

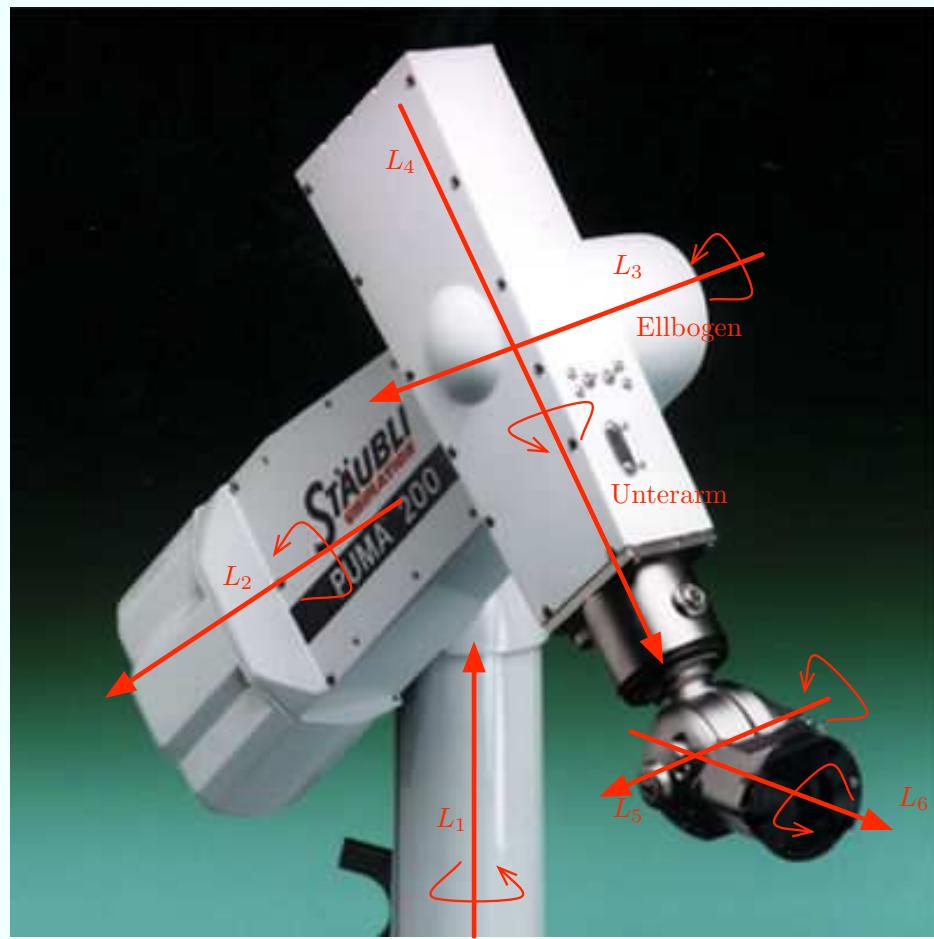
Kinematik des Puma 200

Inhaltsverzeichnis

| | |
|------------------------------------|----|
| 1 Einführung | 3 |
| 2 Denavit-Hartenberg-Konfiguration | 5 |
| 3 Mehrdeutigkeiten | 7 |
| 4 Direkte Kinematik | 10 |
| 5 Inverse Kinematik | 13 |
| 6 Orientierung des Greifers | 16 |
| Literatur | 18 |
| Index | 19 |

1 Einführung

Der Puma 200 ist ein Roboterarm mit sechs Gelenken, von denen die ersten drei dazu dienen, das Werkzeug (in unserem Falle ein „Greifer“) an eine vorgeschriebene Position im Raum zu bewegen, und die letzten drei dazu, die Orientierung des Werkzeugs festzulegen. Die Gelenkachsen bezeichnen wir mit L_1, \dots, L_6 .



Im Folgenden werden kleine, fette Buchstaben verwendet, um Vektoren und Punkte $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ zu beschreiben. Mit großen Buchstaben werden Matrizen für affine Transformationen der Form

$$\mathbf{y} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}, \quad A \in \text{SO}_3(\mathbb{R}),$$

beschrieben. Beim Rechnen ist es in der Regel günstiger, diese Transformationen in **erweiterten Koordinaten** darzustellen, die wir durch hohle Buchstaben kennzeichnen. Die Gleichung $\mathbf{y} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$ schreibt sich so als

$$\mathbf{y} = \mathbb{A}\mathbf{x}$$

mit

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ 1 \end{bmatrix} \text{ und } \mathbb{A} = \begin{bmatrix} A & \mathbf{b} \\ \mathbf{0}^\top & 1 \end{bmatrix}.$$

Für die Kinematik benötigen wir in jedem Gelenk ein **lokales Koordinatensystem** der Form

$$\text{KS} = (\mathbf{o}; \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}),$$

wobei \mathbf{o} der Ursprung des Koordinatensystems ist und die Vektoren \mathbf{x} , \mathbf{y} und \mathbf{z} die normierten, paarweise orthogonalen Richtungsvektoren entlang der entsprechenden Koordinatenachsen sind. Wir setzen dabei voraus, dass alle vorkommenden Koordinatensysteme rechtshändig sind, d.h. $\det(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) > 0$.

Das **Vektorprodukt** zweier Vektoren \mathbf{x} und \mathbf{y} ist durch

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{bmatrix}$$

definiert. Es gilt stets $\mathbf{x} \times \mathbf{y} = -\mathbf{y} \times \mathbf{x}$ und $(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \perp \text{span}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

Wir werden anstelle der Funktion \arctan im Folgenden die Funktion **atan**¹⁾ verwenden:

$$\text{atan}(y, x) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & x > 0, y \in \mathbb{R} \\ \pi - \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & x < 0, y > 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi & x < 0, y \leq 0 \\ \text{sign}(y) \cdot \frac{\pi}{2} & x = 0, y \neq 0 \end{cases}$$

Die Funktion atan hat gegenüber \arctan den Vorteil, dass sie den Wert $\frac{y}{x}$ in das Intervall $[-\pi, \pi]$ und nicht in $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ abbildet. So wird jedem Paar $(y, x) \neq (0, 0)$ eindeutig ein Winkel zugeordnet.

¹⁾Diese Funktion ist in der Programmiersprache C durch **atan2** realisiert.

2 Denavit-Hartenberg-Konfiguration

Die **Denavit-Hartenberg-Konfiguration** legt fest, in welcher Weise die lokalen Koordinatensysteme der einzelnen Gelenke eines Roboterarms ineinander transformiert werden bzw. wie diese Koordinatensysteme zu wählen sind.

Es bezeichne L_i die Drehachse durch das i -te Gelenk und $\text{KS}_i = (\mathbf{o}_i; \mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i, \mathbf{z}_i)$ das durch die Konfiguration festgelegte Koordinatensystem im i -ten Gelenk. Die Lage von KS_1 kann beliebig gewählt werden, solange \mathbf{z}_1 auf der Achse L_1 liegt.

