Mathematik I – Lineare Algebra

Vorlesung 2

Wolfgang Globke

Duale Hochschule
Baden-Württemberg

10. Oktober 2019

Geometrie in der Ebene:

- Punkte werden durch zwei Koordinaten x_1, x_2 eindeutig identifiziert. Dies liefert die Darstellung durch Vektoren $x = \binom{x_1}{x_2}$.

Geometrie in der Ebene:

- Punkte werden durch zwei Koordinaten x_1, x_2 eindeutig identifiziert. Dies liefert die Darstellung durch Vektoren $x = \binom{x_1}{x_2}$.
- Vektoren können komponentenweise addiert und mit Skalaren multipliziert werden,
$$x + y = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix}, \quad \lambda x = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{pmatrix}.$$
- Somit können wir x als Linearkombination $x = x_1 e_1 + x_2 e_2$ von $e_1 = \binom{1}{0}$, $e_2 = \binom{0}{1}$ schreiben.

Geometrie in der Ebene:

- Punkte werden durch zwei Koordinaten x_1, x_2 eindeutig identifiziert. Dies liefert die Darstellung durch Vektoren $x = \binom{x_1}{x_2}$.
- Vektoren können komponentenweise addiert und mit Skalaren multipliziert werden,
$$x + y = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix}, \quad \lambda x = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{pmatrix}.$$
- Somit können wir x als Linearkombination $x = x_1 e_1 + x_2 e_2$ von $e_1 = \binom{1}{0}$, $e_2 = \binom{0}{1}$ schreiben.
- Nach dem Satz des Pythagoras ist die Norm (Länge) eines Vektors $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.

Lineare Transformationen und Matrizen:

- Geometrische Transformationen Φ sind häufig linear,

$$\Phi(\lambda x) = \lambda \Phi(x), \quad \Phi(x + y) = \Phi(x) + \Phi(y).$$

- Insbesondere $\Phi(x) = x_1 \Phi(e_1) + x_2 \Phi(e_2)$, also ist Φ durch $\Phi(e_1)$ und $\Phi(e_2)$ vollständig festgelegt.

Lineare Transformationen und Matrizen:

- Geometrische Transformationen Φ sind häufig linear,

$$\Phi(\lambda x) = \lambda \Phi(x), \quad \Phi(x + y) = \Phi(x) + \Phi(y).$$

- Insbesondere $\Phi(x) = x_1 \Phi(e_1) + x_2 \Phi(e_2)$, also ist Φ durch $\Phi(e_1)$ und $\Phi(e_2)$ vollständig festgelegt.
- Wir codieren Φ durch eine Matrix $A = \left(\begin{smallmatrix} a_1 & a_3 \\ a_2 & a_4 \end{smallmatrix}\right)$.
  Nach den Regeln der Matrix-Vektor-Multiplikation gilt

$$Ax = \begin{pmatrix} a_1 x_1 + a_3 x_2 \\ a_2 x_1 + a_4 x_2 \end{pmatrix} = \Phi(x).$$

  Umgekehrt ermöglicht es diese Formel, für eine gegebene Matrix A eine lineare Transformation Φ_A zu definieren.

Lineare Transformationen und Matrizen:

- Geometrische Transformationen Φ sind häufig linear,

$$\Phi(\lambda x) = \lambda \Phi(x), \quad \Phi(x + y) = \Phi(x) + \Phi(y).$$

- Insbesondere $\Phi(x) = x_1 \Phi(e_1) + x_2 \Phi(e_2)$, also ist Φ durch $\Phi(e_1)$ und $\Phi(e_2)$ vollständig festgelegt.
- Wir codieren Φ durch eine Matrix $A = \left(\begin{smallmatrix} a_1 & a_3 \\ a_2 & a_4 \end{smallmatrix}\right)$.
  Nach den Regeln der Matrix-Vektor-Multiplikation gilt

$$Ax = \begin{pmatrix} a_1 x_1 + a_3 x_2 \\ a_2 x_1 + a_4 x_2 \end{pmatrix} = \Phi(x).$$

  Umgekehrt ermöglicht es diese Formel, für eine gegebene Matrix A eine lineare Transformation Φ_A zu definieren.
- Wir können auch zwei Matrizen A, B miteinander multiplizieren, nach der Regel

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}.$$

Lineare Transformationen und Matrizen:

- Geometrische Transformationen Φ sind häufig linear,

$$\Phi(\lambda x) = \lambda \Phi(x), \quad \Phi(x+y) = \Phi(x) + \Phi(y).$$

- Insbesondere $\Phi(x) = x_1 \Phi(e_1) + x_2 \Phi(e_2)$, also ist Φ durch $\Phi(e_1)$ und $\Phi(e_2)$ vollständig festgelegt.
- Wir codieren Φ durch eine Matrix $A = \left(\begin{smallmatrix} a_1 & a_3 \\ a_2 & a_4 \end{smallmatrix}\right)$.
  Nach den Regeln der Matrix-Vektor-Multiplikation gilt

$$Ax = \begin{pmatrix} a_1 x_1 + a_3 x_2 \\ a_2 x_1 + a_4 x_2 \end{pmatrix} = \Phi(x).$$

  Umgekehrt ermöglicht es diese Formel, für eine gegebene Matrix A eine lineare Transformation Φ_A zu definieren.
- Wir können auch zwei Matrizen A, B miteinander multiplizieren, nach der Regel

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}.$$

  Dann ist

$$\Phi_{AB}(x) = ABx = \Phi_A(\Phi_B(x)).$$

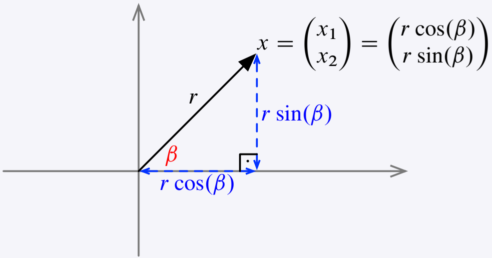
Rotationen

Rotation um den Ursprung

Aufgabe:
Rotiere einen Vektor x um den Winkel $\alpha \in [-\pi, \pi]$
gegen den Uhrzeigersinn um den Ursprung.

Aufgabe:
Rotiere einen Vektor x um den Winkel $\alpha \in [-\pi, \pi]$
gegen den Uhrzeigersinn um den Ursprung.

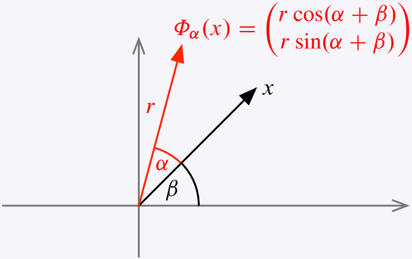
Bezeichne diese Rotation mit Φ_α.
Um eine Formel für $\Phi_\alpha(x)$ zu bestimmen, verwende eine geschickte Darstellung (Polarkoordinaten):



Bei der Rotation $\Phi_\alpha(x)$ um den Winkel α wird x auf den Vektor

$$\Phi_\alpha(x) = \begin{pmatrix} r\cos(\alpha + \beta) \\ r\sin(\alpha + \beta) \end{pmatrix}$$

abgebildet (die Länge r bleibt dabei unverändert).



