Mathematik I – Lineare Algebra

Vorlesung 10

Wolfgang Globke

DHBW
Duale Hochschule
Baden-Württemberg

7. November 2019

Definition

Eine Menge R mit zwei Verknüpfungen $+ : R \times R \to R$ und $\cdot : R \times R \to R$ wird **Ring** genannt, wenn folgendes gilt:

1. R bildet zusammen mit $+$ eine abelsche Gruppe.
2. Die Verknüpfung $\cdot$ auf R ist assoziativ.
3. Es gelten die Distributivgesetze

   $$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \quad \text{und} \quad (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$$

   für alle $x, y, z \in R$.

Existiert außerdem ein neutrales Element 1 für $\cdot$, so heißt R ein **Ring mit Eins**.

Die Menge

$$R^{\times} = \{x \in R \mid \text{ es gibt } x^{-1} \in R \text{ mit } xx^{-1} = 1 = x^{-1}x\}$$

wird die **Einheitengruppe** von R genannt.

Definition

Ein kommutativer Ring mit Eins $\mathbb{K}$ wird **Körper** genannt, wenn gilt:

$$\mathbb{K}^{\times} = \mathbb{K} \backslash \{0\}.$$

4.4 Matrizen

$m \times n$-Matrizen

Von den linearen Gleichungssystemen kennen wir beliebige $m \times n$-Matrizen (m Zeilen, n Spalten):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{n2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

In diesem Abschnitt wollen wir das algebraische Eigenleben der $m \times n$-Matrizen erforschen.

Die Menge der $m \times n$-Matrizen mit Einträgen aus einem Körper $\mathbb{K}$ wird mit $\mathbb{K}^{m \times n}$ bezeichnet.

Wir können zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{K}^{m\times n}$ koeffizientenweise addieren:

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Die Nullmatrix

$$O = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

ist das neutrale Element der Addition, und das additiv Inverse von $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ ist

$$-A = \begin{pmatrix} -a_{11} & \cdots & -a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{m1} & \cdots & -a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Matrizenmultiplikation

Wir sind bereits mit der Multiplikation von 2×2-Matrizen vertraut:

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}.$$

Allgemein soll bei der Multiplikation AB von Matrizen folgendes geschehen:

- Es sei $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ und $B \in \mathbb{K}^{p \times q}$.
- Jede einzelne Spalte von B soll wie ein Vektor mit der Matrix A multipliziert werden.
- Dazu ist notwendig, dass die Spaltenzahl n von A gleich der Zeilenzahl p von B ist, $n = p$.
- Das Produkt AB hat dann eine Spalte für jede der q Spalten von B und jede Spalte hat soviele Zeilen wie A, also m.

Wir können das Matrizenprodukt $C = AB$ von $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ und $B \in \mathbb{K}^{n \times q}$ bilden. Dann ist $C \in \mathbb{K}^{m \times q}$ und hat Koeffizienten ($1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq q$)

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix} = a_{i1}b_{1j} + \ldots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}.$$

Beispiel: Matrizenmultiplikation

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 5 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \end{pmatrix}$$

Beispiel: Matrizenmultiplikation

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 5 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \end{pmatrix}$$

$$16 = 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 + 3 \cdot 5$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 5 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 9 & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \end{pmatrix}$$

$$9 = 1 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) + 3 \cdot 2$$

Beispiel: Matrizenmultiplikation

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 5 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 9 & 8 & ? \\ ? & ? & ? & ? \end{pmatrix}$$

$$8 = 1 \cdot 3 + (-1) \cdot (-2) + 3 \cdot 1$$

Beispiel: Matrizenmultiplikation

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 5 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 9 & 8 & 8 \\ ? & ? & ? & ? \end{pmatrix}$$

$$8 = 1 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 + 3 \cdot 3$$

Beispiel: Matrizenmultiplikation

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ \color{red}{2} & \color{red}{0} & \color{red}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \color{blue}{1} & 2 & 3 & 0 \\ \color{blue}{0} & -1 & -2 & 1 \\ \color{blue}{5} & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 9 & 8 & 8 \\ \color{green}{22} & ? & ? & ? \end{pmatrix}$$

$$\color{green}{22} = \color{red}{2} \cdot \color{blue}{1} + \color{red}{0} \cdot \color{blue}{0} + \color{red}{4} \cdot \color{blue}{5}$$

