Mathematik I – Lineare Algebra

Vorlesung 1

Wolfgang Globke

Duale Hochschule
Baden-Württemberg

9. Oktober 2019

Dr. Wolfgang Globke
Email: wolfgang.globke@univie.ac.at

Vita

- 2007: Diplom Informatik, Universität Karlsruhe (TH)
- 2011: Dr. rer. nat. Mathematik, Karlsruhe Institute of Technology
- 2012-2018: Wissenschaftlicher Mitarbeiter, School of Mathematical Sciences, University of Adelaide
- 2018-heute: Wissenschaftlicher Mitarbeiter, Fakultät für Mathematik, Universität Wien

Was ist lineare Algebra?

- Wichtigste Grundlage der Mathematik, insbesondere auch für die Informatik.
- Ausgangspunkt sind lineare Gleichungssysteme und die Beschreibung ihrer Lösungsmengen.

Was ist lineare Algebra?

- Wichtigste Grundlage der Mathematik, insbesondere auch für die Informatik.
- Ausgangspunkt sind lineare Gleichungssysteme und die Beschreibung ihrer Lösungsmengen.
- Zentrale Objekte sind Vektorräume und die „strukturerhaltenden" Abbildungen zwischen ihnen, die linearen Abbildungen.
- Sie liefern eine geometrische Interpretation der Algebra:
  - Objekte werden durch Punkte in Vektorräumen beschrieben.
  - Lineare Abbildungen realisieren geometrische Transformationen dieser Objekte.

Was ist lineare Algebra?

- Wichtigste Grundlage der Mathematik, insbesondere auch für die Informatik.
- Ausgangspunkt sind lineare Gleichungssysteme und die Beschreibung ihrer Lösungsmengen.
- Zentrale Objekte sind Vektorräume und die „strukturerhaltenden" Abbildungen zwischen ihnen, die linearen Abbildungen.
- Sie liefern eine geometrische Interpretation der Algebra:
  - Objekte werden durch Punkte in Vektorräumen beschrieben.
  - Lineare Abbildungen realisieren geometrische Transformationen dieser Objekte.
- Matrizen sind das fundamentale Werkzeug zum Beschreiben linearer Abbildungen. Sie haben ein reichhaltiges algebraisches Eigenleben.
- Algebraische Eigenschaften von Matrizen, wie Determinanten oder Eigenwerte, geben Auskunft über die geometrische Wirkung der zugehörigen linearen Abbildungen.

- Die Theorie der linearen Codes realisiert (binäre) Codes als Untervektorräume in hochdimensionalen Vektorräumen.
- Die algebraische Struktur solcher Codes lässt sich ausnutzen, um sie untersuchen und für bestimmte Zwecke zu optimieren (Effizienz, Fehlerkorrektur…).

Anwendungsbeispiele der linearen Algebra

- Die Theorie der linearen Codes realisiert (binäre) Codes als Untervektorräume in hochdimensionalen Vektorräumen.
- Die algebraische Struktur solcher Codes lässt sich ausnutzen, um sie untersuchen und für bestimmte Zwecke zu optimieren (Effizienz, Fehlerkorrektur…).
- In der Graphentheorie können wir einem Graphen verschiedene Matrizen zuordnen.
- Die algebraischen Eigenschaften dieser Matrizen lassen verblüffende Rückschlüsse auf die topologische Struktur des Graphen zu.

- Die Theorie der linearen Codes realisiert (binäre) Codes als Untervektorräume in hochdimensionalen Vektorräumen.
- Die algebraische Struktur solcher Codes lässt sich ausnutzen, um sie untersuchen und für bestimmte Zwecke zu optimieren (Effizienz, Fehlerkorrektur…).
- In der Graphentheorie können wir einem Graphen verschiedene Matrizen zuordnen.
- Die algebraischen Eigenschaften dieser Matrizen lassen verblüffende Rückschlüsse auf die topologische Struktur des Graphen zu.
- Die digitale Signalverarbeitung nutzt aus, dass Signale als Elemente von gewissen Vektorräumen aufgefasst werden können.
- Eine Zerlegung in Grundtöne (Fourier-Analyse) ist nichts anderes, als ein Aufspalten in orthogonale Komponenten.

