

# 高数基础班 (14)

14

微分方程概念，一阶方程，可降阶方程，高阶线性方程，

P106-P113



还不关注，  
你就慢了



中国大学MOOC

×

有道考神

# 第七章 常微分方程

## 本章内容要点

### 一. 考试内容概要

- (一) 常微分方程的基本概念
- (二) 一阶微分方程
- (三) 可降阶的高阶方程 (数三不要求)
- (四) 高阶线性微分方程
- (五) 差分方程 (仅数三要求)

## 二. 常考题型与典型例题

题型一 微分方程求解

题型二 综合题

题型三 应用题

## (一) 常微分方程的基本概念

1. 微分方程
2. 微分方程的阶 ✓
3. 微分方程的解
4. 微分方程的通解
5. 微分方程的特解
6. 初始条件
7. 积分曲线

$$\begin{aligned} & \checkmark \quad \checkmark \\ & \underline{y' = 2x} \\ & \underline{y = x^2 + C} \quad \underline{y'' + y' = e^x} \\ & \checkmark \end{aligned}$$

$$dy = 2x dx$$

## (二) 一阶微分方程

1) 可分离变量的方程  $y' = f(x)g(y)$

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$

【例1】(2006年1, 2) 微分方程  $y' = \frac{y(1-x)}{x}$  的通解是 \_\_\_\_\_

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx$$

$$(y = Cxe^{-x})$$

$$[解] \int \frac{dy}{y} = \int \frac{1-x}{x} dx$$

$$\ln|y| = \ln|x| - x + C$$

$$|y| = |x| e^C e^{-x}$$

$$y = \pm e^C x e^{-x} = C x e^{-x}$$

2) 齐次方程  $\frac{dy}{dx} = \varphi(\frac{y}{x})$  令  $u = \frac{y}{x} \Rightarrow y = xu, \frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx} = \varphi(u)$  可分

【例2】(1993年1, 2) 求微分方程  $x^2 y' + xy = y^2$  满足初始条件

$y(1)=1$  的特解.

【解】原方程为齐次方程  $y' = (\frac{y}{x})^2 - \frac{y}{x}$ , 令  $u = \frac{y}{x}$ , 则  $y = xu,$

$$xu' + u = u^2 - u, \quad xu' = u^2 - 2u.$$

$$y' = u + xu'$$

$$\frac{du}{u^2 - 2u} = \frac{1}{x} dx \quad \frac{1}{2} [\ln|u-2| - \ln|u|] = \ln|x| + C_1, \quad \frac{u-2}{u} = Cx^2 = \int \frac{Cx^2}{u(u-2)} du$$

$$\frac{y-2x}{y} = Cx^2$$

由  $y(1)=1$ , 得  $C=-1$ , 即得所求的特解为

$$\frac{y-2x}{y} = -x^2, \quad \text{即 } y = \frac{2x}{1+x^2}$$

### 3) 线性方程 $y' + P(x)y = Q(x)$

通解

$$y = e^{-\int P(x)dx} \left[ \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C \right]$$

【例3】(2008年2, 4) 微分方程  $(y + x^2 e^{-x})dx - xdy = 0$

的通解是 \_\_\_\_\_

$$y = x(C - e^{-x})$$

[解]  $(y + x^2 e^{-x}) - x \frac{dy}{dx} = 0$

$$\left[ \frac{dy}{dx} \left( -\frac{1}{x} \right) y = x e^{-x} \right]$$

$$y = e^{-\int (-\frac{1}{x}) dx} \left[ \int x e^{-x} e^{\int (-\frac{1}{x}) dx} + C \right] = x \left[ \int e^{-x} dx + C \right]$$

$$= x \left[ -e^{-x} + C \right] = x(C - e^{-x})$$

中国大学MOOC

有道考神

23武忠祥考研

#### 4) 伯努利方程 (仅数学一要求)

$$y' + P(x)\underline{y} = Q(x)\underline{y}^\alpha \quad (\alpha \neq 1)$$

$$\underline{(y^{1-\alpha} = u)}$$

线性

#### 5) 全微分方程 (仅数学一要求)

$$\underline{dF(x,y)} = P(x,y)\underset{y}{dx} + Q(x,y)\underset{x}{dy} = 0.$$

$$F(x,y) = C$$

a) 判定:  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$

b) 解法:

