Klausur
Mathematik I
Lineare Algebra
TINF19AI2 – Wintersemester 2019
11. Dezember 2019, 13:00 Uhr

Matrikelnummer:

Aufgabe	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	$\sum_K$	$\sum_K + \sum_T$	**Note**
Punkte									

T-Bonus	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	$\sum_T$
Punkte									

Bitte beachten Sie

- Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihre Matrikelnummer, auch auf etwaige zusätzlich verwendete Blätter.
- Wenn Sie zusätzliches Papier verwenden, schreiben Sie auch die Aufgabennummer auf jedes Blatt.
- Die Klausur hat 18 Seiten mit 6 Aufgaben.
- Überprüfen Sie, dass der ausgehändigte Klausurbogen 6 verschiedene Aufgaben enthält!
- Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.
- Es sind keine Hilfsmittel zugelassen.
- Geben Sie für jede Aufgabe nur eine Lösung an. Bei mehreren angegebenen Lösungen wird die jeweils schlechteste zur Wertung herangezogen.
- Die Gesamtpunkte sind die Summe der Klausurpunkte $\sum_{\mathrm{K}}$ und der Punkte aus den Tests $\sum_{\mathrm{T}}$.
- Die maximal für eine Aufgabe erreichbaren Punkte stehen hinter der Aufgabennummer. Bei Aufgaben mit mehreren Teilaufgaben werden die Punkte als Summe der maximal in den Teilaufgaben erreichbaren Punkte dargestellt.
- Zum Bestehen der Prüfung muss mindestens die Note 4.0 erreicht werden.
- Zum Erreichen der Note 4.0 in der Klausur sind 30 Gesamtpunkte hinreichend.
- Schreiben Sie bitte leserlich.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Kreuzen Sie bei den folgenden Fragen die korrekten Antworten an.

Jede korrekt angekreuzte Antwort gibt dabei einen Punkt, jede falsch angekreuzte Antwort führt zu einem Punktabzug. Wird keine Antwort angekreuzt, so gibt es 0 Punkte für die Frage. Insgesamt kann es für die ganze Aufgabe nicht weniger als 0 Punkte geben.

		Wahr	Falsch
1.	Eine lineare Abbildung ist durch ihre Werte auf den Vektoren einer Basis vollständig bestimmt.	X	
2.	Ein (nicht-homogenes) LGS mit 7 Gleichungen in den Variablen x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 hat eine 7×6-Matrix als erweiterte Matrix.	X	
3.	Die Negation von „Nachts sind alle Katzen grau” ist „Keine Katze ist nachts grau”.		X
4.	Für Permutationen gilt: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$		X
5.	In $\mathbb{Z}_{10}$ ist das additiv Inverse von 5 wieder 5.	X	
6.	Eine lineare Abbildung $\Phi : V \to W$ ist genau dann injektiv, wenn $\ker \Phi = \{0\}$ gilt.	X	
7.	Es seien B, C Basen des $\mathbb{K}$-Vektorraumes V, $\dim V = n$, und $T_C^B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ die Basiswechselmatrix. Dann gilt $(T_C^B)^{-1} = T_B^C$.	X	
8.	Beim Vertauschen zweier Zeilen einer Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ ändert sich die Determinante nicht.		X
9.	Es sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Wenn n paarweise verschiedene Eigenwerte von A existieren, so ist A diagonalisierbar.	X	
10.	Jeder endlich-dimensionale euklidische Vektorraum $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ besitzt eine Orthonormalbasis.	X	

Aufgabe 2 (10 = 2 + 3 + 2 + 3 Punkte)

(a) Bestimme in $\mathbb{Z}_5$ die Inversen von 2, 3 und 4 bezüglich der Multiplikation.

Lösung: Es ist

$$2 \cdot 3 = 6 \equiv 1 \bmod 5, \quad 4 \cdot 4 = 16 \equiv 1 \bmod 5,$$

also ist $2^{-1} = 3$ und $4^{-1} = 4$ in $\mathbb{Z}_5$.

(b) Löse das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ über dem Körper $\mathbb{Z}_5$, das durch

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_5^{2\times 2}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_5^2$$

gegeben ist. Gib dabei die einzelnen Umformungsschritte an.