Anwendungsbeispiele der linearen Algebra

- Die Theorie der linearen Codes realisiert (binäre) Codes als Untervektorräume in hochdimensionalen Vektorräumen.
- Die algebraische Struktur solcher Codes lässt sich ausnutzen, um sie untersuchen und für bestimmte Zwecke zu optimieren (Effizienz, Fehlerkorrektur…).
- In der Graphentheorie können wir einem Graphen verschiedene Matrizen zuordnen.
- Die algebraischen Eigenschaften dieser Matrizen lassen verblüffende Rückschlüsse auf die topologische Struktur des Graphen zu.
- Die digitale Signalverarbeitung nutzt aus, dass Signale als Elemente von gewissen Vektorräumen aufgefasst werden können.
- Eine Zerlegung in Grundtöne (Fourier-Analyse) ist nichts anderes, als ein Aufspalten in orthogonale Komponenten.
- etc.

Was wir behandeln:

- 2D-Geometrie in der Ebene.
- Einführung in lineare Gleichungssysteme und ihre Lösungen.
- Ein Schritt zurück: Grundlagen der Mengenlehre und Logik.
- Algebraische Grundstrukturen (Gruppen, Ringe, Körper), als Verallgemeinerung der bekannten Zahlenarithmetik.
- Allgemeine Vektorräume und lineare Abbildungen, und ihre Eigenschaften.
- Beschreibung linearer Abbildungen durch Matrizen.
- Nochmal lineare Gleichungssysteme, vom Standpunkt der linearen Abbildungen aus betrachtet. Liefert allgemeine Lösungstheorie.
- Charakterisierung linearer Abbildungen durch Kennwerte wie Determinanten und Eigenwerte.
- Geometrie in allgemeinen Vektorräumen, gegeben durch die Einführung von Skalarprodukten (Winkelmaß).

Ablauf von Vorlesung und Übung

Vorlesung:
Mittwoch, 12:00-13:30, Raum 161C
Donnerstag, 13:00-14:30, Raum 161C

Übung:
Mittwoch, 14:30-15:15, Raum 161C
(ab der zweiten Woche, in der ersten Woche ist Vorlesung)

Ablauf von Vorlesung und Übung

Vorlesung:
Mittwoch, 12:00-13:30, Raum 161C
Donnerstag, 13:00-14:30, Raum 161C

Übung:
Mittwoch, 14:30-15:15, Raum 161C
(ab der zweiten Woche, in der ersten Woche ist Vorlesung)

Wöchentliche Tests in der Übung:

- Thema: Vorlesungsstoff der vorhergehenden Woche(n).
- 30 Minuten Dauer.
- Drei bis vier Aufgaben
  (Ja/Nein, Rechnen, Verständnisfragen, kurze Beweise).
- Schwierigkeitsgrad soll auf Klausur vorbereiten.
- Bonuspunkte für die Klausur.
- Lesbar schreiben!!!

Auf
`https://moodle.dhbw-mannheim.de`
ist dieser Kurs zu finden unter

- Studiengang Angewandte Informatik
- WS19
- TINF-19AI2 Mathematik I (Lineare Algebra).

Bitte alle diesem Kurs beitreten!

Auf
`https://moodle.dhbw-mannheim.de`
ist dieser Kurs zu finden unter

- Studiengang Angewandte Informatik
- WS19
- TINF-19AI2 Mathematik I (Lineare Algebra).

Bitte alle diesem Kurs beitreten! Dort gibt es

- Forum
- Übungsunterlagen
- Gruppenbenachrichtigungen

Klausur am 11. Dezember 2019, um 12:45-14:45 Uhr, in Raum 067C

Zum Bestehen der Klausur sind 50% der erreichbaren Punkte notwendig.

Bonuspunkte

- In jedem wöchentlichen Test kann man Bonuspunkte erhalten.
- Jede Woche, pro Test:
  - 0.5 Bonuspunkte bei mehr als **50%** der Punkte im Test.
  - 1 Bonuspunkt bei mehr als **66%** der Punkte im Test.
- Bei acht Tests also bis zu 8 Bonuspunkte.

