

UNIwersYTET JAGIELLOŃSKI
INSTYTUT INFORMATYKI ANALITYCZNEJ
Studia stacjonarne

Praca magisterska

Nr albumu: 1167995

Wojciech Grabis

Implementacja wybranych modeli
makroekonomicznych DSGE

Opiekun pracy magisterskiej:
dr inż. Krzysztof Turowski

Kraków 2022

Spis treści

1	Modele DSGE	9
1.1	Wprowadzenie	9
1.1.1	Komponenty modeli DSGE	9
1.1.2	Podstawowe dobra rynkowe: konsumpcja oraz praca	10
1.1.3	Reprezentatywny agent	11
1.1.4	Teoria Realnego Cyklu Koniunkturalnego RBC	11
1.1.5	Teoria Nowej Ekonomii Keynesowskiej NEK	12
1.2	Problem gospodarstw	14
1.2.1	Funkcja użyteczności gospodarstw domowych	15
1.2.2	Budżet	17
1.2.3	Kapitał	19
1.2.4	Rozwiązanie problemu gospodarstw	19
1.2.5	Alternatywne rozwiązanie	21
1.3	Firmy	21
1.3.1	Funkcja produkcji	22
1.3.2	Poziom produktywności	22
1.3.3	Warunek czyszczenia rynku	22
1.3.4	Rozwiązanie problemu firm w modelu RBC	22
1.3.5	Firmy w modelu nowokeynesowskim	23
1.3.6	Rozwiązanie problemu firm w modelu NEK	24
1.4	Poziom cen	25
1.4.1	Koszt krańcowy w modelu RBC	26
1.4.2	Poziom cen w modelu NEK	26
1.5	Polityka monetarna	29
1.5.1	Reguła ustalania stopy procentowej	30
1.6	Sektor rządowy	30
1.6.1	Podatki	31
1.6.2	Budżet rządowy	31
1.6.3	Dofinansowanie sektora firm	32
1.7	Import	32
1.8	Szoki	34
1.8.1	Szok produktywności	34
1.8.2	Szok gospodarstw domowych	34
1.8.3	Szok polityki monetarnej	34
1.9	Przykładowe modele gospodarek	35
1.9.1	Model RBC	35
1.9.2	Model NEK	36

2	Implementacja rozwiązywania modeli	38
2.1	Wstęp	38
2.2	Równania modelu	40
2.2.1	Linearyzacja	41
2.2.2	Model liniowych racjonalnych oczekiwań	43
2.2.3	Rozszerzony model	43
2.3	Rozwiązywanie metodą Blancharda-Kahna	44
2.3.1	Macierz nieosobliwa	45
2.3.2	Uogólnione rozwiązanie	47
2.3.3	Zmienne statyczne	50
2.4	Estymowanie modelu DSGE	51
2.4.1	Układ równań modelu	52
2.4.2	Wnioskowanie bayesowskie	52
2.4.3	Wartości obserwowalne	53
2.4.4	Funkcja wiarygodności	54
2.4.5	Funkcja filtru	54
2.4.6	Algorytmy próbkowania	56
2.5	Prognozowanie modelu	59
2.5.1	Badanie szoku impulsowego	59
2.5.2	Prognozowanie metodą losowych ścieżek	60
3	Wyniki pracy	62
3.1	Linearyzacja modelu NEK	62
3.1.1	Stan ustalony	63
3.1.2	Linearyzacja równań	66
3.1.3	Pełna postać modelu	71
3.2	Opis implementacji	72
3.2.1	Struktura repozytorium	73
3.2.2	Wykorzystane biblioteki	74
3.2.3	Plik modelu	75
3.3	Wyniki prognozowania i estymacji	78
3.3.1	Wyniki prognozowania dla szoku produktywności w modelu NEK	78
3.3.2	Wyniki prognozowania dla szoku monetarnego w modelu NEK	79
3.3.3	Wyniki prognozowania dla szoku produktywności w modelu RBC	81
3.3.4	Wyniki estymacji bayesowskiej dla modelu gospodarki Irlandii	83
	Bibliografia	86

Wprowadzenie

Za historyczny początek makroekonomii uznaje się publikację książki Johna Maynarda Keynesa *Ogólna teoria zatrudnienia, procentu i pieniądza* (*General Theory of Employment, Interest, and Money*) w 1936 roku. Sukces publikacji oraz zaproponowanego nowego podejścia – makroekonomii – może zostać przypisany sytuacji gospodarczej panującej w latach 30. XX wieku. Keynes starał się wyjaśnić powód wystąpienia masowego bezrobocia w trakcie Wielkiego Kryzysu, który wystąpił w latach 1929-1933. Kryzys miał bardzo silny efekt na kraje zachodnie, oparte na systemie gospodarczym kapitalizmu, podczas gdy ZSRR, które opierało się o centralne planowanie oraz komunizm, doświadczyło silnego wzrostu ekonomicznego [15]. Dostępna teoria ekonomiczna w tym czasie sugerowała, że kryzys powinien zostać złagodzony przez deflację realnej płacy, jednak z czasem zauważono że ten efekt nie doprowadził do skrócenia czasu trwania depresji gospodarczej. Pojawiło się pytanie, czy rządowa interwencja w gospodarkę w tym czasie była wystarczająca, niestety brakowało podstawy teoretycznej do takiego działania i wielu ekonomistów bazowało te odczucia na intuicji. Książka Keynesa natomiast dostarczała teoretyczną interpretację podstaw zajścia kryzysu oraz argumentowała za zwiększeniem wpływu rządu [3]. W pracy zostało zaproponowane pojęcie zagregowanego popytu. Keynes argumentował, że agregowany popyt determinuje produkcję, nawet jeśli produkcja spadnie w pewnym momencie do początkowego poziomu, to efekt tego procesu jest długofalowy i powolny. Praca dodatkowo wprowadzała wiele podstawowych składowych późniejszej makroekonomii, tj. relację konsumpcji do dochodu, inwestycje autonomiczne oraz wpływ zmieniających się oczekiwań na agregowaną produkcję oraz popyt.