Rotationen sind linear

Drücke $\Phi_\alpha(x)$ durch die Koordinaten x_1, x_2 und den Drehwinkel α aus:

Drücke $\Phi_\alpha(x)$ durch die Koordinaten x_1, x_2 und den Drehwinkel α aus:

Mit den Additionstheoremen und $x_1 = r\cos(\beta)$, $x_2 = r\sin(\beta)$ gilt, erhalten wir

$$\begin{aligned}\Phi_\alpha(x) &= \begin{pmatrix} r\cos(\alpha+\beta) \\ r\sin(\alpha+\beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\alpha)\cos(\beta) - r\sin(\alpha)\sin(\beta) \\ r\sin(\alpha)\cos(\beta) + r\cos(\alpha)\sin(\beta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha)x_1 - \sin(\alpha)x_2 \\ \sin(\alpha)x_1 + \cos(\alpha)x_2 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Drücke $\Phi_\alpha(x)$ durch die Koordinaten x_1, x_2 und den Drehwinkel α aus:

Mit den Additionstheoremen und $x_1 = r\cos(\beta)$, $x_2 = r\sin(\beta)$ gilt, erhalten wir

$$\begin{aligned}\Phi_\alpha(x) &= \begin{pmatrix} r\cos(\alpha+\beta) \\ r\sin(\alpha+\beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\alpha)\cos(\beta) - r\sin(\alpha)\sin(\beta) \\ r\sin(\alpha)\cos(\beta) + r\cos(\alpha)\sin(\beta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha)x_1 - \sin(\alpha)x_2 \\ \sin(\alpha)x_1 + \cos(\alpha)x_2 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Erinnern wir uns an die Matrix-Vektor-Multiplikation, so bemerken wir, dass dies wie folgt ausgedrückt werden kann:

$$\Phi_\alpha(x) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Die Rotation Φ_α ist also linear,

Drücke $\Phi_\alpha(x)$ durch die Koordinaten x_1, x_2 und den Drehwinkel α aus:

Mit den Additionstheoremen und $x_1 = r\cos(\beta)$, $x_2 = r\sin(\beta)$ gilt, erhalten wir

$$\Phi_\alpha(x) = \begin{pmatrix} r\cos(\alpha+\beta) \\ r\sin(\alpha+\beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\alpha)\cos(\beta) - r\sin(\alpha)\sin(\beta) \\ r\sin(\alpha)\cos(\beta) + r\cos(\alpha)\sin(\beta) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \cos(\alpha)x_1 - \sin(\alpha)x_2 \\ \sin(\alpha)x_1 + \cos(\alpha)x_2 \end{pmatrix}.$$

Erinnern wir uns an die Matrix-Vektor-Multiplikation, so bemerken wir, dass dies wie folgt ausgedrückt werden kann:

$$\Phi_\alpha(x) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Die Rotation Φ_α ist also linear, und wird beschrieben durch die Rotationsmatrix

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Hintereinanderausführung zweier Rotationen Φ_β und Φ_α liefert $\Phi_{\alpha+\beta}$:

$$\begin{aligned}
\Phi_\alpha(\Phi_\beta(x)) &= R_\alpha R_\beta x \\
&= \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix} x \\
&= \begin{pmatrix} \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) & -\cos(\alpha)\sin(\beta) - \sin(\alpha)\cos(\beta) \\ \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta) & -\sin(\alpha)\sin(\beta) + \cos(\alpha)\cos(\beta) \end{pmatrix} x \\
&= R_{\alpha+\beta} x
\end{aligned}$$

Für die letzte Gleichheit wende wieder Additionstheoreme an.

Hintereinanderausführung zweier Rotationen Φ_β und Φ_α liefert $\Phi_{\alpha+\beta}$:

$$\begin{aligned}
\Phi_\alpha(\Phi_\beta(x)) &= R_\alpha R_\beta x \\
&= \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix} x \\
&= \begin{pmatrix} \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) & -\cos(\alpha)\sin(\beta) - \sin(\alpha)\cos(\beta) \\ \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta) & -\sin(\alpha)\sin(\beta) + \cos(\alpha)\cos(\beta) \end{pmatrix} x \\
&= R_{\alpha+\beta} x
\end{aligned}$$

Für die letzte Gleichheit wende wieder Additionstheoreme an.

Beobachtung

Da $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ ist, zeigt dies, dass die Hintereinanderausführung von Rotationen in der Ebene unabhängig von der Reihenfolge ist.

Hintereinanderausführung zweier Rotationen Φ_β und Φ_α liefert $\Phi_{\alpha+\beta}$:

$$\begin{aligned}
\Phi_\alpha(\Phi_\beta(x)) &= R_\alpha R_\beta x \\
&= \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix} x \\
&= \begin{pmatrix} \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) & -\cos(\alpha)\sin(\beta) - \sin(\alpha)\cos(\beta) \\ \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta) & -\sin(\alpha)\sin(\beta) + \cos(\alpha)\cos(\beta) \end{pmatrix} x \\
&= R_{\alpha+\beta} x
\end{aligned}$$

Für die letzte Gleichheit wende wieder Additionstheoreme an.

Beobachtung

Da $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ ist, zeigt dies, dass die Hintereinanderausführung von Rotationen in der Ebene unabhängig von der Reihenfolge ist.

(Dies gilt nicht mehr, wenn man in den 3D-Raum übergeht!)

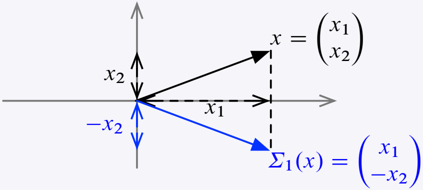
Spiegelungen

Spiegelung an der e_1-Achse

Bei einer Spiegelung wird an einer gegebenen Achse ein Vektor x entlang seines Lots auf diese Achse reflektiert.

Bei einer Spiegelung wird an einer gegebenen Achse ein Vektor x entlang seines Lots auf diese Achse reflektiert.

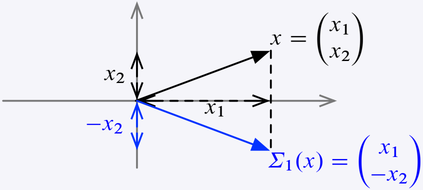
Als einfaches Beispiel betrachten wir die Spiegelung Σ_1 an der e_1-Achse.



Spiegelung an der e_1-Achse

Bei einer Spiegelung wird an einer gegebenen Achse ein Vektor x entlang seines Lots auf diese Achse reflektiert.