Hinweis: Rechne sorgfältig und mache am Schluss eine Probe, um die Korrektheit der Lösung zu überprüfen.

Lösung:

Stelle die erweiterte Matrix des LGS auf und wende den Gauß-Algorithmus an. Zum Invertieren der Einträge in der Matrix können wir auf Teil (a) zurückgreifen.

Da $3 + 2 \equiv 0 \bmod 5$ gilt, addieren wir im ersten Schritt die erste Zeile zur zweiten,

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{array}\right)$$

und multiplizieren nun die zweite Zeile mit 4 (seinem eigenen Inversen),

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right),$$

und addieren schließlich das doppelte der zweiten Zeile zur ersten, und multiplizieren dann die erste Zeile mit 2 (dem Inversen von 3),

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

Die eindeutige Lösung ist also

$$x = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_5^2.$$

(c) Zeige: Ist $\mathbb{K}$ ein beliebiger Körper und $x, y \in \mathbb{K}$, so folgt aus der Gleichung

$$xy = y,$$

dass $x = 1$ oder $y = 0$ gilt.

Lösung:

Beweis durch Widerspruch: Angenommen, es wäre $x \neq 1$ und $y \neq 0$. Dann ist y invertierbar, und $xy = y$ ist somit äquivalent zu

$$x = xyy^{-1} = yy^{-1} = 1.$$

Also $x = 1$, im Widerspruch zur Annahme. Folglich muss $x = 1$ oder $y = 0$ gelten.

(d) Aus der Vorlesung wissen wir, dass es einen Körper $\mathbb{F}_4$ mit vier Elementen gibt (der aber $\neq \mathbb{Z}_4$ ist, da 4 keine Primzahl ist).

Wir bezeichnen die vier verschiedenen Elemente aus $\mathbb{F}_4$ mit $0, 1, a, b$.

Ergänze die fehlenden Einträge in den Verknüpfungstabellen für $\mathbb{F}_4$:

+	**0**	**1**	***a***	***b***
0	0	1	a	b
1	1	0	b	a
a	a	b	0	1
b	b	a	1	0

·	**0**	**1**	***a***	***b***
0	0	0	0	0
1	0	1	a	b
a	0	a	b	1
b	0	b	1	a

Hinweis: Es ist für diese Aufgabe kein Spezialwissen über den Körper $\mathbb{F}_4$ erforderlich. Die Körpereigenschaften, Teil (c) und die vorgegebenene Einträge reichen aus, um sich die fehlenden Einträge herzuleiten.

Erläuterung zur Lösung von (d):

Da die Addition und Multiplikation in einem Körper kommutativ sind, lassen sich die jeweiligen Spalten für 1 direkt aus den entsprechenden Zeilen für 1 ablesen.

zu „+":

Es ist vorgegeben, dass $b = a + 1$ und $a + a = 0$ gilt. Somit muss $a + b = a = (a+1) = 1$ sein. Entsprechend gilt $b+b = (a+1)+(a+1) = a+a+1+1 = 0 + 0 = 0$.

zu „·":

Wäre $a \cdot a = 1$, so wäre $a \cdot b = a \cdot (a + 1) = a \cdot a + a = 1 + a = b$. Nach Teil (c) müsste dann aber $a = 1$ oder $b = 0$ gelten, was nicht der Fall ist. Also gilt $a \cdot a = b$. Dann bleibt nur b als Inverses von a, also $a \cdot b = 1$.

Entsprechend folgt $b \cdot b = (a + 1) \cdot b = a \cdot b + b = 1 + b = a$.

Es sind auch andere Herleitungen denkbar, etwa das Ausnutzen der Tatsache, dass für einen endlichen Körper jedes Element genau einmal in jeder Zeile/Spalte vorkommen muss. Eine Begründung war für diese Aufgabe jedoch nicht verlangt.

