

3.6 量子位相推定

量子位相推定とは

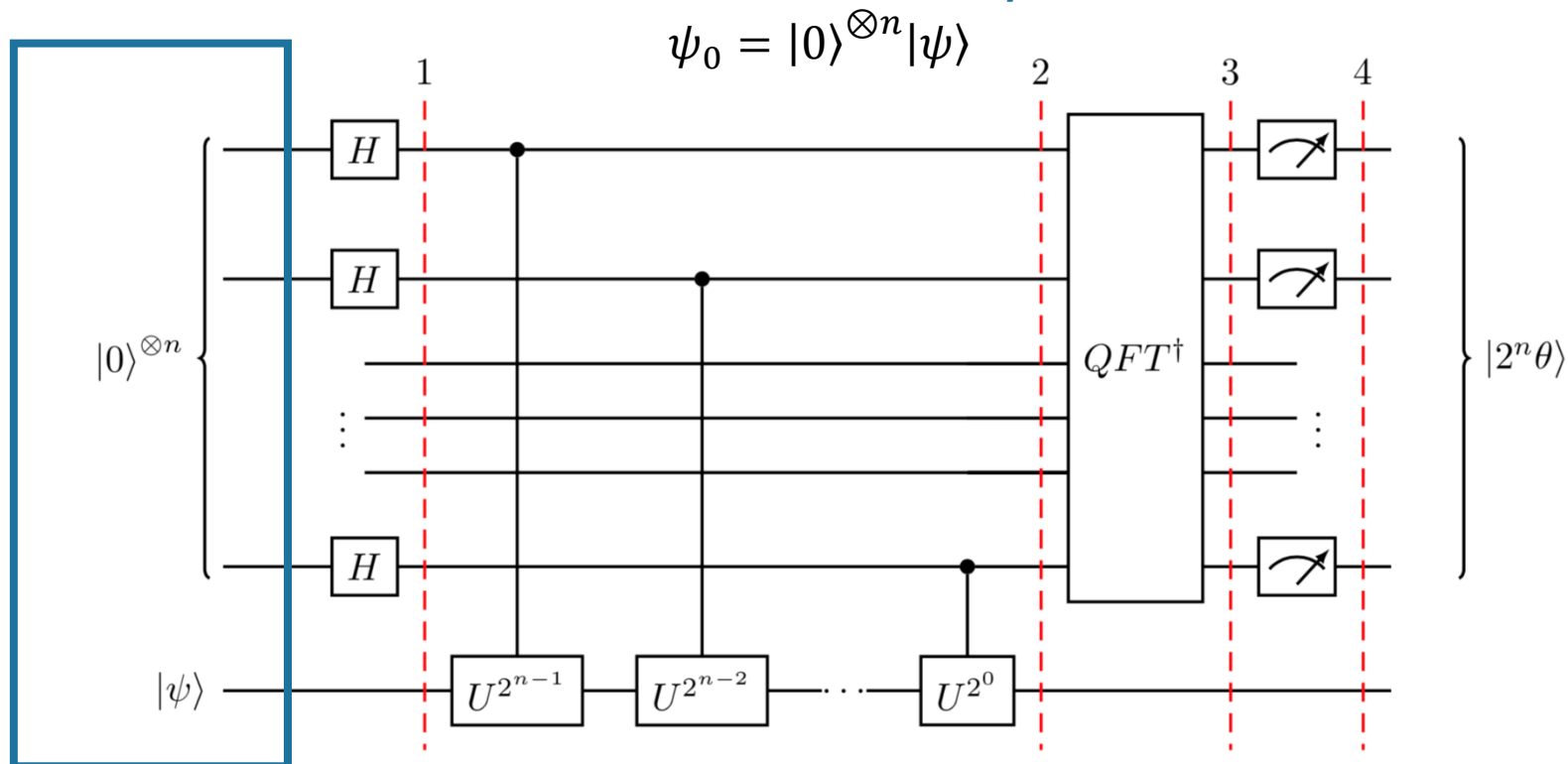
- 量子位相推定（QPE: Quantum Phase Estimation）は様々な量子アルゴリズムの構成要素として使われているアルゴリズムです。
- 量子位相推定ではユニタリー演算子 U に対し、 $U|\psi\rangle = e^{2\pi i\theta}|\psi\rangle$ と固有値 $e^{2\pi i\theta}$ 、固有状態 $|\psi\rangle$ が与えられたとき、この θ を推定します。
- 量子位相推定は[位相キックバック](#)と[量子フーリエ変換](#)を組み合わせで構成されています。

