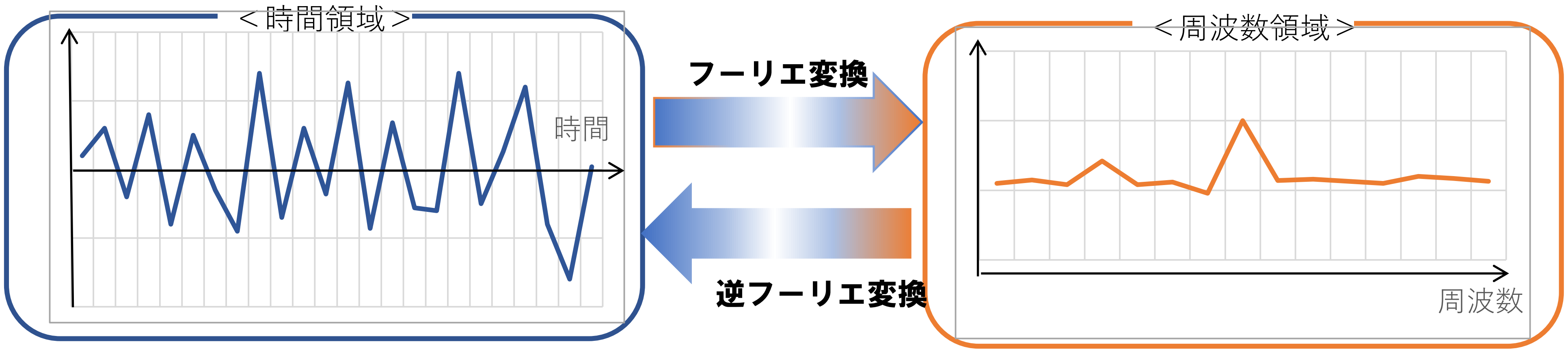
3.5 量子フーリエ変換

量子フーリエ変換

量子フーリエ変換(Quantum Fourier Transform, QFT)とは、量子コンピュータ上で離散フーリエ変換に対応する、アルゴリズムです。
そもそもフーリエ変換とは、ある現象を別の視点で表現するための変換のことです。

- フーリエ変換のイメージ



- 波は時間に対する波形(振幅)で表現されるのが一般的です。これを時間領域の関数と呼びます。
- 時間領域の関数はフーリエ変換によって周波数領域の関数に変換されます。
  つまり、波がどの周波数の基本波がどれくらいの割合で構成されているかという視点で表現されます。
- つまり**波という現象を時間の視点で表現していたものが、フーリエ変換によって周波数の視点で表現されるようになった**といえます。

量子フーリエ変換は何を変換しているのか

量子フーリエ変換も同様に、情報を量子状態と位相という視点での表現へ変換を行っています。
量子フーリエ変換は以下の数式で表現されます。

$$|j\rangle \xrightarrow{QFT} \frac{1}{\sqrt{2^n}}(|0\rangle+e^{i2\pi 0.j_n}|1\rangle)\otimes(|0\rangle+e^{i2\pi 0.j_{n-1}j_n}|1\rangle)\otimes\cdot\cdot\cdot\otimes(|0\rangle+e^{i2\pi 0.j_1\ldots j_n}|1\rangle)$$

