Mathematik I – Lineare Algebra

Vorlesung 17

Wolfgang Globke

Duale Hochschule
Baden-Württemberg

4. Dezember 2019

Erinnerung

Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Untervektorräumen U und W.

1. Der Durchschnitt
$$U \cap W$$
ebenfalls ein Untervektorraum von V.
2. Die Summe $U + W = \operatorname{span}(U \cup W)$ ist ebenfalls ein Untervektorraum von V.
3. Die Summe $U + W$ ist direkt, falls $U \cap W = \{0\}$.
Wir schreiben dann $U \oplus W$.

Erinnerung

Wir betrachten nun ausschließlich lineare Abbildungen $\Phi : V \to V$ von einem Vektorraum V in sich selbst.

Existieren ein $\lambda \in \mathbb{K}$ und ein $v \in V$, $v \neq 0$, mit der Eigenschaft

$$\Phi(v) = \lambda v,$$

so heißt λ ein Eigenwert von Φ mit zugehörigem Eigenvektor v.

Und auf matrizisch:

Es sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$.
Existieren ein $\lambda \in \mathbb{K}$ und ein $x \in \mathbb{K}^n$, $x \neq 0$, mit der Eigenschaft

$$Ax = \lambda x,$$

so heißt λ ein Eigenwert von A mit zugehörigem Eigenvektor x.

Der Eigenraum E_λ von A (analog für Φ) zum Eigenwert λ ist

$$\begin{aligned} E_\lambda &= \{x \in \mathbb{K}^n \mid Ax = \lambda x\} \\ &= \ker(A - \lambda I_n). \end{aligned}$$

Wenn wir einen Eigenwert λ von A kennen, können wir somit (eine Basis von) E_λ bestimmen, indem wir das homogene LGS mit Matrix $A - \lambda I_n$ lösen.

Um die Eigenwerte von A zu ermitteln, berechnen wir zuerst das charakteristische Polynom

$$f_A = \det(A - \lambda I_n),$$

wobei λ hier als Variable aufgefasst wird. Die Eigenwerte von A sind dann die Nullstellen von f_A.

9.3 Exkurs: Nullstellen von Polynomen

Die Polynome mit Koeffizienten im Körper $\mathbb{K}$ bilden einen Ring $\mathbb{K}[x]$, dessen algebraische Eigenschaften denen des Rings $\mathbb{Z}$ nicht unähnlich sind.
Insbesondere können wir auch in $\mathbb{K}[x]$ Division mit Rest durchführen:

Hilfssatz 9.7
Es seien $f, g \in \mathbb{K}[x]$. Ist $g \neq 0$, so existieren eindeutige Polynome $q, r \in \mathbb{K}[x]$ mit

$$f = qg + r$$

wobei $\deg(r) < \deg(g)$.

Beweisskizze:
Existenz von q und r:

- Verwende Induktion über $n = \deg(f)$.
  Ist $m = \deg(g) > n$, so wähle $q = 0$, $r = f$. Nehme also nun $m \leq n$ an.
- Ist $f = a_n x^n + \ldots$, $g = b_m x^m + \ldots$, so bilde $h = f - \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} g$ vom Grad $< n$.
- Nach Induktionsannahme ist $h = q'g + r'$ mit $\deg(r') < \deg(g)$, also $f = q'g + r' + \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} g = qg + r$ mit $q = q' + \frac{a_n}{b_m} x^{n-m}$ und $r = r'$.

Eindeutigkeit von q und r:

- Angenommen, $f = qg + r = q'g + r'$ mit $\deg(r), \deg(r') < \deg(g)$.
- Dann: $r - r' = (q - q')g$ hat Grad $< m$, aber die rechte Seite ist Vielfaches von g und somit $= 0$. Also $r = r'$ und somit auch $q = q'$. □

Es seien $n \geq m$, $a_n, b_m \neq 0$,

$$\begin{aligned} f &= a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0, \\ g &= b_m x^m + \ldots + b_1 x + b_0. \end{aligned}$$

Algorithmus (Polynomdivision mit Rest)
Eingabe: $f, g \in \mathbb{K}[x]$.
Lokale Variablen: $n, m, f_1, q_1, q, r \in \mathbb{K}[x]$.