理論 (1.2 基礎となる数学)

i. 準備

位相キックバックの復習しておきます。位相キックバックはユニタリー演算子 U に対して、固有状態 $|\psi\rangle$ と固有値 $e^{i\phi}$ が存在しているとき、固有状態 $|\psi\rangle$ を標的量子ビット、重ね合わせた量子ビット $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ を制御量子ビットとして制御ユニタリーゲートを作用させると、固有値 $e^{i\phi}$ が制御量子ビットの相対位相として現れるのでした。

したがって重ね合わせた量子ビットが必要です。まずは固有状態 $|\psi\rangle$ と n 個の量子ビット $|0\rangle^{\otimes n}$ を準備します。

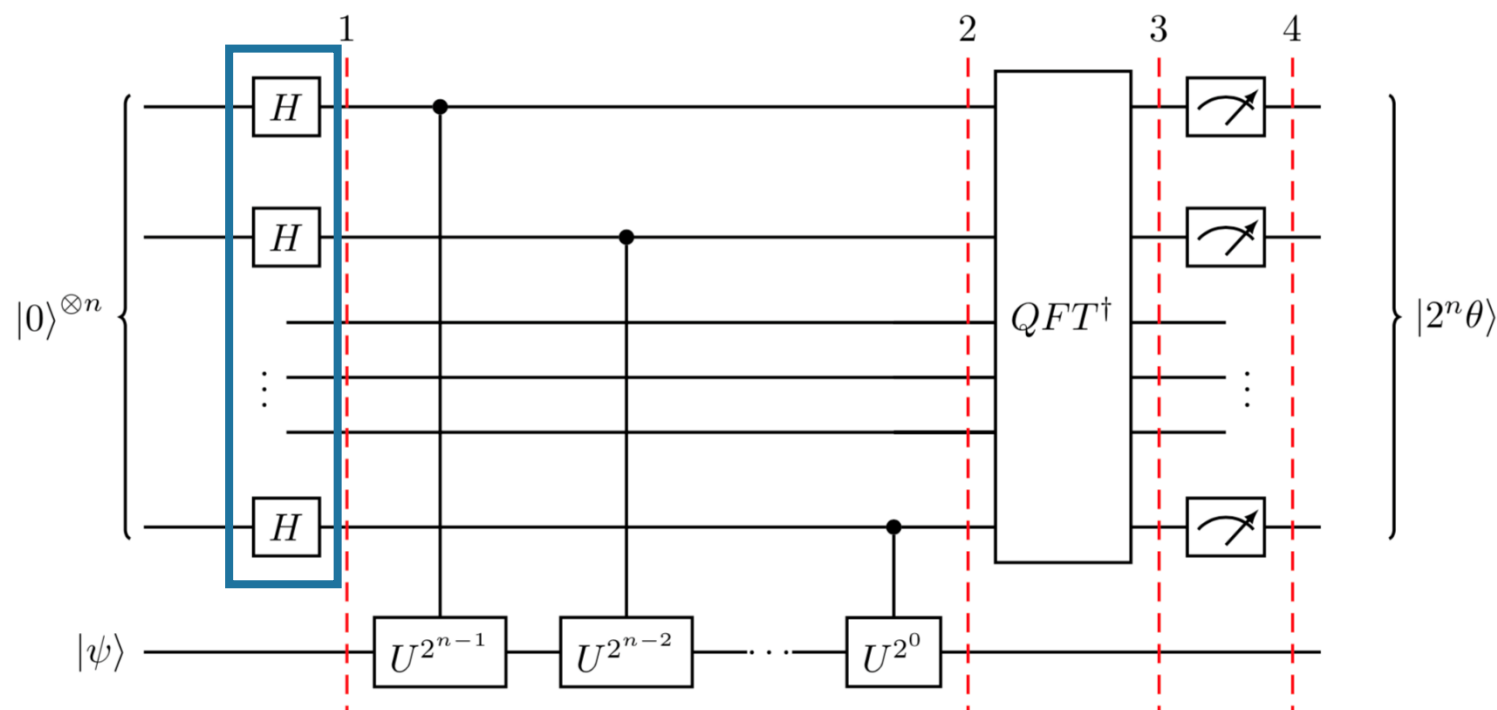


理論 (1.2 基礎となる数学)

ii. 重ね合わせ

付加した $|0\rangle^{\otimes n}$ にそれぞれアダマールゲートを適用し、重ね合わせた量子ビットを準備します。

$$\psi_1 = H^{\otimes n} \psi_0 = \frac{1}{\sqrt{2^n}} (|0\rangle + |1\rangle)^{\otimes n} |\psi\rangle$$