Als Lektüre zur Vorlesung sei empfohlen:

Albrecht Beutelspacher, Lineare Algebra, 8. Auflage, Springer-Verlag 2014

(Es gibt sehr viele andere Bücher zur linearen Algebra, aber diese sind meist zu umfangreich und haben zuviele Voraussetzungen für unseren Kurs.)

1. Einführung: Geometrie der Ebene

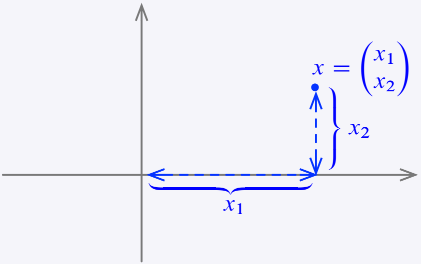
- Zu Beginn: Konzepte der linearen Algebra in einfacher Situation (ebene Geometrie) betrachten.
- Vorstellungen und Intuition entwickeln, die sich später auf allgemeinere Situationen übertragen lassen.
- Praktisches Wissen für einfache Anwendungen, z.B. 2D-Computergraphik.

1.1 Koordinaten und Vektoren

In der Antike basierte Geometrie auf Konstruktionen mit Zirkel und Lineal.
Die Einführung kartesischer Koordinaten durch René Descartes im 17. Jhd. machte es möglich, geometrische Objekte algebraisch zu beschreiben.

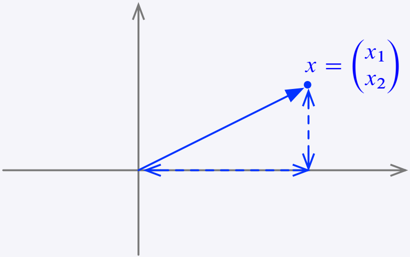
In der Antike basierte Geometrie auf Konstruktionen mit Zirkel und Lineal.
Die Einführung kartesischer Koordinaten durch René Descartes im 17. Jhd. machte es möglich, geometrische Objekte algebraisch zu beschreiben.

Wir beschreiben Punkte in der Ebene durch zwei Zahlen, ihre Koordinaten.



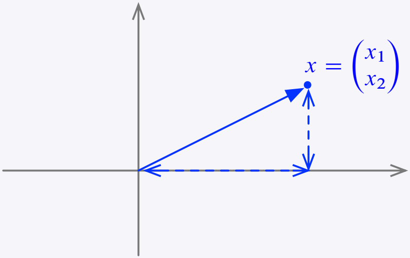
Der Schnittpunkt der Achsen, mit Koordinaten $(0, 0)$, ist der Ursprung unseres Koordinatensystems.

Zur Veranschaulichung, oder wenn wir eine Richtung angeben wollen, wird x oft durch einen Pfeil vom Ursprung aus dargestellt, einen Vektor. Die Einträge x_1, x_2 sind die Komponenten des Vektors x.



Vektoren

Zur Veranschaulichung, oder wenn wir eine Richtung angeben wollen, wird x oft durch einen Pfeil vom Ursprung aus dargestellt, einen Vektor. Die Einträge x_1, x_2 sind die Komponenten des Vektors x.



Zur Schreibweise: Oft werden Vektoren in speziellem Schrifttyp dargestellt,

$$\underline{x}, \quad \mathfrak{x}, \quad \boldsymbol{x}, \quad \vec{x}.$$

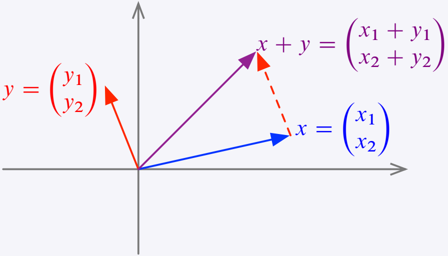
Wir tun dies hier *nicht*. Da Vektoren zentrale Objekte dieser Vorlesung sind, gibt es keinen Grund, sie besonders hervorzuheben.

Vektoraddition

Die Darstellung als Vektor erlaubt uns algebraische Operationen in anschaulicher Weise.