Beispiel: Matrizenmultiplikation

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 5 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 9 & 8 & 8 \\ 22 & 12 & ? & ? \end{pmatrix}$$

$$12 = 2 \cdot 2 + 0 \cdot (-1) + 4 \cdot 2$$

Beispiel: Matrizenmultiplikation

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 5 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 9 & 8 & 8 \\ 22 & 12 & 10 & ? \end{pmatrix}$$

$$10 = 2 \cdot 3 + 0 \cdot (-2) + 4 \cdot 1$$

Beispiel: Matrizenmultiplikation

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ \color{red}{2} & \color{red}{0} & \color{red}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \color{blue}{0} \\ 0 & -1 & -2 & \color{blue}{1} \\ 5 & 2 & 1 & \color{blue}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 9 & 8 & 8 \\ 22 & 12 & 10 & \color{green}{12} \end{pmatrix}$$

$$\color{green}{12} = \color{red}{2} \cdot \color{blue}{0} + \color{red}{0} \cdot \color{blue}{1} + \color{red}{4} \cdot \color{blue}{3}$$

Aufgabe (5 Minuten)
Berechne die Matrizenprodukte

1. $$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

2. $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

3. $$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Matrizenmultiplikation ist assoziativ, d.h. für alle $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{K}^{n\times q}$, $C \in \mathbb{K}^{q\times r}$ gilt

$$A(BC) = (AB)C \quad \in \mathbb{K}^{m\times r}.$$

Es gelten die Distributivgesetze

$$(A+B)C = AC + BC \quad \text{für } A, B \in \mathbb{K}^{m\times n}, C \in \mathbb{K}^{n\times q}$$

und

$$A(B+C) = AB + AC \quad \text{für } A \in \mathbb{K}^{m\times n}, B, C \in \mathbb{K}^{n\times q}.$$

Beweis des zweiten Distributivgesetzes:
Ist $D = A(B+C)$ und $E = AB + AC$, so ist

$$\begin{aligned} d_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(b_{kj} + c_{kj}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} (a_{ik}b_{kj} + a_{ik}c_{kj}) \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\right) + \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}c_{kj}\right) = e_{ij}. \end{aligned}$$

Ein Vektor $x \in \mathbb{K}^n$ kann als $n \times 1$-Matrix $x \in \mathbb{K}^{n\times 1}$ aufgefasst werden.

Ein lineares Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m. \end{aligned}$$

ist also nichts anderes, als die Gleichung $Ax = b$,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Ist

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{m\times n},$$

so ist die transponierte Matrix

$$A^\top = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n\times m}$$

Es gilt:

- $A^\top + B^\top = (A+B)^\top$.
- $(AB)^\top = B^\top A^\top$.
- $(A^{-1})^\top = (A^\top)^{-1}$ falls $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ invertierbar ist.

Quadratische Matrizen

Ring der quadratischen Matrizen

Eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ heißt quadratische Matrix.

Das Produkt zweier quadratische Matrizen $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ ist erneut eine quadratische Matrix $AB \in \mathbb{K}^{n\times n}$.

Satz 4.6

Die Menge $\mathbb{K}^{n\times n}$ mit der komponentenweisen Addition und der Matrizenmultiplikation ist ein Ring mit Eins.

Beweis

- Die Addition ist assoziativ und kommutativ, da sie es in den einzelnen Komponenten ist.
- Wir haben gesehen, dass $O \in \mathbb{K}^{n\times n}$ das neutrale Element für $+$ ist, und die Matrix $-A$ das additiv Inverse zu $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$.

  Also bildet $\mathbb{K}^{n\times n}$ mit $+$ eine abelsche Gruppe.
- Wir haben bereits festgestellt, dass die Multiplikation assoziativ ist und mit $+$ die Distributivgesetze erfüllt.
- Das neutrale Element für die Multiplikation ist die $n \times n$-Einheitsmatrix

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}.$$

Somit ist $\mathbb{K}^{n\times n}$ ein Ring mit Eins. $\square$

$\mathbb{K}^{n\times n}$ ist *kein* kommutativer Ring, denn z.B.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ heißt invertierbar, wenn es eine Matrix $A^{-1} \in \mathbb{K}^{n\times n}$ gibt, so dass gilt:

$$AA^{-1} = I_n = A^{-1}A.$$

Nicht jede Matrix ist invertierbar. Hätte z.B.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ein Inverses A^{-1}, so gälte

$$e_1 = I_2 e_1 = A^{-1}Ae_1 = A^{-1} \cdot 0 = 0,$$

ein Widerspruch.

Die Einheitengruppe von $\mathbb{K}^{n\times n}$ ist die schon bekannte Gruppe

$$(\mathbb{K}^{n\times n})^\times = \mathbf{GL}(n, \mathbb{K})$$

der invertierbaren $n \times n$-Matrizen.

Wie bestimmt man, ob eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ invertierbar ist?

- Wir wollen festellen ob eine Matrix $X \in \mathbb{K}^{n \times n}$ mit

$$AX = I_n$$

existiert.