Die Konfiguration wird wie folgt bestimmt:

1. Windschiefe Achsen:

- Bestimme ausgehend von KS_i den Lotvektor \mathbf{a}_i von L_i auf L_{i+1} .
- Der Lotfußpunkt von \mathbf{a}_i auf L_{i+1} ist der Ursprung \mathbf{o}_{i+1} des neuen Koordinatensystems KS_{i+1} .
- Die Richtung \mathbf{a}_i ist die neue \mathbf{x}_{i+1} -Richtung.
- \mathbf{z}_{i+1} zeigt entlang der Achse L_{i+1} , wobei das Vorzeichen willkürlich gewählt werden kann.
- Es wird $\mathbf{y}_{i+1} = \mathbf{z}_i \times \mathbf{x}_i$ festgelegt.

Damit kann man KS_i mit folgender Bewegung in KS_{i+1} überführen:

- Drehung um den Winkel ϑ_i um die \mathbf{z}_i -Achse, so dass \mathbf{x}_i parallel zu \mathbf{x}_{i+1} liegt.
- Verschiebung um den Vektor \mathbf{d}_i entlang der \mathbf{z}_i -Achse, so dass \mathbf{o}_i in den Lotfußpunkt des Lotes \mathbf{a}_i geschoben wird.
- Verschiebung um \mathbf{a}_i , um den Koordinatenursprung auf \mathbf{o}_{i+1} zu bewegen.
- Drehung um α_i um die \mathbf{x}_{i+1} -Achse, um die \mathbf{z}_i -Achse auf die \mathbf{z}_{i+1} Achse zu kippen.

2. Sich schneidende Achsen:

- Es ist $\mathbf{a}_i = \mathbf{0}$, so dass die \mathbf{x}_{i+1} -Richtung nicht wie bei windschiefen Geraden bestimmt werden kann. Die übrigen Größen können genauso wie bei windschiefen Geraden bestimmt werden.
- Setze $\mathbf{x}_{i+1} = \frac{\mathbf{z}_i \times \mathbf{z}_{i+1}}{\|\mathbf{z}_i \times \mathbf{z}_{i+1}\|}$.

3. Parallele Achsen:

- Die Fußpunkte des Lotes \mathbf{a}_i sind nicht eindeutig bestimmt, alle anderen Größen lassen sich wie bei windschiefen Geraden bestimmen.
- Bestimme die Fußpunkte des Lotes so, dass die oben genannte Verschiebung \mathbf{d}_i entlang der \mathbf{z}_i -Achse zu $\mathbf{0}$ wird.

Dies führt zu folgender erweiterter Bewegungsmatrix von KS_i zu KS_{i+1} :

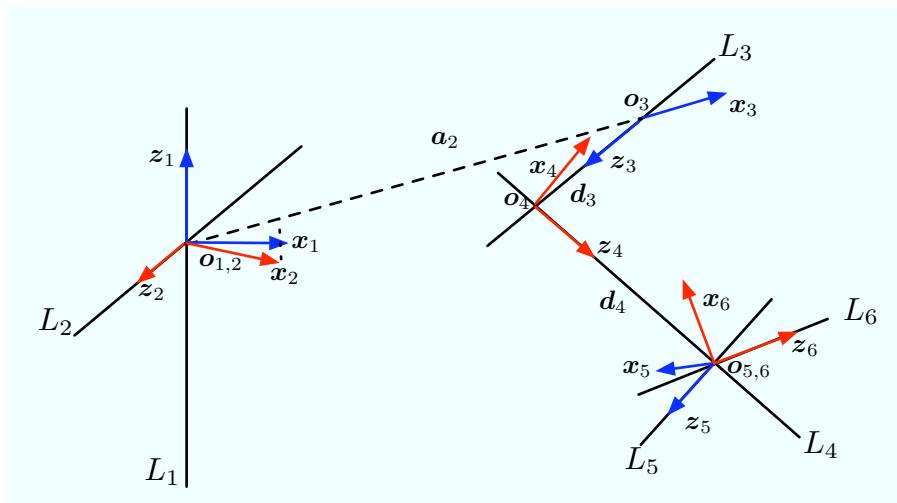
$$\mathbb{B}_i = \begin{bmatrix} \cos(\vartheta_i) & -\sin(\vartheta_i)\cos(\alpha_i) & \sin(\vartheta_i)\sin(\alpha_i) & a_i \cos(\vartheta_i) \\ \sin(\vartheta_i) & \cos(\vartheta_i)\cos(\alpha_i) & -\cos(\vartheta_i)\sin(\alpha_i) & a_i \sin(\vartheta_i) \\ 0 & \sin(\alpha_i) & \cos(\alpha_i) & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

mit $a_i = \|\mathbf{a}_i\|$ und $d_i = \|\mathbf{d}_i\|$. Diese Matrix kann auch als Koordinatentransformation von KS_{i+1} nach KS_i aufgefasst werden.

Für den Puma 200 erhalten wir somit folgende Denavit-Hartenberg-Konfiguration:

| Gelenk | a_i | α_i | d_i |
|--------|----------|------------|----------|
| 1 | 0 | $\pi/2$ | 0 |
| 2 | 203,3 mm | 0 | 0 |
| 3 | 0 | $\pi/2$ | 127 mm |
| 4 | 0 | $\pi/2$ | 203,2 mm |
| 5 | 0 | $\pi/2$ | 0 |

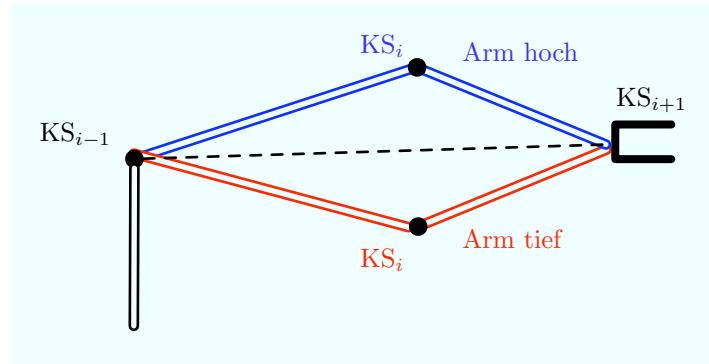
Dabei wurde KS_1 in den Schnittpunkt der Achsen L_1 und L_2 gelegt, die \mathbf{x}_1 -Achse zeigt in Richtung des Armes in Ruhestellung. Die Orientierungen der \mathbf{z}_i -Achsen ergeben sich aus der Zeichnung. Die Winkel ϑ_i hängen von der aktuellen Stellung des Armes ab, wobei zu beachten ist, dass ϑ_i immer relativ zum Koordinatensystem KS_{i-1} aufzufassen ist. Die Maße sind der Konstruktionszeichnung des Armes zu entnehmen.



