac{\frac{1}{2}\Delta x}{\Delta x} \to \frac{1}{2}$$

3. 导数与微分的几何意义

1）导数的几何意义： 导数 $f'(x_0)$

在几何上表示曲线 $y=f(x)$

在点 $(x_0, f(x_0))$ 处切线的斜率。



切

切线方程

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0).$$

法线方程

$$y-f(x_0)=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0).$$

2）微分的几何意义： 微分 $dy=f'(x_0)dx$ 在几何上表示

曲线 $y=f(x)$ 的切线上的增量。

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0) \qquad \Delta y\approx dy$$

$dy=f'(x_0)\Delta x$

【例4】(2004年1) 曲线 $y=\ln x$ 上与直线 $x+y=1$ 垂直的切线方程为______.

$k=-1$

$y'_{切}=\frac{1}{x}=1 \Rightarrow x=1$

$y-\ln 1=1\cdot(x-1)$

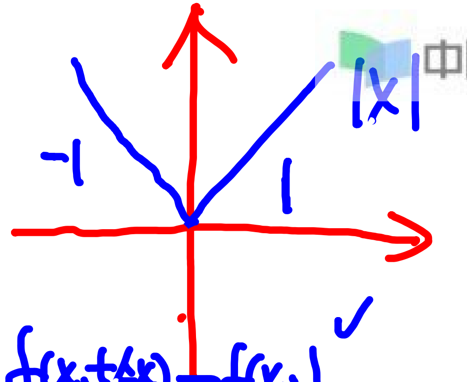
$y=x-1$

4. 连续,可导,可微之间的关系

连续 ⇄ 可导

可微

$|x|$



$\lim f(x)=A \Leftrightarrow f(x)=A+\alpha$

$f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \Rightarrow \dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)+\alpha$

$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(x_0)\Delta x+o(\Delta x)$

一阶

$f(x)$ 在 x_0 的某邻域可导 $\not\Rightarrow$ $f'(x)$ 在 x_0 处连续

$\not\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$ 存在

例1 $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

处处可导. 但 $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$ 不存在

【例33】设 $f(x)$ 二阶可导 $f(0)=0,\quad f'(0)=1,\quad f''(0)=2$

$f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-x}{x^2}$

$x=0.\ f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}-0}{x}=0$

$f''(x)$存. 存, $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$ 不存在

【解1】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)-1}{2x} \neq \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(x)}{2} \neq \dfrac{f''(0)}{2}=1$

【例5】（2020年1） 设函数 $f(x)$ 在区间 $(-1,1)$ 内有定义，且 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$，则

$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$

$= f(0)$

（A）当 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\sqrt{|x|}}=0$，$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导；

（B）当 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=0$，$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导；

$f(x)=\begin{cases} x^3, & x\neq 0 \\ 1, & x=0 \end{cases}$ 不连续

（C）当 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导时，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\sqrt{|x|}}=0$；

（D）当 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导时，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=0$.

$\Rightarrow$ 连续，$0=\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$

$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在

$f(x)=x$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\sqrt{|x|}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}\cdot\dfrac{x}{\sqrt{|x|}}=0$

（二）导数公式及求导法则

1. 基本初等函数的导数公式

1） $(C)'=0$　　2） $(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1}$

3） $(a^x)'=a^x\ln a$　　4） $(e^x)'=e^x$

5） $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$　　6） $(\ln|x|)'=\dfrac{1}{x}$

7） $(\sin x)'=\cos x$　　8） $(\cos x)'=-\sin x$

9） $(\tan x)'=\sec^2 x$　　10） $(\cot x)'=-\csc^2 x$

11） $(\sec x)'=\sec x\tan x$　　12） $(\csc x)'=-\csc x\cot x$

13） $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$　　14） $(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

15） $(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$　　16） $(arc\cot x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$

2. 求导法则

（1）有理运算法则

1) $(u \pm v)' = u' \pm v'$　　2) $(uv)' = u'v + uv'$

3) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$　$(v \neq 0)$

⇒ 初等.