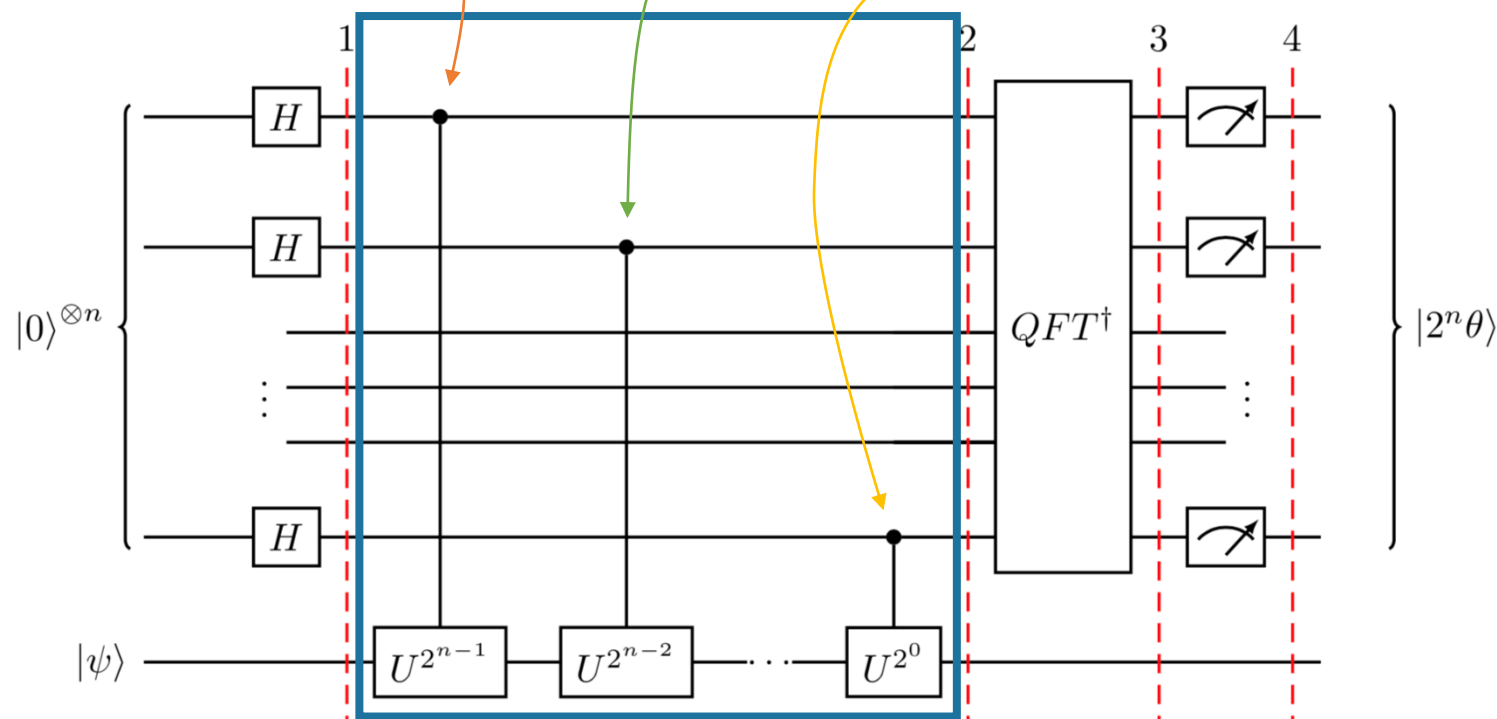
理論 (1.2 基礎となる数学)

iii. 制御ユニタリー演算

準備が出来たので制御ユニタリー演算を実行して位相キックバックを行います。

$U^{2^j}|\psi\rangle = e^{2\pi i\theta 2^j}|\psi\rangle$ であることを念頭において、

$$\psi_1 \xrightarrow{C-U^{2^j}} \psi_2 = \frac{1}{\sqrt{2^n}} (|0\rangle + e^{2\pi i\theta 2^{n-1}}|1\rangle) \otimes (|0\rangle + e^{2\pi i\theta 2^{n-2}}|1\rangle) \otimes \dots \otimes (|0\rangle + e^{2\pi i\theta 2^0}|1\rangle) \otimes |\psi\rangle$$