3 Mehrdeutigkeiten

Sind die Winkel $\vartheta_1, \dots, \vartheta_6$ gegeben, so ist die Stellung des Roboterarms, also die Transformationsmatrix $\mathbb{B} = \mathbb{B}_1 \mathbb{B}_2 \mathbb{B}_3 \mathbb{B}_4 \mathbb{B}_5 \mathbb{B}_6$ mit \mathbb{B}_i wie in Abschnitt 2, eindeutig bestimmt.

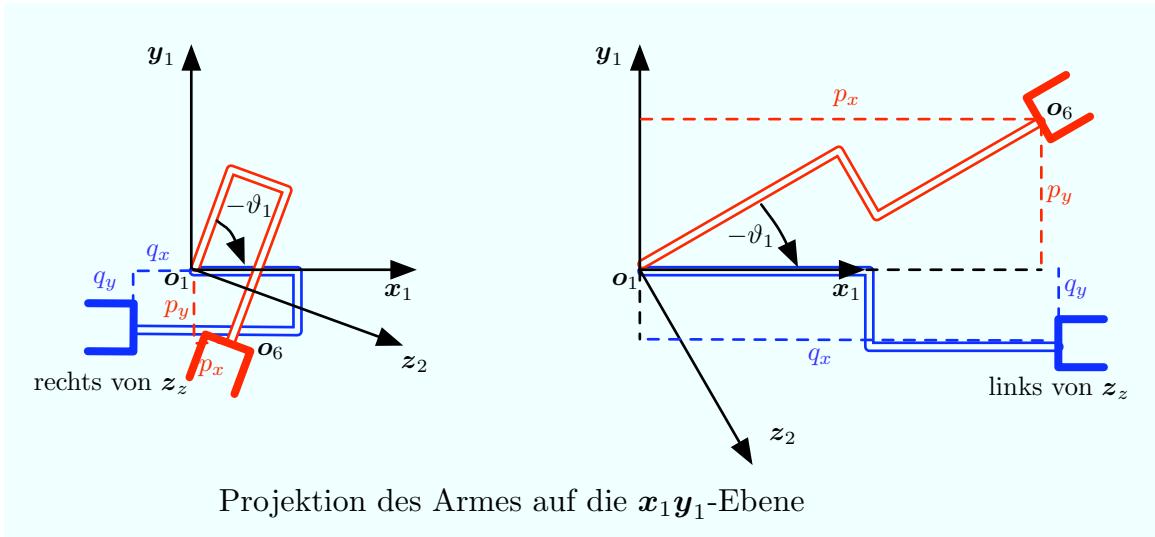
Ist umgekehrt die Matrix \mathbb{B} gegeben, so gibt es in der Regel mehrere Möglichkeiten für die Winkel ϑ_i , die zu dieser Transformation \mathbb{B} führen. Die folgende Abbildung verdeutlicht dies.



Diese Mehrdeutigkeiten müssen für die inverse Kinematik (Abschnitt 5) aufgelöst werden, da abhängig von der gewählten Einstellung unterschiedliche Berechnungen durchgeführt werden müssen.

Beim Puma 200 treten an drei Stellen Mehrdeutigkeiten auf:

- Der Arm ist „links“ bzw. „rechts“, wenn der Greifer links bzw. rechts von der z_2 -Achse liegt.²⁾



²⁾Diese Festlegung ist genau entgegengesetzt dazu, den Arm als „linken Arm“ bzw. „rechten Arm“ aufzufassen, wie es etwa bei Paul und Zhang [1] getan wird.

Bezeichnen wir mit \mathbf{p} den Verschiebungsvektor von KS_1 zu KS_6 , so erhalten wir \mathbf{p} aus der letzten Spalte von $\mathbb{B} = (b_{ij})$:

$$\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{14} \\ b_{24} \\ b_{34} \end{bmatrix}$$

Um zu entscheiden, ob der Arm links oder rechts von \mathbf{z}_2 liegt, betrachten wir die Projektion in die $\mathbf{x}_1\mathbf{y}_1$ -Ebene. Wir drehen die Projektion des Armes um den Winkel $-\vartheta_1$ um die \mathbf{z}_1 -Achse zurück, so dass der zurückgedrehte Vektor \mathbf{z}_2 auf der negativen \mathbf{y}_1 -Achse liegt:

$$\begin{bmatrix} q_x \\ q_y \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \cos(\vartheta_1) & \sin(\vartheta_1) \\ -\sin(\vartheta_1) & \cos(\vartheta_1) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix}$$

Dann kann man die Stellung sofort anhand des Vorzeichens von q_x ablesen:

$$\text{sign}(q_x) = +1 \Rightarrow \text{Arm links},$$

$$\text{sign}(q_x) = -1 \Rightarrow \text{Arm rechts}.$$

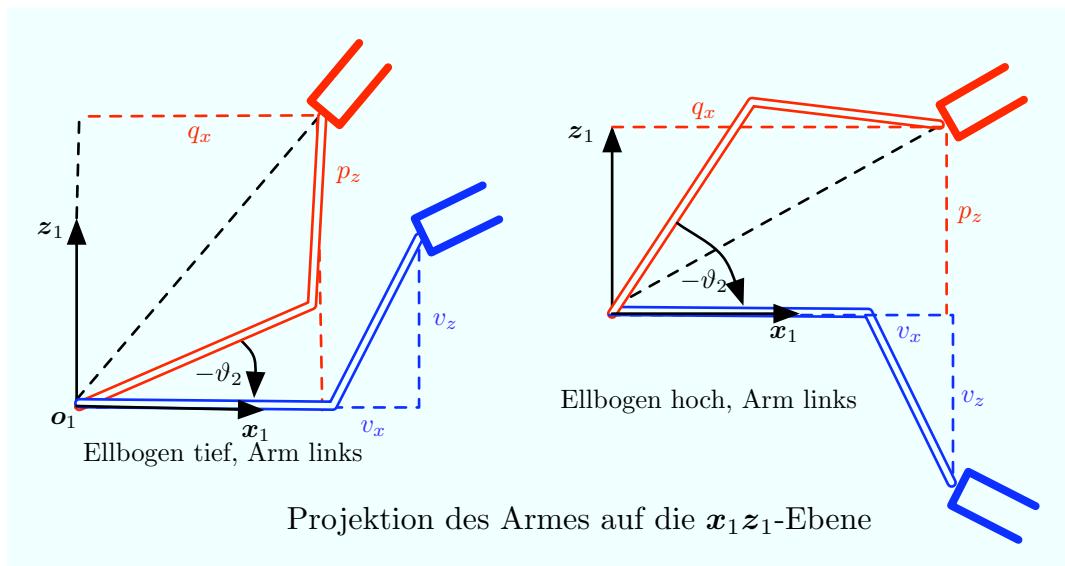
Im Falle $q_x = 0$ wird die Stellung per Definition als „links“ bezeichnet.