Als einfaches Beispiel betrachten wir die Spiegelung Σ_1 an der e_1-Achse.



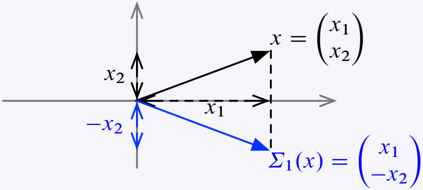
Wir können Σ_1 durch die folgende Matrix S_1 darstellen,

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Spiegelung an der e_1-Achse

Bei einer Spiegelung wird an einer gegebenen Achse ein Vektor x entlang seines Lots auf diese Achse reflektiert.

Als einfaches Beispiel betrachten wir die Spiegelung Σ_1 an der e_1-Achse.



Wir können Σ_1 durch die folgende Matrix S_1 darstellen,

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Prüfe direkt, dass gilt:

$$S_1 x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}.$$

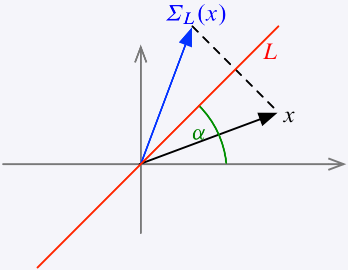
Insbesondere ist die Spiegelung Σ_1 linear.

Spiegelung an beliebigen Achsen (0)

Auf die gleiche Weise finden wir die Spiegelung an der e_2-Achse. Sie wird dargestellt durch die Matrix $S_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Auf die gleiche Weise finden wir die Spiegelung an der e_2-Achse. Sie wird dargestellt durch die Matrix $S_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

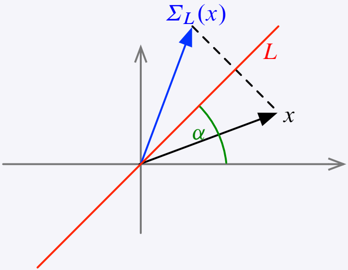
Es ist nicht auf den ersten Blick ersichtlich, wie die Spiegelung Σ_L an einer beliebigen Achse L durch den Ursprung zu beschreiben ist.



Spiegelung an beliebigen Achsen (0)

Auf die gleiche Weise finden wir die Spiegelung an der e_2-Achse. Sie wird dargestellt durch die Matrix $S_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

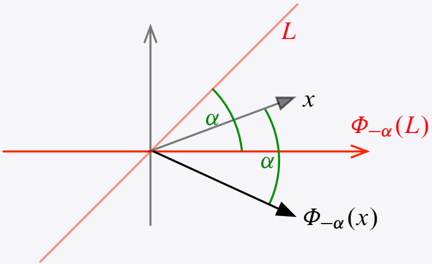
Es ist nicht auf den ersten Blick ersichtlich, wie die Spiegelung Σ_L an einer beliebigen Achse L durch den Ursprung zu beschreiben ist.



Trick:
Führe Σ_L auf die leicht zu berechnende Spiegelung Σ_1 an der e_1-Achse zurück. Dazu gehen wir in drei Schritten vor…

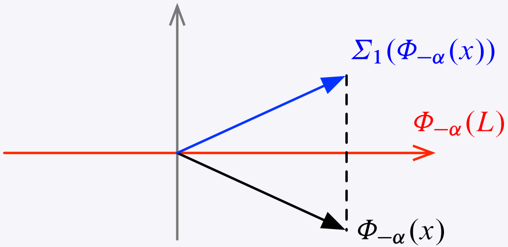
Spiegelung an beliebigen Achsen (1)

Es sei α der Winkel zwischen der Achse L und der e_1-Achse.
Rotiere die Ebene um den Winkel $-\alpha$ (also um α im Uhrzeigersinn).

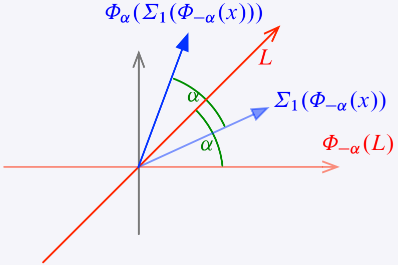


Dadurch wird L auf die e_1-Achse abgebildet, und x auf den Vektor $\Phi_{-\alpha}(x)$.

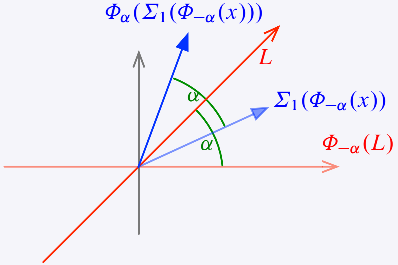
Nun spiegele den neuen Vektor $\Phi_{-\alpha}(x)$ an der e_1-Achse durch die oben beschriebene Spiegelung Σ_1.



Rotiere nun die Ebene um den Winkel α.



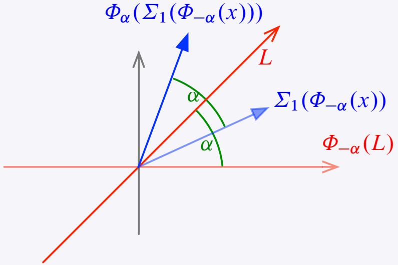
Rotiere nun die Ebene um den Winkel α.



- Die e_1-Achse wird zurück auf die Achse L rotiert,
- $\Phi_{-\alpha}(x)$ wird zurück auf x rotiert, und
- der gespiegelte Vektor $\Sigma_1(\Phi_{-\alpha}(x))$ wird auf die Spiegelung von x an der Achse L abgebildet.

Spiegelung an beliebigen Achsen (3)

Rotiere nun die Ebene um den Winkel α.

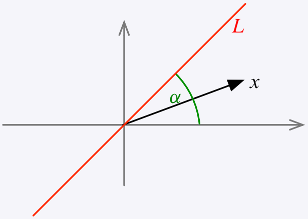


- Die e_1-Achse wird zurück auf die Achse L rotiert,
- $\Phi_{-\alpha}(x)$ wird zurück auf x rotiert, und
- der gespiegelte Vektor $\Sigma_1(\Phi_{-\alpha}(x))$ wird auf die Spiegelung von x an der Achse L abgebildet.