ここで　とは　を2進数表記したときのi桁目です。例えばj=5であれば2進数表記で、j=j1j2j3=101 です。

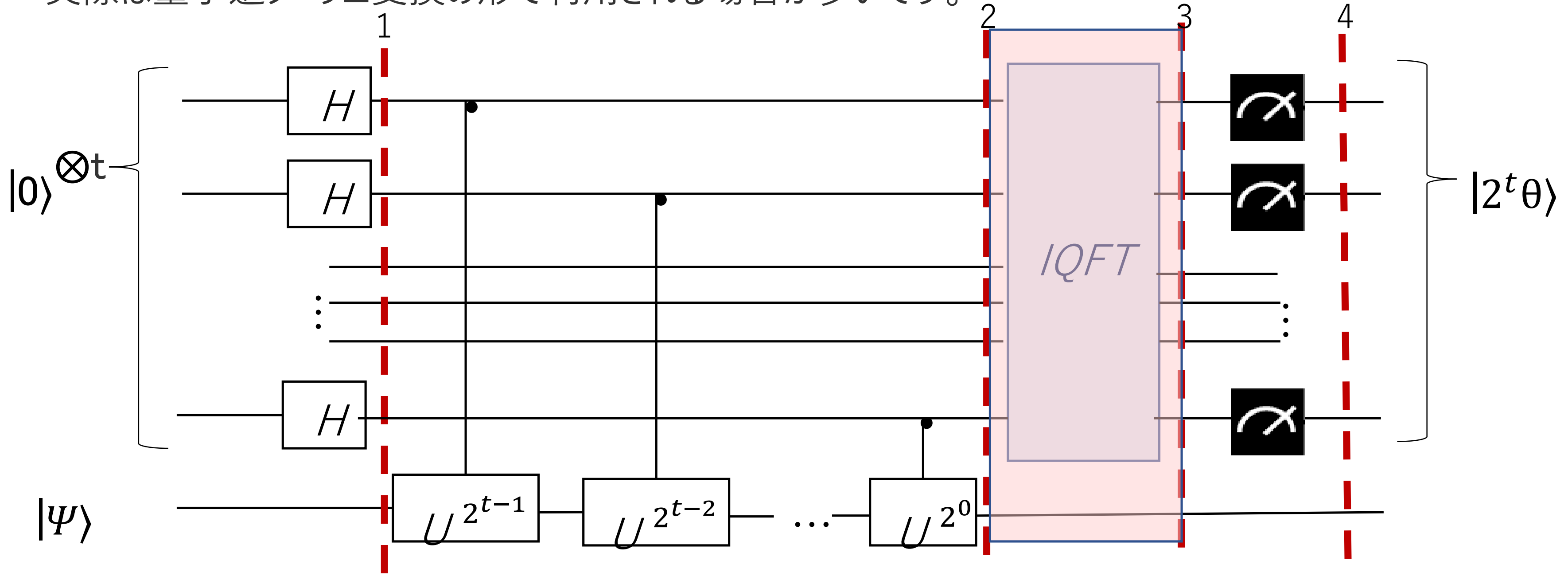
$$|5\rangle \xrightarrow{QFT} \frac{1}{\sqrt{2^3}}(|0\rangle+e^{i2\pi 0.1}|1\rangle)\otimes(|0\rangle+e^{i2\pi 0.01}|1\rangle)\otimes\cdot\cdot\cdot\otimes(|0\rangle+e^{i2\pi 0.101}|1\rangle)$$

- 量子フーリエ変換によって量子状態 |j> を構成する各量子ビットの情報が、数式の赤い部分で表したように位相に反映されていることが確認できます。

量子フーリエ変換は何のために使われるのか

量子フーリエ変換が理解しにくいのは、利用される目的がわらないからという理由が大きい。
量子フーリエ変換がどこで何のために利用されているか？

- 量子フーリエ変換は単体で使用されるというよりは、様々なサブルーチンやアルゴリズムの一工程として利用されています。
  実際は量子逆フーリエ変換の形で利用される場合が多いです。



- 上の画像は量子フーリエ変換の利用先として最も有名な量子位相推定の構成です。赤枠に量子逆フーリエ変換が利用されています。これは位相情報を量子状態に書き込むために利用されています。
- 量子アルゴリズムやサブルーチンの多くは位相情報をうまく利用して、量子状態に対して操作を行っています。
  そのため量子状態と位相間で情報を変換する量子フーリエ変換は重要な役割を果たしています。