2. Der Ellbogen steht „hoch“ bzw. „tief“, d.h. der Koordinatenursprung \mathbf{o}_3 befindet sich oberhalb bzw. unterhalb der Verbindungslinie von \mathbf{o}_1 zu \mathbf{o}_6 . Um dies zu entscheiden, drehen wir den im Schritt zuvor bereits um $-\vartheta_1$ zurückgedrehten Arm nun um $-\vartheta_2$ um die \mathbf{y}_1 -Achse und betrachten die Projektion auf die $\mathbf{x}_1\mathbf{z}_1$ -Ebene:

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_z \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \cos(\vartheta_2) & \sin(\vartheta_2) \\ -\sin(\vartheta_2) & \cos(\vartheta_2) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_x \\ p_z \end{bmatrix}$$

Wir können dann die Stellung des Ellbogens am Vorzeichen von v_z ablesen, müssen dabei jedoch die Fälle „Arm links“ und „Arm rechts“ unterscheiden.

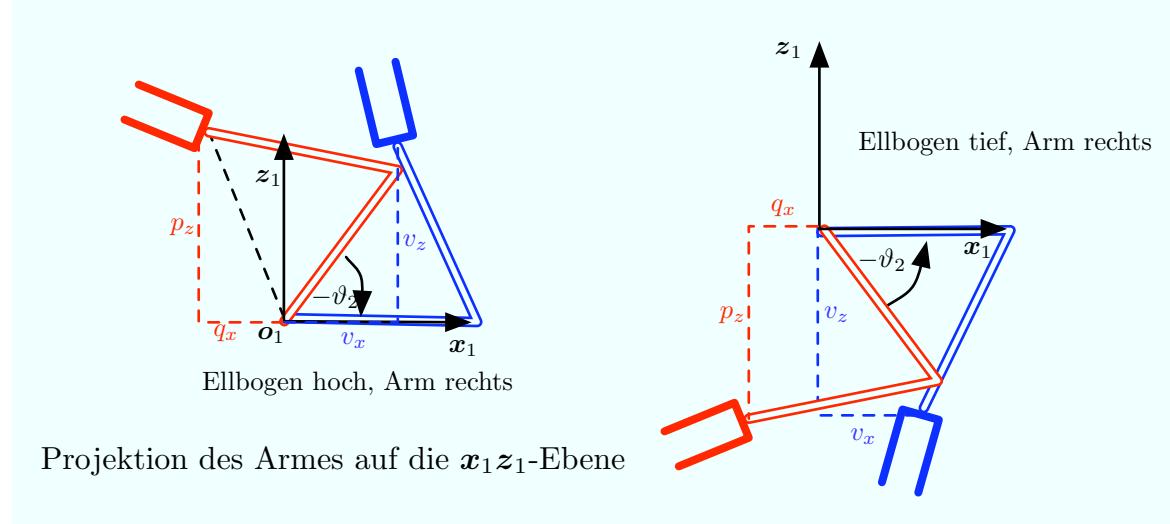
- (a) Der Arm ist links.



In diesem Fall ist

$$\begin{aligned}\text{sign}(v_z) = +1 &\Rightarrow \text{Ellbogen tief}, \\ \text{sign}(v_z) = -1 &\Rightarrow \text{Ellbogen hoch}.\end{aligned}$$

(b) Der Arm ist rechts.

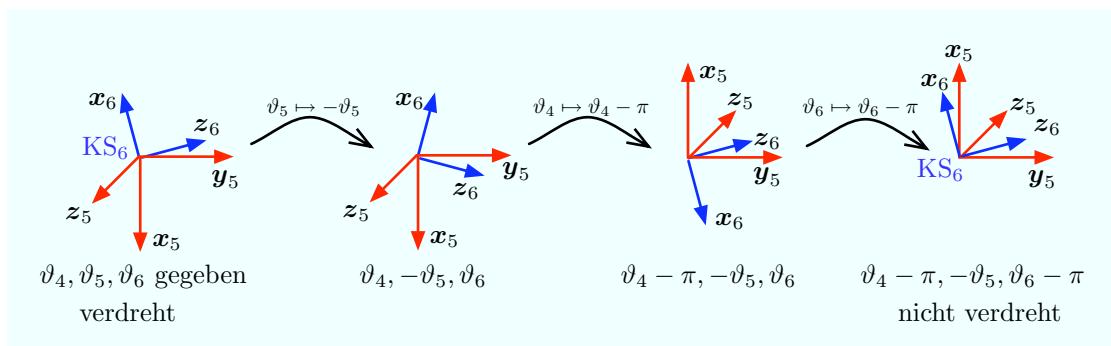


In diesem Fall ist

$$\begin{aligned}\text{sign}(v_z) = +1 &\Rightarrow \text{Ellbogen hoch}, \\ \text{sign}(v_z) = -1 &\Rightarrow \text{Ellbogen tief}.\end{aligned}$$

In beiden Fällen wird der Ellbogen für $v_z = 0$ per Definition als „hoch“ bezeichnet.

3. Der Unterarm ist „verdreht“ bzw. „nicht verdreht“, d.h. es gibt zwei Möglichkeiten, abhängig von der Drehung um die Gelenkkachse L_4 um den Winkel ϑ_4 eine vorgegebene Orientierung des Greifers, also von KS_6 , zu realisieren.



Anfangs- und Endzustand in der Zeichnung realisieren die selbe Orientierung. Das Vorzeichen von $\sin(\vartheta_5)$ legt die Verdrehung fest:

$$\begin{aligned}\text{sign}(\sin(\vartheta_5)) = +1 &\Rightarrow \text{Unterarm nicht verdreht}, \\ \text{sign}(\sin(\vartheta_5)) = -1 &\Rightarrow \text{Unterarm verdreht}.\end{aligned}$$

4 Direkte Kinematik

Die Aufgabe der **direkten Kinematik** ist es, aus vorgegebenen Winkeln $\vartheta_1, \dots, \vartheta_6$ die Transformationsmatrix \mathbb{B} von KS_6 nach KS_1 zu bestimmen. Mit den \mathbb{B}_i aus Abschnitt 2 ist

$$\mathbb{B} = \mathbb{B}_1 \mathbb{B}_2 \mathbb{B}_3 \mathbb{B}_4 \mathbb{B}_5 \mathbb{B}_6.$$

Desweiteren kann in der direkten Kinematik auch ermittelt werden, welche Konfiguration der Roboterarm bzgl. der in Abschnitt 3 vorgestellten Mehrdeutigkeiten einnimmt.