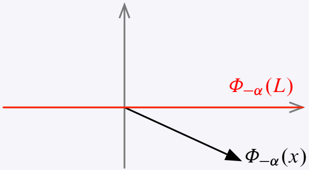
Ergebnis: Es ist

$$\Sigma_L(x) = \Phi_\alpha(\Sigma_1(\Phi_{-\alpha}(x))).$$

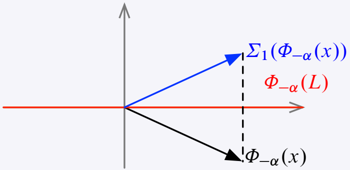
Spiegelung an beliebigen Achsen (4)

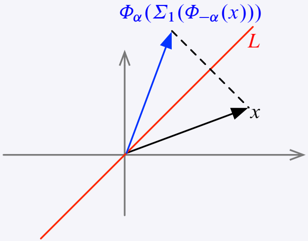


Spiegelung an beliebigen Achsen (4)

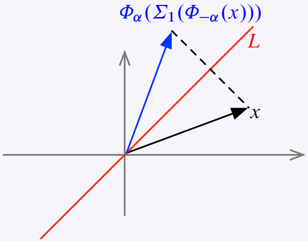


Spiegelung an beliebigen Achsen (4)




$\Phi_\alpha(\Sigma_1(\Phi_{-\alpha}(x)))$
L
x

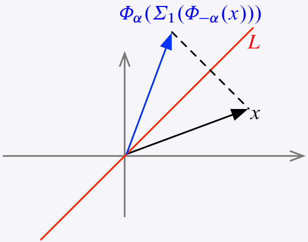
Spiegelung an beliebigen Achsen (4)



Die Matrix S_L der Spiegelung Σ_L ist das Produkt der Matrizen R_α, S_1 und $R_{-\alpha}$:

$$S_L = R_\alpha S_1 R_{-\alpha} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \cos(2\alpha) & \sin(2\alpha) \\ \sin(2\alpha) & -\cos(2\alpha) \end{pmatrix}.$$

Spiegelung an beliebigen Achsen (4)



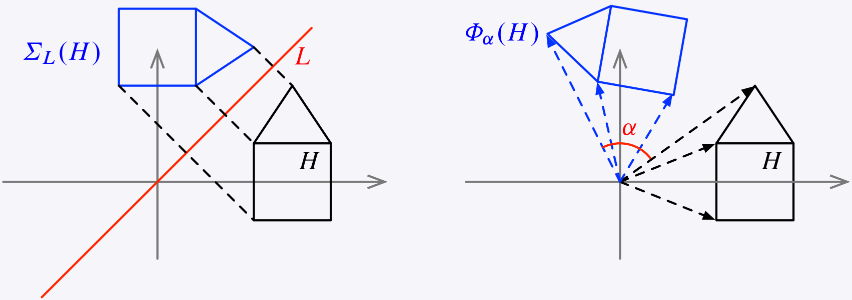
Die Matrix S_L der Spiegelung Σ_L ist das Produkt der Matrizen R_α, S_1 und $R_{-\alpha}$:

$$S_L = R_\alpha S_1 R_{-\alpha} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \cos(2\alpha) & \sin(2\alpha) \\ \sin(2\alpha) & -\cos(2\alpha) \end{pmatrix}.$$

Bemerkung

Spiegelungen und Rotationen haben gemeinsam, dass sie Winkel und Abstände erhalten. Darauf werden wir im späteren Verlauf der Vorlesung noch genauer eingehen.

Vergleich: Spiegelung und Rotation



Scherungen

Ein Scherung ist eine Transformation Φ

- mit einer Fixpunktachse L durch den Ursprung,
- die alle Punkte x der Ebene parallel zu L verschiebt,
- um eine Distanz proportional zum Abstand von x zu L.

Ein Scherung ist eine Transformation Φ

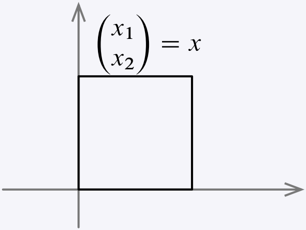
- mit einer Fixpunktachse L durch den Ursprung,
- die alle Punkte x der Ebene parallel zu L verschiebt,
- um eine Distanz proportional zum Abstand von x zu L.

Scherung mit $L = e_1$-Achse:

Ein Scherung ist eine Transformation Φ

- mit einer Fixpunktachse L durch den Ursprung,
- die alle Punkte x der Ebene parallel zu L verschiebt,
- um eine Distanz proportional zum Abstand von x zu L.

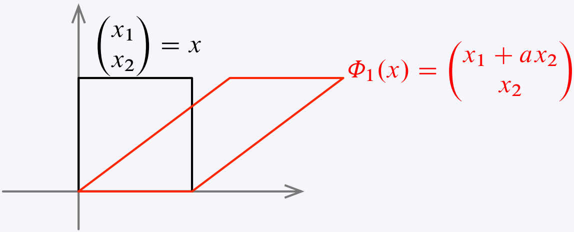
Scherung mit $L = e_1$-Achse:



Ein Scherung ist eine Transformation Φ

- mit einer Fixpunktachse L durch den Ursprung,
- die alle Punkte x der Ebene parallel zu L verschiebt,
- um eine Distanz proportional zum Abstand von x zu L.

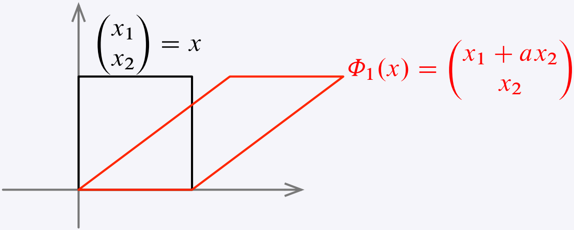
Scherung mit $L = e_1$-Achse:



Ein Scherung ist eine Transformation Φ

- mit einer Fixpunktachse L durch den Ursprung,
- die alle Punkte x der Ebene parallel zu L verschiebt,
- um eine Distanz proportional zum Abstand von x zu L.

Scherung mit $L = e_1$-Achse:

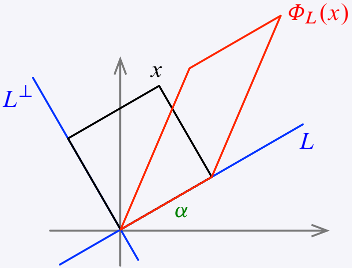


Es gilt

$$\Phi_1(x) = \begin{pmatrix} x_1 + ax_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = Nx, \quad \text{mit } N = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

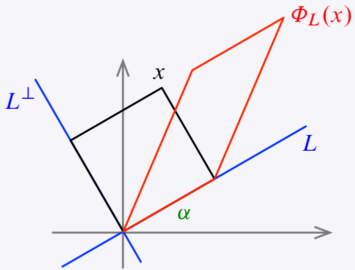
Scherungen mit beliebiger Achse

Den Ausdruck für eine Scherung Φ_L parallel zu einer beliebigen Achse L durch den Ursprung, können wir uns analog zum Vorgehen für Spiegelungen herleiten.



Scherungen mit beliebiger Achse

Den Ausdruck für eine Scherung Φ_L parallel zu einer beliebigen Achse L durch den Ursprung, können wir uns analog zum Vorgehen für Spiegelungen herleiten.



