

3.9 量子数え上げ

量子数え上げとは

量子数え上げはグローバーのアルゴリズムと量子位相推定からなるアルゴリズムです。

Qiskit textbookでは「グローバーアルゴリズムがオラクルの解を見つけようとするのに対し、量子数え上げのアルゴリズムは、この問題の解の数を見つけます」と説明されていますが、少し目的が分かりにくいと思います。

まずはグローバーのアルゴリズムの復習から始めましょう。

グローバーのアルゴリズムは n 量子の均一な重ね合わせ状態 $|s\rangle$ から、ある1つの状態 $|\omega\rangle$ を取り出す確率を振幅増幅によって1にするものでした。ここで、 $|s'\rangle$ は $|s\rangle$ から $|\omega\rangle$ を除いて正規化した状態で、 $|\omega\rangle$ と直行しています。

振幅増幅演算 G は下図のような回転演算です。



量子数え上げとは

グローバーのアルゴリズムは $|\omega\rangle$ が1つの状態（解が1つ）でしたが、量子数え上げでは $|\omega\rangle$ が複数の状態の重ね合わせ（解が複数）の場合を扱います。 $|\omega\rangle$ がいくつの状態の重ね合わせか（解の個数）を求めるのが量子数え上げです。

具体的に見ていきましょう。3量子ビットの $|s\rangle$ は

$$|s\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^3}} (|000\rangle + |001\rangle + |010\rangle + |011\rangle + |100\rangle + |101\rangle + |110\rangle + |111\rangle)$$

なので、 $|\omega\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} (|001\rangle + |100\rangle + |101\rangle)$ のとき（解の数3個のとき）

$|s'\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}} (|000\rangle + |010\rangle + |011\rangle + |110\rangle + |111\rangle)$ となるので

$$|s\rangle = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2^3}} |\omega\rangle + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2^3}} |s'\rangle$$

となります。

解の数の情報が $|\omega\rangle$ の確率振幅に現れていることが分かります。

したがって $|\omega\rangle$ の確率振幅を求めればそこから解の数を求められそうです。

量子状態の確率振幅を求めるアルゴリズムを量子振幅推定（QAE）アルゴリズムといいます。

量子数え上げはQAEとほぼ同様のものです。

理論

さて最初の図に戻りましょう。右図より

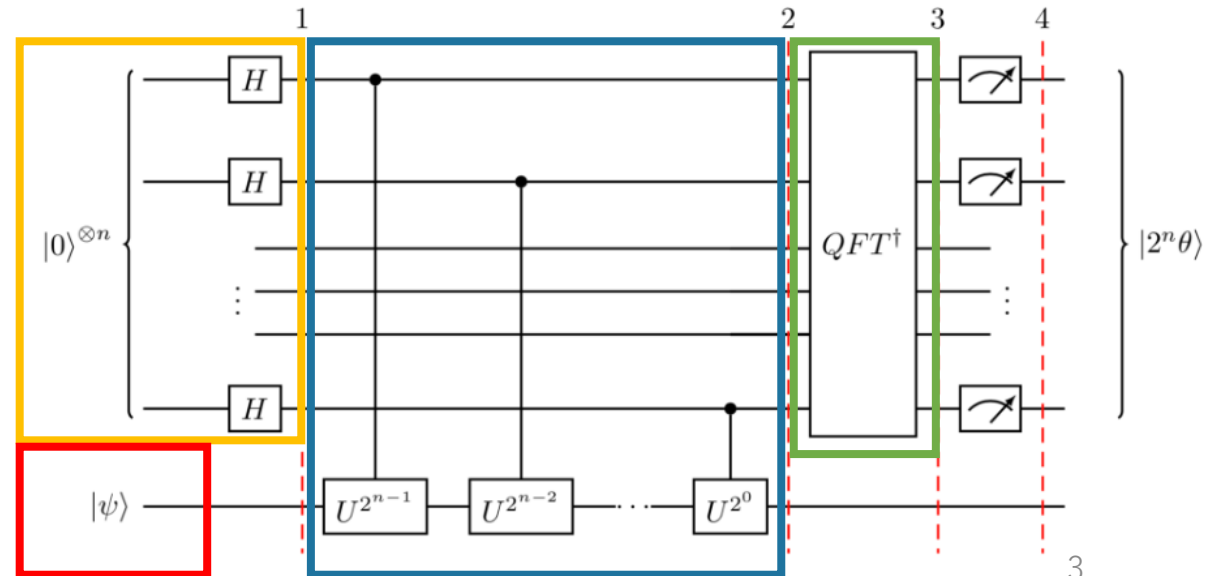
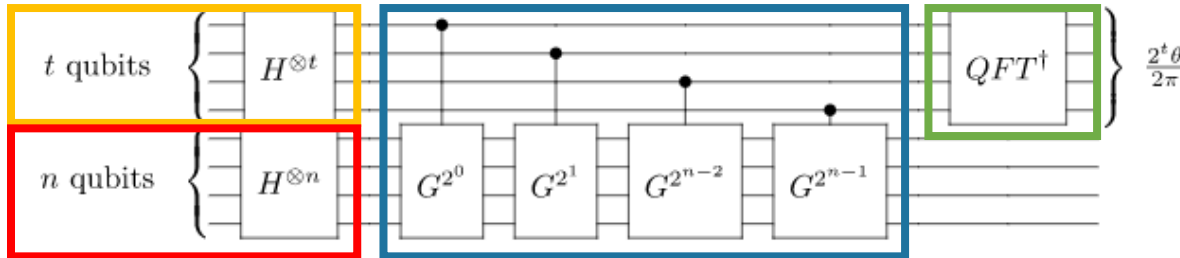
$$|s\rangle = \sin \frac{\theta}{2} |\omega\rangle + \cos \frac{\theta}{2} |s'\rangle$$

