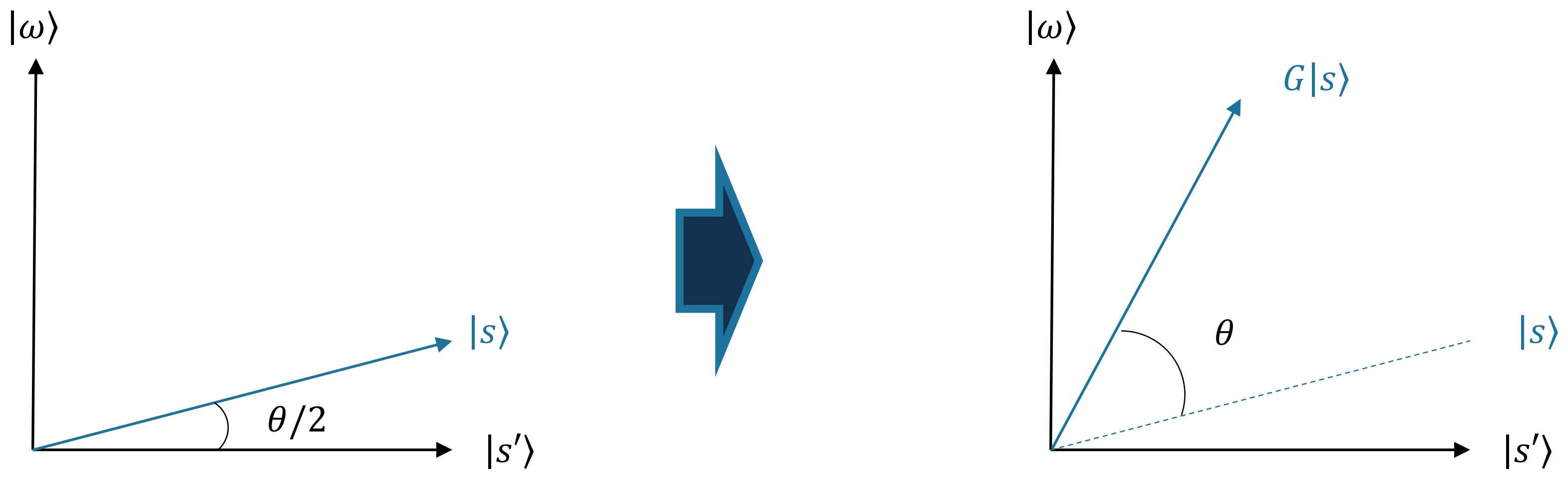
3.9 量子数え上げ

量子数え上げとは

量子数え上げはグローバーのアルゴリズムと量子位相推定からなるアルゴリズムです。
Qiskit textbookでは「グローバーアルゴリズムがオラクルの解を見つけようとするのに対し、量子数え上げのアルゴリズムは、この問題の解の数を見つけます」と説明されていますが、少し目的が分かりにくいと思います。
まずはグローバーのアルゴリズムの復習から始めましょう。

グローバーのアルゴリズムはn量子の均一な重ね合わせ状態$|s\rangle$から、ある1つの状態$|\omega\rangle$を取り出す確率を振幅増幅によって1にするものでした。ここで、$|s'\rangle$は$|s\rangle$から$|\omega\rangle$を除いて正規化した状態で、$|\omega\rangle$と直行しています。
振幅増幅演算Gは下図のような回転演算です。



量子数え上げとは

グローバーのアルゴリズムは$|\omega\rangle$が1つの状態（解が1つ）でしたが、量子数え上げでは$|\omega\rangle$が複数の状態の重ね合わせ（解が複数）の場合を扱います。$|\omega\rangle$がいくつの状態の重ね合わせか（解の個数）を求めるのが量子数え上げです。

具体的に見ていきましょう。3量子ビットの$|s\rangle$は

$$|s\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^3}}(|000\rangle + |001\rangle + |010\rangle + |011\rangle + |100\rangle + |101\rangle + |110\rangle + |111\rangle)$$

なので、$|\omega\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|001\rangle + |100\rangle + |101\rangle)$のとき（解の数3個のとき）

$|s'\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}(|000\rangle + |010\rangle + |011\rangle + |110\rangle + |111\rangle)$となるので

$$|s\rangle = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2^3}}|\omega\rangle + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2^3}}|s'\rangle$$

となります。

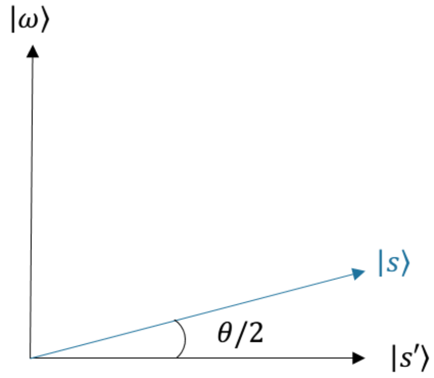
解の数の情報が$|\omega\rangle$の確率振幅に現れていることが分かります。