Es gilt dann

$$\Phi_L(x) = \Phi_\alpha(\Phi_1(\Phi_{-\alpha}(x))) = R_\alpha N R_{-\alpha} x,$$

wobei Φ_α die Rotation um den Winkel α gegen den Uhrzeigersinn bezeichnet, und R_α ihre Rotationsmatrix ist.

Skalierungen

Eine Skalierung ist eine Transformation der Form

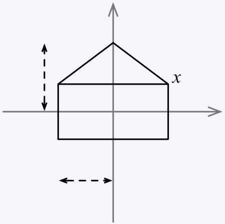
$$\Lambda(x) = \begin{pmatrix} \lambda_1 x_1 \\ \lambda_2 x_2 \end{pmatrix}, \quad \text{mit } \lambda_1, \lambda_2 > 0.$$

Eine Skalierung ist eine Transformation der Form

$$\Lambda(x) = \begin{pmatrix} \lambda_1 x_1 \\ \lambda_2 x_2 \end{pmatrix}, \qquad \text{mit } \lambda_1, \lambda_2 > 0.$$

Beispiel

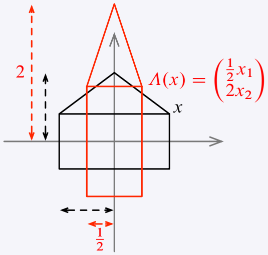
Die x_1-Koordinate wird mit $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ multipliziert (also gestaucht), und die x_2-Koordinate wird mit $\lambda_2 = 2$ multipliziert (also gestreckt).



Eine Skalierung ist eine Transformation der Form

$$\Lambda(x) = \begin{pmatrix} \lambda_1 x_1 \\ \lambda_2 x_2 \end{pmatrix}, \qquad \text{mit } \lambda_1, \lambda_2 > 0.$$

Beispiel
Die x_1-Koordinate wird mit $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ multipliziert (also gestaucht), und die x_2-Koordinate wird mit $\lambda_2 = 2$ multipliziert (also gestreckt).



Die Skalierung Λ wird durch die Diagonalmatrix

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

dargestellt, also sind auch Skalierungen linear.

Die Skalierung Λ wird durch die Diagonalmatrix

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

dargestellt, also sind auch Skalierungen linear.

Bemerkung 1
Skalierungen entlang anderer Achsen als der e_1- und e_2-Achsen können erneut durch Kombination mit Rotationen erhalten werden.

Die Skalierung Λ wird durch die Diagonalmatrix

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

dargestellt, also sind auch Skalierungen linear.

Bemerkung 1
Skalierungen entlang anderer Achsen als der e_1- und e_2-Achsen können erneut durch Kombination mit Rotationen erhalten werden.

Bemerkung 2
Wenn man auch negative Skalierungsfaktoren λ erlaubt, so ist die resultierende Transformation eine Kombination einer Skalierung mit Spiegelungen.

Invertierbare Matrizen und Iwasawa-Zerlegung

Die vier Typen

- Rotationen,
- Spiegelungen,
- Scherungen,
- Skalierungen

sind die Grundbausteine aller geometrischen Transformationen der Ebene.

Um diese Aussage genauer zu verstehen, untersuchen wir zunächst ein paar allgemeine Eigenschaften von Matrizen.

Die Einheitsmatrix (genauer: 2×2-Einheitsmatrix) ist

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Einheitsmatrix (genauer: 2×2-Einheitsmatrix) ist

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Rechne nach: Für jeden Vektor x und jede Matrix T gilt

$$I_2 x = x, \quad I_2 T = T I_2 = T.$$

Die Einheitsmatrix (genauer: 2×2-Einheitsmatrix) ist

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Rechne nach: Für jeden Vektor x und jede Matrix T gilt

$$I_2 x = x, \quad I_2 T = T I_2 = T.$$

Also beschreibt I_2 eine „triviale Transformation", die überhaupt nichts tut.

Die Einheitsmatrix (genauer: 2×2-Einheitsmatrix) ist

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Rechne nach: Für jeden Vektor x und jede Matrix T gilt

$$I_2 x = x, \quad I_2 T = T I_2 = T.$$

Also beschreibt I_2 eine „triviale Transformation“, die überhaupt nichts tut.

Eine Matrix A ist invertierbar, wenn eine Matrix A^{-1} existiert, mit

$$A A^{-1} = I_2 = A^{-1} A.$$

Die Einheitsmatrix (genauer: 2×2-Einheitsmatrix) ist

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Rechne nach: Für jeden Vektor x und jede Matrix T gilt

$$I_2 x = x, \quad I_2 T = T I_2 = T.$$

Also beschreibt I_2 eine „triviale Transformation”, die überhaupt nichts tut.

Eine Matrix A ist invertierbar, wenn eine Matrix A^{-1} existiert, mit

$$A A^{-1} = I_2 = A^{-1} A.$$

Die Matrix A^{-1} wir dann das Inverse von A genannt.

Die Einheitsmatrix (genauer: 2×2-Einheitsmatrix) ist

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Rechne nach: Für jeden Vektor x und jede Matrix T gilt

$$I_2 x = x, \quad I_2 T = T I_2 = T.$$

Also beschreibt I_2 eine „triviale Transformation", die überhaupt nichts tut.

Eine Matrix A ist invertierbar, wenn eine Matrix A^{-1} existiert, mit

$$A A^{-1} = I_2 = A^{-1} A.$$

Die Matrix A^{-1} wir dann das Inverse von A genannt.

Geometrisch können wir uns A^{-1} als eine Transformationsmatrix vorstellen, die den Effekt von A wieder rückgängig macht.

Die vier Typen von Transformationsmatrizen, die wir bisher kennengelernt haben, sind alle invertierbar.

Die vier Typen von Transformationsmatrizen, die wir bisher kennengelernt haben, sind alle invertierbar.

Beispiel 1

Eine Rotationsmatrix R_α ist invertierbar, mit inverser Matrix $R_\alpha^{-1} = R_{-\alpha}$, denn es gilt ja

$$R_\alpha R_{-\alpha} = R_{\alpha-\alpha} = R_0 = I_2 = R_{-\alpha} R_\alpha.$$

Die vier Typen von Transformationsmatrizen, die wir bisher kennengelernt haben, sind alle invertierbar.

Beispiel 1

Eine Rotationsmatrix R_α ist invertierbar, mit inverser Matrix $R_\alpha^{-1} = R_{-\alpha}$, denn es gilt ja

$$R_\alpha R_{-\alpha} = R_{\alpha-\alpha} = R_0 = I_2 = R_{-\alpha} R_\alpha .$$

Beispiel 2

Eine Spiegelungsmatrix S ist ihre eigene inverse Matrix:

$$S S = I_2,$$

also $S = S^{-1}$.

Beispiel 3

Das Inverse einer Scherungsmatrix N ist

$$N^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

denn

$$NN^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -a+a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2,$$

und analog $N^{-1}N = I_2$.

