Akademia Górniczo-Hutnicza im. Stanisława Staszica w Krakowie
Modelowanie układów fizyczno-biologicznych
Model systemu obsługi klientów w supermarkecie

1. Wstęp teoretyczny.

Strumień zdarzeń – nazywamy taki proces stochastyczny, w którym:

- jeżeli v(t) jest liczbą zdarzeń do momentu t, to v(0) = 0;
- v(t) dla każdego t>0 przyjmuje wartości całkowite nieujemne;
- v(t) nie maleje(trajektorie nie maleją);

Niech t_1, t_2 … będą kolejnymi momentami pojawienia się zdarzeń i niech $z_k = t_k - t_{k-1}$.
Przyjmuje się że strumień jest określony gdy znany jest rozkład wektora losowego: $(z_1, z_2, \ldots z_n)$

Rozrzedzanie strumienia – sprowadza się do tworzenia z zadanego strumienia innych strumieni. Operacja ta przypomina strumień wpływający do pewnego urządzenia, które z kolei rozdziela te strumienie na różne stanowiska obsługi.

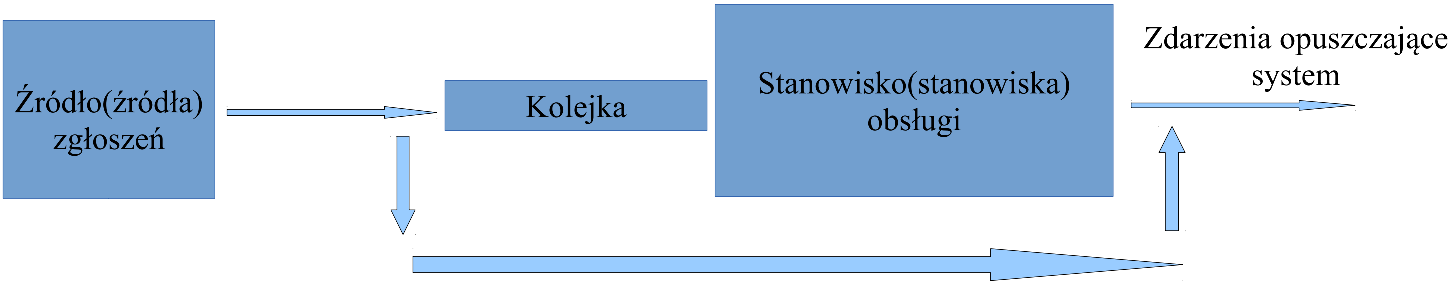
Superpozycja strumieni:

- superpozycja n strumieni Poissona z parametrami λ_1, λ_2, … λ_n daje strumień Poissona o parametrze równym $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$;
- superpozycja n strumieni, nierekurentnych, z ograniczonym średnim czasem między zdarzeniami, o wartości T_i daje strumień Poissona z parametrem $\lambda = \sum_i 1/Ti$

Proces Markowa – jest to proces w którym stan następny zależy tylko od stanu poprzedniego. Proces Markowa opisany na dyskretnym zbiorze chwil czasowych nazwany jest *łańcuchem Markowa*.

Proces narodzin i śmierci – jest specjalną klasą procesów Markowa. Jest wykorzystywany w teorii kolejek, modelowaniu problemów demograficznych, zagadnieniach niezawodności. Każde przybycie(pojawienie się) zdarzenia jest traktowane jako narodziny, zaś każde zanikanie zdarzenia to śmierć. Można to także wyrazić przez przechodzenie procesu ze stanu i-tego w stan i-1 lub i+1.

Schemat systemu obsługi :



Klasyfikacja systemów kolejkowych:

1. *Względem algorytmu napływu zgłoszeń*: strumień wejściowy może być charakteryzowany przez ilość zgłoszeń w pewnej jednostce czasu, średni czas między kolejnymi zgłoszeniami, algorytmem deterministyczny lub probabilistycznym(stochastycznym). Źródło może mieć cechę grupowego napływu zgłoszeń. Klient ma możliwość reakcji na czas oczekiwania w kolejce(systemy ze stratą, z oczekiwaniem). Algorytm wejściowy może być stacjonarny lub jego parametry mogą zmieniać się w czasie.
2. *Względem obsługi zgłoszeń na stanowisku obsługi*: stanowisko może być wolne lub zajęte; można podać liczbę obsłużonych zgłoszeń w przedziale czasu lub średni czas obsługi. Tak samo jak algorytm napływu, algorytm zgłoszeń może być deterministyczny,probabilistyczny,stacjonarny,etc.
3. *Kolejkowanie zadań:* FIFO(first in first out), LIFO(last in first out), SIRO(service in random order), względem pewnego priorytetu.
4. *Pojemność kolejki:* w systemach z ograniczaną poczekalnią, zgłoszenie przybywające gdy kolejka jest pełna nie jest obsługiwane.
5. *Liczba stanowisk równoległej obsługi:* liczba identycznych stanowisk. Mogą one mieć jedną wspólną kolejkę albo oddzielne.\
6. *Opis zależnych stanowisk obsługi(*sieć kolejkowa).

