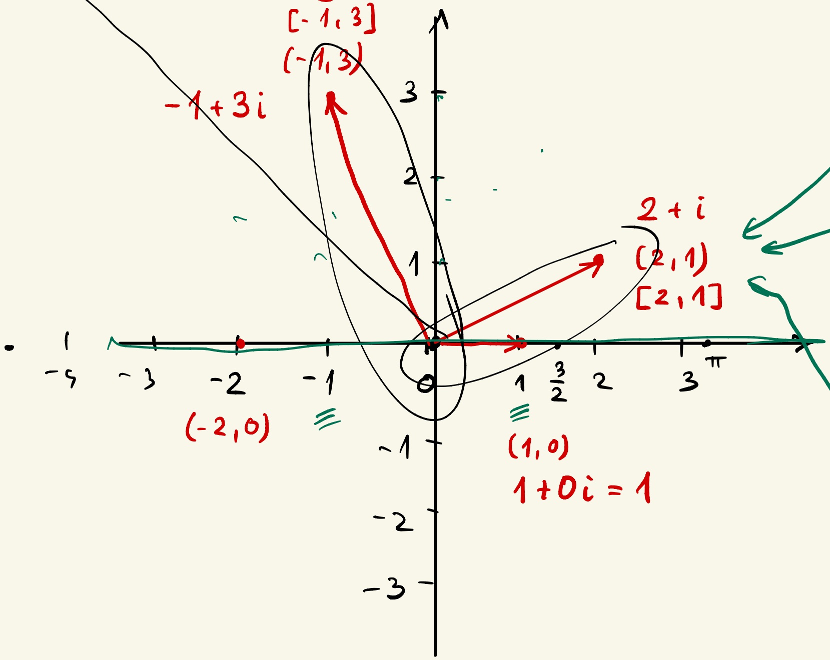
Liczby zespolone

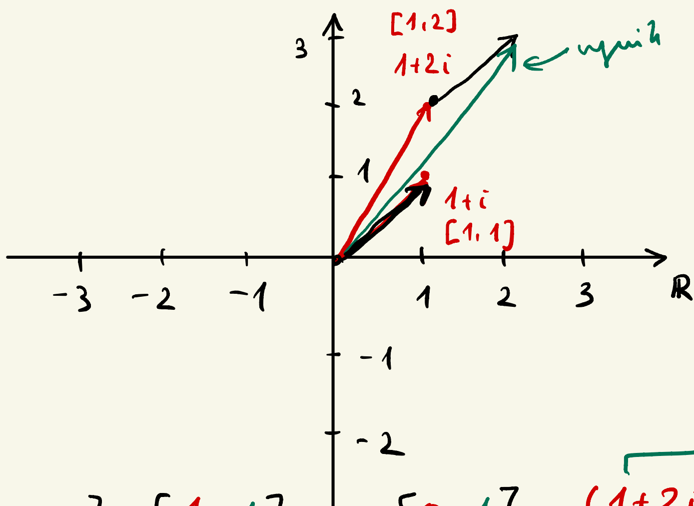


punkt (uboga struktura)

wektor (można dodawać lub mnożyć przez liczbę) (bogatsza struktura)

liczba zespolona (bardzo bogata struktura)

Działania na liczbach zespolonych



$$(1+2i)+(1+1i) =$$

$$= 2+3i$$

$$[1, 2]-[1, 1] = [0, 1]$$

$$(1+2i)-(1+1i) = 0+1i$$

$$= i$$

$$[1, 2]+[1, 1] = [2, 3]$$

$$(3+2i)+(5+i)=8+3i$$

$$(3+2i)-(5+i)=-2+i$$

$$(-4+i)+(2-2i)=-2-i$$

$$(-4+i)-(2-2i)=-6+3i$$

$$(2+x)(-1+3x)=-2-x+6x+3x^2=-2+5x+3x^2$$

$$(2+i)(-1+3i)=-2+5i+3i^2=-5+5i$$

$$-2\underbrace{-i+6i}+3i^2 \qquad \sqrt{-4+5i}$$

$\mathbb{C}$ (complex numbers)

$$\boxed{i^2=-1}$$

imaginary (jednostka urojona)

