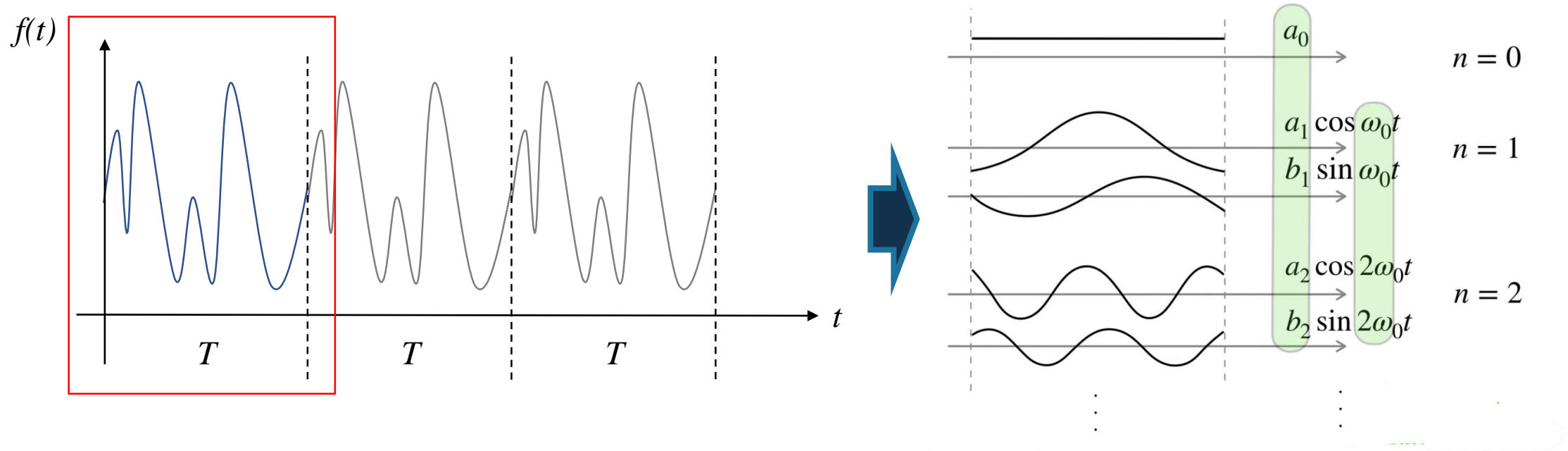


3.5 量子フーリエ変換

離散フーリエ変換とは？

フーリエ級数

離散フーリエ変換の話をする前に、まずはベースとなっているフーリエ級数について要点を理解しましょう。
周期的に変化する関数 $f(t)$ があるとして。



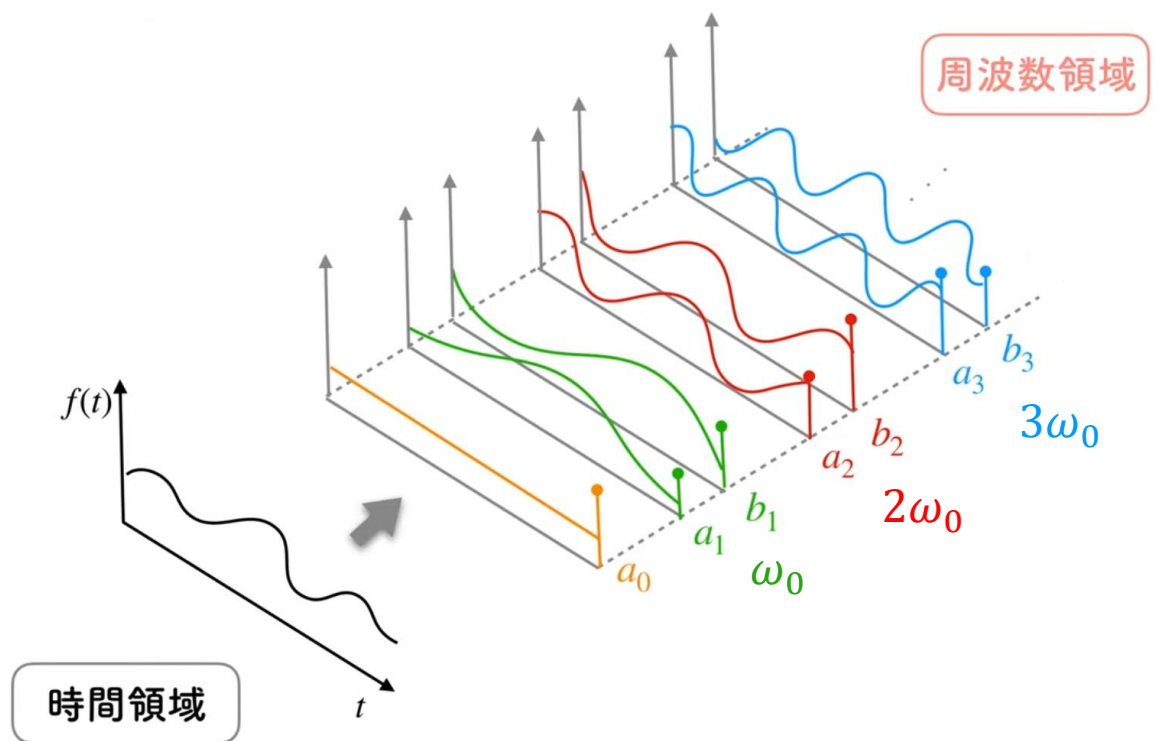
この関数 $f(t)$ は周期 T によって決まるある角周波数 ω_0 をもつ**正弦波 (sin, cos) に分解**できます。