Notacja Kendalla: jest to notacja w postaci **A/B/c/L/N** opracowana przez Davida G. Kendalla w 1953, w której poszczególne składowe oznaczają:
A – rozkład zmiennej opisującej czas między kolejnymi zgłoszeniami(algorytm zgłoszeń):

- M – rozkład wykładniczy
- D – rozkład deterministyczny(o stały odstępach czasu)
- E_{k} – rozkład Erlanga rzędu k-tego
- G – rozkład ogólny(*general*), zdefiniowany przez użytkownika

B - rozkład czasu obsługiwane

c - liczba równoległych stanowisk obsługi
L - wielkość poczekalni
N – wymiar źródła zgłoszeń

Jeżeli L i N są niepodane, oznacza to że są nieskończenie wielkie.

Właściwości systemu kolejkowego:

- $N(t)$ – liczba zgłoszeń przebywająca w systemie w momencie t;
- $c + L + 1$ stanów w których może znajdować się systemach
- jeżeli A oraz B mają rozkład wykładniczy z parametrami odpowiednio λ i μ, to parametry mają interpretację jako intensywność napływu zgłoszeń i ich obsługi, a wartości $1/\lambda$ i $1/\mu$ oznaczają średni czas między zgłoszeniami oraz średni czas obsługi; można także z charakteryzować obciążenie systemu $p = \lambda/\mu$.

Można także wprowadzić charakterystykę systemu w stanie ustalonym(po upływie „bardzo dużego czasu”).

Podstawowe systemy:

- **M/M/1 ze stratą -** opisywany jest markowskim procesem narodzin i śmierci, posiada dwa stany H_0 oraz H_1, odpowiadające braku zgłoszenia lub jego obecności w systemie, każde zgłoszenie przybywające w chwili gdy system obsługuje już inne zgłoszenie, jest odrzucane;
- **M/M/c ze stratą –** c+1 stanów, gdy wszystkie stanowiska obsługują zgłoszenia, nowe są odrzucane, źródło zgłoszeń przyjmowane jest jako wielowymiarowe;
- **M/M/1/L z oczekiwaniem** – system z jednym stanowiskiem obsługi, i L-wymiarową kolejką,
- **M/M/c/L**
- **M/M/1/N –** system ten opisuje np. problem konserwatora który obsługuje(naprawia) N urządzeń
- **M/M/c/N –** np. c konserwatorów naprawia N urządzeń
- **M/G/1 z nieograniczoną kolejką**
- **G/M/1 z nieograniczoną kolejką**
- **G/G/1 z nieograniczoną kolejką**

Priorytety zgłoszeń:

- Priorytet względny: pojawienie się zgłoszenia o wyższym priorytecie niż zdarzenia obsługiwanego nie powoduje przerwania obsługi. Po jej zakończeniu obsługiwane jest zdarzenie z najwyższym priorytetem.
- Priorytet absolutny: pojawienie się zgłoszenia o wyższym priorytecie niż zdarzenia obsługiwanego powoduje przerwanie obsługi. Zdarzenie to wraca do kolejki na właściwe sobie miejsce, stan obsługi jest zapamiętywany. Gdy w systemie nie ma zgłoszeń o wyższym priorytecie zdarzenie to jest „doobsługiwane”.

2. Realizacja symulacji.

Zrealizowaliśmy zmodyfikowaną wersję systemu D/G/c z nieskończoną kolejką:

- Napływ jest procesem Poissona z parametrem(intensywnością) λ: prawdopodobieństwo pojawienia się n klientów w czasie [t,t+τ] zależy jedynie od **<u>różnicy chwil czasowych τ</u>** i wynosi ono:

  P(v(t+τ)-v(t) = n) = $\frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{(-\lambda t)}$

  Wy naszej realizacji odstępy czasu są stałe więc liczba klientów przybyłych między chwilą t_n a t_{n+1} jest zmienną losową o rozkładzie Poissona. W programie można zadać parametr tego rozkładu
- Rozkład czasu obsługi jest dowolny(*general)* – w naszym przypadku jest to rozkład normalny. Także jego parametry mogą być dowolnie ustawiane.
- Istnieje c stanowisk obsługi
- Priorytet obsługi FIFO
- „Dzień symulacji" jest podzielony na <*tutaj trzeba ustalić liczbę*> dyskretnych chwil czasowych
- Proces napływu jest procesem ważonym: liczbę klientów wygenerowaną w programie przez dystrybucję procesu Poissona przemnażamy przez pewną funkcję wagową która umożliwia nam uwzględnienie np. tego że w godzinach popołudniowych i wieczornych do sklepu przychodzi więcej klientów niż rano
- Istnieje tyle kolejek ile stanowisk obsługi
- Nie wszystkie stanowiska są czynne, lecz są otwierane i zamykane w razie potrzeb
- Klienci mogą zmieniać kolejki jeżeli otwierana jest nowa kasa, a kolejka w której oczekują jest zbyt długa
- z punktu widzenia użytkownika wszystkie akcje odbywają się równocześnie, natomiast w programie realizowane są w określonej kolejności:
  1. Do systemu przybywają nowi klienci.
  2. Są przydzielani do najkrótszych kolejek.
  3. Klienci mogą przejść do krótszych, bardziej korzystnych kolejek.
  4. W razie potrzeb otwierane są nowe stanowiska obsługi/zamykane nadmiarowe.

Można by tu jebnąć też jakieś wykresy z przykładowej realizacji, ect.

Zastanawiam się czy ten proces napływu nie zastąpić jakimś normalnym w którym wartość oczekiwana i wariancja zależna od czasu?