- Initalisiere $f_1 := f$, $q_1 := 0$, $q := 0$, $r := f$, $n := \deg(f)$, $m := \deg(g)$.
- Solange $\deg(f_1) \geq m$, setze

$$\begin{aligned} q_1 &:= \frac{a_n}{b_m} x^{n-m}, \\ f_1 &:= f_1 - q_1 g, \\ q &:= q + q_1, \\ n &:= \deg(f_1). \end{aligned}$$

  (Hierbei bezeichnen a_n die jeweils aktuellen Koeffizienten von f_1).
- Die Schleife bricht ab, wenn $\deg(f_1) < \deg(g)$ erfüllt wird. Setze nun $r := f_1$.
  (Da der Grad von f_1 in jedem Schritt kleiner wird, passiert dies irgendwann.)
- Nach Ende der Schleife sind q und r die gesuchten Polynome.

Hilfssatz 9.8

Es sei λ eine Nullstelle des Polynoms $f \in \mathbb{K}[x]$. Dann gibt es ein Polynom $q \in \mathbb{K}[x]$ mit

$$f = q \cdot (x - \lambda).$$

Wir nennen $x - \lambda$ einen Linearfaktor von f.

Beweis:
Polynomdivision durch $x - \lambda$ liefert $f = q(x-\lambda) + r$ mit $\deg(r) < \deg(x - \lambda) = 1$, also ist r konstant. Einsetzen von λ liefert

$$0 = f(\lambda) = q(\lambda)(\lambda - \lambda) + r = r. \quad \square$$

Satz 9.9

Ein Polynom $f \in \mathbb{K}[x]$ vom Grad $\deg(f) = n \geq 0$ hat höchstens n Nullstellen im Körper $\mathbb{K}$.

Beweis: Induktion über n.

- Induktionsanfang $n = 0$: Hier ist f konstant und $\neq 0$, hat also keine Nullstelle.
- Induktionsvoraussetzung: Die Behauptung gelte für Polynome vom Grad $\deg(q) < n$.
- Induktionsschritt $n - 1 \rightsquigarrow n$: Hat f mindestens eine Nullstelle λ, so ist in Hilfssatz 9.8 $\deg(q) = n - 1 < n$, also nach I.V. hat q höchstens $n - 1$ Nullstellen.
  Diese sind aber auch Nullstellen von f, und umgekehrt muss jede Nullstelle von f, außer λ, Nullstelle von q ein.
  Also: f hat höchstens $(n-1) + 1 = n$ Nullstellen. $\square$

Einer der Gründe, warum die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ etwas ganz besonderes sind:

Fundamentalsatz der Algebra
Es sei $f \in \mathbb{C}[x]$ *und* $\deg(f) > 0$. *Dann hat* f *eine Nullstelle in* $\mathbb{C}$.

Anders ausgedrückt:
Jedes $f \in \mathbb{C}[x]$ *vom Grad* $\deg(f) = n > 0$ *zerfällt in* n *Linearfaktoren,*

$$f = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \cdots (x - \lambda_n),$$

wobei die Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ *nicht zwingend verschieden sein müssen.*

Beobachtung
Da $\mathbb{Q} \subset \mathbb{C}$ bzw. $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, können wir Polynome $f \in \mathbb{Q}[x]$ oder $f \in \mathbb{R}[x]$ als Polynome $f \in \mathbb{C}[x]$ auffassen. *Das bedeutet, dass jedes rationale oder reelle Polynom* n *Nullstellen in* $\mathbb{C}$ *hat, auch wenn es nicht unbedingt soviele (oder überhaupt irgendwelche) Nullstellen in* $\mathbb{Q}$ *bzw.* $\mathbb{R}$ *hat!*

Beispiele

1. Das Polynom $f = x^2 + 1 \in \mathbb{R}[x]$ hat keine reellen Nullstellen. Es gilt aber $f(\mathrm{i}) = \mathrm{i}^2 + 1 = -1 + 1 = 0$ und $f(-\mathrm{i}) = (-\mathrm{i})^2 + 1 = -1 + 1 = 0$.
2. Das charakteristische Polynom einer Rotationsmatrix R_α ist

$$\begin{aligned} f &= \det\begin{pmatrix} \cos(\alpha) - \lambda & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) - \lambda \end{pmatrix} = (\cos(\alpha) - \lambda)^2 + \sin(\alpha)^2 \\ &= \cos(\alpha)^2 - 2\lambda\cos(\alpha) + \lambda^2 + \sin(\alpha)^2 \\ &= \lambda^2 - 2\lambda\cos(\alpha) + 1. \end{aligned}$$