$$f(t) = a_0 + a_1 \cos \omega_0 t + b_1 \sin \omega_0 t + a_2 \cos 2\omega_0 t + b_2 \sin 2\omega_0 t + \dots$$

ここで、 $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ です。フーリエ級数とは $f(t)$ をこのような正弦波の和で表した（近似した）ものです。

フーリエ級数

フーリエ級数に展開したときの三角関数の係数 a_0, a_1, a_2, \dots や b_1, b_2, b_3, \dots をフーリエ係数といいます。
フーリエ級数展開によってフーリエ係数を求めることで、元の関数の周波数成分を知ることができます。



$-\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}$ で定義されたフーリエ係数

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos \frac{2n\pi t}{T} dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin \frac{2n\pi t}{T} dt$$

フーリエ級数

このようにフーリエ級数の基本は、元々の信号を様々な周波数の波に分解することです。
これはこの後説明するフーリエ変換なども同じです。
各周波数の波に分解してそれぞれの周波数成分が元々の波にどの程度含まれているかなどを解析することをフーリエ解析といいます。

フーリエ解析の身近な応用例で一番分かりやすい例はオーディオ圧縮です。
音は波ですので、周波数領域に変換し、人間の耳には聞こえない周波数の情報をカットすることでオーディオデータを圧縮しています。

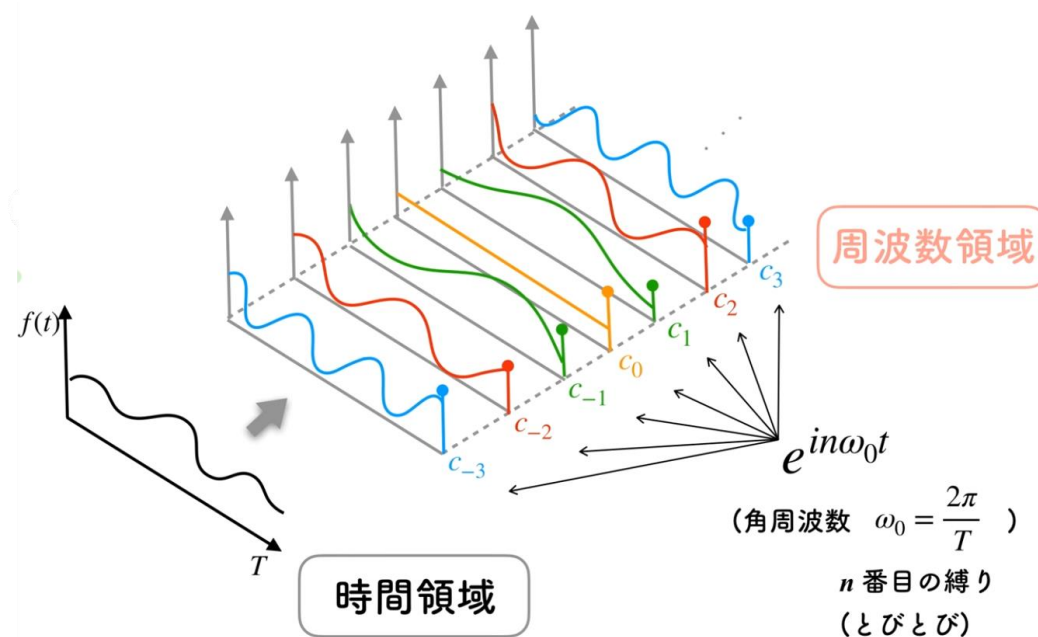
その他に画像処理や医療（CTスキャン）などにもフーリエ解析の技術が使用されています。