量子フーリエ変換の導出

1Qビットの場合

- n=1の場合は、2ページの式は、以下の通りとなり、

$$|j_0\rangle \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + e^{i2\pi 0.j_0}|1\rangle)$$

- つまり、以下のようになり、

$$|0\rangle \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \qquad |1\rangle \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$$

- 下記のようにアダマールゲートであることが良いことがわかります。

$$H \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

量子フーリエ変換の導出

2Qビットの場合

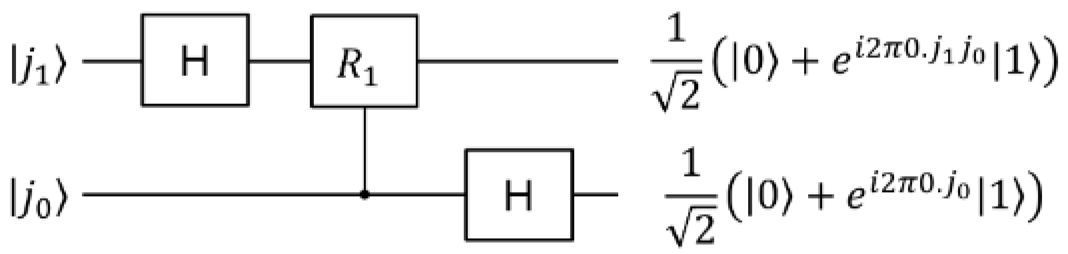
- 2ページの式と1Qビットの例から2Qビットでは以下のようになります。

$$|j_1 j_0\rangle \xrightarrow{QFT} \frac{1}{\sqrt{2^n}} (|0\rangle + e^{i2\pi 0.j_0}|1\rangle) \otimes (|0\rangle + e^{i2\pi 0.j_1 j_0}|1\rangle)$$

- J_1にHを掛けた後、$e^{i2\pi/4}$ を、j_0 が 1 の時だけJ_1を掛ければ良いのです。
- 実現するには、以下のような位相ゲートを使います。

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & e^{i2\pi/4} \end{pmatrix}$$

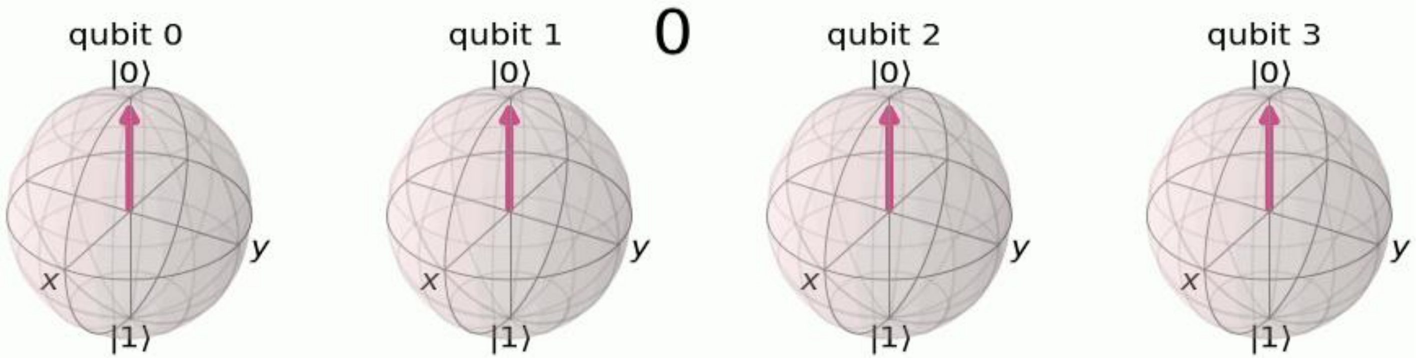
- これにより、2 ビットの量子回路は以下のようになります。



２Ｑビット以上は
繰り返しで実装可能

量子フーリエ変換の導出

計算基底



フーリエ基底