Um \mathbb{B} effizient zu berechnen, verwenden wir das Verfahren aus dem Artikel von Paul und Zhang [1], das an den Puma 200 und die Denavit-Hartenberg-Konfiguration aus Abschnitt 2 angepasst wurde. Wir definieren dafür zunächst folgende Matrizen:

$$\begin{aligned}\mathbb{B}_{23} &= \mathbb{B}_2 \mathbb{B}_3 \\ \mathbb{M}_6 &= \mathbb{B}_6 \\ \mathbb{M}_5 &= \mathbb{B}_5 \mathbb{M}_6 = \mathbb{B}_5 \mathbb{B}_6 \\ \mathbb{M}_4 &= \mathbb{B}_4 \mathbb{M}_5 = \mathbb{B}_4 \mathbb{B}_5 \mathbb{B}_6 \\ \mathbb{M}_3 &= \mathbb{B}_3 \mathbb{M}_4 = \mathbb{B}_3 \mathbb{B}_4 \mathbb{B}_5 \mathbb{B}_6 \\ \mathbb{M}_2 &= \mathbb{B}_{23} \mathbb{M}_4 = \mathbb{B}_{23} \mathbb{B}_4 \mathbb{B}_5 \mathbb{B}_6 \\ \mathbb{M}_1 &= \mathbb{B}_1 \mathbb{M}_2 = \mathbb{B}_1 \mathbb{B}_{23} \mathbb{B}_4 \mathbb{B}_5 \mathbb{B}_6 = \mathbb{B}\end{aligned}$$

Die Idee ist nun, angefangen bei \mathbb{M}_6 , nacheinander die Matrizen \mathbb{M}_k zu bestimmen, indem sie mit den jeweils bekannten rechten Seiten dieser Gleichungen gleichgesetzt werden und damit die einzelnen Einträge der \mathbb{M}_k zu bestimmen, ohne jedesmal eine komplette Matrizenmultiplikation durchzuführen.

Es bezeichne $m_{ij}^{(k)}$ den Eintrag in der i -ten Zeile und j -ten Spalte der Matrix \mathbb{M}_k . Der Lesbarkeit wegen schreiben wir

$$\begin{aligned}c_i &= \cos(\vartheta_i), s_i = \sin(\vartheta_i), \\ c_{23} &= \cos(\vartheta_2 + \vartheta_3), s_{23} = \sin(\vartheta_2 + \vartheta_3).\end{aligned}$$

Wir erhalten sofort

$$\mathbb{M}_6 = \begin{bmatrix} c_6 & -s_6 & 0 & 0 \\ s_6 & c_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbb{M}_5 = \begin{bmatrix} c_5 c_6 & -c_5 s_6 & s_5 & 0 \\ s_5 c_6 & -s_5 s_6 & -c_5 & 0 \\ s_6 & c_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Somit haben wir

$$\begin{aligned}m_{11}^{(5)} &:= c_5 c_6 \\ m_{12}^{(5)} &:= -c_5 s_6 \\ m_{21}^{(5)} &:= s_5 c_6 \\ m_{22}^{(5)} &:= -s_5 s_6\end{aligned}$$

und können \mathbb{M}_4 schreiben als

$$\mathbb{M}_4 = \begin{bmatrix} m_{11}^{(5)} c_4 + s_4 s_6 & c_4 m_{12}^{(5)} + s_4 c_6 & c_4 s_5 & 0 \\ m_{11}^{(5)} s_4 - c_4 s_6 & s_4 m_{12}^{(5)} - c_4 c_6 & s_4 s_5 & 0 \\ m_{21}^{(5)} & m_{22}^{(5)} & -c_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Wir setzen nun

$$\begin{aligned} m_{11}^{(4)} &:= m_{11}^{(5)} c_4 + s_4 s_6 \\ m_{12}^{(4)} &:= c_4 m_{12}^{(5)} + s_4 c_6 \\ m_{13}^{(4)} &:= c_4 s_5 \\ m_{21}^{(4)} &:= m_{11}^{(5)} s_4 - c_4 s_6 \\ m_{22}^{(4)} &:= s_4 m_{12}^{(5)} - c_4 c_6 \\ m_{23}^{(4)} &:= s_4 s_5. \end{aligned}$$

Damit ist

$$\mathbb{M}_2 = \begin{bmatrix} c_{23} m_{11}^{(4)} + s_{23} m_{21}^{(5)} & c_{23} m_{12}^{(4)} + s_{23} m_{22}^{(5)} & c_{23} m_{13}^{(4)} - c_5 s_{23} & c_2 a_2 + s_{23} d_4 \\ s_{23} m_{11}^{(4)} - c_{23} m_{21}^{(5)} & s_{23} m_{12}^{(4)} - c_{23} m_{22}^{(5)} & s_{23} m_{13}^{(4)} + c_5 c_{23} & s_2 a_2 - c_{23} d_4 \\ m_{21}^{(4)} & m_{22}^{(4)} & m_{23}^{(4)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

und wir setzen

$$\begin{aligned} m_{11}^{(2)} &:= c_{23} m_{11}^{(4)} + s_{23} m_{21}^{(5)} \\ m_{12}^{(2)} &:= c_{23} m_{12}^{(4)} + s_{23} m_{22}^{(5)} \\ m_{13}^{(2)} &:= c_{23} m_{13}^{(4)} - c_5 s_{23} \\ m_{14}^{(2)} &:= c_2 a_2 + s_{23} d_4 \\ m_{21}^{(2)} &:= s_{23} m_{11}^{(4)} - c_{23} m_{21}^{(5)} \\ m_{22}^{(2)} &:= s_{23} m_{12}^{(4)} - c_{23} m_{22}^{(5)} \\ m_{23}^{(2)} &:= s_{23} m_{13}^{(4)} + c_5 c_{23} \\ m_{24}^{(2)} &:= s_2 a_2 - c_{23} d_4. \end{aligned}$$