Korzystanie z agregowanych zmiennych opisujących wartości całej gospodarki, takie jak popyt, produkcja, inflacja lub międzynarodowy handel, stało się podstawą podejścia makroekonomicznego. Makroekonomia dostarczyła narzędzi, pozwalających na prowadzenie badań nad ogólnogospodarczymi trendami oraz zjawiskami. Szczególnie celem było wyjaśnienie zjawiska bezrobocia przymusowego – sytuacji gdy osoby nie mogą znaleźć zatrudnienia pomimo akceptacji płacy niższej niż rynkowa [15] – i podstaw teoretycznych istnienia cykli koniunkturalnych, tj. wpływowi krótkotrwałych wahań ogólnokrajowej produkcji na stan gospodarki, oraz wyznaczenie prognoz długotrwałego wzrostu gospodarczego [43].

Nowe podejście pozwoliło także na dalszy rozwój modeli ekonomicznych. Powstały kolejne modele czerpiące inspirację z pracy Keynesa. Wśród najważniejszych z nich można wymienić model *IS-LM*, zaproponowany przez Johna Hicksa w 1937 roku, model Modiglianiego z roku 1944 oraz model Kleina-Golbergera z roku 1955, który przedstawiał gospodarkę USA [15]. Jednym z problemów z pracą Keynesa był brak precyzyjnego modelu, który pozwalałby na porównanie go do teorii klasycznej. Te prace łączyły teorię Keynesa z klasyczną ekonomią w celu stworzenia modeli realnej gospodarki.

Przed przejściem do zmian zapoczątkowanych nowym podejściem ekonomicznym, pokrótce modele ekonomiczne starają się przy pomocy równań matematycznych uchwycić

relację między zmiennymi makroekonomicznymi rynku. Równania modelu oddają prawa oraz znane teorie ekonomiczne, pozwalając w zwięzły sposób oddać modelowany rynek gospodarczy. Pierwsze modele ekonomiczne można znaleźć już u ekonomistów klasycznych, takich jak David Ricardo lub Karol Marks. Podejście keynesowskie wprowadziło szersze wykorzystanie agregatów do opisu zachowań komponentów rynku.

Kolejny przełom w podejściu modelowania makroekonomicznego przyszedł w latach 80. XX wieku w postaci pracy Roberta Lucasa *Econometric policy evaluation: A critique*[35]. W tej pracy została podjęta krytyka ówczesnych keynesowskich modeli makroekonomicznych, które w tamtych czasach były opracowywane pod konkretną politykę i sytuację gospodarczą. Parametry występujące w równaniach modeli były zależne od zastosowanych reguł polityki gospodarczej np. polityki monetarnej. Nawet drobna zmiana w zastosowanych regułach mogła spowodować zmianę oczekiwań oraz zachowań jednostek w gospodarce. Lucas dalej argumentuje, że wykorzystanie takich modeli nie dostarcza żadnych praktycznych informacji na temat efektów badanych reguł polityki. Pojęcia zachowań i oczekiwań jednostek są wzięte z poziomu mikroekonomicznego, stąd pojawia się pytanie w jaki sposób je zasadnie odwzorować w strukturze modeli makroekonomicznych.

Odpowiedź na to pytanie dostarczył model gospodarczy opierający się o optymalizujących agentów, opublikowany w pracy Kydlanda i Prescottta z roku 1982 *Time to Build and Aggregate Fluctuations* [33], za którą autorom przyznano Nagrodę Nobla w dziedzinie ekonomii w 2004 roku. Ten model opierał się na połączeniu teorii cykli koniunkturalnych z teorią wzrostu gospodarczego, stąd jego późniejsza nazwa – model realnego cyklu koniunkturalnego (*Real Business Cycle Model*). Jednym z narzędzi zaprezentowanych w pracy było wprowadzenie reprezentacji dla nieuzasadnionych wahań w zmiennych ekonomicznych modelu – nazwanych szokami. Pod tym pojęciem rozumiemy wszelkie losowe zjawiska nie objęte przez prawa i aksjomaty ekonomiczne, np. nagłe przełomy technologiczne, kryzysy lub katastrofy klimatyczne, które prowadzą do wzrostu lub spadku produkcji. Autorzy zasugerowali opisanie szoków w postaci stochastycznych zmiennych, co pozwoliło na zgrabne ujęcie tych zewnętrznych procesów jako równań matematycznych.

Ważnym aspektem modeli realnego cyklu koniunkturalnego jest założenie występowania w gospodarce doskonałej konkurencji, zgodnie z którą optymalizujący agenci zawsze reagują efektywnie na wahania rynkowe, dostosowując swoje zachowania do zmiennych zgodnych ze stanem równowagi ekonomicznej. Starano się także argumentować za ograniczonym wpływem czynników monetarnych na wahania rynkowe, ponieważ samo wykorzystanie szoków technologicznych pozwoliło wygenerować realistyczne prognozy, zgodne z prawdziwymi zachowaniami cykli koniunkturalnych [21]. Rewolucja nurtu modeli realnego cyklu koniunkturalnego stała się podstawą dalszego rozwoju dziedziny modelowania ekonomicznego, która doprowadziła do powstania współczesnych modeli makroekonomicznych.