Aufgabe 3 (10 = 2 + 5 + 3 Punkte)

Es sei $B = \{b_1, b_2\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^2$ und $C = \{c_1, c_2, c_3\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$. Eine lineare Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ ist definiert durch

$$\begin{aligned} \Phi(b_1) &= 2c_2 + c_3, \\ \Phi(b_2) &= c_1 + c_3. \end{aligned}$$

(a) Gib die Darstellungsmatrix $\varrho_C^B(\Phi)$ für die Basen B und C an:

Lösung:

$$\varrho_C^B(\Phi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2}.$$

(b) Konkret sei nun B die Basis

$$B = \left\{ b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Desweiteren sei S die Standardbasis des $\mathbb{R}^2$,

$$S = \left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Gib die Basiswechselmatrizen T_S^B und T_B^S an.

Lösung:

Zunächst erhalten wir ohne Rechnung

$$T_S^B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Durch Invertieren dieser Matrix erhalten wir $T_B^S = (T_S^B)^{-1}$:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & -1/2 \end{array} \right).$$

Somit ist

$$T_B^S = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

(Beim Invertieren wurden folgende Elementaroperationen angewandt: Subtrahiere Zeile 1 von Zeile 2; multipliziere Zeile 2 mit $-\frac{1}{2}$; addiere das (-1)-fache von Zeile 2 zu Zeile 1.)

(c) Gib für die Abbildung Φ die Darstellungsmatrix $\varrho_C^S(\Phi)$ für die Basen S und C an.

Lösung:

Es gilt

$$\varrho_C^S(\Phi) = \varrho_C^B(\Phi) \cdot T_B^S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4 ($10 = 2 + 2 + 3 + 3$ Punkte)

(a) Es sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Gib die Definition eines *Eigenwertes* und *Eigenvektors* von A an.

Lösung:

Eine Zahl $\lambda \in \mathbb{K}$ heißt *Eigenwert* der Matrix A, wenn es einen Vektor $x \in \mathbb{K}^n$, $x \neq 0$, gibt, so dass die Gleichung

$$Ax = \lambda x$$

erfüllt ist. Dann heißt x *Eigenvektor* zum Eigenwert λ.

(b) Es sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ eine invertierbare Matrix.

Zeige: Ist $\lambda \in \mathbb{K}$ ein Eigenwert von A, so ist λ^{-1} ein Eigenwert von A^{-1}.

Lösung:

Es sei λ ein Eigenwert von A, und x ein Eigenvektor zum Eigenwert λ. Da A invertierbar ist, gilt $\lambda \neq 0$. Also haben wir folgende Äquivalenzen:

$$Ax = \lambda x \quad \Leftrightarrow \quad x = A^{-1}\lambda x = \lambda^{-1}Ax \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^{-1}x = A^{-1}x,$$

und da $x \neq 0$, bedeutet die letzte Gleichung nichts anderes, als dass λ^{-1} ein Eigenwert von A^{-1} ist.

(c) Es sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ eine Matrix mit der Eigenschaft, dass für eine gewisse Zahl $k \geq 1$ gilt: $A^k = O$ (Nullmatrix).

Zeige:

(i) $\det(A) = 0$.

(ii) Der einzige Eigenwert von A ist $\lambda = 0$.

Lösung:

zu (i): Zunächst kann man argumentieren, dass (i) direkt aus (ii) folgt, da ein Eigenwert 0 bedeutet, dass A nicht invertierbar ist und somit Determinante $\det(A) = 0$ haben muss. Wir können (i) aber auch direkt mit dem Multiplikationssatz für Determinanten zeigen:

$$0 = \det(O) = \det(A^k) = \det(A) \cdots \det(A) = \det(A)^k,$$

und somit $\det(A) = 0$.

zu (ii): Es sei λ ein Eigenwert von A mit Eigenvektor $x \neq 0$. Dann gilt

$$0 = Ox = A^k x = A \cdots Ax = \lambda^k x,$$

und da $x \neq 0$, muss $\lambda^k = 0$ sein, also auch $\lambda = 0$.