1) <sup>①</sup> 偏积分

2) <sup>②</sup> 凑微分

3) 线积分



### (三) 可降阶方程 (数三不要求)

1)  $y'' = f(x)$

2)  $y'' = f(x, \underline{y'})$

$(y' = P, y'' = \frac{dP}{dx})$

$$y'' = f(x, \underline{y}, y')$$

$$y'' = e^x + 1$$

$$y' = e^x + x + C_1$$

$$y = e^x + \frac{1}{2}x^2 + C_1x + C_2$$

( $y = C_1 + \frac{1}{2}x^2$ )

$$\boxed{\frac{dp}{dx} = f(x, p)}$$

【例4】(2000年1) 微分方程  $xy'' + 3y' = 0$  的通解为

[解] 令  $y' = p, y'' = \frac{dp}{dx}$

$$x \frac{dp}{dx} + 3p = 0$$

$$x \frac{dp}{dx} = -3p$$

$$\int \frac{dp}{p} = \int \frac{-3}{x} dx$$

$$\ln|p| = -3\ln|x| + C_1$$

$$|p| = e^{C_1} e^{\ln \frac{1}{x^3}} = \frac{1}{x^3} e^{C_1} \quad y' = p = \pm e^{C_1} \frac{1}{x^3} = \frac{C}{x^3}$$

$$y = \frac{C_1}{x^2} + C_2$$

$$3) \quad \underline{y'' = f(y, y')} \quad (y' = \overset{\checkmark}{P}, y'' = P \frac{dP}{dy})$$

$$\underline{y' = p}, \quad y'' = \frac{dp}{dx}$$

【例5】(2002年1, 2) 微分方程  $yy'' + y'^2 = 0$  满足初始条件  $\frac{dp}{dx} = f(y, p)$

$y|_{x=0} = 1, y'|_{x=0} = \frac{1}{2}$  的特解是                     . x ( $y = \sqrt{x+1}$ )

[解] 令  $y' = p, y'' = \frac{dp}{dy} p$

$$y p \frac{dp}{dy} + p^2 = 0 \quad y \frac{dp}{dy} = -p$$

$$\int \frac{dp}{p} = \int -\frac{1}{y} dy$$

$$|p| = e^{\int -\frac{1}{y} dy} \\ \frac{1}{2} = \frac{c}{1}$$

$$\ln|p| = -\ln|y| + c$$

$$p = \frac{c}{y} \\ y' = \frac{1}{y}$$

$$2yy' = 1 \\ (y^2)' = 1 \quad y^2 = x + c$$

$$\begin{aligned} p &= 0 \\ y' &= 0 \\ \Rightarrow y &= c \end{aligned}$$

$$y^2 = x + 1 \\ y = \pm \sqrt{x+1}$$

## (四) 高阶线性微分方程

## 1) 线性微分方程的解的结构

齐次方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (1)$$

非齐次方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \quad (2)$$

定理1 如果  $y_1(x)$  和  $y_2(x)$  是齐次方程 (1) 的两个线性无关的特解, 那么

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

$\frac{y_1(x)}{y_2(x)}$  为常数 无关

就是方程 (1) 的通解.

定理2 如果  $y^*$  是非齐次方程 (2) 的一个特解,  $y_1(x)$  和  $y_2(x)$  是齐次方程 (1) 的两个线性无关的特解, 则

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + y^*(x)$$

是非齐次微分方程 (2) 的通解.

定理3 如果  $y_1^*(x)$ ,  $y_2^*(x)$  是非齐次方程 (2) 的两个特解, 则

$$y(x) = y_2^*(x) - y_1^*(x)$$

是齐次微分方程 (1) 的解.

定理4 如果  $y_1^*(x)$ ,  $y_2^*(x)$  分别是方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x) \quad \checkmark$$

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_2(x) \quad \checkmark$$

的特解, 则

$$y_1^*(x) + y_2^*(x)$$

是方程  $y'' + p(x)y' + q(x)y = \underline{f_1(x) + f_2(x)}$  的一个特解.

## 2) 常系数齐次线性微分方程

\*

$$y'' + py' + qy = 0 \quad \checkmark \quad \checkmark$$

特征方程  $r^2 + pr + q = 0 \quad \checkmark$

设  $r_1, r_2$  是特征方程两个根

1) 不等实根:  $r_1 \neq r_2$

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$$

2) 相等实根:  $r_1 = r_2 = r$

$$y = e^{rx} (C_1 + C_2 x) \quad \underline{e^{rx}} \quad \underline{x e^{rx}}$$

3) 共轭复根:  $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$

$$y = \underline{e^{\alpha x}} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$$

【例6】(2013年3) 微分方程  $y'' - y' + \frac{1}{4}y = 0$  的通解为 \_\_\_\_\_.