Oparcie teorii modeli realnego cyklu koniunkturalnego o doskonałą konkurencję oraz pełną elastyczność cen niestety miało swoje ograniczenia w badaniu wpływu polityki monetarnej. Powstały prace starające się wprowadzić i zbadać wpływ polityki monetarnej w takim środowisku gospodarczym (np. model z pracy Cooleya i Hansena *The Inflation Tax in a Real Business Cycle Model* [10]), którym nie udało się dostarczyć lepszych narzędzi do badania efektów polityki gospodarczej. Odpowiedź na ten problem przysłała z nurtem tzw. Nowej Ekonomii Keynesowskiej. Modele nowokeynesowskie w przeciwieństwie do modeli realnego cyklu koniunkturalnego starały się przedstawić rynek, w którym występuje konkurencja niedoskonała. Zgodnie z tym procesem optymalizujący agenci nie zawsze muszą podejmować efektywne decyzje zgodne ze stanem równowagi modelu. Najczęściej stosowanym wariantem we współczesnych modelach ekonomicznych

jest konkurencja monopolistyczna, w której w obliczu zmian firmom może np. nie opłacać się zaktualizować cen zgodnie z tą wynikającą ze stanu równowagi ekonomicznej. Z taką zmianą mogą wiązać się dodatkowe koszty lub może ona źle wyglądać w oczach zarządu lub inwestorów firmy. W związku z tym w modelach nowokeynesowskich pojawiają się mechanizmy pozwalające firmom na opóźnienie lub brak aktualizacji cen. Zastosowanie teorii Nowej Ekonomii Keynesowskiej doprowadziło do powstania współczesnych modeli DSGE (*Dynamic Stochastic General Equilibrium*), łączących nieefektywności zachowań agentów z agregatami ujmującymi konsumpcję różnorodnych towarów produkowanych zarówno na rynku krajowym jak i zagranicznym.

Dalszy rozwój modeli DSGE opierał się o wprowadzenie do modeli dodatkowych komponentów odpowiadających rzeczywistym elementom gospodarki. Prace Rotemberga i Woodforda [39], Woodforda [48] oraz Galiego [21] wprowadziły do modeli zmienne oraz układy równań mechanizmów polityki monetarnej oraz różnych strategii wykorzystywanych przez banki centralne. W pracy [21] dodatkowo zaprezentowano model małej otwartej gospodarki, który opisywał zachowanie gospodarki zależnej od importu oraz eksportu, charakteryzującej się małym wpływem na wahania zmiennych makroekonomicznych na rynku globalnym. Jako przykład takiej gospodarki można wymienić Polskę, dla której zaprezentowano model w [31], opierający się o reprezentację z pracy Galiego. Wśród innych ważnych prac można wymienić prace Smetsa oraz Woutersa, którzy opracowali model gospodarki strefy Euro [41] oraz gospodarki USA [42].

Równolegle z rozwojem modeli DSGE prowadzone były prace w tematyce metod rozwiązywania modeli. Rozwiązywanie modeli DSGE opiera się o stworzenie reprezentacji macierzowej dla równań oraz zmiennych ekonomicznych modelu. Praca Blancharda i Kahna [4] opisała metodę rozwiązywania równania macierzowego modelu oraz warunki istnienia unikalnego rozwiązania. Metoda ta zostanie szerzej opisana w rozdziale 2.3, jej ważnym ograniczeniem jest oparcie o warunek odwracalności jednej z macierzy układu równań modelu. Kolejne prace zaprezentowały rozwiązania pozwalające ominąć warunek odwracalności macierzy, takie jak metoda Simsa [40] oraz Kleina [30]. Metody te korzystając z dekompozycji QZ, pozwalały na rozwiązanie problemu nieodwracalności macierzy układu równań modelu.

W tym miejscu warto chwile poświęcić reprezentacji równań modelu DSGE. Powyższe metody korzystają z reprezentacji układu równań modelu w postaci liniowej, w związku z tym szeroko stosowana jest aproksymacja oryginalnego układu równań do postaci liniowej. Jednym ze stosowanych w pracy narzędzi jest przedstawiona w pracy Uhliga [45] metoda aproksymacji wokół stanu ustalonego, która w jednolity sposób aproksymuje model w postaci układu z ze zmiennymi reprezentującymi wahania od stanu ustalonego tj. niezmiennika równania macierzowego modelu, dokładniej opisanego w rozdziale 2.2.1.1. Ostatnim komponentem procesu rozwiązywania jest estymowanie wartości parametrów modelu. Parametry są zaszytymi zmiennymi modelu, w dużej mierze niezależnymi od przybranej polityki gospodarczej, opisującymi skłonności oraz relacje elementów gospodarki tj. cenowa elastyczność popytu, stopa dyskonta lub elastyczność substytucji. W związku z tym nie są one de facto zmiennymi makroekonomicznymi. Wartości tych parametrów są pozyskiwane poprzez badanie i analizę rynku, co jest w zasadzie jednym z problemów z którymi prognozowanie ekonomiczne gospodarki musi się zmierzyć. W związku z tym zostanie omówiona metoda opierająca się na wnioskowaniu bayesowskim na podstawie pracy Herbsta i Schorfheidego [26], pozwalająca przeprowadzić aproksymację dla wartości parametrów przy użyciu danych historycznych dla wartości parametrów oraz zmiennych gospodarczych dla poprzedzającego okresu czasu.