（2）复合函数求导法：

设 $u = \varphi(x)$，$y = f(u)$ 可导，则 $y = f[\varphi(x)]$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = f'(u)\varphi'(x)$$

【例6】（1995年2）设 $y = \cos(x^2)\sin^2\dfrac{1}{x}$，则 $y' =$ ________.

$$y' = -\sin x^2 \cdot (2x)\sin^2\frac{1}{x} + \cos x^2 \cdot 2\sin\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

【例7】设函数 $f(x)$ 可导，试证

1）若 $f(x)$ 是奇函数，则 $f'(x)$ 是偶函数；

2）若 $f(x)$ 是偶函数，则 $f'(x)$ 是奇函数；

3）若 $f(x)$ 是周期函数，则 $f'(x)$ 也是周期函数.

$$f(-x) = -f(x) \Rightarrow -f'(-x) = -f'(x) \Rightarrow f'(-x) = f'(x)$$

【例8】（2017年1）已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$，则 偶

$f^{(3)}(0) = $ ___0___.

$f'(x)$ 奇

f'' 偶

f''' 奇

(3) 隐函数求导法：

$y=y(x)$

$F(x,y)=0$　x　$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{F_x}{F_y}$　✓

【例9】(1993年3) 函数 $y=y(x)$ 由方程 $\sin(x^2+y^2)+e^x-xy^2=0$ 所确定，则 $\dfrac{dy}{dx}=$ ________.

$\left[\dfrac{y^2-e^x-2x\cos(x^2+y^2)}{2y\cos(x^2+y^2)-2xy}\right]$

$\cos(x^2+y^2)\left(2x+2y\dfrac{dy}{dx}\right)+e^x-y^2-2xy\dfrac{dy}{dx}=0$

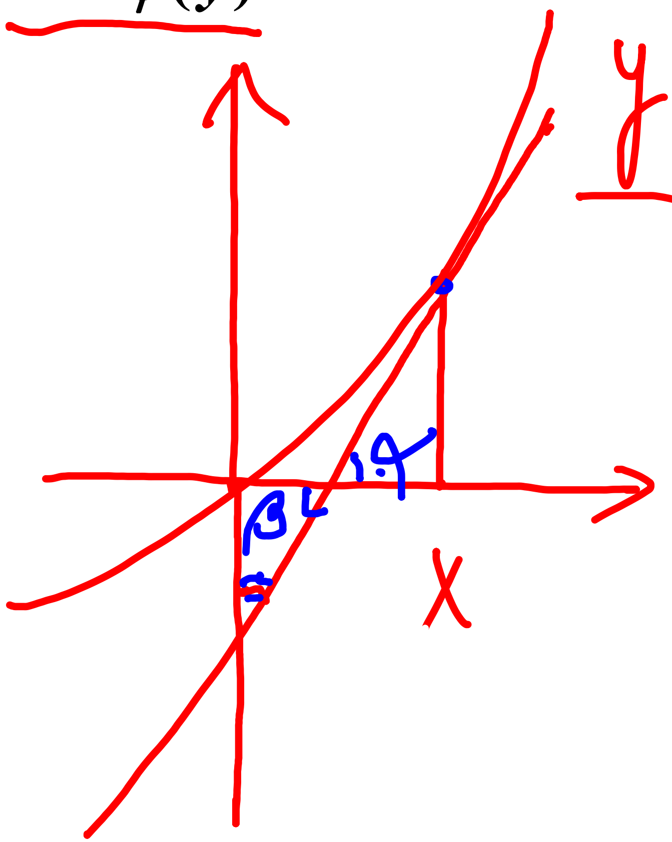
（4）反函数的导数；

若 $y=f(x)$ 可导, 且 $f'(x)\neq 0$, 则其反函数 $x=\varphi(y)$ 也可导，且

$x=\varphi(y)$

$= \tan\beta$

$$\varphi'(y)=\frac{1}{f'(x)} = \tan\alpha \qquad \frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$