   Auflösen von $f(\lambda) = 0$ nach λ liefert die komplexen Nullstellen

$$\lambda_1 = \cos(\alpha) + \mathrm{i}\sin(\alpha), \quad \lambda_2 = \cos(\alpha) - \mathrm{i}\sin(\alpha).$$

   Diese Nullstellen sind genau dann reell, wenn $\alpha \in \mathbb{Z}\pi$ ist.
3. Aufgabe (5 Minuten)
   Bestimme die Nullstellen von $f = x^3 - 2x^2 + x - 2$.
   Hinweis: Eine Nullstelle raten und dann Polynomdivision anwenden.

9.4 Eigenraumzerlegung

Es seien λ und μ zwei verschiedene Eigenwerte von $\Phi : V \to V$ mit jeweiligen Eigenräumen E_λ und E_μ.
Es gilt offenbar

$$E_\lambda \cap E_\mu = \{0\},$$

insbesondere sind Eigenvektoren v_λ, v_μ zu verschiedenen Eigenwerten linear unabhängig.
Allgemeiner:

Hilfssatz 9.10
Sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ verschiedene Eigenwerte von $\Phi : V \to V$, so sind zugehörige Eigenvektoren $v_1, \ldots, v_k$ (mit $v_j \in E_{\lambda_j}$) linear unabhängig.

Beweis: Induktion über die Anzahl k der verschiedenen Eigenwerte.

- Induktionsanfang $k = 1$: Nach Definition ist $v_1 \neq 0$, und somit gilt die Behauptung.
- Induktionsvoraussetzung: Die Behauptung gilt für bis zu $k - 1$ verschiedene Eigenwerte.
- Induktionsschritt $k - 1 \rightsquigarrow k$: Angenommen, $0 = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k$ mit $\alpha_i \in \mathbb{K}$.
  Dann

  $$\begin{aligned} 0 &= \Phi(0) - \lambda_1 \cdot 0 = \alpha_1 \lambda_1 v_1 + \ldots + \alpha_k \lambda_k v_k - (\alpha_1 \lambda_1 v_1 + \ldots + \alpha_k \lambda_1 v_k) \\ &= 0 \cdot v_1 + \alpha_2 (\lambda_2 - \lambda_1) v_2 \ldots + \alpha_k (\lambda_k - \lambda_1) v_k . \end{aligned}$$

  Nach Induktionsvoraussetzung sind alle $\alpha_i (\lambda_i - \lambda_1) = 0$, und da die Eigenwerte verschieden sind, sind alle $\alpha_i = 0$, für $i > 1$.
  Aber dann ist $0 = \alpha_1 v_1$, also sind $v_1, \ldots, v_k$ sind linear unabhängig. $\square$

Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, $\dim V < \infty$, und $\Phi : V \to V$ linear.

- Es seien $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ die verschiedenen Eigenwerte von $\Phi : V \to V$,
- mit zugehörigen Eigenräumen $E_{\lambda_1}, E_{\lambda_2}, \ldots, E_{\lambda_k}$.
- Weiter seien $B_1, B_2, \ldots, B_k$ Basen dieser Eigenräume.

Nach Hilfssatz 9.10 bildet

$$B' = B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_k$$

eine Basis des Untervektorraums

$$U = E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \ldots \oplus E_{\lambda_k}$$

von V. Dann ist B' linear unabhängig in V. Ergänze B' durch linear unabhängige Vektoren $w_1, \ldots, w_q$ zu einer Basis B von V. Schreiben wir $W = \operatorname{span}(w_1, \ldots, w_q)$, so folgt nun:

Satz 9.11

Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum endlicher Dimension, und $\Phi : V \to V$ linear mit verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$. Dann existiert ein Untervektorraum W von V, so dass gilt

$$V = E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \ldots \oplus E_{\lambda_k} \oplus W.$$

