

Akademia Górniczo-Hutnicza im. Stanisława Staszica w Krakowie
Modelowanie układów fizyczno-biologicznych
Model systemu obsługi klientów w supermarkecie

1. Wstęp teoretyczny.

Strumień zdarzeń – nazywamy taki proces stochastyczny, w którym:

- jeżeli $v(t)$ jest liczbą zdarzeń do momentu t , to $v(0) = 0$;
- $v(t)$ dla każdego $t > 0$ przyjmuje wartości całkowite nieujemne;
- $v(t)$ nie maleje (trajektorie nie maleją);

Niech t_1, t_2, \dots będą kolejnymi momentami pojawienia się zdarzeń i niech $z_k = t_k - t_{k-1}$.

Przyjmuje się że strumień jest określony gdy znany jest rozkład wektora losowego: (z_1, z_2, \dots, z_n)

Rozrzędzanie strumienia – sprowadza się do tworzenia z zadanego strumienia innych strumieni. Operacja ta przypomina strumień wpływający do pewnego urządzenia, które z kolei rozdziela te strumienie na różne stanowiska obsługi.

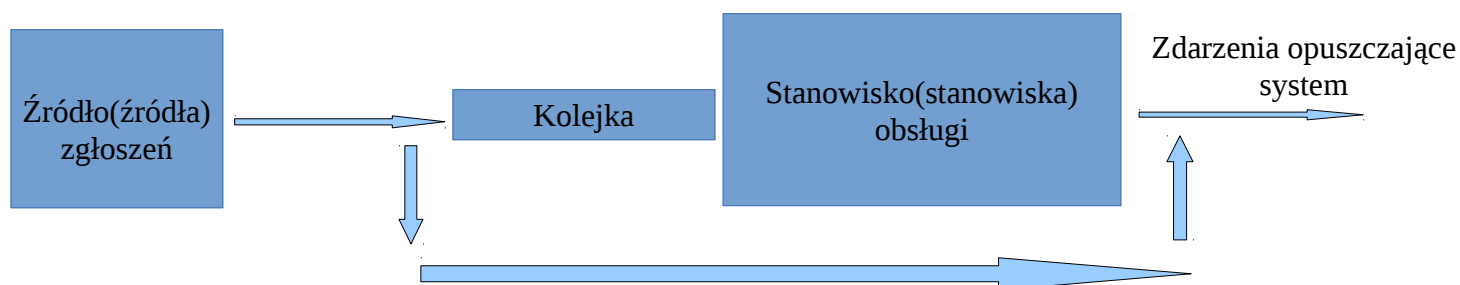
Superpozycja strumieni:

- superpozycja n strumieni Poissona z parametrami $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ daje strumień Poissona o parametrze równym $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$;
- superpozycja n strumieni, nierekurentnych, z ograniczonym średnim czasem między zdarzeniami, o wartości T_i daje strumień Poissona z parametrem $\lambda = \sum_i 1/T_i$

Proces Markowa – jest to proces w którym stan następny zależy tylko od stanu poprzedniego. Proces Markowa opisany na dyskretnym zbiorze chwil czasowych nazwany jest łańcuchem Markowa.

Proces narodzin i śmierci – jest specjalną klasą procesów Markowa. Jest wykorzystywany w teorii kolejek, modelowaniu problemów demograficznych, zagadnieniach niezawodności. Każde przybycie (pojawienie się) zdarzenia jest traktowane jako narodziny, zaś każde zanikanie zdarzenia to śmierć. Można to także wyrazić przez przechodzenie procesu ze stanu i -tego w stan $i-1$ lub $i+1$.

Schemat systemu obsługi :



Klasyfikacja systemów kolejkowych:

1. Względem algorytmu napływu zgłoszeń: strumień wejściowy może być charakteryzowany przez ilość zgłoszeń w pewnej jednostce czasu, średni czas między kolejnymi zgłoszeniami, algorytmem deterministycznym lub probabilistycznym(stochastycznym). Źródło może mieć cechę grupowego napływu zgłoszeń. Klient ma możliwość reakcji na czas oczekiwania w kolejce(systemy ze stratą, z oczekiwaniem). Algorytm wejściowy może być stacjonarny lub jego parametry mogą zmieniać się w czasie.
2. Względem obsługi zgłoszeń na stanowisku obsługi: stanowisko może być wolne lub zajęte; można podać liczbę obsłużonych zgłoszeń w przedziale czasu lub średni czas obsługi. Tak samo jak algorytm napływu, algorytm zgłoszeń może być deterministyczny, probabilistyczny, stacjonarny, etc.
3. Kolejkowanie zadań: FIFO(first in first out), LIFO(last in first out), SIRO(service in random order), względem pewnego priorytetu.
4. Pojemność kolejki: w systemach z ograniczoną poczekalnią, zgłoszenie przybywające gdy kolejka jest pełna nie jest obsługiwane.
5. Liczba stanowisk równoległej obsługi: liczba identycznych stanowisk. Mogą one mieć jedną wspólną kolejkę albo oddzielne.
6. Opis zależnych stanowisk obsługi(sieć kolejkowa).