Schließlich ist

$$\mathbb{B} = \mathbb{M}_1 = \begin{bmatrix} c_1 m_{11}^{(2)} + s_1 m_{21}^{(4)} & c_1 m_{12}^{(2)} + s_1 m_{22}^{(4)} & c_1 m_{13}^{(2)} + s_1 m_{23}^{(4)} & c_1 m_{14}^{(2)} + s_1 d_3 \\ s_1 m_{11}^{(2)} - c_1 m_{21}^{(4)} & s_1 m_{12}^{(2)} - c_1 m_{22}^{(4)} & s_1 m_{13}^{(2)} - c_1 m_{23}^{(4)} & s_1 m_{14}^{(2)} - c_1 d_3 \\ m_{21}^{(2)} & m_{22}^{(2)} & m_{23}^{(2)} & m_{24}^{(2)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Wir erhalten also die Komponenten von $\mathbb{B} = (b_{ij})$ durch

$$\begin{aligned} b_{12} &:= c_1 m_{12}^{(2)} + s_1 m_{22}^{(4)} \\ b_{13} &:= c_1 m_{13}^{(2)} + s_1 m_{23}^{(4)} \\ b_{14} &:= c_1 m_{14}^{(2)} + s_1 d_3 \\ b_{22} &:= s_1 m_{12}^{(2)} - c_1 m_{22}^{(4)} \\ b_{23} &:= s_1 m_{13}^{(2)} - c_1 m_{23}^{(4)} \\ b_{24} &:= s_1 m_{14}^{(2)} - c_1 d_3 \\ b_{32} &:= m_{22}^{(2)} \\ b_{33} &:= m_{23}^{(2)} \\ b_{34} &:= m_{24}^{(2)} \end{aligned}$$

und da die linke obere 3×3 -Teilmatrix von \mathbb{B} orthogonal sein muss, können wir die erste Spalte von \mathbb{B} auch durch

$$\begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ b_{32} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_{13} \\ b_{23} \\ b_{33} \end{bmatrix} \quad \text{und } b_{41} := 0$$

erhalten. Dies spart die Berechnung der Zwischenvariablen $m_{11}^{(2)}, m_{21}^{(2)}, m_{11}^{(4)}, m_{21}^{(4)}, m_{11}^{(5)}$ und $m_{21}^{(5)}$.

5 Inverse Kinematik

Die **inverse Kinematik** soll aus der gegebenen Transformationsmatrix \mathbb{B} die Winkel $\vartheta_1, \dots, \vartheta_6$ rekonstruieren. Wegen der in Abschnitt 3 dargelegten Mehrdeutigkeiten können mehrere Lösungen für die Winkel ϑ_i existieren. Daher muss vorgegeben werden, ob der Arm links oder rechts stehen soll, der Ellbogen hoch oder tief und ob der Unterarm verdreht sein soll oder nicht.

Unser Vorgehen für die inverse Kinematik ist im Prinzip eine Umkehrung des Vorgehens bei der direkten Kinematik. Wir definieren die Matrizen

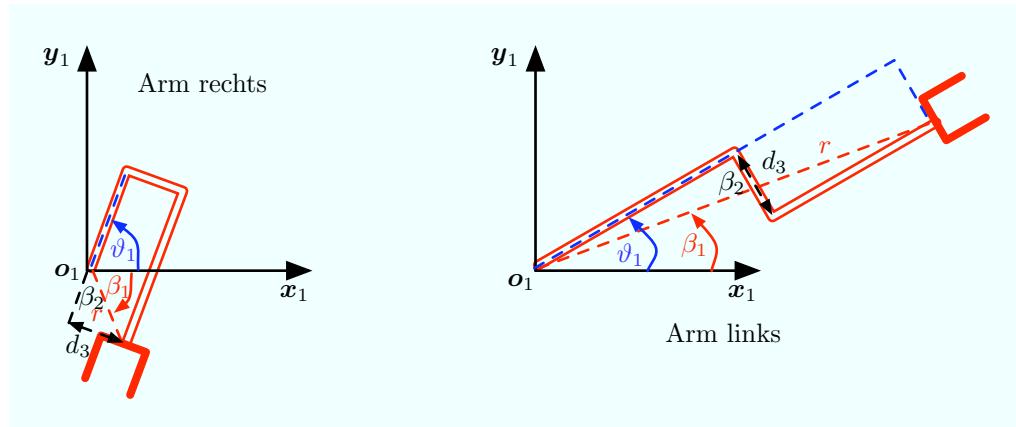
$$\begin{aligned}\mathbb{T}_0 &= \mathbb{M}_1 = \mathbb{B} \\ \mathbb{T}_1 &= \mathbb{M}_2 = \mathbb{B}_1^{-1} \mathbb{T}_0 \\ \mathbb{T}_2 &= \mathbb{M}_3 = \mathbb{B}_2^{-1} \mathbb{T}_1 \\ \mathbb{T}_3 &= \mathbb{M}_4 = \mathbb{B}_{23}^{-1} \mathbb{T}_1 \\ \mathbb{T}_4 &= \mathbb{M}_5 = \mathbb{B}_4^{-1} \mathbb{T}_3 \\ \mathbb{T}_5 &= \mathbb{M}_6 = \mathbb{B}_5^{-1} \mathbb{T}_4 = \mathbb{B}_6\end{aligned}$$

Es werden wieder nacheinander die von den ϑ_i abhängigen linken Seiten aus den jeweils bekannten rechten Seiten ermittelt. Es bezeichne $t_{ij}^{(k)}$ den Eintrag in der i -ten Zeile und j -ten Spalte der Matrix \mathbb{T}_k . Die Rechnungen unterscheiden sich nur in Details von den bei Paul und Zhang [1] erläuterten, so dass wir sie nicht ausführen.

Die letzte Spalte von \mathbb{T}_0 enthält die Verschiebung \mathbf{p} von KS_1 nach KS_6 . Durch Gleichsetzen mit \mathbb{M}_1 und Umformen erhalten wir

$$\vartheta_1 = \text{atan}(p_y, p_x) + \begin{cases} \arcsin\left(\frac{d_3}{r}\right) & \text{falls Arm links} \\ \pi - \arcsin\left(\frac{d_3}{r}\right) & \text{falls Arm rechts} \end{cases}$$

mit $r = \sqrt{p_x^2 + p_y^2}$. Die Zeichnung erklärt die Fallunterscheidung, vgl. auch die erste Mehrdeutigkeit in Abschnitt 3.



Hier ist $\beta_1 = \text{atan}(p_y, p_x)$ und $\beta_2 = \arcsin\left(\frac{d_3}{r}\right)$. Steht der Arm rechts, so ist $\vartheta_1 = \pi - \beta_2 + \beta_1$. Steht der Arm links, so ist $\vartheta_1 = \beta_1 + \beta_2$. Beachte, dass stets $\beta_2 \geq 0$ gilt.

Ist $d_3 > r$, so ist die vorgegebene Position \mathbf{p} durch den Roboterarm nicht erreichbar, da sie näher an \mathbf{o}_1 liegt, als der Greifer positioniert werden kann.