Obecnie modele DSGE są szeroko wykorzystywane przez banki centralne do prognozowania efektów polityki monetarnej oraz fiskalnej i rozmaitych szoków na rynku światowym. Wykorzystuje je m.in. Bank Rezerwy Federalnej w Nowym Jorku [16], Narodowy Bank Polski [31], Bank Szwedzki [11] oraz Centralny Bank Federacji Rosyjskiej [32].

Cel pracy

Podstawowym celem pracy jest zbadanie tematyki DSGE z punktu widzenia informacyjnego. Jakkolwiek modele te znajdują szerokie zastosowanie w pracy współczesnych ekonomistów to brakuje omówienia algorytmiczno-matematycznej strony rozwiązywania modeli. Opierając się na bazie ekonomicznych mechanizmów i reguł zbudowany zostanie zbiór komponentów oraz zmiennych ekonomicznych wraz z wiążącymi równaniami dla różnych wariantów modelowanych gospodarek. Następnie z tych komponentów zostaną zaprezentowane pełne modele DSGE, które wykorzystane zostaną do prezentacji algorytmów estymacji oraz rozwiązywania.

Integralną częścią pracy jest repozytorium zawierające implementację opisanych algorytmów rozwiązywania modeli DSGE, która została wykonana w języku Python w wersji 3.9. Do implementacji został dołączony również zbiór przykładowych modeli wykorzystywanych w pracy.

Układ pracy

Praca podzielona jest na trzy rozdziały. Pierwszy rozdział poświęcony jest teorii modeli DSGE. Zostaną omówione podstawy teoretyczne oraz mechanizmy modeli m.in. właściwości modeli realnego cyklu koniunkturalnego oraz modeli Nowej Ekonomii Keynesowskiej. W tej części zaprezentowana jest także struktura modeli – zmienne ekonomiczne oraz równania, reprezentujące zależności pomiędzy zmiennymi. Struktura zostanie omówiona rozpoczynając od podstawowych elementów skali mikro: gospodarstw domowych oraz firm. Następnie przedstawione zostaną rozszerzenia skali makro takie jak polityka monetarna, sektor rządowy oraz mechanizmy gospodarek opartych o import oraz eksport. Komponenty będą wzbogacone o różne warianty, pozwalające modelować różnorodne relacje oraz zachowania na rynkach ekonomicznych.

Drugi rozdział poświęcony jest implementacji modeli. Przedstawiona zostanie postać macierzowa równań modelu oraz etapy przygotowania, estymowania oraz prognozowania modelu:

1. Linearyzacja równań – aproksymacja ułatwiająca analizę modeli wykorzystująca logarytmiczną linearyzację. Metoda opiera się na charakteryzacji stanów równowagi, poprzez aproksymację Taylora logarytmicznego odchylenia zmiennych od stanu ustalonego.
2. Rozwiązywanie modeli – poszukiwanie rekurencyjnej postaci dla układu równań modelu, która zachowuje oryginalny stan równowagi. Ta część skupia się na sprawdzeniu warunku istnienia unikalnego ograniczonego rozwiązania oraz rozwiązuje model w celu znalezienia postaci, która zostanie wykorzystana w następnych etapach.
3. Estymacja parametrów – poszukiwanie rozkładu dla parametrów modeli przy pomocy wnioskowania bayesowskiego oraz algorytmów Monte Carlo. Jednym z problemów,

które modele starają się rozwiązać, jest brak dokładnych aproksymacji dla szeregu parametrów pojawiających się w modelu. Opisują one pewne ukryte skłonności na rynku, takie jak substytucja dobra, współczynnik deprecjacji kapitału lub współczynnik awersji do ryzyka.

4. Prognozowanie modelu – obliczenie prognozy dla zmiennych modelu w oparciu o postać rekurencyjną oraz wy-estymowaną kalibrację parametrów. W zależności od poszukiwanego efektu możemy wygenerować sekwencję prognozowanych zmiennych lub przy pomocy algorytmu losowych ścieżek znaleźć kwantyle, estymacje punktów oraz estymacje interwałów.

Ostatni rozdział pracy poświęcony jest przedstawieniu wyników zastosowanych metod. Wprowadzony zostaje model DSGE prostej gospodarki Nowej Ekonomii Keynesowskiej z wyprowadzeniem stanu ustalonego oraz linearyzacji. Następnie omówione jest repozytorium implementacji dołączone do pracy, poprzez przedstawienie struktury bazy kodu oraz zastosowanych bibliotek i ciekawych rozwiązań. Model zostaje następnie zaprezentowany w postaci pliku, podzielonego na poszczególne części opisujące zmienne, równania oraz dostępne przybliżenia parametrów oraz zmiennych modelu. Rozdział zakończony jest wynikami metod estymacji oraz prognozowania, które zostały przeprowadzone na przedstawionym liniowym modelu oraz dodatkowych modelach zaprezentowanych w tej części pracy.