複素フーリエ級数

フーリエ級数は単純な一次結合で分かりやすいですが、sinやcosが沢山登場して式が少々複雑でした。
オイラーの公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ を使って式をシンプルにしてみましょう。

$$\begin{aligned} f(t) &= a_0 + a_1 \cos \omega_0 t + b_1 \sin \omega_0 t + a_2 \cos 2\omega_0 t + b_2 \sin 2\omega_0 t + \dots \\ &= \dots + c_{-n} e^{-in\omega_0 t} + \dots + c_{-1} e^{-i\omega_0 t} + c_0 + c_1 e^{i\omega_0 t} + \dots + c_n e^{in\omega_0 t} + \dots \end{aligned}$$

フーリエ係数を1種類だけにすることができました。これを**複素フーリエ級数**といいます。



$-\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}$ で定義された複素フーリエ係数

$$c_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-in\omega_0 t} dt$$

フーリエ変換

ここまで説明したフーリエ級数は周期関数を対象にしていました。次に説明するフーリエ変換は非周期的な関数を対象にします。周期関数では角周波数は離散的な（飛び飛びの）値を取っていましたが、非周期関数では角周波数成分が連続的になります。

詳しい導出は割愛しますが、周期関数の1周期分を取り出して周期 $T \rightarrow \infty$ とすればフーリエ級数からフーリエ変換へと移行できます。関数 $f(t)$ のフーリエ変換は次式で表現されます。

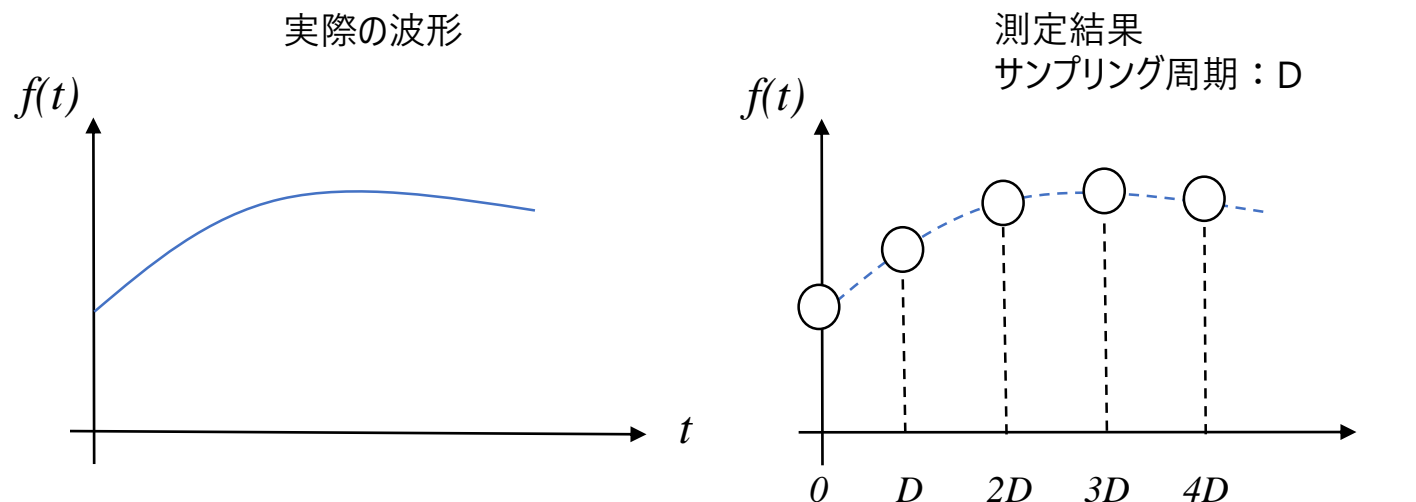
$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt$$

また、逆フーリエ変換は次式で表現されます。

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t} d\omega$$

離散フーリエ変換

フーリエ変換は関数の積分の形で定義されていました。
ある波形を実験で観測し、その観測値から波の周波数成分を調べるといったことを行おうとすると、
実際の観測値は一定間隔でサンプリングされた離散的なデータであるため、そのままフーリエ変換を行うことは難しそうです。