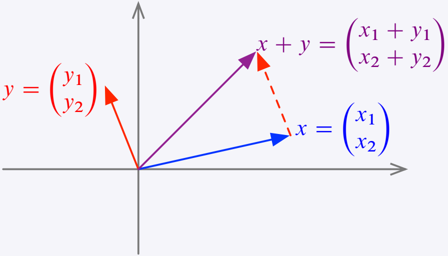
Die Darstellung als Vektor erlaubt uns algebraische Operationen in anschaulicher Weise.

Wir können Vektoren addieren. Anschaulich heften wir dabei einen Vektor an den anderen:



Die Darstellung als Vektor erlaubt uns algebraische Operationen in anschaulicher Weise.

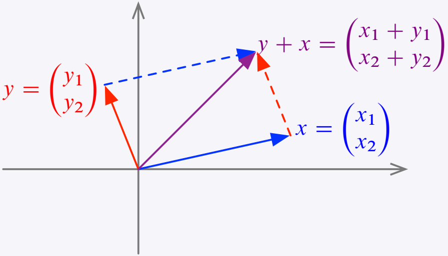
Wir können Vektoren addieren. Anschaulich heften wir dabei einen Vektor an den anderen:



Algebraisch betrachtet addieren wir einfach nur komponentenweise:

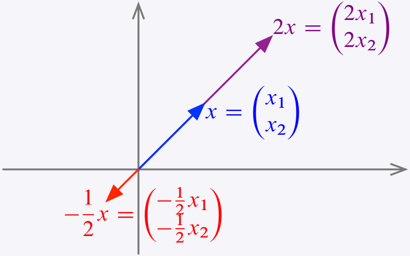
$$x + y = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix},$$

Wie aus der algebraischen Darstellung klar wird, kommt es bei der Vektoraddition nicht auf die Reihenfolge an.

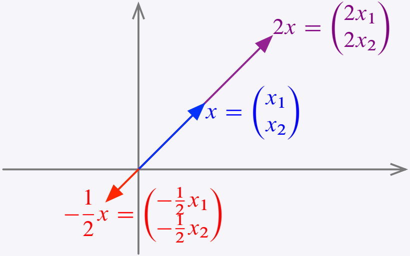


Die Vektoraddition ist kommutativ, da die Addition ihrer Komponenten es ist.

Wir können Vektoren entlang ihrer Richtung strecken oder stauchen, indem wir sie komponentenweise mit einer Zahl λ multiplizieren.



Wir können Vektoren entlang ihrer Richtung strecken oder stauchen, indem wir sie komponentenweise mit einer Zahl λ multiplizieren.



Es ist üblich, die Zahl λ hierbei als Skalar zu bezeichnen.

Jeder Vektor x ist eindeutig durch seine beiden Koordinaten x_1 und x_2 festgelegt. Also lässt sich x eindeutig durch die folgende Summe darstellen:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x_1 e_1 + x_2 e_2.$$

Jeder Vektor x ist eindeutig durch seine beiden Koordinaten x_1 und x_2 festgelegt. Also lässt sich x eindeutig durch die folgende Summe darstellen:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x_1 e_1 + x_2 e_2.$$

Die beiden Vektoren $e_1 = \binom{1}{0}$, $e_2 = \binom{0}{1}$ nennen wir die Standardbasis.

Eine Summe dieser Form nennen wir Linearkombination der beiden Vektoren e_1, e_2 mit Koeffizienten x_1, x_2.

Jeder Vektor x ist eindeutig durch seine beiden Koordinaten x_1 und x_2 festgelegt. Also lässt sich x eindeutig durch die folgende Summe darstellen:

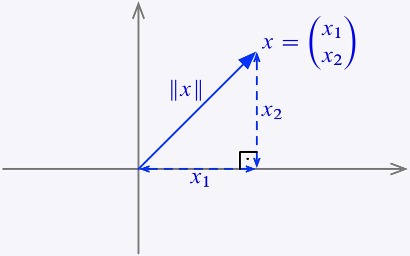
$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x_1 e_1 + x_2 e_2.$$

Die beiden Vektoren $e_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $e_2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ nennen wir die Standardbasis.