Beispiel 3

Das Inverse einer Scherungsmatrix N ist

$$N^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

denn

$$NN^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -a+a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2,$$

und analog $N^{-1}N = I_2$.

Beispiel 4

Für eine Skalierungsmatrix A mit Diagonaleinträgen λ_1, λ_2 ist das Inverse durch

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} & 0 \\ 0 & \lambda_2^{-1} \end{pmatrix}$$

gegeben. Man prüft leicht nach, dass $AA^{-1} = I_2 = A^{-1}A$ gilt, indem man die Diagonaleinträge miteinander multipliziert.

Iwasawa-Zerlegung

Erinnerung: Rotationen und Spiegelungen erhalten Winkel und Abstände, und wir fassen daher Matrizenprodukte $K = RS$ von Rotations- und Spiegelungsmatrizen zu orthogonalen Matrizen zusammen.

Erinnerung: Rotationen und Spiegelungen erhalten Winkel und Abstände, und wir fassen daher Matrizenprodukte $K = RS$ von Rotations- und Spiegelungsmatrizen zu orthogonalen Matrizen zusammen.

Satz 1.1 (Iwasawa 1949)
Jede invertierbare 2×2-Matrix T lässt sich in eindeutiger Weise als Produkt

$$T = KAN$$

schreiben. Dabei ist

- *K eine orthogonale Matrix (also ein Produkt aus einer Rotationsmatrix und einer Spiegelungsmatrix),*
- *A eine Skalierungsmatrix, und*
- *N eine Scherungsmatrix.*

Erinnerung: Rotationen und Spiegelungen erhalten Winkel und Abstände, und wir fassen daher Matrizenprodukte $K = RS$ von Rotations- und Spiegelungsmatrizen zu orthogonalen Matrizen zusammen.

Satz 1.1 (Iwasawa 1949)
Jede invertierbare 2×2-Matrix T lässt sich in eindeutiger Weise als Produkt

$$T = KAN$$

schreiben. Dabei ist

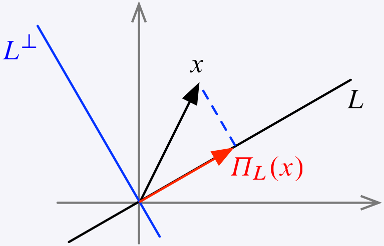
- *K eine orthogonale Matrix (also ein Produkt aus einer Rotationsmatrix und einer Spiegelungsmatrix),*
- *A eine Skalierungsmatrix, und*
- *N eine Scherungsmatrix.*

Bemerkung
Dabei ist es natürlich möglich, dass die einzelnen Teile trivial sind, also durch die Einheitsmatrix repräsentiert werden. Ist etwa T eine Rotationsmatrix, $T = R_\alpha$, so ist die Iwasawa-Zerlegung $T = KAN$ mit $K = R_\alpha$, $A = I_2$, $N = I_2$.

Projektionen

Betrachte nun eine Klasse von geometrischen Abbildungen, die *nicht invertierbar* sind.

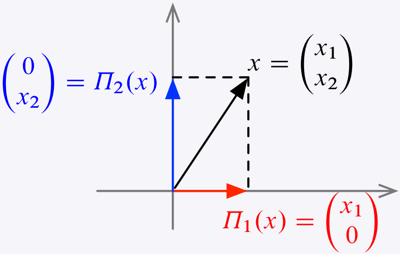
Eine Projektion Π auf eine Achse L durch den Ursprung in der Ebene bildet jeden Vektor x auf seinen Lotpunkt in L ab.



Ist speziell L die e_1-Achse, so ist $\Pi_1(x)$ gerade der Vektor

- mit Komponente x_1 in e_1-Richtung
- und Komponente 0 in e_2-Richtung.

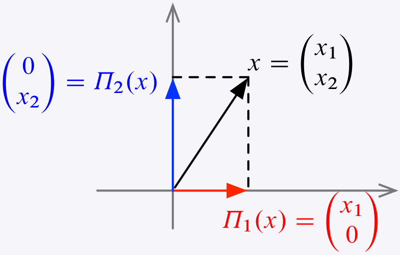
Entsprechend für die Projektion $\Pi_2(x)$ auf die e_2-Achse.



Ist speziell L die e_1-Achse, so ist $\Pi_1(x)$ gerade der Vektor

- mit Komponente x_1 in e_1-Richtung
- und Komponente 0 in e_2-Richtung.

Entsprechend für die Projektion $\Pi_2(x)$ auf die e_2-Achse.



Diese Projektionen erlauben uns somit, x in seine Komponenten zu zerlegen. Es gilt daher

$$x = \Pi_1(x) + \Pi_2(x).$$

Projektionen nicht invertierbar

Die Matrizen für Π_1 und Π_2 sind

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Matrizen für Π_1 und Π_2 sind

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrizen sind nicht invertierbar!

Projektionen nicht invertierbar

Die Matrizen für Π_1 und Π_2 sind

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrizen sind nicht invertierbar!
Ist nämlich $A = \left(\begin{smallmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{smallmatrix}\right)$ eine beliebige Matrix, so gilt

$$AP_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & 0 \end{pmatrix}.$$

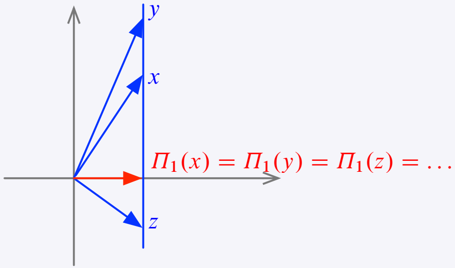
$\rightsquigarrow$ es ist niemals möglich, dass $AP_1 = I_2$ gilt. Somit kann P_1 kein Inverses haben. (Analog für P_2.)

Angenommen, P_1 wäre invertierbar.

- Inverse Matrix P_1^{-1} definiert Transformation Π_1^{-1}, die den Effekt von Π_1 rückgängig macht.
- Also $\Pi_1^{-1}(\Pi_1(x)) = x$ für jeden Vektor x.

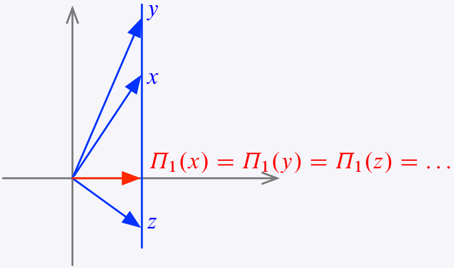
Angenommen, P_1 wäre invertierbar.

- Inverse Matrix P_1^{-1} definiert Transformation Π_1^{-1}, die den Effekt von Π_1 rückgängig macht.
- Also $\Pi_1^{-1}(\Pi_1(x)) = x$ für jeden Vektor x.
- Es gibt aber zu jedem $\Pi_1(x)$ (unendlich) viele verschiedene Vektoren, die auf $\Pi_1(x)$ projiziert werden.