【例10】证明 $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. $(-1<x<1)$

$y=\arcsin x \qquad x=\sin y \quad -\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$

$y'_x=(\arcsin x)'_x=\dfrac{1}{\cos y}=\dfrac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

（5）参数方程求导法：

$t=\varphi^{-1}(x)$

设 $y=y(x)$ 是由 $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$, $(\alpha<t<\beta)$ 确定的函数，则

1）若 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 都可导，且 $\varphi'(t)\neq 0$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

2）若 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 二阶可导，且 $\varphi'(t)\neq 0$，则

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)\cdot\frac{1}{\varphi'(t)}=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\varphi''(t)\psi'(t)}{\varphi'^3(t)}$$

【例11】(2020年1, 2) 设 $\begin{cases} x=\sqrt{t^2+1} \\ y=\ln(t+\sqrt{t^2+1}) \end{cases}$，则 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1}=$ $\underline{\quad -\sqrt{2} \quad}$.

$(-\sqrt{2})$

-1

【解1】 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}}{\frac{2t}{2\sqrt{1+t^2}}}=\dfrac{1}{t}$ $\quad\quad$ $\dfrac{d^2y}{dx^2}=-\dfrac{1}{t^2}$

$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\left(-\dfrac{1}{t^2}\right)\cdot\dfrac{dt}{dx}=\left(-\dfrac{1}{t^2}\right)\dfrac{1}{\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}}$

[解2] $y=\ln(\sqrt{x^2-1}+x)$ $\quad$ $t^2=x^2-1 \Rightarrow t=\sqrt{x^2-1}$ $\quad$ $-\sqrt{2}$

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}=(x^2-1)^{-\frac{1}{2}}$, $\quad$ $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\left(-\dfrac{1}{2}\right)(x^2-1)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2x$

（6）对数求导法：

$= e^{x\ln(1+\sin x)}$

【例12】（2005年2）设 $\boxed{y=(1+\sin x)^x}$，则 $\mathrm{d}y\big|_{x=\pi}=$ $\underline{-\pi dx}$.

$[-\pi dx]$

$\ln y = x\ln(1+\sin x)$

$\frac{y'}{y} = \ln(1+\sin x) + \frac{x\cos x}{1+\sin x}$

$y'(\pi) = -\pi$.

【例13】 设 $y=\sqrt{\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}$，求 y'.

$$(\ln|x|)'=\frac{1}{x}$$

$$\ln y=\frac{1}{2}\left[\ln|x-1|+\ln|x-2|-\ln|x-3|-\ln|x-4|\right]$$

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4}\right]$$

$$y'=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}\left[\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4}\right]$$

1，极，理：　　导数　微分

连续，

2，方法（计算），

① + − × ÷　＞ 求．

② 复合．

③ 隐．

④ 反．

⑤ 参．（一，二）

⑥ 对数．

（三）高阶导数

1）定义6(高阶导数) $y^{(n)}=[f^{(n-1)}(x)]'$,

$$f^{(n)}(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f^{(n-1)}(x_0+\Delta x)-f^{(n-1)}(x_0)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0}$$

注：如果函数 $f(x)$ 在点 x 处 n 阶可导，则在点 x 的某邻域内 $f(x)$ 必定具有一切低于 n 阶的导数.

2）常用的高阶导数公式：

1）$(\sin x)^{(n)}=\sin(x+n\cdot\frac{\pi}{2})$; 2）$(\cos x)^{(n)}=\cos(x+n\cdot\frac{\pi}{2})$;

3）$(u\pm v)^{(n)}=u^{(n)}\pm v^{(n)}$ 4）$(uv)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(k)}v^{(n-k)}$.

【例14】 设 $y=\sin 3x$，求 $y^{(n)}$.