Rozdział 1

Modele DSGE

1.1 Wprowadzenie

Dynamiczne Stochastyczne Modele Równowagi Ogólnej (DSGE, *Dynamic Stochastic General Equilibrium*) są obecnie szeroko stosowanymi narzędziami makroekonomicznymi. Na strukturę modeli składają się zmienne oraz wiążące je równania w ramach pewnych praw i tożsamości ekonomicznych. W tym rozdziale zostanie szerzej omówiona konstrukcja modeli makroekonomicznych DSGE wraz z teoretycznymi podstawami prezentowanych równań. Poszczególne rozdziały omawiają różne komponenty, składające się na typową gospodarkę. Dodatkowo w ramach podrozdziałów zostaną przedstawione warianty równań wynikające z charakterystyk modelowanych instytucji lub podmiotów gospodarczych.

Zmienne występujące w modelach DSGE można podzielić na następujące kategorie:

- Zmienne endogeniczne – zmienne opisujące wartości makroekonomiczne gospodarki, takie jak konsumpcja, produkcja, inwestycje lub stopy procentowe. Zmienne endogeniczne będą nazywane także zmiennymi stanu oraz oznaczane wielkimi literami.
- Parametry modelu – zmienne opisujące pewne własności agentów i innych komponentów modelu. Zgodnie z wprowadzeniem są one w dużej mierze niezależne od przybranej polityki gospodarczej, pośród nich można wymienić parametry opisujące wpływ kapitału na produkcję oraz skłonność konsumentów do wymiany jednego produktu na inny. Parametry będą oznaczane literami alfabetu greckiego.
- Zmienne egzogeniczne – zmienne opisujące szoki, tj. procesy stochastyczne będące źródłem wahań na rynku. Celem rozwiązania modeli DSGE jest zbadanie wpływu szoków na modelowaną gospodarkę. Zostaną one wprowadzone w podrozdziale 1.8 oraz będą oznaczane przez zmienne $\epsilon_{X,t}$ z odpowiednim symbolem w miejscu X , w zależności od opisywanego zjawiska.

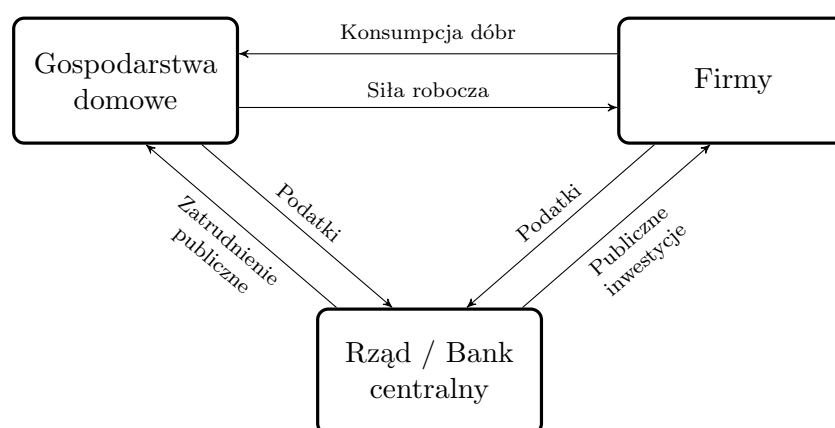
Powyższe zmienne i parametry są powiązane ze sobą w układzie równań modelu. Formy funkcyjne równań mają uzasadnienie ekonomiczne w istniejących uprzednio pracach teoretycznych lub są generalizacjami regularności wyprowadzonych z badań empirycznych zależności gospodarczych. Głównym zadaniem modeli DSGE jest wyznaczenie stanu gospodarki na bazie danych makroekonomicznych oraz odpowiedniej kalibracji parametrów, aby móc badać wpływ szoków na wartości zmiennych modelu.

1.1.1 Komponenty modeli DSGE

Modele DSGE powstały na bazie połączenia zachowań optymalizujących agentów, przejawiających pewne oczekiwania, z elementami makroekonomicznymi, wyrażanymi

przez zagregowane zmienne, opisujące stan całej gospodarki. Zgodnie z tym komponenty modelu można podzielić na elementy wywodzące się z perspektywy mikro oraz makro. Podstawowymi elementami skali mikro są gospodarstwa domowe oraz firmy. Gospodarstwa pełnią rolę siły roboczej oraz konsumentów, natomiast firmy są producentem dóbr na rynku. Następnie te elementy przekształcane są w agregatowe reguły makroekonomiczne oraz relacje, tworząc fundamenty mikroekonomiczne naszego modelu reprezentowane w skali makro. Łącząc te podstawy z pozostałymi komponentami makroekonomicznymi, takimi jak reguły prowadzonej polityki monetarnej lub interwencjonizm rządowy, tworzymy całościowy model gospodarki.

W celu przybliżenia zależności pomiędzy elementami poniższy schemat prezentuje uproszczone relacje w gospodarce:



Zgodnie z powyższym diagramem oraz wcześniejszymi informacjami, gospodarstwa przedstawiają siłę roboczą, zatrudnioną w sektorze firm w celu produkcji dóbr. Następnie firmy gotowe dobra sprzedają na rynku gospodarstwom domowym, co przekłada się na konsumpcję oraz wzrost użyteczności. Obie strony płacą podatki, które zasilają budżet państwa. Zgromadzone środki w budżecie następnie zostają wydane na wsparcie sektora firm poprzez publiczne inwestycje oraz w celu wsparcia sektora gospodarstw poprzez publiczne zatrudnienie lub programy socjalne. Powyższy diagram służy jedynie schematycznemu ujęciu oddziaływania komponentów, nie uwzględnia on takich relacji jak m.in. mechanizm inwestycji gospodarstw w firmy lub polityki banku centralnego, który wpływa na całość gospodarki poprzez ustalanie stóp procentowych oraz ustalanie zmian w zasobie pieniądza w gospodarce.