Angenommen, P_1 wäre invertierbar.

- Inverse Matrix P_1^{-1} definiert Transformation Π_1^{-1}, die den Effekt von Π_1 rückgängig macht.
- Also $\Pi_1^{-1}(\Pi_1(x)) = x$ für jeden Vektor x.
- Es gibt aber zu jedem $\Pi_1(x)$ (unendlich) viele verschiedene Vektoren, die auf $\Pi_1(x)$ projiziert werden.



- Wenn wir $\Pi_1(x)$ kennen, ist also überhaupt nicht eindeutig definiert, welches der ursprüngliche Vektor x ist. Somit kann es keine Transformation Π_1^{-1} geben.

Den Ausdruck für eine Projektion Π_L auf eine beliebige Achse L durch den Ursprung erhalten wir wie üblich:

- Rotiere L auf die e_1-Achse.
- Führe Projektion auf die e_1-Achse durch.
- Rotiere diese auf die ursprüngliche Achse L zurück.

Den Ausdruck für eine Projektion Π_L auf eine beliebige Achse L durch den Ursprung erhalten wir wie üblich:

- Rotiere L auf die e_1-Achse.
- Führe Projektion auf die e_1-Achse durch.
- Rotiere diese auf die ursprüngliche Achse L zurück.

Somit ist

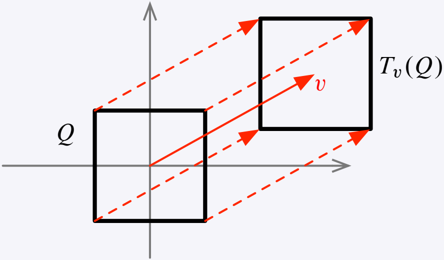
$$\Pi_L(x) = \Phi_\alpha(\Pi_1(\Phi_{-\alpha}(x))),$$

wobei α der Winkel zwischen L und der e_1-Achse ist.

Verschiebungen und affine Transformationen

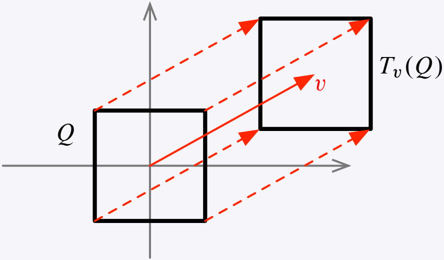
Wähle einen Vektor v.
Die Verschiebung (auch Translation) um v ist die Transformation

$$T_v(x) = x + v.$$



Wähle einen Vektor v.
Die Verschiebung (auch Translation) um v ist die Transformation

$$T_v(x) = x + v.$$

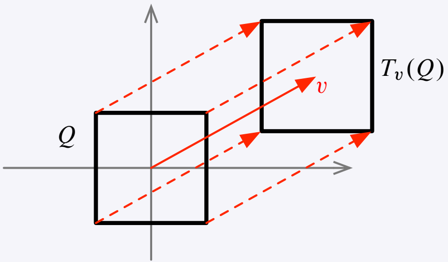


Beobachtung
Es sei $v \neq 0$ (Nullvektor).
Für Vektoren x, y gilt

$$T_v(x + y) = (x + y) + v$$

Wähle einen Vektor v.
Die Verschiebung (auch Translation) um v ist die Transformation

$$T_v(x) = x + v.$$



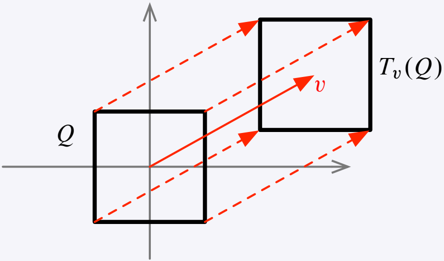
Beobachtung
Es sei $v \neq 0$ (Nullvektor).
Für Vektoren x, y gilt

$$T_v(x + y) = (x + y) + v \neq (x + y) + 2v$$

Verschiebung um festen Vektor

Wähle einen Vektor v.
Die Verschiebung (auch Translation) um v ist die Transformation

$$T_v(x) = x + v.$$

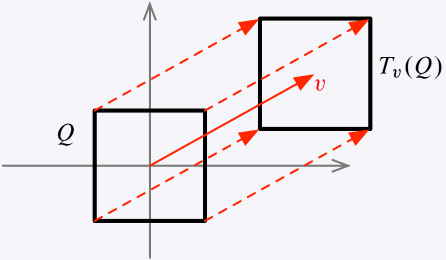


Beobachtung
Es sei $v \neq 0$ (Nullvektor).
Für Vektoren x, y gilt

$$T_v(x+y) = (x+y) + v \neq (x+y) + 2v = (x+v) + (y+v) = T_v(x) + T_v(y).$$

Wähle einen Vektor v.
Die Verschiebung (auch Translation) um v ist die Transformation

$$T_v(x) = x + v.$$



Beobachtung
Es sei $v \neq 0$ (Nullvektor).
Für Vektoren x, y gilt

$$T_v(x + y) = (x + y) + v \neq (x + y) + 2v = (x + v) + (y + v) = T_v(x) + T_v(y).$$

Somit ist T_v nicht linear!

Bisher:

- Rotationen um Ursprung.
- Spiegelung an Achsen durch Ursprung.
- Scherung parallel zu Achsen durch Ursprung.

Bisher:

- Rotationen um Ursprung.
- Spiegelung an Achsen durch Ursprung.
- Scherung parallel zu Achsen durch Ursprung.

Unter Hinzunahme von Verschiebungen erhalten wir:

- Rotationen um beliebige Punke.
- Spiegelung an beliebigen Achsen.
- Scherung parallel zu beliebigen Achsen.

Bisher:

- Rotationen um Ursprung.
- Spiegelung an Achsen durch Ursprung.
- Scherung parallel zu Achsen durch Ursprung.

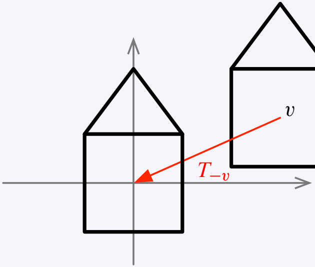
Unter Hinzunahme von Verschiebungen erhalten wir:

- Rotationen um beliebige Punke.
- Spiegelung an beliebigen Achsen.
- Scherung parallel zu beliebigen Achsen.

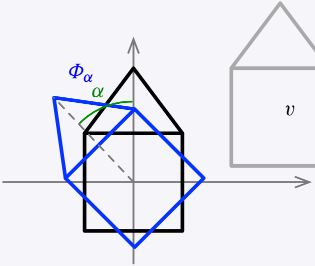
Erläuterung anhand des folgenden Beispiels:
Realisiere eine Rotation $\Psi_{\alpha,v}$ um den Punkt $v = \binom{v_1}{v_2}$ um den Winkel α.