Notacja Kendalla: jest to notacja w postaci **A/B/c/L/N** opracowana przez Davida G. Kendalla w 1953, w której poszczególne składowe oznaczają:

A – rozkład zmiennej opisującej czas między kolejnymi zgłoszeniami(algorytm zgłoszeń):

- M – rozkład wykładniczy
- D – rozkład deterministyczny(o stały odstępach czasu)
- E_k – rozkład Erlanga rzędu k-tego
- G – rozkład ogólny(*general*), zdefiniowany przez użytkownika

B - rozkład czasu obsługiwanego

c - liczba równoległych stanowisk obsługi

L - wielkość poczekalni

N – wymiar źródła zgłoszeń

Jeżeli L i N są niepodane, oznacza to że są nieskończone wielkie.

Właściwości systemu kolejkowego:

- $N(t)$ – liczba zgłoszeń przebywająca w systemie w momencie t ;
- $c + L + 1$ stanów w których może znajdować się systemach
- jeżeli A oraz B mają rozkład wykładniczy z parametrami odpowiednio λ i μ , to parametry mają interpretację jako intensywność napływu zgłoszeń i ich obsługi, a wartości $1/\lambda$ i $1/\mu$ oznaczają średni czas między zgłoszeniami oraz średni czas obsługi; można także z charakteryzować obciążenie systemu $\rho = \lambda/\mu$.

Można także wprowadzić charakterystykę systemu w stanie ustalonym(po upływie „bardzo dużego czasu”).

Podstawowe systemy:

- **M/M/1 ze stratą** - opisywany jest markowskim procesem narodzin i śmierci, posiada dwa stany H_0 oraz H_1 , odpowiadające braku zgłoszenia lub jego obecności w systemie, każde zgłoszenie przybywające w chwili gdy system obsługuje już inne zgłoszenie, jest odrzucane;
- **M/M/c ze stratą** – $c+1$ stanów, gdy wszystkie stanowiska obsługują zgłoszenia, nowe są odrzucane, źródło zgłoszeń przyjmowane jest jako wielowymiarowe;
- **M/M/1/L z oczekiwaniem** – system z jednym stanowiskiem obsługi, i L -wymiarową kolejką,
- **M/M/c/L**
- **M/M/1/N** – system ten opisuje np. problem konserwatora który obsługuje(naprawia) N urządzeń
- **M/M/c/N** – np. c konserwatorów naprawia N urządzeń
- **M/G/1 z nieograniczoną kolejką**
- **G/M/1 z nieograniczoną kolejką**
- **G/G/1 z nieograniczoną kolejką**

Priorytety zgłoszeń:

- Priorytet względny: pojawienie się zgłoszenia o wyższym priorytecie niż zdarzenia obsługiwanego nie powoduje przerwania obsługi. Po jej zakończeniu obsługiwane jest zdarzenie z najwyższym priorytetem.
- Priorytet absolutny: pojawienie się zgłoszenia o wyższym priorytecie niż zdarzenia obsługiwanego powoduje przerwanie obsługi. Zdarzenie to wraca do kolejki na właściwe sobie miejsce, stan obsługi jest zapamiętywany. Gdy w systemie nie ma zgłoszeń o wyższym priorytecie zdarzenie to jest „doobsługiwane”.

2. Realizacja symulacji.

Zrealizowaliśmy zmodyfikowaną wersję systemu D/G/c z nieskończoną kolejką:

- Wy naszej realizacji odstępy czasu są stałe, a liczba klientów przybyłych między chwilą t_n a t_{n+1} jest zmienną losową o rozkładzie normalnym. W programie można zadać parametry tego rozkładu. Umożliwia nam to uwzględnienie np. tego że w godzinach popołudniowych i wieczornych do sklepu przychodzi więcej klientów niż rano
- Rozkład czasu obsługi jest dowolny(*general*) – w naszym przypadku jest to rozkład normalny. Także jego parametry mogą być dowolnie ustawiane.
- Istnieje c stanowisk obsługi
- Priorytet obsługi FIFO
- Istnieje tyle kolejek ile stanowisk obsługi
- Nie wszystkie stanowiska są czynne, lecz są otwierane i zamykane w razie potrzeb
- Klienci mogą zmieniać kolejki jeżeli otwierana jest nowa kasa, a kolejka w której oczekują jest zbyt długa
- z punktu widzenia użytkownika wszystkie akcje odbywają się równocześnie, natomiast w programie realizowane są w określonej kolejności:
 1. Do systemu przybywają nowi klienci.
 2. Są przydzielani do najkrótszych kolejek.
 3. Klienci mogą przejść do krótszych, bardziej korzystnych kolejek.
 4. W razie potrzeb otwierane są nowe stanowiska obsługi/zamykane nadmiarowe.

Przykładowe wykresy z realizacji symulacji.