1.1.2 Podstawowe dobra rynkowe: konsumpcja oraz praca

W celu przedstawienia problemu gospodarstw domowych oraz firm, będziemy potrzebowali zdefiniować podstawowe dobra rynkowe w modelu: dobra konsumpcyjne oraz pracę.

Dobra konsumpcyjne są produktami tworzonymi przez firmy, które konsumenci nabywają w celu zwiększenia swojej użyteczności, interpretowanej jako miara "szczęścia". Początkowe modele będą opierały się na nierozróżnialności dóbr konsumpcyjnych – firmy produkują dobra oceniane przez konsumentów jako identyczne. Następnie układy równań zostaną rozszerzone o reprezentację rozróżnialnych typów dóbr, jednej z charakterystycznych cech modeli nowokeynesowskich. W takim środowisku gospodarczym konsumenci zainteresowani są nabyciem różnorodnego pakietu dóbr rynkowych, które są do pewnego stopnia wymienne między sobą.

Drugim podstawowym dobrem jest wyżej wspomniana praca. Gospodarstwa domowe pełnią rolę siły roboczej na rynku, w związku z tym pracę możemy interpretować jako dobro konsumpcyjne. Pracownicy decydują ile czasu poświęcić pracy w danym okresie, co przekłada się na zmianę użyteczności. Zaoszczędzony czas w wyniku redukcji pracy poświęcony jest na zwiększenie szczęścia w postaci użyteczności, np. przeznaczając go na rozwój własnego hobby lub spędzenie czasu z rodziną. Natomiast zwiększenie czasu pracy wpływa na użyteczność negatywnie. Przykładowo badanie modeli DSGE pozwala zbadać zachowanie gospodarstw domowych, czy odkrycie nowej technologii usprawniającej produkcję przekłada się na skłonność do redukcji czasu pracy.

1.1.3 Reprezentatywny agent

Podmioty gospodarcze takie jak konsumenci lub firmy nie mogą być bezpośrednio traktowane jako jednorodne. Zróżnicowanie w preferencjach i oczekiwaniach pojedynczych agentów prowadzi do trudnej do opisanego w efektywny sposób niejednorodności, przykładowo firmy produkujące unikalne dobra na rynek mogą przejawiać pewne monopolistyczne zachowania. W związku z tym w modelach makroekonomicznych stosowane jest uproszczenie poprzez zgrupowanie podmiotów w większe kategorie.

Proces grupowania w kategorie nazywany jest wprowadzaniem podmiotów reprezentatywnych. Reprezentatywne podmioty gospodarcze będą w naszym modelu odpowiadały za pewne kategorie agentów ekonomicznych, np. wprowadzimy podmiot reprezentujący pewną gałąź firm produkujących określone dobra lub wprowadzimy reprezentanta dla pewnej grupy konsumentów takich jak klasa niższa (średnia, wyższa), którzy przejawiają podobne preferencje dóbr rynkowych. Podmioty reprezentatywne będą stosowały postaci agregujące, które zostaną przedstawione przy odpowiednich elementach modelu.

1.1.4 Teoria Realnego Cyklu Koniunkturalnego RBC

Teoria modeli realnego cyklu koniunkturalnego (RBC, *Real Business Cycle*) była jedną z dominujących podstaw makroekonomicznych w latach po publikacji pracy Kydlanda i Prescottta [33], która doprowadziła do powstania i rozwoju metodyki modeli DSGE. Modele RBC były jednymi z pierwszych wprowadzających techniki łączące podstawy makroekonomiczne, tj. teorię cykli koniunkturalnych i agregaty makroekonomiczne, z fundamentami mikroekonomicznymi opisującymi zachowania agentów gospodarczych. Podmioty ekonomiczne są opisane jako optymalizujący agenci tj. konsumenci i firmy, którzy przejawiają pewne oczekiwania i zachowania oraz mają wpływ na gospodarkę poprzez dobieranie czasu pracy lub produkcji. Jednym z ważnych założeń modelu RBC jest założenie panowania doskonałej konkurencji na rynku gospodarczym, co przekłada się na sytuację w której agenci ekonomiczni będą reagować natychmiastowo na wahania, obrazowane poprzez zmianę zachowań oraz oczekiwań, w sposób optymalny z równowagą rynkową. Modele RBC argumentują, że źródłem wahań na rynku są zewnętrzne procesy, tj. procesy nie będące wynikiem zachowania modelu gospodarczego, generujące nieprzewidziane zmiany wartości zmiennych ekonomicznych. Te zjawiska nazywane są szokami. Jednym z kluczowych rozwiązań zaproponowanych w pracy Kydlanda i Prescottta było opisanie ich wartości poprzez procesy stochastyczne. Zgodnie z wcześniejszym wprowadzeniem, celem modelu jest przeprowadzenie analizy oddziaływania tych procesów na sytuację ekonomiczną w gospodarce.

Podsumowując fundamentalne własności modeli RBC mogą zostać opisane następująco[21]:

- Wydajność cyklu koniunkturalnego – modele RBC zakładają strukturę doskonałej konkurencji wśród gospodarstw domowych i firm, więc pojedyncze podmioty rynkowe mają znikomy wpływ na cenę (wszyscy agenci są cenobiorcami), a cena jest narzucana poprzez stan równowagi rynku.
- Podstawowym szokiem wpływającym na zmiany w produkcji oraz na inne zmienne makroekonomiczne jest szok technologiczny.
- Ograniczona rola polityki monetarnej – teoria RBC stara się wyjaśnić istnienie cykli koniunkturalnych w gospodarce, niezależnie od reguł czy nawet obecności polityki monetarnej.