Rotation um beliebigen Punkt (1)

Verschiebe durch T_{-v} alle Punkte der Ebene um den konstanten Vektor $-v$.
(Das Rotationszentrum v wird in den Ursprung verschoben.)

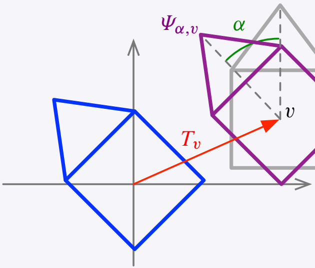


Rotiere nun wie gehabt durch die Rotation Φ_α um den Winkel α gegen den Uhrzeigersinn um den Ursprung.



Rotation um beliebigen Punkt (3)

Verschiebe alle Punkte der Ebene durch T_v.



Dies liefert die Rotation

$$\Psi_{\alpha,v}(x) = T_v(\Phi_\alpha(T_{-v}(x)))$$

sämtlicher Punkte um den Punkt v um den Winkel α gegen den Uhrzeigersinn.

Eine Transformation Ψ, die sich aus einer linearen Transformation Φ und einer Verschiebung T_v zusammensetzt, bezeichnen wir als affine Transformation,

$$\Psi(x) = T_v(\Phi(x)) = \Phi(x) + v.$$

Affine Transformationen

Eine Transformation Ψ, die sich aus einer linearen Transformation Φ und einer Verschiebung T_v zusammensetzt, bezeichnen wir als affine Transformation,

$$\Psi(x) = T_v(\Phi(x)) = \Phi(x) + v.$$

Sowohl der lineare Teil Φ als auch der Verschiebungsteil v können trivial sein: Lineare Transformationen und Verschiebungen sind jeweils Spezialfälle von affinen Translationen.

Erweiterte („homogene”) Koordinaten

Verschiebungen sind nicht linear $\Rightarrow$ keine Darstellung durch Matrizen

Verschiebungen sind nicht linear $\Rightarrow$ keine Darstellung durch Matrizen $\ldots$ oder doch?

Verschiebungen sind nicht linear $\Rightarrow$ keine Darstellung durch Matrizen …oder doch?

- Nicht möglich mit 2×2-Matrizen!

Verschiebungen sind nicht linear $\Rightarrow$ keine Darstellung durch Matrizen … oder doch?

- Nicht möglich mit 2×2-Matrizen!
- Trick: Verwende 3×3-Matrizen.

Verschiebungen sind nicht linear $\Rightarrow$ keine Darstellung durch Matrizen ... oder doch?

- Nicht möglich mit 2×2-Matrizen!
- Trick: Verwende 3×3-Matrizen.
- Dazu führen wir erweiterte Koordinaten ein:
  Dem Vektor $x = \binom{x_1}{x_2}$ in der Ebene wird der dreidimensionale Vektor

  $$\hat{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

  zugeordnet.
  (Schreibe auch kürzer $\binom{x}{1}$ dafür, wenn klar ist, dass x einen Vektor bezeichnet.)

Verschiebungen sind nicht linear $\Rightarrow$ keine Darstellung durch Matrizen ... oder doch?

- Nicht möglich mit 2×2-Matrizen!
- Trick: Verwende 3×3-Matrizen.
- Dazu führen wir erweiterte Koordinaten ein:
  Dem Vektor $x = \binom{x_1}{x_2}$ in der Ebene wird der dreidimensionale Vektor

  $$\hat{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

  zugeordnet.
  (Schreibe auch kürzer $\binom{x}{1}$ dafür, wenn klar ist, dass x einen Vektor bezeichnet.)

Erweiterte Koordinaten werden gelegentlich auch als homogene Koordinaten bezeichnet (nicht ganz korrekt).

Die Verschiebung T_v können wir in erweiterten Koordinaten durch die Matrix

$$\hat{T}_v = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & v_1 \\ 0 & 1 & v_2 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

darstellen.

Die Verschiebung T_v können wir in erweiterten Koordinaten durch die Matrix

$$\hat{T}_v = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & v_1 \\ 0 & 1 & v_2 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

darstellen.

Probe:
Multipliziere $\hat{T}_v$ mit $\hat{x}$:

$$\hat{T}_v \hat{x} = \begin{pmatrix} x_1 + v_1 \\ x_2 + v_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \widehat{T_v(x)},$$

also in der Tat die erweiterten Koordinaten von $T_v(x)$.

Affine Transformationen in erweiterten Koordinaten

Ist eine affine Transformation $\Psi_{A,v}$ mit

- Linearteil Φ_A (für eine Matrix A),
- Verschiebungsteil T_v (für einen Vektor v),

gegeben,

Affine Transformationen in erweiterten Koordinaten

Ist eine affine Transformation $\Psi_{A,v}$ mit

- Lineareteil Φ_A (für eine Matrix A),
- Verschiebungsteil T_v (für einen Vektor v),

gegeben, so kann sie in erweiterten Koordinaten durch

$$\left(\begin{array}{c|c} A & v \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & v_1 \\ a_{21} & a_{22} & v_2 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

dargestellt werden.

Affine Transformationen in erweiterten Koordinaten

Ist eine affine Transformation $\Psi_{A,v}$ mit

- Linearteil Φ_A (für eine Matrix A),
- Verschiebungsteil T_v (für einen Vektor v),

gegeben, so kann sie in erweiterten Koordinaten durch

$$\left(\begin{array}{c|c} A & v \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & v_1 \\ a_{21} & a_{22} & v_2 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

dargestellt werden.

Probe:

$$\begin{pmatrix} A & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ax + v \\ 1 \end{pmatrix} = \widehat{Ax + v} = \widehat{\Psi_{A,v}(x)}.$$

Beispiel: Affine Transformation

Die affine Transformation Ψ sei in erweiterten Koordinaten durch

$$\begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{4}) & -\sin(\frac{\pi}{4}) & -1 \\ \sin(\frac{\pi}{4}) & \cos(\frac{\pi}{4}) & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dargestellt.

Die affine Transformation Ψ sei in erweiterten Koordinaten durch

$$\begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{4}) & -\sin(\frac{\pi}{4}) & -1 \\ \sin(\frac{\pi}{4}) & \cos(\frac{\pi}{4}) & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dargestellt.

Ihre Wirkung besteht in einer Drehung um $\frac{\pi}{4}$ $(= 45°)$ und einer anschließenden Verschiebung um 1 nach links und 1 nach oben.

Die affine Transformation Ψ sei in erweiterten Koordinaten durch

$$\begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{4}) & -\sin(\frac{\pi}{4}) & -1 \\ \sin(\frac{\pi}{4}) & \cos(\frac{\pi}{4}) & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dargestellt.

Ihre Wirkung besteht in einer Drehung um $\frac{\pi}{4}$ $(= 45°)$ und einer anschließenden Verschiebung um 1 nach links und 1 nach oben.