理論 (1.2 基礎となる数学)

iv. 逆フーリエ変換, v. 測定

前項の ψ_2 を変形すると

$$\psi_2 = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{k=0}^{2^n-1} e^{2\pi i \theta k} |k\rangle \otimes |\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{k=0}^{2^n-1} e^{2\pi i \frac{2^n \theta}{2^n} k} |k\rangle \otimes |\psi\rangle$$

となります。ところで、3.5章の量子フーリエ変換の式は

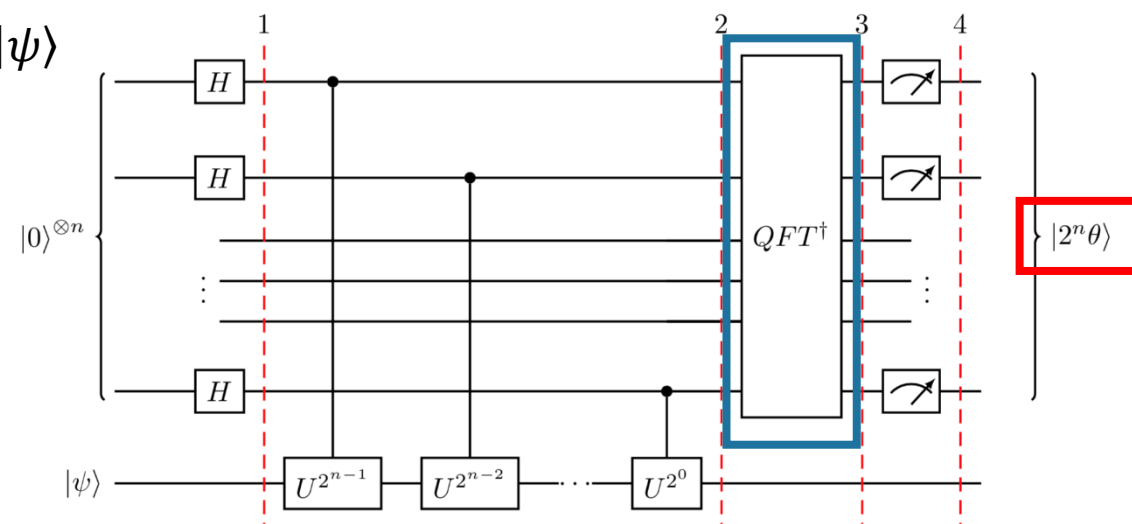
$$|x\rangle \xrightarrow{QFT} \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{y=0}^{N-1} e^{2\pi i \frac{x}{N} y} |y\rangle$$