Modele RBC pozwolą nam przedstawić zależności występujące w podstawowym ujęciu gospodarki, które następnie zostaną wykorzystane w celu konstrukcji modeli ekonomii nowokeynesowskich. W celu przedstawienia doskonałej konkurencji wprowadzimy dwa reprezentatywne dobra konsumpcyjne: pracę oraz produkty tworzone przez firmy (wszystkie firmy produkują towary wyceniane przez konsumentów w identyczny sposób). Podstawowe wersje problemów optymalizujących agentów pozwolą nam opisać metodę przekształcenia problemów decyzyjnych, opisujących zachowania agentów, w warunki pierwszego rzędu w postaci układu równań definiującego stan równowagi ekonomicznej. Zastosowanie tych technik sprowadza zależności mikroekonomiczne do formy makroekonomicznej.

W przedstawionych modelach pieniądza będzie reprezentowany w dosyć ograniczonym stopniu. Służyć on będzie jedynie do wyrażania wartości dóbr i kapitału na rynku, bez wprowadzenia ograniczeń na podaż pieniądza (ilość pieniądza w obiegu). Ta reprezentacja jest zgodna z ograniczoną rolą polityki monetarnej. Modele DSGE pozwalają w zwięzły sposób oddzielić abstrakcję reguł polityki monetarnej od podstawowego układu, opisującego zachowania optymalizujących podmiotów gospodarczych.

1.1.5 Teoria Nowej Ekonomii Keynesowskiej NEK

Współczesna teoria makroekonomii dzieli się na dwa główne nurty ekonomiczne, wcześniej wspomnianą teorię modeli realnego cyklu koniunkturalnego oraz teorię opartą o zasady keynesizmu zwaną Nową Ekonomią Keynesowską (*ekonomia nowokeynesowska, NEK*)[12]. Teoria ekonomii nowokeynesowskiej rozwijała się równolegle do metodyki RBC w latach 80. XX wieku, starając się wprowadzić fundamenty mikroekonomii do teorii wywodzących się z keynesizmu, tj. nieefektywności wahań rynkowych, zjawiska sztywności cen i płac oraz znaczenie polityki monetarnej [22]. W związku z tym kluczowa różnica pomiędzy obiema szkołami makroekonomicznymi sprowadza się do podejścia do zjawisk recesji i ekspansji gospodarczych. Teoria realnych cykli koniunkturalnych argumentuje za tym, że te zjawiska są naturalną cykliczną częścią gospodarki i po każdej recesji nadchodzi wzrost, który następnie może doprowadzić do pojawienia się ekspansji. W związku z tym teoria RBC argumentuje, że agregowana gospodarka jest w konkurencji doskonałej, a agenci w optymalny sposób reagują na wahania rynkowe. Teoria modeli nowokeynesowskich w przeciwieństwie zakłada, że nagłe zmiany – szoki rynkowe – mogą prowadzić do nieefektywnej reakcji agentów ekonomicznych, objawiającej się wystąpieniem kryzysu ekonomicznego. Te zjawiska z kolei są źródłem napędzającym wahania rynkowe.

Zmiana ta jest kluczowa w przypadku badania wpływu polityki monetarnej na sytuację ekonomiczną. W przypadku modeli RBC teoria argumentuje, że rząd nie ma wpływu na sytuację makroekonomiczną. Z każdą zmianą cen zmieniają się płace, a konsumenci są

w stanie kupić tyle samo towarów, co w przypadku zastosowania polityki stabilizującej inflację. Wahania są naturalnym elementem gospodarki, w związku z tym modele te często abstrahują od sektora monetarnego i rządowego. Nowa Ekonomia Keynesowska opierająca swe podstawy w teorii Keynesa stara się udowodnić znaczenie interwencji polityki monetarnej i rządowej w reakcji na zmiany gospodarcze. Przykładowo wystąpienie zjawiska sztywności płac może wymagać wprowadzenia do gospodarki programów socjalnych, w celu poprawienia sytuacji gospodarstw domowych.

W związku z tym w modelach nowokeynesowskich charakterystyczną cechą gospodarki jest wystąpienie zjawiska konkurencji niedoskonałej. Gospodarka w środowisku konkurencji doskonałej prowadzi do sytuacji w której firmy mają znikomy wpływ na obecny stan cen – dobra są nierozróżnialne, firmy w związku z tym biorą narzuconą cenę i zgodnie z nią ustalają produkcję. Konkurencja niedoskonała opiera się na wprowadzeniu rozróżnialności dóbr na rynku, a co za tym idzie firmy – producenci – nie zawsze będą chcieli zmieniać ceny zgodnie ze stanem równowagi rynkowej. W takiej sytuacji konsumenci będą dążyli do zaopatrzenia w pełen pakiet dóbr rynkowych, godząc się zapłacić nieoptymalną cenę w celu nabycia unikalnego dobra.