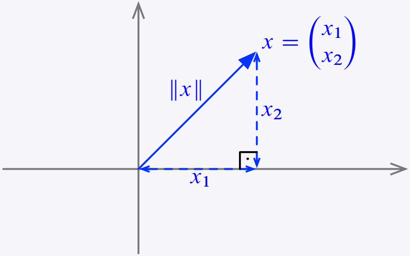
Eine Summe dieser Form nennen wir Linearkombination der beiden Vektoren e_1, e_2 mit Koeffizienten x_1, x_2.

(Später betrachten wir auch Linearkombinationen aus anderen Vektoren.)

Die Länge eines Vektors x in der Ebene, auch als die Norm $\|x\|$ bezeichnet, können wir mit dem Satz des Pythagoras herleiten:



Die Länge eines Vektors x in der Ebene, auch als die Norm $\|x\|$ bezeichnet, können wir mit dem Satz des Pythagoras herleiten:



Ein rechtwinkliges Dreieck mit Kathetenlängen x_1, x_2. Die Hypotenuse hat die Länge $\|x\|$, und somit gilt

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$

1.2 Geometrische Transformationen

Addition und Skalarmultiplikation von Vektoren haben eine direkte geometrische Interpretation.

Wir können auch andere geometrische Transformationen durch Operationen auf Vektoren darstellen, etwa

- Rotationen,
- Spiegelungen,
- Scherungen,
- Skalierungen,
- Verschiebungen.

Es bezeichne Φ eine solche geometrische Transformation.

Eine zentrale Eigenschaft ist die Linearität:
Für zwei beliebige Vektoren x, y und einen beliebigen Skalar λ gilt:

$$\Phi(\lambda x) = \lambda \Phi(x) \quad \text{und} \quad \Phi(x + y) = \Phi(x) + \Phi(y).$$

Transformationen und Linearität

Es bezeichne Φ eine solche geometrische Transformation.

Eine zentrale Eigenschaft ist die Linearität:
Für zwei beliebige Vektoren x, y und einen beliebigen Skalar λ gilt:

$$\Phi(\lambda x) = \lambda \Phi(x) \quad \text{und} \quad \Phi(x + y) = \Phi(x) + \Phi(y).$$

Lineare Transformationen sind die zentralen Studienobjekte der linearen Algebra!
(Von den genannten Transformationen sind bis auf Verschiebungen alle linear.)

Es bezeichne Φ eine solche geometrische Transformation.

Eine zentrale Eigenschaft ist die Linearität:
Für zwei beliebige Vektoren x, y und einen beliebigen Skalar λ gilt:

$$\Phi(\lambda x) = \lambda\Phi(x) \quad \text{und} \quad \Phi(x + y) = \Phi(x) + \Phi(y).$$

Lineare Transformationen sind die zentralen Studienobjekte der linearen Algebra!
(Von den genannten Transformationen sind bis auf Verschiebungen alle linear.)

Ein Vektor x ist eine Linearkombination von e_1 und e_2.
Für eine lineare Transformation Φ gilt daher

$$\Phi(x) = \Phi(x_1 e_1 + x_2 e_2)$$

Es bezeichne Φ eine solche geometrische Transformation.

Eine zentrale Eigenschaft ist die Linearität:
Für zwei beliebige Vektoren x, y und einen beliebigen Skalar λ gilt:

$$\Phi(\lambda x) = \lambda\Phi(x) \quad \text{und} \quad \Phi(x+y) = \Phi(x) + \Phi(y).$$

Lineare Transformationen sind die zentralen Studienobjekte der linearen Algebra!
(Von den genannten Transformationen sind bis auf Verschiebungen alle linear.)

Ein Vektor x ist eine Linearkombination von e_1 und e_2.
Für eine lineare Transformation Φ gilt daher

$$\Phi(x) = \Phi(x_1 e_1 + x_2 e_2) = \Phi(x_1 e_1) + \Phi(x_2 e_2)$$

Es bezeichne Φ eine solche geometrische Transformation.