Vergleichen wir nun \mathbb{T}_1 mit $\mathbb{B}_1^{-1}\mathbb{M}_1$, so stellen wir fest, dass

$$t_{14}^{(1)} = c_1 p_x + s_1 p_y$$

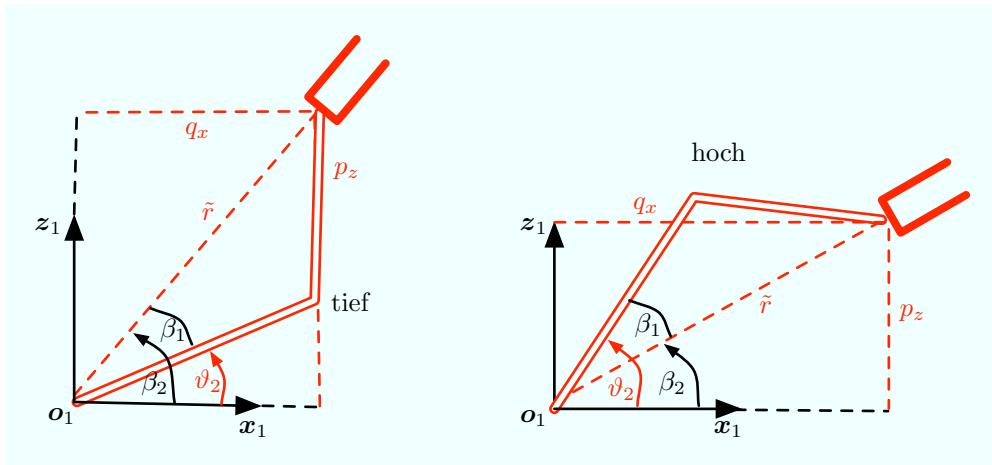
gerade dem Wert q_x aus Abschnitt 3 entspricht. Zusammen mit dem Wert $p_z = b_{34} = t_{34}^{(0)}$ und dem Vorzeichen

$$\sigma = \begin{cases} +1 & \text{Arm links} \\ -1 & \text{Arm rechts} \end{cases}$$

können wir nach

$$\vartheta_2 = \arctan(p_z, t_{14}^{(1)}) + \sigma \cdot \begin{cases} \arccos\left(\frac{\tilde{r}^2 + a_2^2 - d_4^2}{2\tilde{r}a_2}\right) & \text{Ellbogen hoch} \\ -\arccos\left(\frac{\tilde{r}^2 + a_2^2 - d_4^2}{2\tilde{r}a_2}\right) & \text{Ellbogen tief} \end{cases}$$

auflösen, wobei $\tilde{r} = \sqrt{q_x^2 + p_z^2}$ ist. Die Zeichnung verdeutlicht dies für den Fall, dass der Arm links steht, vgl. die zweite Mehrdeutigkeit in Abschnitt 3.



Hier ist (nach dem Cosinussatz) $\beta_1 = \arccos\left(\frac{\tilde{r}^2 + a_2^2 - d_4^2}{2\tilde{r}a_2}\right)$ und $\beta_2 = \arctan(p_z, q_x)$. Steht der Arm hoch, so ist $\vartheta_2 = \beta_2 + \beta_1$ und steht der Arm tief, so ist $\vartheta_2 = \beta_2 - \beta_1$. Beachte, dass stets $\beta_1 \geq 0$ gilt. Entsprechende Überlegungen führen auf die Formel für den Fall, dass der Arm rechts steht, und rechtfertigen auch die Wahl des Vorzeichens σ .

In der letzte Spalte von $\mathbb{T}_2 = \mathbb{M}_3 \stackrel{!}{=} \mathbb{B}_2^{-1}\mathbb{T}_1$ stehen die Einträge

$$\begin{aligned} t_{14}^{(2)} &= s_3 d_4 \stackrel{!}{=} c_2 t_{14}^{(1)} + s_2 p_z - a_2, \\ t_{24}^{(2)} &= -c_3 d_4 \stackrel{!}{=} -s_2 t_{14}^{(1)} + c_2 p_z, \end{aligned}$$

was wir nach

$$\vartheta_3 = \arctan\left(\frac{c_2 t_{14}^{(1)} + s_2 p_z - a_2}{s_2 t_{14}^{(1)} - c_2 p_z}\right)$$

auflösen.

Mit ϑ_2 und ϑ_3 sind nun auch s_{23} und c_{23} bekannt, und mit $t_{13}^{(1)} = c_1 b_{13} + s_1 b_{23}$ bestimmen wir die Einträge $t_{13}^{(3)}$ und $t_{23}^{(3)}$ aus $\mathbb{T}_3 = \mathbb{M}_4 \stackrel{!}{=} \mathbb{B}_{23}^{-1} \mathbb{T}_1$ zu

$$\begin{aligned} t_{23}^{(3)} &= c_4 s_5 \stackrel{!}{=} s_{23} b_{33} + c_{23} t_{13}^{(1)}, \\ t_{13}^{(3)} &= s_4 s_5 \stackrel{!}{=} s_1 b_{13} - c_1 b_{23}. \end{aligned}$$

Es ist nun $\tan(\vartheta_5) = \frac{s_5^{-1} t_{23}^{(3)}}{s_5^{-1} t_{13}^{(3)}}$. Da beim Kürzen von s_5 Information über das Vorzeichen von s_5 verlorengegangen ist, setzen wir

$$\vartheta_4 = \begin{cases} \text{atan}(t_{23}^{(3)}, t_{13}^{(3)}) & \text{falls Unterarm nicht verdreht} \\ \text{atan}(-t_{23}^{(3)}, -t_{13}^{(3)}) & \text{falls Unterarm verdreht} \end{cases}$$

und lösen somit die dritte Mehrdeutigkeit aus Abschnitt 3 auf. Diese Gleichung ist singulär für $s_5 = 0$. Dies ist jedoch genau dann der Fall, wenn die Drehachsen L_4 und L_6 zusammenfallen, so dass wir dann ohne weiteres $\vartheta_4 = 0$ annehmen können, da jede Drehung um L_4 ebensogut durch eine zusätzliche Drehung um L_6 realisiert werden kann.