$$a(b+c)=ab+ac$$

$$\sqrt{-3}=\sqrt{3}\,i$$

$$\sqrt{-4}=2i$$

$$(-1+2i)\cdot(3+4i)=-3-4i+6i+8i^2=$$

$$=-3+2i-8=-11+2i$$

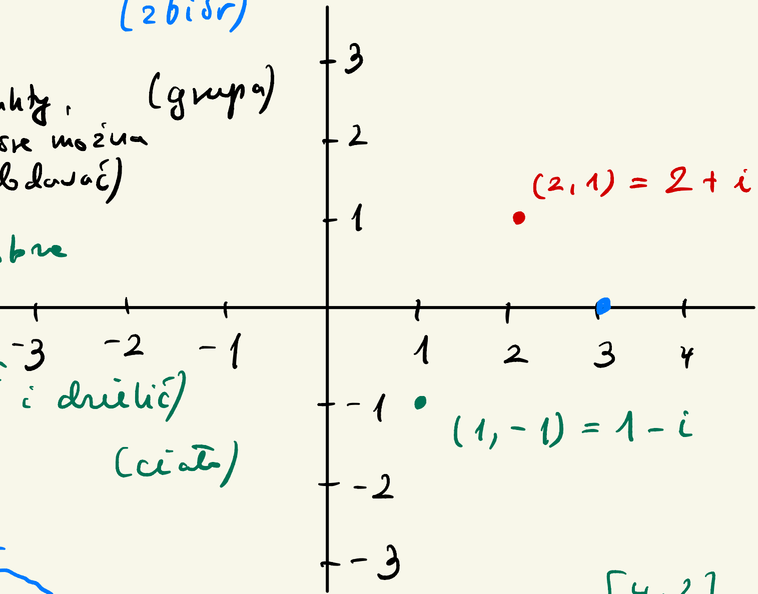
[(liczba rzeczywista)$^2 \geqslant 0$

(liczba zespolona)^2 może być ujemna]

Punkty (zbiór)

Wektory (punkty, które można dodawać) (grupa)

Liczby zespolone (wektory, które można też mnożyć i dzielić) (ciała)



$$[2,1] + [1,-1] = [3,0]$$

$$(2+i) + (1-i) = 3 + 0i = 3$$

$$(4+2i) + (-1+3i) = 3 + 5i$$

$$(-2+i) + (3+3i) = 1 + 4i$$

$$\frac{[4,2]}{[2,2]} = [2,1]$$

$$\frac{[4,2]}{[2,0]} = [2,?]$$

$$(2+i)\cdot(1-i) = 2 - 2i + i - \boxed{\overset{-1}{i^2}} = 3 - i$$

$$(2+x)\cdot(1-x) = 2 - 2x + x - x^2$$

$$(4+2i)\cdot(-1+3i) = -4 + 12i - 2i + \overset{=-6}{6i^2}$$

$$= -10 + 10i$$

$$(-2+i)(3+3i) = -6-6i+3i+3i^2$$

$$3i^2 = -3$$

$$= -9-3i$$

(1) Jak podzielić liczbę zespoloną przez liczbę rzeczywistą?

$$\frac{4+6i}{2} = 2+3i \qquad \frac{9+12i}{3} = 3+4i$$

$$\frac{25+10i}{-10} = \frac{25}{-10} + \frac{10i}{10} = -\frac{5}{2}+i$$

(2) $$\frac{z}{w} = \frac{z\cdot v}{w\cdot v}$$

$$\frac{4+2i}{(1+i)}\cdot\frac{v}{v} = \frac{(4+2i)}{1+i}\cdot\frac{(1-i)}{1-i} = \frac{6-2i}{2} = 3-i$$

↳ chciałbym znaleźć liczbę v taką, żeby $(1+i)\cdot v$ było l. rzeczyw.

$$(1+i)(1-i) = 1\cdot 1 \cancel{-i} \cancel{+i} - i^2 = 2, \qquad i^2 = -1$$

$$\frac{7+7i}{2+i}\cdot\frac{2-i}{2-i} = \frac{21+7i}{5} = \frac{21}{5}+\frac{7}{5}i$$

$$\frac{3+i}{1+2i}\cdot\frac{1-2i}{1-2i} = \frac{3-6i+i-2i^2}{5} = \frac{5-5i}{5} = 1-i \qquad i^2=-1$$

w domu

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{4+3i}{1-i} = \\ &\frac{2-3i}{2+3i} = \end{aligned}}$$

$z = a + bi$

liczby rzeczywiste

$\bar{z} = a - bi$

(sprzężenie zespolone liczby z)

$\overline{5+2i} = 5-2i$

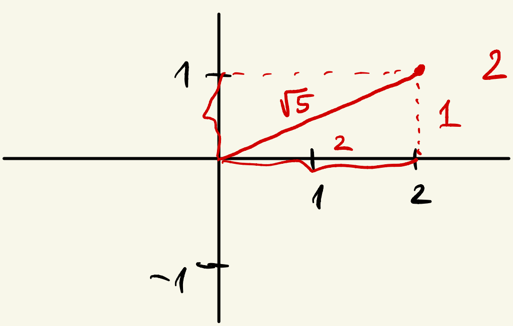
$\overline{-3-i} = -3+3i$

$\overline{\overline{5+2i}} = \overline{5-2i} = 5+2i$

$$\boxed{\bar{\bar{z}} = z}$$

$z\cdot\bar{z}$ = liczba rzeczywista

$$\underbrace{(a+bi)(a-bi)} = a^2 - bi^2 = a^2 + b^2$$



$2+i = z$

$\bar{z} = 2-i$

$z\cdot\bar{z} = (2+i)(2-i) = 2^2+1^2$

$5 = 2^2+1^2$

$z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2 = (\text{odległość od zera})^2$

$|z| = \text{odległość } z \text{ od zera} = \text{moduł } z$

$z \cdot \bar{z} = |z|^2$