Eine zentrale Eigenschaft ist die Linearität:
Für zwei beliebige Vektoren x, y und einen beliebigen Skalar λ gilt:

$$\Phi(\lambda x) = \lambda \Phi(x) \quad \text{und} \quad \Phi(x + y) = \Phi(x) + \Phi(y).$$

Lineare Transformationen sind die zentralen Studienobjekte der linearen Algebra!
(Von den genannten Transformationen sind bis auf Verschiebungen alle linear.)

Ein Vektor x ist eine Linearkombination von e_1 und e_2.
Für eine lineare Transformation Φ gilt daher

$$\Phi(x) = \Phi(x_1 e_1 + x_2 e_2) = \Phi(x_1 e_1) + \Phi(x_2 e_2) = x_1 \Phi(e_1) + x_2 \Phi(e_2).$$

Es bezeichne Φ eine solche geometrische Transformation.

Eine zentrale Eigenschaft ist die Linearität:
Für zwei beliebige Vektoren x, y und einen beliebigen Skalar λ gilt:

$$\Phi(\lambda x) = \lambda \Phi(x) \quad \text{und} \quad \Phi(x + y) = \Phi(x) + \Phi(y).$$

Lineare Transformationen sind die zentralen Studienobjekte der linearen Algebra!
(Von den genannten Transformationen sind bis auf Verschiebungen alle linear.)

Ein Vektor x ist eine Linearkombination von e_1 und e_2.
Für eine lineare Transformation Φ gilt daher

$$\Phi(x) = \Phi(x_1 e_1 + x_2 e_2) = \Phi(x_1 e_1) + \Phi(x_2 e_2) = x_1 \Phi(e_1) + x_2 \Phi(e_2).$$

Wir sehen, dass Φ *durch die Werte* $\Phi(e_1)$ *und* $\Phi(e_2)$ *bereits komplett bestimmt ist*:

Es bezeichne Φ eine solche geometrische Transformation.

Eine zentrale Eigenschaft ist die Linearität:
Für zwei beliebige Vektoren x, y und einen beliebigen Skalar λ gilt:

$$\Phi(\lambda x) = \lambda \Phi(x) \quad \text{und} \quad \Phi(x + y) = \Phi(x) + \Phi(y).$$

Lineare Transformationen sind die zentralen Studienobjekte der linearen Algebra!
(Von den genannten Transformationen sind bis auf Verschiebungen alle linear.)

Ein Vektor x ist eine Linearkombination von e_1 und e_2.
Für eine lineare Transformation Φ gilt daher

$$\Phi(x) = \Phi(x_1 e_1 + x_2 e_2) = \Phi(x_1 e_1) + \Phi(x_2 e_2) = x_1 \Phi(e_1) + x_2 \Phi(e_2).$$

Wir sehen, dass Φ *durch die Werte* $\Phi(e_1)$ *und* $\Phi(e_2)$ *bereits komplett bestimmt ist*:

- Angenommen, wir kennen $\Phi(e_1)$ und $\Phi(e_2)$.
- Um $\Phi(x)$ zu berechnen, brauchen wir nur noch die Koordinaten x_1, x_2 von x.
- $\Phi(x)$ ergibt sich dann als die Linearkombination $x_1 \Phi(e_1) + x_2 \Phi(e_2)$.

Matrizen und lineare Transformationen

Matrizen sind ein unentbehrliches Hilfsmittel zur Beschreibung linearer Transformationen!

Matrizen sind ein unentbehrliches Hilfsmittel zur Beschreibung linearer Transformationen!

Es sei Φ eine lineare Transformation, und $\Phi(e_1) = \binom{a_1}{a_2}$, $\Phi(e_2) = \binom{a_3}{a_4}$.
Dann ist für einen Vektor x

$$\Phi(x) = x_1 \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}$$

Matrizen sind ein unentbehrliches Hilfsmittel zur Beschreibung linearer Transformationen!