- Sind $x_1, x_2, \ldots, x_n$ die Spalten von X, so gilt bei spaltenweiser Betrachtung der obigen Gleichung

$$AX = A(x_1|x_2|\cdots|x_n) = (Ax_1|Ax_2|\cdots|Ax_n) = (e_1|e_2|\cdots|e_n) = I_n,$$

wobei $e_1, e_2, \ldots, e_n$ die Spalten der Einheitsmatrix (Einheitsvektoren) sind.

- Wir haben also n simultane lineare Gleichungssysteme

$$Ax_1 = e_1, \quad Ax_2 = e_2, \quad \ldots, \quad Ax_n = e_n$$

zu lösen, um X zu bestimmen.

- Beobachtung:
  - Bei diesen LGSen unterscheiden sich nur die rechten Seiten.
  - Für die gewählten Umformungsschritte im Gauß-Algorithmus ist aber nur die linke Seite relevant.
  - Wir können also für jedes LGS die gleiche Folge von Operationen anwenden (d.h. alle LGSe simultan lösen).
  - Ein Inverses existiert genau dann, wenn alle LGSe lösbar sind (dann sind die Lösungen eindeutig und liefern die Spalten von X).

Aufgabe (10 Minuten)
Bestimme das Inverse der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Schreibe dazu die simultanen LGSe in der Form

$$(A|I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

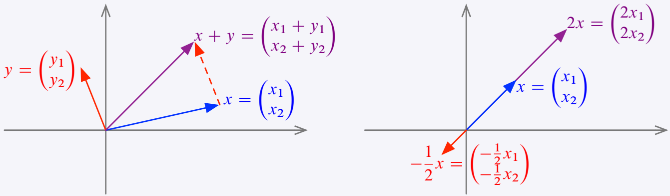
Nachlesen

Beutelspacher, Lineare Algebra
Abschnitte 9.1, 6.1, 6.2, 2.1, 2.2

5 Vektorräume und lineare Abbildungen

5.1 Vektorräume

Wir haben bereits in der Ebene $\mathbb{R}^2$ gesehen, dass wir Vektoren addieren und mit Skalaren multiplizieren können.



Zwei naheliegende Verallgemeinerungen:

1. Ersetze den Skalarkörper $\mathbb{R}$ durch einen beliebigen Körper $\mathbb{K}$.
2. Betrachte n-dimensionale Vektoren für beliebiges $n \in \mathbb{N}$.

Die Verallgemeinerung führt zum n-dimensionalen Standardraum $\mathbb{K}^n$ über dem Körper $\mathbb{K}$.

Analog zu $\mathbb{R}^2$ können wir hier Vektoren addieren und mit Skalaren aus $\mathbb{K}$ multiplizieren.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}, \qquad \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}, \ \lambda \in \mathbb{K}.$$

Die Rechenregeln von $\mathbb{R}^2$ übertragen sich entsprechend auf $\mathbb{K}^n$.

Es gibt allerdings auch Mengen, die ähnliche Rechenregeln zulassen, ohne im Entferntesten wie $\mathbb{K}^n$ auszusehen … auf den ersten Blick.

Es sei V die Menge der periodischen Funktionen auf dem Intervall $[0, 2]$.

Es sei V die Menge der periodischen Funktionen auf dem Intervall $[0, 2]$.
Wir können $f, g \in V$ punktweise addieren und mit Skalaren in $\mathbb{R}$ multiplizieren:

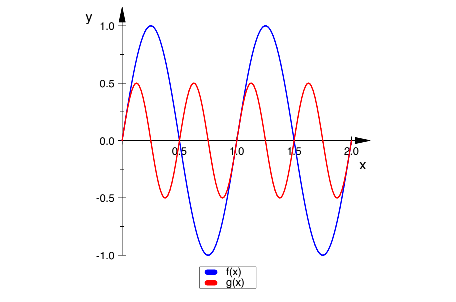
$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \qquad (\lambda f)(x) = \lambda f(x).$$

Das Ergebnis ist wieder eine periodische Funktion in V.

Es sei V die Menge der periodischen Funktionen auf dem Intervall $[0, 2]$.
Wir können $f, g \in V$ punktweise addieren und mit Skalaren in $\mathbb{R}$ multiplizieren:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \qquad (\lambda f)(x) = \lambda f(x).$$

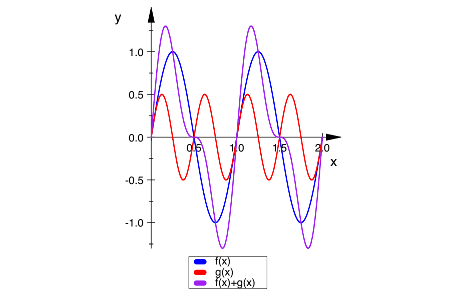
Das Ergebnis ist wieder eine periodische Funktion in V.



Es sei V die Menge der periodischen Funktionen auf dem Intervall $[0, 2]$.
Wir können $f, g \in V$ punktweise addieren und mit Skalaren in $\mathbb{R}$ multiplizieren:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \qquad (\lambda f)(x) = \lambda f(x).$$

Das Ergebnis ist wieder eine periodische Funktion in V.