このような場合に使用するのが**離散フーリエ変換**です。

離散フーリエ変換

まず、 $T=4D$ として有限区間 ($0 \leq t < T$) で解析することにします。
 そうすると測定値のうち4つだけ考えれば良いことになります。

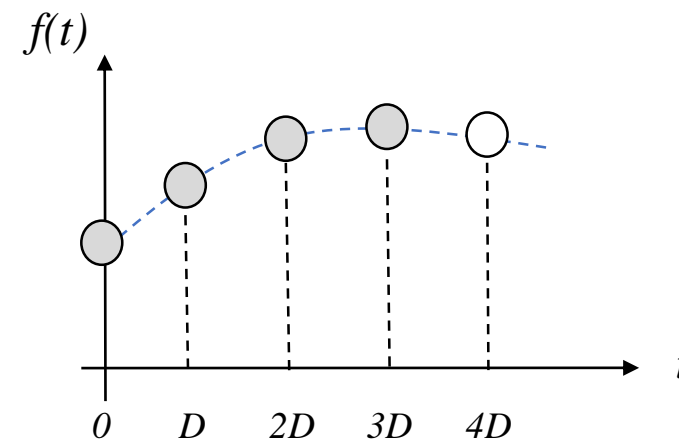
ここで複素フーリエ級数の式を思い出しましょう。総和記号を使って表すと

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i \frac{2n\pi}{T} t}$$

でした。今、 $n=0,1,2,3$ だけ考えれば良く、 $T=4D$ なので、

$$f(t) = c_0 + c_1 e^{i \frac{2\pi}{4D} (1t)} + c_2 e^{i \frac{2\pi}{4D} (2t)} + c_3 e^{i \frac{2\pi}{4D} (3t)}$$

となります。これが4つの離散信号の離散フーリエ変換の基本の式です。
 この式の t に $0, D, 2D, 3D$ を代入して、連立方程式を作ります。



離散フーリエ変換

前項の操作を行うと、

$$\begin{cases} f(0) = c_0 + c_1 + c_2 + c_3 \\ f(D) = c_0 + c_1 e^{i\frac{2\pi}{4}} + c_2 e^{i\frac{4\pi}{4}} + c_3 e^{i\frac{6\pi}{4}} \\ f(2D) = c_0 + c_1 e^{i\frac{4\pi}{4}} + c_2 e^{i\frac{8\pi}{4}} + c_3 e^{i\frac{12\pi}{4}} \\ f(3D) = c_0 + c_1 e^{i\frac{6\pi}{4}} + c_2 e^{i\frac{12\pi}{4}} + c_3 e^{i\frac{18\pi}{4}} \end{cases}$$

ここで、 $f(0) = f_0, f(D) = f_1$ などとして連立方程式を行列で表すと

$$\begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{i\frac{2\pi}{4}} & e^{i\frac{4\pi}{4}} & e^{i\frac{6\pi}{4}} \\ 1 & e^{i\frac{4\pi}{4}} & e^{i\frac{8\pi}{4}} & e^{i\frac{12\pi}{4}} \\ 1 & e^{i\frac{6\pi}{4}} & e^{i\frac{12\pi}{4}} & e^{i\frac{18\pi}{4}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

離散フーリエ変換

$$\begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{i\frac{2\pi}{4}} & e^{i\frac{4\pi}{4}} & e^{i\frac{6\pi}{4}} \\ 1 & e^{i\frac{4\pi}{4}} & e^{i\frac{8\pi}{4}} & e^{i\frac{12\pi}{4}} \\ 1 & e^{i\frac{6\pi}{4}} & e^{i\frac{12\pi}{4}} & e^{i\frac{18\pi}{4}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{-i\frac{2\pi}{4}} & e^{-i\frac{4\pi}{4}} & e^{-i\frac{6\pi}{4}} \\ 1 & e^{-i\frac{4\pi}{4}} & e^{-i\frac{8\pi}{4}} & e^{-i\frac{12\pi}{4}} \\ 1 & e^{-i\frac{6\pi}{4}} & e^{-i\frac{12\pi}{4}} & e^{-i\frac{18\pi}{4}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{-i\frac{2\pi}{4}} & e^{-i\frac{4\pi}{4}} & e^{-i\frac{6\pi}{4}} \\ 1 & e^{-i\frac{4\pi}{4}} & e^{-i\frac{8\pi}{4}} & e^{-i\frac{12\pi}{4}} \\ 1 & e^{-i\frac{6\pi}{4}} & e^{-i\frac{12\pi}{4}} & e^{-i\frac{18\pi}{4}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{i\frac{2\pi}{4}} & e^{i\frac{4\pi}{4}} & e^{i\frac{6\pi}{4}} \\ 1 & e^{i\frac{4\pi}{4}} & e^{i\frac{8\pi}{4}} & e^{i\frac{12\pi}{4}} \\ 1 & e^{i\frac{6\pi}{4}} & e^{i\frac{12\pi}{4}} & e^{i\frac{18\pi}{4}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{-i\frac{2\pi}{4}} & e^{-i\frac{4\pi}{4}} & e^{-i\frac{6\pi}{4}} \\ 1 & e^{-i\frac{4\pi}{4}} & e^{-i\frac{8\pi}{4}} & e^{-i\frac{12\pi}{4}} \\ 1 & e^{-i\frac{6\pi}{4}} & e^{-i\frac{12\pi}{4}} & e^{-i\frac{18\pi}{4}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} = \underline{4} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