(d) Bestimme die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 & 6 \\ 1 & 7 & 9 & 2 \\ 1 & 7 & 9 & 9 \\ 1 & 9 & 9 & 9 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

Wir subtrahieren die vierte Spalte von der dritten, subtrahieren dann die dritte Zeile von der zweiten, und schließlich die vierte Zeile von der dritten,

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 & 6 \\ 1 & 7 & 9 & 2 \\ 1 & 7 & 9 & 9 \\ 1 & 9 & 9 & 9 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 1 & 7 & 7 & 2 \\ 1 & 7 & 0 & 9 \\ 1 & 9 & 0 & 9 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & -7 \\ 1 & 7 & 0 & 9 \\ 1 & 9 & 0 & 9 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & -7 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 9 & 0 & 9 \end{pmatrix},$$

und nun entwickeln wir nach der dritten Zeile,

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & -7 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 9 & 0 & 9 \end{pmatrix} = 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 7 & -7 \\ 1 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

und die Sarrus-Regel liefert schließlich

$$\det(A) = 2 \cdot (1 \cdot 7 \cdot 9 - 1 \cdot 7 \cdot 6) = 2 \cdot 7 \cdot (9 - 6) = 42.$$

Hier gibt es natürlich viele verschiedene denkbare Vorgehensweisen.

Aufgabe 5 (10 = 4 + 3 + 2 + 1 Punkte) Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

(a) Bestimme das charakteristische Polynom f_A von A und zeige damit, dass A die Eigenwerte $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = 3$ hat.

Lösung:

Bestimme das charakteristische Polynom $f_A = \det(A - \lambda I_4)$ in folgenden Schritten:

- Entwickele nach der vierten Spalte,
- addiere in der erhaltenen 3×3-Determinante die dritte Zeile zur zweiten,
- und subtrahiere dann die zweite Spalte von der dritten.

$$\begin{aligned}
\det\begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 4-\lambda & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 3-\lambda \end{pmatrix} &= (3-\lambda)\det\begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & 1 & 4-\lambda \end{pmatrix} \\
&= (3-\lambda)\det\begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ 0 & 3-\lambda & 3-\lambda \\ 1 & 1 & 4-\lambda \end{pmatrix} \\
&= (3-\lambda)\det\begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

hier können wir nun leicht die Sarrus-Regel anwenden, und erhalten

$$(3-\lambda)\det\begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda)(3-\lambda),$$

also

$$f_A = (2-\lambda)(3-\lambda)^3.$$

Da f_A bereits als Produkt von Linearfaktoren vorliegt, können wir die Eigenwerte von A direkt ablesen, es sind

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 3.$$

(b) Bestimme den Eigenraum E_3 zum Eigenwert 3 von A.

Lösung:

Der Eigenraum E_3 ist der Kern von $A - 3I_4$. Diesen bestimmen wir wie üblich mit dem Gauß-Algorithmus.

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Lösungsmenge hiervon, also der Eigenraum E_3, ist somit

$$E_3 = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

(c) Begründe, dass A diagonalisierbar ist.

Lösung:

Wie in Teil (b) gesehen, hat der Eigenraum E_3 zum Eigenewert 3 die Dimension 3, und der Eigenraum E_2 zum Eigenwert 2 hat mindestens die Dimension 1. Er hat aber auch höchstens die Dimension 1, da

$$\dim E_3 + \dim E_2 \leq \dim \mathbb{R}^4 = 4 \leq \dim E_3 + \dim E_2.$$

Insbesondere folgt

$$\dim E_3 + \dim E_2 = 4 = \dim \mathbb{R}^4,$$

und somit, da die Summe von Eigenräumen verschiedener Eigenwerte direkt ist,

$$E_3 \oplus E_2 = \mathbb{R}^4.$$

Das bedeutet natürlich nichts anderes, als dass eine Vereinigung der Basen von E_3 und E_2 eine Basis von $\mathbb{R}^4$ bildet, also existiert eine Basis aus Eigenvektoren von $\mathbb{R}^4$. Dies bedeutet, nach Definition, dass A diagonalisierbar ist.

(d) Für eine geeignete Basiswechselmatrix T ist

$$D = T^{-1}AT$$

eine Diagonalmatrix. Gib diese Diagonalmatrix D an.

Hinweis: Hierzu ist es nicht notwendig, die Matrix T zu bestimmen.