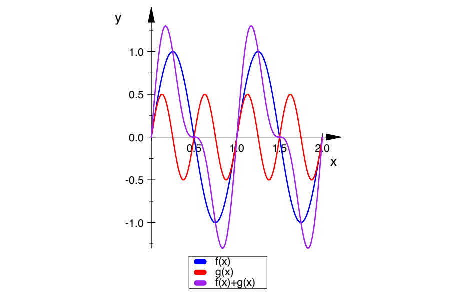


Beispiel: Periodische Funktionen

Es sei V die Menge der periodischen Funktionen auf dem Intervall $[0, 2]$.
Wir können $f, g \in V$ punktweise addieren und mit Skalaren in $\mathbb{R}$ multiplizieren:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \qquad (\lambda f)(x) = \lambda f(x).$$

Das Ergebnis ist wieder eine periodische Funktion in V.



In der Signalverarbeitung ist zu beobachten, dass Signale sich additiv überlagern (Superpositionsprinzip).

Wir verallgemeinern den Standardraum $\mathbb{K}^n$ daher noch weiter:

Definition
Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Eine Menge V mit einer Addition $+ : V \times V \to V$ und einer Skalarmultiplikation $\cdot : \mathbb{K} \times V \to V$ heißt $\mathbb{K}$-Vektorraum (oder Vektorraum über $\mathbb{K}$), wenn sie die folgenden Eigenschaften hat:

V1 Mit der Addition $+$ bildet V eine abelsche Gruppe.

V2 Für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ und $x, y \in V$ gilt:

(a) $1 \cdot x = x$.
(b) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$.
(c) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$.
(d) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$.

Das neutrale Element $0 = 0_V \in V$ für die Addition wird als Nullvektor bezeichnet.

Beispiel 1: Der Standardraum

Wir haben den Standardraum $\mathbb{K}^n$ bereits kennengelernt.
Die Vektorraumaxiome V1 und V2 erfüllt $\mathbb{K}^n$, da die entsprechenden Eigenschaften komponentenweise im Körper $\mathbb{K}$ gelten.

Als Spezialfall erhalten wir, dass der Körper $\mathbb{K}$ als eindimensionaler Vektorraum $\mathbb{K}^1$ über sich selbst aufgefasst werden kann.

Beispiel 2: Polynome

Der Ring der Polynome $\mathbb{K}[x]$ mit Koeffizienten aus $\mathbb{K}$ kann als $\mathbb{K}$-Vektorraum aufgefasst werden.

- **V1** gilt bereits, da $\mathbb{K}[x]$ ein Ring ist.
- **V2** folgt auch aus den Ringeigenschaften, wenn wir die Polynommultiplikation auf konstante Polynome vom Grad 0 (also $\mathbb{K}$) einschränken.

Beispiel 3: Unendliche Folgen

Anstelle der endlichen Tupel in $\mathbb{K}^n$ kann man unendliche Folgen $x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}} = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$ betrachten.

Es bezeichne $\mathbb{K}^\infty$ die Menge aller unendlichen Folgen mit Einträgen aus $\mathbb{K}$. Mit komponentenweise Addition und Skalarmultiplikation ist $\mathbb{K}^\infty$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum (analog zu $\mathbb{K}^n$).

Beispiele 4: Matrizen

Der Ring der Matrizen $\mathbb{K}^{m\times n}$ ist ein Vektorraum, mal wieder mit komponentenweisen Addition und Skalarmultiplikation.

Wir können sogar $\mathbb{K}^{m\times n}$ und den Standardraum $\mathbb{K}^{mn}$ miteinander identifizieren:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \\ \vdots \\ a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Es sei X eine Menge und

$$V = \{f : X \to \mathbb{K}\}$$

die Menge der Abbildungen von X nach $\mathbb{K}$.
Wir können Addition und Skalarmultiplikation in V definieren durch

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

mit $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in X$ und $f, g \in V$.
Damit ist V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.

Beispiel 6: Lösungsmengen

Es sei ein homogenes LGS $Ax = 0$ gegeben für $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ mit Lösungsmenge $\mathcal{L} \subset \mathbb{K}^n$.

Dann ist $\mathcal{L}$ ein Vektorraum mit der Addition und Skalarmultiplikation von $\mathbb{K}^n$.
Zu zeigen ist nur für alle $\lambda \in \mathbb{K}$ und $x, y \in \mathcal{L}$:

- $x + y \in \mathcal{L}$:
  $A(x + y) = Ax + Ay = 0 + 0 = 0.$
- $\lambda x \in \mathcal{L}$:
  $A(\lambda x) = \lambda(Ax) = \lambda 0 = 0.$