でした。両式を比較すると、上記の式の赤色部分は $|2^n \theta\rangle$ の量子フーリエ変換になっていることが分かります。

したがってこの部分を逆量子フーリエ変換すれば

$$\psi_4 = |2^n \theta\rangle \otimes |\psi\rangle$$

あとは制御レジスターを測定すれば θ を求められます。



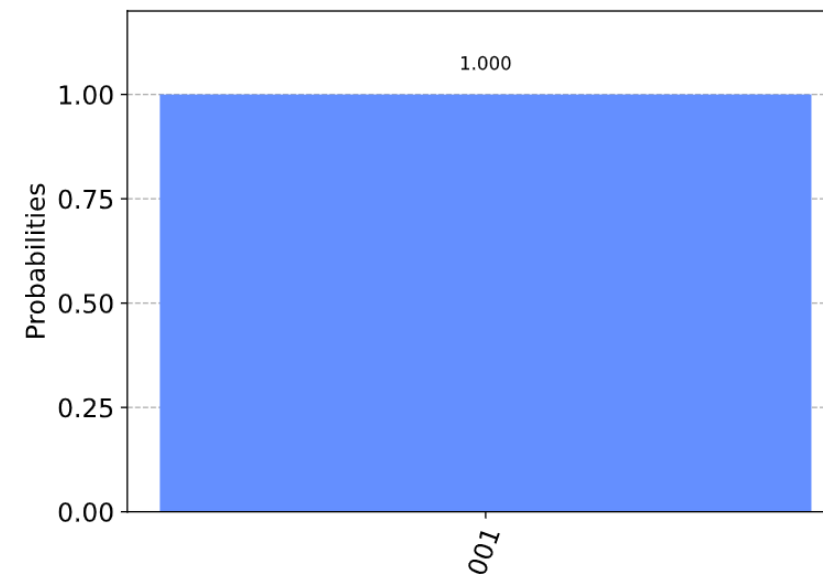
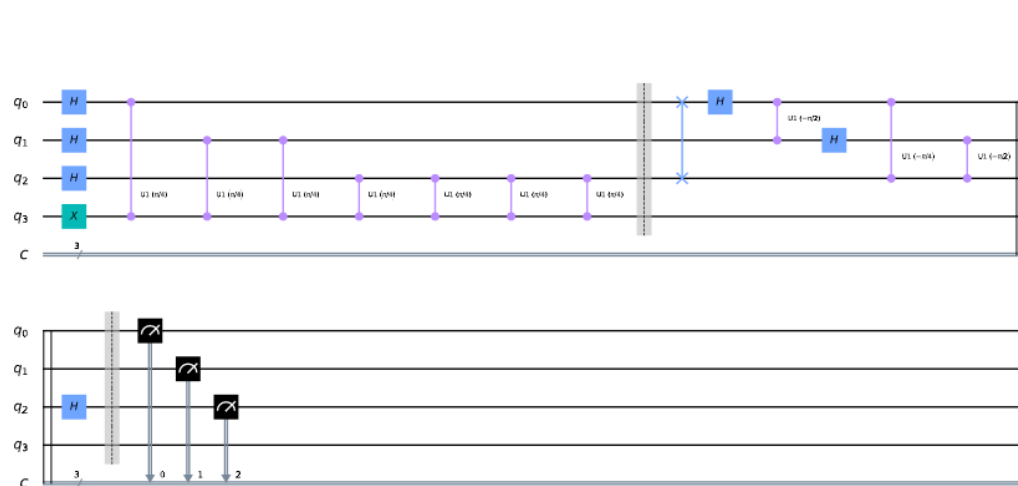
例：Tゲートの位相推定

Tゲートの固有値の位相を推定してみます。位相キックバックの節で説明したように、

$$\text{固有値は } T|1\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\pi/4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e^{i\pi/4} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e^{i\pi/4} |1\rangle \text{ となるので } e^{i\pi/4} \text{ です。}$$

量子位相推定では $U|\psi\rangle = e^{2\pi i\theta} |\psi\rangle$ の形の θ を推定するので、 $\theta = \frac{1}{8}$ となれば良い訳です。