したがって$|\omega\rangle$の確率振幅を求めればそこから解の数を求められそうです。

量子状態の確率振幅を求めるアルゴリズムを量子振幅推定（QAE）アルゴリズムといいます。

量子数え上げはQAEとほぼ同様のものです。

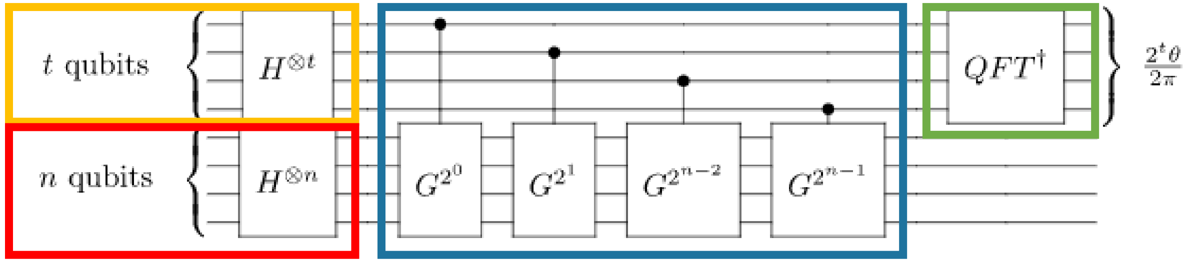
理論

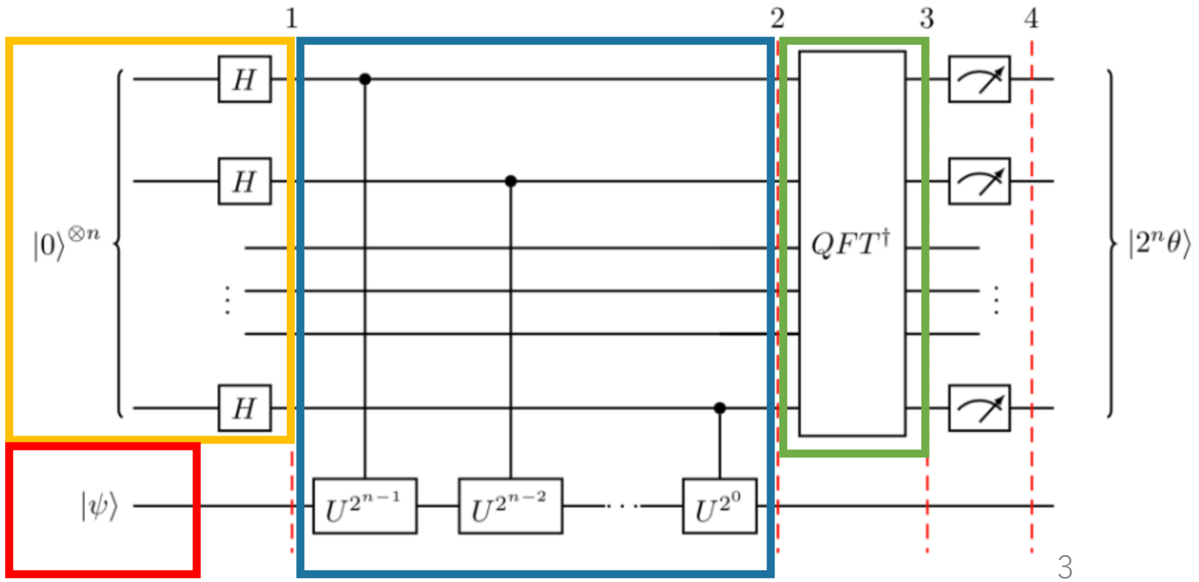


さて最初の図に戻りましょう。右図より

$$|s\rangle = \sin\frac{\theta}{2}|\omega\rangle + \cos\frac{\theta}{2}|s'\rangle$$

と表せます。
つまり$|\omega\rangle$の確率振幅を得るにはθの値が分かればよいでしょう。
このθはグローバーの反復演算Gの回転角であり、さらにTextbookよりGの固有値は$e^{\pm i\theta}$であるため、
θを求めるにはGに対して**量子位相推定**をすればよい訳です。
下図左の量子数え上げの回路と右の量子位相推定の回路を見比べてみると同じことをしているのが分かると思います。





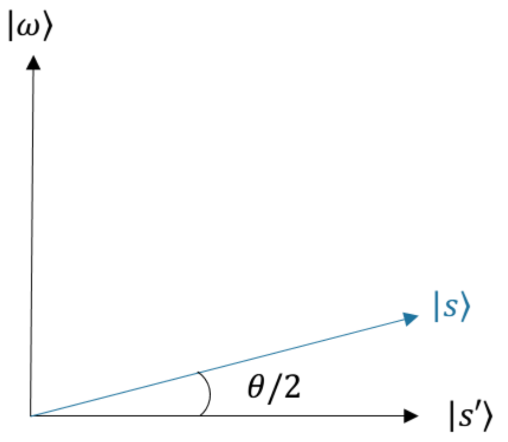
理論

量子位相推定の出力結果は$2^n\phi$となるのでした。
またこの値は固有値$e^{2\pi i\phi}$のときの結果なので、今回の固有値$e^{i\theta}$の場合の測定値は$2^t\frac{\theta}{2\pi}$となり、

$$\theta = 2^t\frac{\theta}{2\pi}\times\frac{2\pi}{2^t} = 測定値\times\frac{2\pi}{2^t}$$

とθを求めることができました。
ここから解の個数Mを求めておきましょう。
前ページの図から、$|s\rangle$と$|s'\rangle$の内積 $\langle s'|s\rangle = \cos\frac{\theta}{2}$ です。また

$$|s\rangle = \sin\frac{\theta}{2}|\omega\rangle + \cos\frac{\theta}{2}|s'\rangle$$



だったので、$\cos\frac{\theta}{2}$ は解以外の状態の確率振幅であり、
3ページ目のスライドよりこの振幅は状態の数Nと解の個数Mを使って
$\sqrt{\frac{N-M}{N}}$ と表せました。したがって、

$$\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{N-M}{N}} \Rightarrow M = N\left(1-\cos^2\frac{\theta}{2}\right) = N\sin^2\frac{\theta}{2}$$

とMを求めることができました。