と表せます。

つまり $|\omega\rangle$ の確率振幅を得るには θ の値が分かればよいでしょう。

この θ はグローバーの反復演算 G の回転角であり、さらにTextbookより G の固有値は $e^{\pm i\theta}$ であるため、 θ を求めるには G に対して**量子位相推定**をすればよい訳です。

下図左の量子数え上げの回路と右の量子位相推定の回路を見比べてみると同じことをしているのが分かります。



理論

量子位相推定の出力結果は $2^n \phi$ となるのでした。

またこの値は固有値 $e^{2\pi i \phi}$ のときの結果なので、今回の固有値 $e^{i\theta}$ の場合の測定値は $2^t \frac{\theta}{2\pi}$ となり、

$$\theta = 2^t \frac{\theta}{2\pi} \times \frac{2\pi}{2^t} = \text{測定値} \times \frac{2\pi}{2^t}$$

と θ を求めることができました。

ここから解の個数 M を求めておきましょう。

前ページの図から、 $|s\rangle$ と $|s'\rangle$ の内積 $\langle s'|s\rangle = \cos \frac{\theta}{2}$ です。また

$$|s\rangle = \sin \frac{\theta}{2} |\omega\rangle + \cos \frac{\theta}{2} |s'\rangle$$

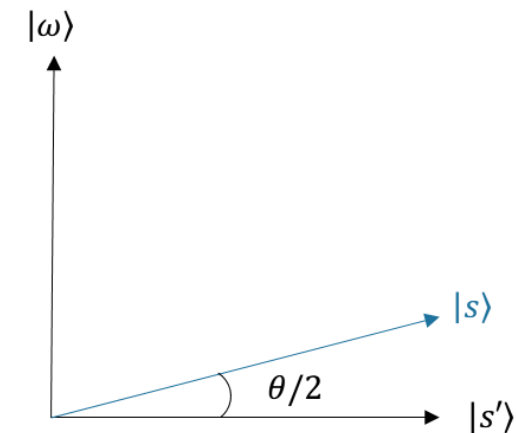
だったので、 $\cos \frac{\theta}{2}$ は解以外の状態の確率振幅であり、

3ページ目のスライドよりこの振幅は状態の数 N と解の個数 M を使って

$\sqrt{\frac{N-M}{N}}$ と表せました。したがって、

$$\cos \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{N-M}{N}} \Rightarrow M = N \left(1 - \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) = N \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

と M を求めることができました。



本資料の著作権は、日本アイ・ビー・エム株式会社（IBM Corporationを含み、以下、IBMといいます。）に帰属します。ワークショップ、セッション、および資料は、IBMまたはセッション発表者によって準備され、それぞれ独自の見解を反映したものです。それらは情報提供の目的のみで提供されており、いかなる参加者に対しても法律的またはその他の指導や助言を意図したのではなく、またそのような結果を生むものでもありません。本資料に含まれている情報については、完全性と正確性を期するよう努力しましたが、「現状のまま」提供され、明示または暗示にかかわらずいかなる保証も伴わないものとします。本資料またはその他の資料の使用によって、あるいはその他の関連によって、いかなる損害が生じた場合も、IBMまたはセッション発表者は責任を負わないものとします。本資料に含まれている内容は、IBMまたはそのサプライヤーやライセンス交付者からいかなる保証または表明を引きだすことを意図したものでなく、IBMソフトウェアの使用を規定する適用ライセンス契約の条項を変更することを意図したものでなく、またそのような結果を生むものでもありません。

本資料でIBM製品、プログラム、またはサービスに言及していても、IBMが営業活動を行っているすべての国でそれらが使用可能であることを暗示するものではありません。本資料で言及している製品リリース日付や製品機能は、市場機会またはその他の要因に基づいてIBM独自の決定権をもっていつでも変更できるものとし、いかなる方法においても将来の製品または機能が使用可能になると確約することを意図したものではありません。本資料に含まれている内容は、参加者が開始する活動によって特定の販売、売上高の向上、またはその他の結果が生じると述べる、または暗示することを意図したものでなく、またそのような結果を生むものでもありません。パフォーマンスは、管理された環境において標準的なIBMベンチマークを使用した測定と予測に基づいています。ユーザーが経験する実際のスループットやパフォーマンスは、ユーザーのジョブ・ストリームにおけるマルチプログラミングの量、入出力構成、ストレージ構成、および処理されるワークロードなどの考慮事項を含む、数多くの要因に応じて変化します。したがって、個々のユーザーがここで述べられているものと同様の結果を得られると確約するものではありません。

記述されているすべてのお客様事例は、それらのお客様がどのようにIBM製品を使用したか、またそれらのお客様が達成した結果の実例として示されたものです。実際の環境コストおよびパフォーマンス特性は、お客様ごとに異なる場合があります。

IBM、IBM ロゴは、米国やその他の国におけるInternational Business Machines Corporationの商標または登録商標です。他の製品名およびサービス名等は、それぞれIBMまたは各社の商標である場合があります。現時点での IBM の商標リストについては、ibm.com/trademarkをご覧ください