テキストの通り回路を実装して実行すると、下図のような結果となります。

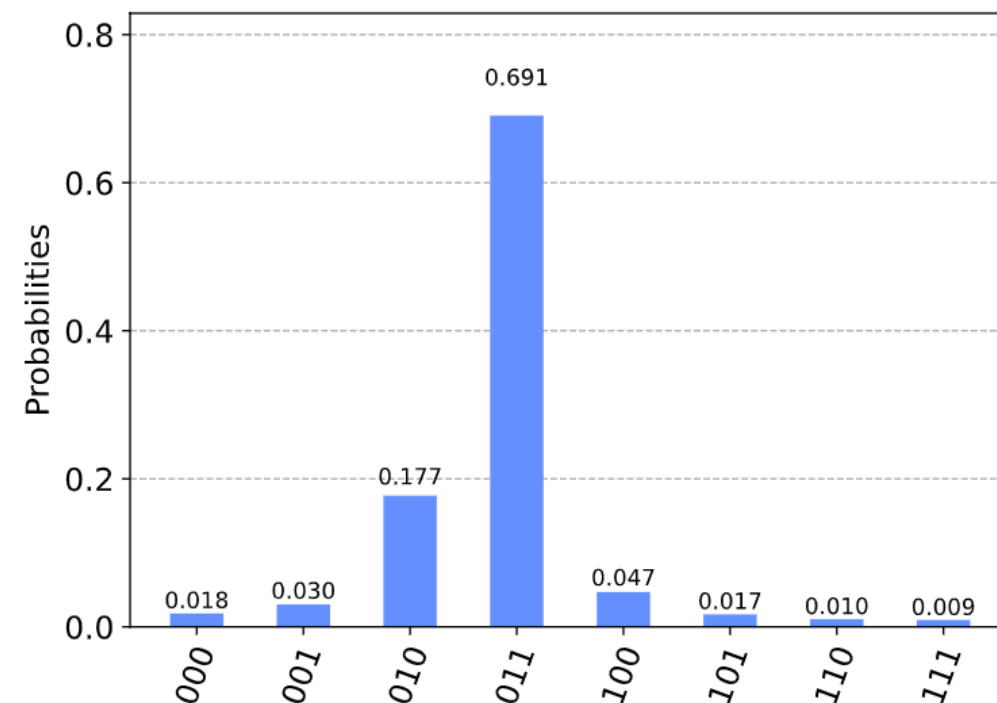
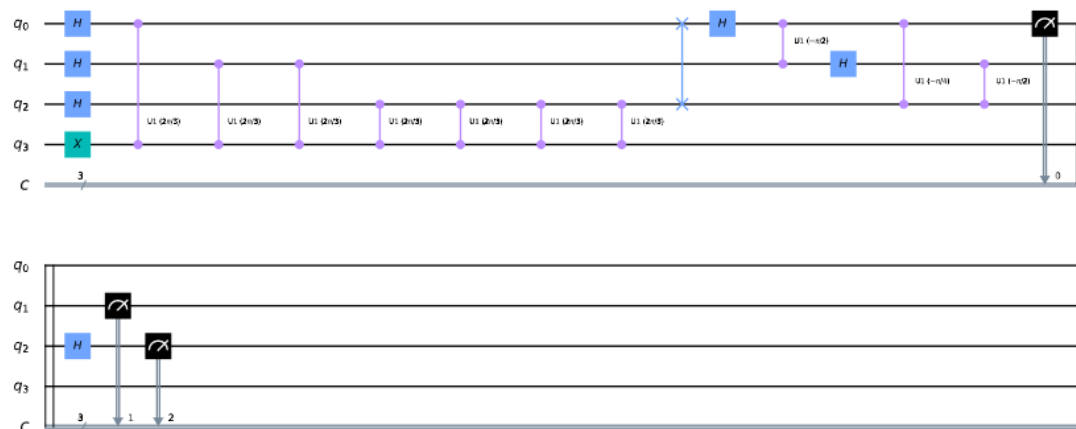


001が100%の確率で測定されています。したがって、 $|2^n\theta\rangle = |001\rangle, \theta = \frac{1}{2^n} = \frac{1}{8} (\because n = 3)$ となり期待通りの値が得られていることが分かります。

例： $\theta = \frac{1}{3}$ となるゲートの位相推定

測定結果 x に対して $\theta = \frac{x}{2^n}$ と解を得る都合上、 2^n で割り切れない場合は近似値が得られます。

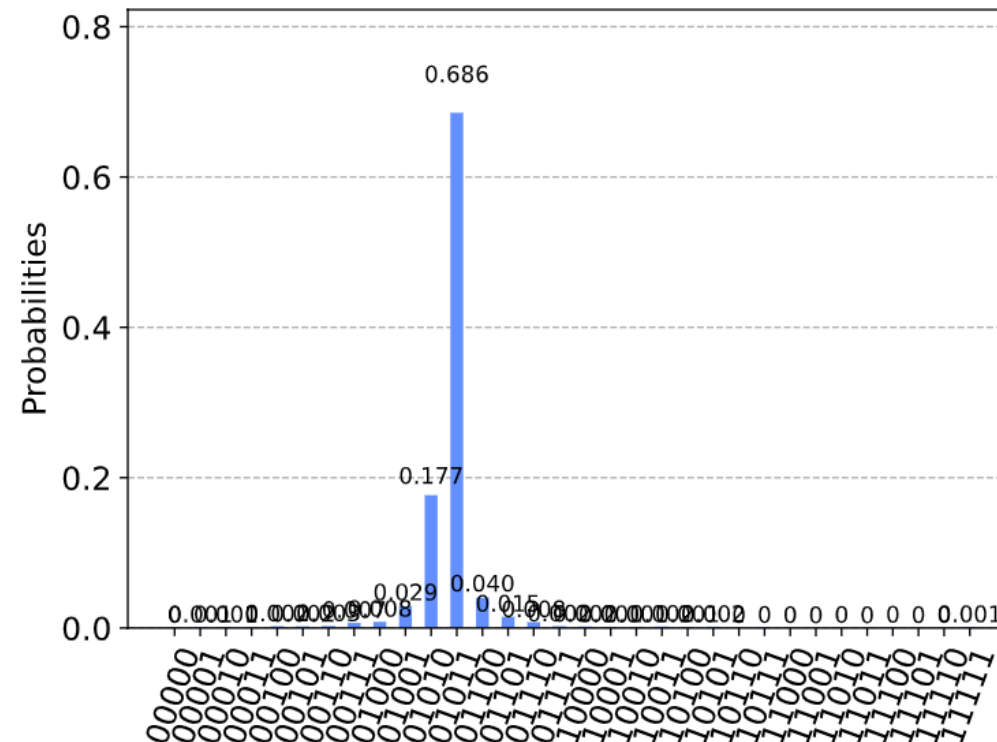
$\theta = \frac{1}{3}$ となるゲートで確認してみましょう。