Aus dem Vergleich $\mathbb{T}_4 \stackrel{!}{=} \mathbb{B}_4^{-1} \mathbb{T}_3$ erhalten wir

$$\begin{aligned} s_5 &\stackrel{!}{=} c_4 t_{13}^{(3)} + s_4 t_{23}^{(3)} \\ c_5 &\stackrel{!}{=} c_{23} b_{33} - s_{23} t_{13}^{(1)} \end{aligned}$$

und somit

$$\vartheta_5 = \text{atan}(c_4 t_{13}^{(3)} + s_4 t_{23}^{(3)}, c_{23} b_{33} - s_{23} t_{13}^{(1)}).$$

Schließlich ist $\mathbb{T}_5 \stackrel{!}{=} \mathbb{B}_5^{-1} \mathbb{T}_4$ und wir erhalten mit

$$\begin{aligned} t_{12}^{(4)} &= c_4(s_{23} b_{32} + c_{23}(c_1 b_{12} + s_1 b_{22})) - s_4(c_1 b_{22} - s_1 b_{12}) \\ t_{22}^{(4)} &= s_{23}(c_1 b_{12} + s_1 b_{22}) - c_{23} b_{32} \\ t_{32}^{(4)} &= c_4(c_1 b_{22} - s_1 b_{12}) + s_4(s_{23} b_{32} + c_{23}(c_1 b_{12} + s_1 b_{22})) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} s_6 &\stackrel{!}{=} -c_5 t_{12}^{(4)} - s_5 t_{22}^{(4)} \\ c_6 &\stackrel{!}{=} t_{32}^{(4)} \end{aligned}$$

den Winkel

$$\vartheta_6 = \text{atan}(-c_5 t_{12}^{(4)} - s_5 t_{22}^{(4)}, t_{32}^{(4)}).$$

6 Orientierung des Greifers

Will man die Lage des Greifers im Raum angeben, so mag es recht umständlich scheinen, dies durch explizite Angabe der Matrix \mathbb{B} zu tun. Es ist sicherlich einfacher, stattdessen den Verschiebungsvektor \mathbf{p} von \mathbf{o}_1 nach \mathbf{o}_6 und die Orientierung des Greifers durch seine drei Winkel gegenüber der \mathbf{z}_1 -, \mathbf{y}_1 - und \mathbf{x}_1 -Achse (in dieser Reihenfolge) anzugeben.

\mathbb{B} hat die Form

$$\mathbb{B} = \begin{bmatrix} B & \mathbf{p} \\ \mathbf{0}^\top & 1 \end{bmatrix},$$

wobei die Drehmatrix $B \in \text{SO}_3(\mathbb{R})$ die Orientierung des Greifers beschreibt und \mathbf{p} die Verschiebung ist. B lässt sich als Produkt

$$B = R_z(\zeta)R_y(\eta)R_x(\xi)$$

von drei Rotationen schreiben. Diese Darstellung entspricht ausgehend von KS_1 einer Rotation um die \mathbf{z}_1 -Achse um den Winkel ζ gefolgt von einer Rotation um die \mathbf{y}_1 -Achse um den Winkel η und schließlich einer Rotation um die \mathbf{x}_1 -Achse um den Winkel ξ . Die Matrizen müssen in dieser Reihenfolge stehen, denn die Drehung durch $R_y(\eta)$ im bereits durch $R_z(\zeta)$ gedrehten Koordinatensystem schreibt sich im ursprünglichen KS_1 als

$$R_z(\zeta)R_y(\eta)R_z(\zeta)^{-1}.$$

Die Verknüpfung der beiden Drehungen ergibt also in der Darstellung bzgl. des ursprünglichen KS_1

$$(R_z(\zeta)R_y(\eta)R_z(\zeta)^{-1})R_z(\zeta) = R_z(\zeta)R_y(\eta).$$

Entsprechendes kann man sich für die Darstellung der Drehung $R_x(\xi)$ nach vorangegangenen Drehungen um ζ und ξ überlegen.

Die Matrizen haben die Gestalt

$$R_z(\zeta) = \begin{bmatrix} \cos(\zeta) & -\sin(\zeta) & 0 \\ \sin(\zeta) & \cos(\zeta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, R_y(\eta) = \begin{bmatrix} \cos(\eta) & 0 & -\sin(\eta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\eta) & 0 & \cos(\eta) \end{bmatrix},$$

$$R_x(\xi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\xi) & -\sin(\xi) \\ 0 & \sin(\xi) & \cos(\xi) \end{bmatrix}$$

und somit ist

$$B =$$

$$\begin{bmatrix} \cos(\eta)\cos(\zeta) & -\cos(\xi)\sin(\zeta) - \cos(\zeta)\sin(\xi)\sin(\eta) & \sin(\xi)\sin(\zeta) - \cos(\xi)\cos(\zeta)\sin(\eta) \\ \cos(\eta)\sin(\zeta) & \cos(\xi)\cos(\zeta) - \sin(\xi)\sin(\eta)\sin(\zeta) & -\cos(\zeta)\sin(\xi) - \cos(\xi)\sin(\eta)\sin(\zeta) \\ \sin(\eta) & \cos(\eta)\cos(\xi) & \cos(\eta)\sin(\xi) \end{bmatrix}.$$

Sind für die inverse Kinematik anstelle der Matrix \mathbb{B} der Vektor \mathbf{p} und die Winkel ζ, η und ξ gegeben, so lässt sich B (und damit auch \mathbb{B}) durch diese Darstellung bestimmen.

Soll die direkte Kinematik nicht die Matrix \mathbb{B} , sondern den Vektor \mathbf{p} und die Winkel ζ, η und ξ ausgeben, so kann man zuerst die Matrix \mathbb{B} (und somit auch B) bestimmen, und dann folgende Gleichungen nutzen:

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} b_{14} \\ b_{24} \\ b_{34} \end{bmatrix},$$

$$\zeta = \text{atan}(\sin(\zeta), \cos(\zeta)) = \text{atan}(\cos(\eta) \sin(\zeta), \cos(\eta) \cos(\zeta)) = \text{atan}(b_{12}, b_{11}),$$

$$\xi = \text{atan}(\sin(\xi), \cos(\xi)) = \text{atan}(\cos(\eta) \sin(\xi), \cos(\eta) \cos(\xi)) = \text{atan}(b_{32}, b_{31}),$$

$$\text{und mit } b_{11} \cos(\zeta) + b_{21} \sin(\zeta) = \cos(\eta) \cos(\zeta)^2 + \cos(\eta) \sin(\zeta)^2 = \cos(\eta)$$

$$\eta = \text{atan}(\sin(\eta), \cos(\eta)) = \text{atan}(b_{13}, b_{11} \cos(\zeta) + b_{21} \sin(\zeta)).$$

Literatur

- [1] PAUL, ZHANG: *Computationally Efficient Kinematics for Manipulators with Spherical Wrists Based on the Homogeneous Transformation Representation*, The International Journal of Robotics Research Vol. 5 No. 2, 1986.

Index

- Armstellung
 - hoch, 8
 - links, 7
 - rechts, 7
 - tief, 8
 - verdreht, 9
- atan, 4
- Denavit-Hartenberg-Konfiguration, 5
- direkte Kinematik, 10, 17
- Ellbogen, 8
- erweiterte Koordinaten, 3
- Greifer, 3, 16
 - hoch, 8, 14
- inverse Kinematik, 13, 17
- Kinematik
 - direkte, 10, 17
 - inverse, 13, 17
- Koordinatensystem, 4
 - links, 7, 13
 - lokales Koordinatensystem, 4
- Mehrdeutigkeiten, 7, 13–15
- rechts, 7, 13
- tief, 8, 14
- Vektorprodukt, 4
- verdreht, 9, 15