$$(y = e^{\frac{1}{2}x} (C_1 + C_2 x))$$

$$[解] \quad r^2 - r + \frac{1}{4} = 0$$

$$(r - \frac{1}{2})^2 = 0 \quad r_1 = r_2 = \frac{1}{2}$$

$$y = e^{\frac{1}{2}x} (c_1 + c_2 x)$$

【例7】(1996年3) 微分方程  $y'' + 2y' + 5y = 0$  的通解为

$y = \underline{\hspace{2cm}}$ .

$$(y = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x))$$

$$[解] \quad r^2 + 2r + 5 = 0$$

$$r_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2} = -1 \pm 2i$$

$$y = e^{-x} [C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x]$$



【例8】(2010年2) 3阶常系数线性齐次微分方程

$y''' - 2y'' + y' - 2y = 0$  的通解为  $y = \underline{\hspace{2cm}}$ .

$$(y = C_1 e^{2x} + C_2 \cos x + C_3 \sin x)$$

$$[解] \quad \underline{r^3 - 2r^2 + r - 2 = 0}$$

$$r^2(r-2) + (r-2) = 0 \quad \checkmark \quad \gamma$$

$$(r-2)(r^2+1) = 0 \quad \underline{r_1 = 2}, \quad \underline{r_{2,3} = \pm i}$$

$$y = c_1 e^{2x} + (c_2 \cos x + c_3 \sin x)$$

### 3) 常系数非齐次线性微分方程

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

1.  $f(x) = e^{\lambda x} \underline{P_m(x)}$       令  $y^* = x^k \underline{Q_m(x)} e^{\lambda x}$

2.  $f(x) = e^{\alpha x} [P_l^{(1)}(x) \cos \beta x + P_n^{(2)}(x) \sin \beta x]$

令  $y^* = x^k \underline{e^{\alpha x}} [R_m^{(1)}(x) \cos \beta x + R_m^{(2)}(x) \sin \beta x]$ .     $m = \max\{l, n\}$

Tip

【例9】(1995年3) 微分方程  $y'' + y = -2x$  的通解为  $y = \underline{\hspace{2cm}}$ .

[解]  $r^2 + 1 = 0, \quad r_{1,2} = \pm i \checkmark$   $(y = -2x + C_1 \cos x + C_2 \sin x)$

令  $y^* = (ax+b)e^{0x} = ax+b \quad \lambda = 0$

$$ax+b = -2x \Rightarrow a = -2, b = 0$$

$$y^* = \underline{-2x}$$

$$y = (C_1 \cos x + C_2 \sin x) - 2x$$

【例10】(2007年1, 2) 二阶常系数非齐次线性微分方程

$y'' - 4y' + 3y = 2e^{2x}$  的通解为  $y =$ \_\_\_\_\_.

$$(y = C_1 e^{3x} + C_2 e^x - 2e^{2x})$$

$$[解] \quad r^2 - 4r + 3 = 0 \quad (r-3)(r-1) = 0$$

$$r_1 = 3, r_2 = 1$$

$$\text{令 } y^* = a e^{2x} \quad \lambda = 2$$

$$a e^{2x} [2^2 - 8 + 3] = 2 e^{2x} \Rightarrow -a = 2 \Rightarrow a = -2$$

$$y^* = -2 e^{2x}$$

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^x - 2 e^{2x}$$

#### 4) 欧拉方程 (仅数一要求)

$$\underline{x^n y^{(n)}} + a_1 \underline{x^{n-1} y^{(n-1)}} + \cdots + a_{n-1} x y' + a_n y = f(x)$$

$$\text{令 } \underline{x = e^t}, \quad \underline{x^k y^{(k)}} = \underset{\text{r}}{D}(\underset{\text{r}}{D}-1)\cdots(D-k+1)y$$

【例11】(2004年1) 欧拉方程  $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 4x \frac{dy}{dx} + 2y = 0 (x > 0)$

的通解为  $y = \underline{\hspace{2cm}}$ .

[解] 令  $x = e^t$

$$\underline{D(D-1)y + 4Dy + 2y = 0}$$

$$\checkmark \quad \underline{\frac{d^2 y}{dt^2} + 3 \frac{dy}{dt} + 2y = 0} \quad \checkmark$$

$$r^2 + 3r + 2 = 0, \quad (r+1)(r+2) = 0$$

$$y = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t} = \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2}$$

$$D = \frac{d}{dt}$$

$$Dy = \frac{dy}{dt}$$

$$D^2 y = \frac{d^2 y}{dt^2}$$

$$r(r-1) + 4r + 2 = 0$$

$$r^2 + 3r + 2 = 0$$

$$r_1 = -1, r_2 = -2$$



还不关注，  
你就慢了



中国大学MOOC

×

有道考神

23武忠祥考研