011(=3)が最も高い確率で測定されました。したがって $\theta = \frac{3}{2^n} = \frac{3}{8} = 0.375$ となり、実際の値($\theta = 333 \dots$)に近い値となります。

例： $\theta = \frac{1}{3}$ となるゲートの位相推定

近似の精度を上げたい場合、最初に準備する重ね合わせの量子ビットを増やします。
 $n = 3$ から $n = 5$ に増やしてみましょう。回路図は省略します。



01010(=10)が最も高い確率で得られました。したがって $\theta = \frac{10}{2^5} = \frac{10}{32} = 0.3125$ となり、精度が上がっていることが分かります。

本資料の著作権は、日本アイ・ビー・エム株式会社（IBM Corporationを含み、以下、IBMといいます。）に帰属します。

ワークショップ、セッション、および資料は、IBMまたはセッション発表者によって準備され、それぞれ独自の見解を反映したものです。それらは情報提供の目的のみで提供されており、いかなる参加者に対しても法律的またはその他の指導や助言を意図したのではなく、またそのような結果を生むものでもありません。本資料に含まれている情報については、完全性と正確性を期するよう努力しましたが、「現状のまま」提供され、明示または暗示にかかわらずいかなる保証も伴わないものとします。本資料またはその他の資料の使用によって、あるいはその他の関連によって、いかなる損害が生じた場合も、IBMまたはセッション発表者は責任を負わないものとします。本資料に含まれている内容は、IBMまたはそのサプライヤーやライセンス交付者からいかなる保証または表明を引きだすことを意図したものでなく、IBMソフトウェアの使用を規定する適用ライセンス契約の条項を変更することを意図したものでなく、またそのような結果を生むものでもありません。

本資料でIBM製品、プログラム、またはサービスに言及していても、IBMが営業活動を行っているすべての国でそれらが使用可能であることを暗示するものではありません。本資料で言及している製品リリース日付や製品機能は、市場機会またはその他の要因に基づいてIBM独自の決定権をもっていつでも変更できるものとし、いかなる方法においても将来の製品または機能が使用可能になると確約することを意図したものではありません。本資料に含まれている内容は、参加者が開始する活動によって特定の販売、売上高の向上、またはその他の結果が生じると述べる、または暗示することを意図したものでなく、またそのような結果を生むものでもありません。パフォーマンスは、管理された環境において標準的なIBMベンチマークを使用した測定と予測に基づいています。ユーザーが経験する実際のスループットやパフォーマンスは、ユーザーのジョブ・ストリームにおけるマルチプログラミングの量、入出力構成、ストレージ構成、および処理されるワークロードなどの考慮事項を含む、数多くの要因に応じて変化します。したがって、個々のユーザーがここで述べられているものと同様の結果を得られると確約するものではありません。

記述されているすべてのお客様事例は、それらのお客様がどのようにIBM製品を使用したか、またそれらのお客様が達成した結果の実例として示されたものです。実際の環境コストおよびパフォーマンス特性は、お客様ごとに異なる場合があります。

IBM、IBM ロゴは、米国やその他の国におけるInternational Business Machines Corporationの商標または登録商標です。他の製品名およびサービス名等は、それぞれIBMまたは各社の商標である場合があります。現時点での IBM の商標リストについては、ibm.com/trademarkをご覧ください