Es sei Φ eine lineare Transformation, und $\Phi(e_1) = \binom{a_1}{a_2}$, $\Phi(e_2) = \binom{a_3}{a_4}$.
Dann ist für einen Vektor x

$$\Phi(x) = x_1 \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 a_1 + x_2 a_3 \\ x_1 a_2 + x_2 a_4 \end{pmatrix}.$$

Matrizen sind ein unentbehrliches Hilfsmittel zur Beschreibung linearer Transformationen!

Es sei Φ eine lineare Transformation, und $\Phi(e_1) = \binom{a_1}{a_2}$, $\Phi(e_2) = \binom{a_3}{a_4}$.
Dann ist für einen Vektor x

$$\Phi(x) = x_1 \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 a_1 + x_2 a_3 \\ x_1 a_2 + x_2 a_4 \end{pmatrix}.$$

Eine effiziente Darstellung dieser Transformation ist durch die Matrix (genauer: 2×2-Matrix)

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ a_2 & a_4 \end{pmatrix}$$

gegeben.

- Erste Spalte enthält $\Phi(e_1)$.
- Zweite Spalte enthält $\Phi(e_2)$.
- Somit codiert A eindeutig die Transformation Φ.

Wir führen die folgende Regel zu Multiplikation von Matrizen mit Vektoren ein:

$$Ax = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ a_2 & a_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 x_1 + a_3 x_2 \\ a_2 x_1 + a_4 x_2 \end{pmatrix}$$

Wir führen die folgende Regel zu Multiplikation von Matrizen mit Vektoren ein:

$$Ax = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ a_2 & a_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 x_1 + a_3 x_2 \\ a_2 x_1 + a_4 x_2 \end{pmatrix} = \Phi(x).$$

Wir führen die folgende Regel zu Multiplikation von Matrizen mit Vektoren ein:

$$Ax = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ a_2 & a_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 x_1 + a_3 x_2 \\ a_2 x_1 + a_4 x_2 \end{pmatrix} = \Phi(x).$$

Die Multiplikation Ax realisiert also die Transformation $\Phi(x)$.

Wir führen die folgende Regel zu Multiplikation von Matrizen mit Vektoren ein:

$$Ax = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ a_2 & a_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 x_1 + a_3 x_2 \\ a_2 x_1 + a_4 x_2 \end{pmatrix} = \Phi(x).$$

Die Multiplikation Ax realisiert also die Transformation $\Phi(x)$.
Insbesondere gilt

$$Ae_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad Ae_2 = \begin{pmatrix} a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}.$$

Wir führen die folgende Regel zu Multiplikation von Matrizen mit Vektoren ein:

$$Ax = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ a_2 & a_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 x_1 + a_3 x_2 \\ a_2 x_1 + a_4 x_2 \end{pmatrix} = \Phi(x).$$

Die Multiplikation Ax realisiert also die Transformation $\Phi(x)$.
Insbesondere gilt

$$Ae_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad Ae_2 = \begin{pmatrix} a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}.$$

Die Linearität von Φ drückt sich hier durch die Distributivität der Matrix-Vektor-Multiplikation aus:

$$A(\lambda x) = \lambda Ax, \quad A(x + y) = Ax + Ay.$$

Umgekehrt kann mit jeder beliebigen Matrix $A = \left(\begin{smallmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{smallmatrix}\right)$ eine lineare Transformation

$$\Phi_A(x) = Ax = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

definiert werden.

Umgekehrt kann mit jeder beliebigen Matrix $A = \left(\begin{smallmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{smallmatrix}\right)$ eine lineare Transformation

$$\Phi_A(x) = Ax = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

definiert werden.

Wir haben also eine 1:1-Beziehung

$$A \longleftrightarrow \Phi_A$$

zwischen 2×2-Matrizen und linearen Abbildungen der Ebene.

Matrizen definieren Transformationen

Umgekehrt kann mit jeder beliebigen Matrix $A = \left(\begin{smallmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{smallmatrix}\right)$ eine lineare Transformation

$$\Phi_A(x) = Ax = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

definiert werden.

Wir haben also eine 1:1-Beziehung

$$A \longleftrightarrow \Phi_A$$

zwischen 2×2-Matrizen und linearen Abbildungen der Ebene.

Warum betrachten wir dann überhaupt noch lineare Abbildungen und nicht nur Matrizen?