【例15】 设 $y=x^{2}\cos x$，求. $y^{(n)}$

常考题型与典型例题

1. 导数定义；　　2. 复合函数、隐函数、参数方程求导；

3. 高阶导数；　　4. 导数应用

(一) 导数定义

【例16】(1994年，数三，4分) 已知 $f'(x_0)=-1$ ，则

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{f(x_0-2x)-f(x_0-x)}=\underline{\qquad\qquad}.$$ (1)

【例17】（2011年2, 3）已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $f(0)=0$，

则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2 f(x)-2f(x^3)}{x^3}=$

（A） $-2f'(0)$.　　（B） $-f'(0)$.

（C） $f'(0)$.　　（D） 0.

【例18】（2013年，1） 设函数 $y=f(x)$ 由方程 $y-x=e^{x(1-y)}$

确定，则 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(f\left(\frac{1}{n}\right)-1\right)=$ ____________ . [1]

【例19】（2018年1, 2, 3）下列函数中，在 $x=0$ 处不可导的是（　）

（A）$f(x)=|x|\sin|x|$,　　（B）$f(x)=|x|\sin\sqrt{|x|}$,

（C）$f(x)=\cos|x|$,　　（D）$f(x)=\cos\sqrt{|x|}$.

【例20】设 $f(x)$ 在 $x=a$ 的某个邻域内有定义，则 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导的一个充分条件是

（A）$\lim\limits_{h\to+\infty} h[f(a+\frac{1}{h})-f(a)]$ 存在；

（B）$\lim\limits_{n\to\infty} n[f(a+\frac{1}{n})-f(a)]$ 存在；

（C）$\lim\limits_{h\to0} \dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$ 存在；

（D）$\lim\limits_{h\to0} \dfrac{f(a)-f(a-h)}{h}$ 存在；

(二) 复合函数、隐函数、参数方程求导

【例21】（1993年3）设 $y=\sin[f(x^2)]$，其中 f 具有二阶导数，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$

【例22】（2012年2）设 $y = y(x)$ 是由方程 $x^2 - y + 1 = e^y$ 所确定的隐函数，则 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0} =$ ________ .

(1)

【例23】（2013年1）设 $\begin{cases} x=\sin t, \\ y=t\sin t+\cos t, \end{cases}$（$t$ 为参数），则

$\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=$ ________.

$(\sqrt{2})$

(三) 高阶导数

【例24】(2007年2, 3) 设函数 $y=\dfrac{1}{2x+3}$，则

$y^{(n)}(0)=$ ________.

$[\dfrac{(-1)^n 2^n n!}{3^{n+1}}]$

【例25】（2015年2）函数 $f(x)=x^2 2^x$ 在 $x=0$ 处的 n 阶导数

$f^{(n)}(0)=$ ______________.   [$n(n-1)(\ln 2)^{n-2}$]

(四) 导数应用

(1)导数的几何意义

【例26】（2011年3）曲线 $\tan\left(x+y+\dfrac{\pi}{4}\right)=e^{y}$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程为 ______.

$(y=-2x)$

【例27】（2013年2）曲线 $\begin{cases} x = \arctan t, \\ y = \ln\sqrt{1+t^2}, \end{cases}$ 上对应于 $t=1$ 的点处的法线方程为 _____.

$(x + y = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln 2)$

【例28】（1997年, 1）对数螺线 $\rho = e^{\theta}$ 在点 $(\rho,\theta)=\left(e^{\pi/2},\frac{\pi}{2}\right)$ 处的切线的直角坐标方程为______.

$(x+y=e^{\frac{\pi}{2}})$

(2)相关变化率(数三不要求)

【例29】(2016年2) 已知动点 P 在曲线 $y=x^3$ 上运动, 记坐标原点与点 P 间的距离为 l. 若点 P 的横坐标对时间的变化率为常数 v_0, 则当点 P 运动到点 $(1,1)$ 时, l 对时间的变化率是 ____.

$[2\sqrt{2}v_0]$