Lösung:

Da A diagonalisierbar ist, existiert eine Basis $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ aus Eigenvektoren von A, wobei wir annehmen, dass $b_1 \in E_2$ und $b_2, b_3, b_4 \in E_3$ gilt. Bezüglich dieser Basis ist die Darstellungsmatrix von A (genauer: der linearen Abbildung $x \mapsto Ax$) die Diagonalmatrix

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(Bei Umsortierung der Basisvektoren kann sich die Reihenfolge der Eigenwerte auf der Diagonalen ändern.)

Die Musterlösungen von Teil (c) und (d) sind ausführlicher, als es für die Beantwortung dieser Aufgaben verlangt war.

Aufgabe 6 ($10 = 2 + 3 + 5$ Punkte)

(a) Es sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf einem reellen Vektorraum V.

Was bedeutet es, dass das Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *bilinear* ist?

Lösung:

Bilinearität bedeutet, dass für alle $x, y, z \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$, gilt:

$$\begin{aligned} \langle x + y, z \rangle &= \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle \\ \langle x, y + z \rangle &= \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle \\ \langle \lambda x, y \rangle &= \lambda \langle x, y \rangle = \langle x, \lambda y \rangle. \end{aligned}$$

(b) Es sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum und $x \in V$. Wir definieren die Menge

$$U_x = \{y \in V \mid \langle x, y \rangle = 0\}.$$

Zeige, dass U_x ein Untervektorraum von V ist.

Lösung:

Verwende das Untervektorraumkriterium:

(i) Es gilt $\langle x, 0 \rangle = 0$ (wegen der Bilinearität), also ist $0 \in U_x$.

(ii) Für $y_1, y_2 \in U_x$ gilt

$$\langle x, y_1 + y_2 \rangle = \langle x, y_1 \rangle + \langle x, y_2 \rangle = 0 + 0 = 0,$$

also ist $y_1 + y_2 \in U_x$.

(iii) Für $\lambda \in \mathbb{R}$, $y \in U_x$ gilt

$$\langle x, \lambda y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle = \lambda \cdot 0 = 0,$$

also ist $\lambda y \in U_x$.

Somit ist U_x ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$.

Dieser Untervektorraum wird üblicherweise das *orthogonale Komplement* von x in V genannt, und $x^\perp$ geschrieben.

(c) Im $\mathbb{R}^3$ mit dem Standardskalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sind die Basisvektoren

$$c_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \; c_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; c_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Wende das Gram-Schmidt-Verfahren auf diese Vektoren an, um eine Orthonormalbasis b_1, b_2, b_3 des $\mathbb{R}^3$ zu erhalten.

Lösung:

Setze zuerst

$$b_1 = \frac{c_1}{\|c_1\|} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/5 \\ 0 \\ 3/5 \end{pmatrix},$$

wobei $\|c_1\| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$ ist. Im zweiten Schritt setze

$$\tilde{b}_2 = c_2 - \langle c_2, b_1\rangle b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{7}{5}\begin{pmatrix} 4/5 \\ 0 \\ 3/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/25 \\ 0 \\ 4/25 \end{pmatrix}.$$

Es ist $\|\tilde{b}_2\| = \sqrt{\frac{9^2+16^2}{25^2}} = \sqrt{\frac{25}{25^2}} = \frac{1}{5}$, also und somit

$$b_2 = \frac{\tilde{b}_2}{\|\tilde{b}_2\|} = 5\begin{pmatrix} -3/25 \\ 0 \\ 4/25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/5 \\ 0 \\ 4/5 \end{pmatrix}.$$

Im dritten Schritt ist schließlich zunächst

$$\tilde{b}_3 = c_3 - \langle c_3, b_2\rangle b_2 - \langle c_3, b_1\rangle b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{4}{5}\begin{pmatrix} -3/5 \\ 0 \\ 4/5 \end{pmatrix} - \frac{3}{5}\begin{pmatrix} 4/5 \\ 0 \\ 3/5 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12/25 \\ 0 \\ -16/25 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12/25 \\ 0 \\ 9/25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Offensichtlich ist $\|\tilde{b}_3\| = 1$, also

$$b_3 = \tilde{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$