離散フーリエ変換

$$\begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{-i\frac{2\pi}{4}} & e^{-i\frac{4\pi}{4}} & e^{-i\frac{6\pi}{4}} \\ 1 & e^{-i\frac{4\pi}{4}} & e^{-i\frac{8\pi}{4}} & e^{-i\frac{12\pi}{4}} \\ 1 & e^{-i\frac{6\pi}{4}} & e^{-i\frac{12\pi}{4}} & e^{-i\frac{18\pi}{4}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}$$

このように離散信号 f_n から周波数成分 c_n が計算できました。1成分だけ抜き出すと

$$c_n = \frac{1}{4} \left(f_0 + f_1 e^{-i\frac{2\pi}{4}n} + f_2 e^{-i\frac{2\pi}{4}2n} + f_3 e^{-i\frac{2\pi}{4}3n} \right) = \frac{1}{4} \sum_{j=0}^3 f_j e^{-i\frac{2\pi}{4}jn}$$

ここで、サンプリング数 $4 = N$ とし、 f を x 、 $\sqrt{N}c_n$ を y_k に置き換えると

$$\begin{aligned} \sqrt{N}c_n &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} x_j e^{-i\frac{2\pi}{N}jn} \\ y_k &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} x_j e^{-2\pi i \frac{jk}{N}} \end{aligned}$$

と、Qiskit textbook とほぼ同じ離散フーリエ変換の式となります。

本資料の著作権は、日本アイ・ビー・エム株式会社（IBM Corporationを含み、以下、IBMといいます。）に帰属します。

ワークショップ、セッション、および資料は、IBMまたはセッション発表者によって準備され、それぞれ独自の見解を反映したものです。それらは情報提供の目的のみで提供されており、いかなる参加者に対しても法律的またはその他の指導や助言を意図したのではなく、またそのような結果を生むものでもありません。本資料に含まれている情報については、完全性と正確性を期するよう努力しましたが、「現状のまま」提供され、明示または暗示にかかわらずいかなる保証も伴わないものとします。本資料またはその他の資料の使用によって、あるいはその他の関連によって、いかなる損害が生じた場合も、IBMまたはセッション発表者は責任を負わないものとします。本資料に含まれている内容は、IBMまたはそのサプライヤーやライセンス交付者からいかなる保証または表明を引きだすことを意図したものでなく、IBMソフトウェアの使用を規定する適用ライセンス契約の条項を変更することを意図したものでなく、またそのような結果を生むものでもありません。

本資料でIBM製品、プログラム、またはサービスに言及していても、IBMが営業活動を行っているすべての国でそれらが使用可能であることを暗示するものではありません。本資料で言及している製品リリース日付や製品機能は、市場機会またはその他の要因に基づいてIBM独自の決定権をもっていつでも変更できるものとし、いかなる方法においても将来の製品または機能が使用可能になると確約することを意図したものではありません。本資料に含まれている内容は、参加者が開始する活動によって特定の販売、売上高の向上、またはその他の結果が生じると述べる、または暗示することを意図したものでなく、またそのような結果を生むものでもありません。パフォーマンスは、管理された環境において標準的なIBMベンチマークを使用した測定と予測に基づいています。ユーザーが経験する実際のスループットやパフォーマンスは、ユーザーのジョブ・ストリームにおけるマルチプログラミングの量、入出力構成、ストレージ構成、および処理されるワークロードなどの考慮事項を含む、数多くの要因に応じて変化します。したがって、個々のユーザーがここで述べられているものと同様の結果を得られると確約するものではありません。

記述されているすべてのお客様事例は、それらのお客様がどのようにIBM製品を使用したか、またそれらのお客様が達成した結果の実例として示されたものです。実際の環境コストおよびパフォーマンス特性は、お客様ごとに異なる場合があります。

IBM、IBM ロゴは、米国やその他の国におけるInternational Business Machines Corporationの商標または登録商標です。他の製品名およびサービス名等は、それぞれIBMまたは各社の商標である場合があります。現時点での IBM の商標リストについては、ibm.com/trademarkをご覧ください