- Später: Koordinatensysteme müssen nicht immer durch e_1- und e_2-Achse gegeben sein.
- Matrixdarstellung hängt vom Koordinatensystem ab.
- Abstrakte lineare Abbildung ist koordinatenunabhängig.

Wir können eine Matrix A nicht nur mit Vektoren, sondern auch mit einer anderen Matrix B multiplizieren.

Wir können eine Matrix A nicht nur mit Vektoren, sondern auch mit einer anderen Matrix B multiplizieren.
Die Regel dafür ist die folgende:

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}.$$

Wir können eine Matrix A nicht nur mit Vektoren, sondern auch mit einer anderen Matrix B multiplizieren.
Die Regel dafür ist die folgende:

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}.$$

- Auf den ersten Blick verwirrend…

Wir können eine Matrix A nicht nur mit Vektoren, sondern auch mit einer anderen Matrix B multiplizieren.
Die Regel dafür ist die folgende:

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}.$$

- Auf den ersten Blick verwirrend...
- aber es wird lediglich die Matrix-Vektor-Multiplikation auf jede Spalte von B einzeln angewandt.
- Zu beachten ist, dass in der Regel $AB \neq BA$ gilt, die Matrixmultiplikation ist also nicht kommutativ.

Beispiel: Matrixmultiplikation ist nicht kommutativ

Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Also offenbar

$$AB \neq BA.$$

Was ist die geometrische Bedeutung der Matrixmultiplikation?

Was ist die geometrische Bedeutung der Matrixmultiplikation?

Es seien Φ_A, Φ_B die linearen Transformationen, die durch Matrizen A, B dargestellt werden.

Was ist die geometrische Bedeutung der Matrixmultiplikation?

Es seien Φ_A, Φ_B die linearen Transformationen, die durch Matrizen A, B dargestellt werden. Dann ist

$$(AB)x$$

Was ist die geometrische Bedeutung der Matrixmultiplikation?

Es seien Φ_A, Φ_B die linearen Transformationen, die durch Matrizen A, B dargestellt werden. Dann ist

$$(AB)x = A(Bx)$$

Was ist die geometrische Bedeutung der Matrixmultiplikation?

Es seien Φ_A, Φ_B die linearen Transformationen, die durch Matrizen A, B dargestellt werden. Dann ist

$$(AB)x = A(Bx) = A\Phi_B(x)$$

Was ist die geometrische Bedeutung der Matrixmultiplikation?

Es seien Φ_A, Φ_B die linearen Transformationen, die durch Matrizen A, B dargestellt werden. Dann ist

$$(AB)x = A(Bx) = A\Phi_B(x) = \Phi_A(\Phi_B(x))$$

Was ist die geometrische Bedeutung der Matrixmultiplikation?

Es seien Φ_A, Φ_B die linearen Transformationen, die durch Matrizen A, B dargestellt werden. Dann ist

$$(AB)x = A(Bx) = A\Phi_B(x) = \Phi_A(\Phi_B(x)) = \Phi_{AB}(x).$$

Was ist die geometrische Bedeutung der Matrixmultiplikation?

Es seien Φ_A, Φ_B die linearen Transformationen, die durch Matrizen A, B dargestellt werden. Dann ist

$$(AB)x = A(Bx) = A\Phi_B(x) = \Phi_A(\Phi_B(x)) = \Phi_{AB}(x).$$

Das bedeutet:
Die Matrix AB stellt die Hintereinanderausführung Φ_{AB} von Φ_B und dann Φ_A dar.

Was ist die geometrische Bedeutung der Matrixmultiplikation?

Es seien Φ_A, Φ_B die linearen Transformationen, die durch Matrizen A, B dargestellt werden. Dann ist

$$(AB)x = A(Bx) = A\Phi_B(x) = \Phi_A(\Phi_B(x)) = \Phi_{AB}(x).$$

Das bedeutet:
Die Matrix AB stellt die Hintereinanderausführung Φ_{AB} von Φ_B und dann Φ_A dar.

Folge:
Φ_{AB} *auch linear* (da es ja durch die Matrix AB realisiert wird).