Satz 9.11

Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum endlicher Dimension, und $\Phi : V \to V$ linear mit verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$. Dann existiert ein Untervektorraum W von V, so dass gilt

$$V = E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \ldots \oplus E_{\lambda_k} \oplus W.$$

Folgerung 9.12

In der Situation von Satz 9.11 hat Φ die Darstellungsmatrix

$$\varrho_B^B(\Phi) = \left(\begin{array}{cccc|c} \lambda_1 I_{d_1} & & & 0 & * \\ & \lambda_2 I_{d_2} & & & * \\ & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & \lambda_k I_{d_k} & * \\ \hline 0 & \cdots & \cdots & 0 & A' \end{array}\right),$$

für die Basis

$$B = B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_k \cup C.$$

wobei C eine Basis von W ist und $A' \in \mathbb{K}^{d \times d}$, $d = \dim W$.

Bemerkung

Die Darstellung in Folgerung 9.12 lässt sich noch sehr viel präziser ausarbeiten, aber dies wäre hier mit einem völlig unangemessenen Aufwand verbunden.

Exponenten im charakteristischen Polynom

Das charakteristische Polynom von Φ (bzw. A) schreiben wir

$$f_\Phi = (\lambda_1 - \lambda)^{\varepsilon(\lambda_1)}(\lambda_2 - \lambda)^{\varepsilon(\lambda_2)} \cdots (\lambda_k - \lambda)^{\varepsilon(\lambda_k)} \cdot h,$$

wobei das Faktor h sich nicht weiter in Linearfaktoren über $\mathbb{K}$ zerlegen lässt.

Aus der Matrixdarstellung

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \lambda_1 I_{d_1} & & & 0 & * \\ & \lambda_2 I_{d_2} & & & * \\ & & \ddots & & * \\ 0 & & & \lambda_k I_{d_k} & * \\ \hline 0 & \cdots & \cdots & 0 & A' \end{array}\right),$$

ergibt sich für $j = 1, \ldots, k$

$$1 \leq d_j \leq \varepsilon(\lambda_j),$$

da beim Berechnen der Determinante jeder Diagonaleintrag $\lambda_j - \lambda$ einen Linearfaktor zu f_Φ beiträgt.

Folgerung 9.13

Ist λ_j ein Eigenwert von Φ (bzw. A), so gilt $1 \leq \dim E_{\lambda_j} \leq \varepsilon(\lambda_j)$, wobei $\varepsilon(\lambda_j)$ der Exponent des Linearfaktors von $\lambda_j - \lambda$ im charakteristischen Polynom f_Φ ist.

Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum endlicher Dimension.

Definition

Eine lineare Abbildung $\Phi : V \to V$ heißt diagonalisierbar,
wenn eine Basis B von V aus Eigenvektoren von Φ existiert.

Definition

Eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ heißt diagonalisierbar,
wenn eine Basis B von $\mathbb{K}^n$ aus Eigenvektoren von A existiert.

Hilfssatz 9.14

$\Phi : V \to V$ ist genau dann diagonalisierbar, wenn eine (und damit alle) seiner Darstellungsmatrizen diagonalisierbar sind.

Beweis:

$\Rightarrow$ Ist $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ eine Basis aus Eigenvektoren von Φ, so ist $\varrho_B(B) = \{e_1, \ldots, e_n\}$ eine Basis aus Eigenvektoren von $A = \varrho_B^B(\Phi)$:

$$Ae_i = \varrho_B^B(\Phi)\varrho_B(b_i) = \varrho_B(\Phi(b_i)) = \varrho_B(\lambda_i b_i) = \lambda_i \varrho_B(b_i) = \lambda_i e_i .$$

Ist B' eine beliebige Basis von V, so ist $\{T_{B'}^B e_1, \ldots, T_{B'}^B e_n\}$ eine Basis aus Eigenvektoren von $\varrho_{B'}^{B'}(\Phi)$ (direkt nachrechnen).

$\Leftarrow$ Ist B eine beliebige Basis von V und $A = \varrho_B^B(\Phi)$, und $C = \{c_1, \ldots, c_n\} \subset \mathbb{K}^n$ eine Basis aus Eigenvektoren von A, so ist $\varrho_B^{-1}(C)$ eine Basis aus Eigenvektoren von Φ. $\square$

Aufgabe (10 Minuten)
Es sei

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Bestimme die Eigenwerte von A.
2. Prüfe, ob A diagonalisierbar ist.

Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, $n = \dim V < \infty$, und $\Phi : V \to V$ linear.

Satz 9.15

Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

1. *Φ ist diagonalisierbar.*
2. *Es gibt eine Basis B von V, so dass $\varrho_B^B(\Phi)$ eine Diagonalmatrix ist.*
3. *Das charakteristische Polynom ist ein Produkt von Linearfaktoren und außerdem ist $\dim E_{\lambda_i} = \varepsilon(\lambda_i)$ für $i = 1, \ldots, k$.*
4. *Sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ die verschiedenen Eigenwerte von Φ, so gilt*

$$V = E_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus E_{\lambda_k}.$$

Ein entsprechender Satz gilt für Matrizen $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$.

Beweisskizze:
(1)$\Leftrightarrow$(2): Ergibt sich sofort aus Folgerung 9.12.
(1)$\Leftrightarrow$(4): Für die Richtung $\Leftarrow$ vereinige die Basen der E_{λ_i} zu einer Basis von V. Die Richtung $\Rightarrow$ ergibt sich sofort aus Satz 9.11 und dem Dimensionssatz für Untervektorräume.
(2)$\Rightarrow$(3): Ist D eine Diagonalmatrix, die Φ darstellt, so ist das charakteristische Polynom $f_\Phi = f_D$. Aber offensichtlich $f_D = (\lambda_1 - \lambda)^{\varepsilon(\lambda_1)} \cdots (\lambda_k - \lambda)^{\varepsilon(\lambda_k)}$ mit $\varepsilon(\lambda_j) = \dim E_{\lambda_j}$.
(3)$\Rightarrow$(4): Da $\deg f_\Phi = n = \dim V$ gilt, und nach Annahme $n = \varepsilon(\lambda_1) + \ldots + \varepsilon(\lambda_k)$, folgt (4) aus Satz 9.11 und dem Dimensionssatz für Unterräume. $\square$

Folgerung 9.16
Ist das charakteristische Polynom $f_\Phi = (\lambda_1 - \lambda) \cdots (\lambda_n - \lambda)$ *mit paarweise verschiedenen* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$*, so ist* Φ *diagonalisierbar.*

Bemerkung
Nicht jede Matrix A ist diagonalisierbar, selbst wenn das charakteristische Polynom f_A in Linearfaktoren zerfällt (was es z.B. über $\mathbb{C}$ ja immer tut)...

Beispiele

1. Die Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$
hat das charakteristische Polynom $f_A = \lambda^2 + 1$, also keine Nullstellen in $\mathbb{R}$ aber über $\mathbb{C}$ hat f_A die Nullstellen i und $-\mathrm{i}$. Da $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, können wir A auch als Matrix in $\mathbb{C}^{2\times 2}$ auffassen, und tatsächlich ist A über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar:
$$\begin{pmatrix} \mathrm{i} & -\mathrm{i} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{\mathrm{i}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{\mathrm{i}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

2. Die Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$$
hat das charakteristische Polynom $f_A = (2 - \lambda)^2$ aber $E_2 = \operatorname{span}(e_1)$ hat Dimension 1. Diese Matrix ist selbst über $\mathbb{C}$ nicht diagonalisierbar.

Nicht jede Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ ist diagonalisierbar.

Wenn das charakteristische Polynom f_A in Linearfaktoren zerfällt, ist A aber zumindest trigonalisierbar, d.h. durch einen geeigneten Basiswechsel kann A in eine (obere/untere) Dreiecksmatrix umgeformt werden:

$$TAT^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & * \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Für komplexe Matrizen geht dies immer, da nach dem Fundamentalsatz der Algebra ihr charakteristisches Polynom in Linearfaktoren zerfällt.

Diese Aussage kann noch wesentlich verstärkt werden, indem man ein ganz spezielle Dreicksform wählt. Dies ist die sogenannte Jordansche Normalform.
Diese Form erlaubt eine vollständige Klassifikation („bis auf Koordinatenwechsel") der linearen Abbildungen endlich-dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorräume (und mit etwas mehr Arbeit auch über $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$).

Nachlesen

Beutelspacher, Lineare Algebra
Abschnitte 6.1, 6.3, 8.1, 8.2, 8.3