Przedstawione w pracy modele Nowej Ekonomii Keynesowskiej będą charakteryzowały się następującymi cechami[21]:

- Monopolistyczna konkurencja – typ konkurencji niedoskonałej, która zostanie opisana poniżej w sekcji 1.1.5.1.
- Sztywność cen – zjawisko opisujące zachowanie cen na rynku.
- Krótkoterminowy wpływ polityki monetarnej – przez zaistnienie lepkości cen, krótkoterminowe zmiany nominalnej stopy nie odpowiadają natychmiastowym zmianom w inflacji, co prowadzi do zmienności realnej stopy procentowej. Ta zmienność prowadzi do zmian w konsumpcji oraz inwestycji gospodarstw domowych, prowadząc do krótkoterminowych zmian w produkcji i zatrudnienia w gospodarce. Jest to efekt krótko chwilowy, gdyż z czasem sztywności cen i płac zanikają, normalizując te wartości ze stanem równowagi gospodarczej.

Modele nowokeynesowskie DSGE mogą zostać opisane jako synteza teorii Nowej Ekonomii Keynesowskiej z modelami RBC [22]. Wprowadzenie optymalizujących agentów, takich jak domostwa, opiera się o te same techniczne podstawy, rozszerzając jedynie wykorzystane formy równań w celu zobrazowania różnorodności dóbr rynkowych. Oba typy modeli wykorzystują te same równania opisujące szoki ekonomiczne oraz współdzielą wykorzystywane agregaty ekonomiczne. Przedstawione w pracy formy funkcyjne będą opisywane rozpoczynając od podstawowych wariantów, rozróżniając formy wykorzystywane w modelach nowokeynesowskich.

1.1.5.1 Monopolistyczna konkurencja

Monopolistyczna konkurencja jest szeroko stosowaną metodą przedstawienia konkurencji niedoskonałej we współczesnych modelach nowokeynesowskich. Historia teorii monopolistycznej konkurencji sięga pracy *The Theory of Monopolistic Competition* Edwarda Chamberlina z 1933 roku. W przypadku teorii konkurencji doskonałej cena maksymalizująca zysk każdego producenta jest równa wartości w stanie równowagi ekonomicznej [7], każde dobro rynkowe traktowane jest identycznie i ustalenie zawyżonej ceny doprowadziłoby do braku podaży na produkowane dobro. W związku z tym fundamentem

monopolistycznej konkurencji jest wprowadzenie wielu rozróżnialnych dóbr na rynek, każde z nich będzie produkowane przez pewien sektor firm obrazowany w modelu poprzez pojedynczą reprezentatywną firmę. Rozróżnialne dobra będą charakteryzowały się parametrem substytucji, opisującym jak konsumenci oceniają zamianę dobra na inne. W takiej sytuacji ustalenie ceny niezgodnej z warunkami równowagi gospodarczej nie będzie przekładało się na brak podaży produktu, jako że konsumenci dążą do uzyskania pełnego pakietu dóbr. Przykładowo kupno samochodu nie może być zastąpione przez zwiększenie ilości wyjść do restauracji lub kina. Każda reprezentatywna firma będzie produkowała unikalne dobro i dążyła do maksymalizacji zysku w obrębie tego produktu, co zostanie opisane w sekcji 1.3.5.

Zastosowanie monopolistycznej konkurencji we współczesnych modelach DSGE można przypisać już wczesnym modelom, takim jak np. praca Blancharda i Kiyotakiego z roku 1987 [5]. W ramach tych badań przedstawiono modele z podstawami mikroekonomicznymi, które starały się wyjaśnić wpływ monopolistycznej konkurencji na zjawisko sztywności cen oraz efekt zastosowania polityki monetarnej.

1.1.5.2 Sztywność/lepkość cen

Zjawiskiem sztywności cen nazywamy sytuację, kiedy ceny dóbr na rynku nie zmieniają się natychmiastowo wraz ze zmianą wartości, wynikającą ze stanu równowagi modelu. Istnienie lepkości motywowane jest pewnymi realnymi obserwacjami niedoskonałości rynku, np. zmiana cen może nieść za sobą pewien koszt (np. zmiana menu w sieci restauracji) lub pewną trudność wprowadzenia nowej ceny w dużej firmie, stąd agenci nie będą chcieli w każdym okresie dostosować cenę swoich produktów.

1.1.5.3 Mechanizm wyceny Calvo

Szeroko stosowaną techniką, opisującą metodę ustalania cen w modelach z monopolistyczną konkurencją, jest mechanizm wyceny Calvo. Jego zastosowanie będzie służyło do opisanego zjawiska sztywności w skali makro modelu, upraszczając metodę wyznaczania cen przez firmy w celu zaprezentowania prostego procesu dla reprezentatywnych firm. Mechanizm wyceny Calvo zostanie szerzej zaprezentowany w rozdziale 1.4.

1.2 Problem gospodarstw

Pierwszym elementem jaki zostanie wprowadzony są omówione wcześniej gospodarstwa domowe, które pełnią rolę siły roboczej oraz konsumentów dóbr produkowanych na rynku. Z problemem gospodarstw związana jest teoria wyboru konsumenta [19], która opisuje zachowania i zmiany oczekiwań tej grupy. Ten zbiór zachowań możemy podsumować następującymi własnościami:

- maksymalizacja użyteczności – konsumenci podejmują decyzje zapewniające im największy zysk,
- niezaspokojenie potrzeb – gospodarstwa zawsze zyskują na powiększeniu konsumpcji, czyli wzrostowi tej wartości będzie zawsze towarzyszył wzrost wartości użyteczności,
- wraz ze zwiększaniem konsumpcji danego produktu, przyrost zadowolenia z towaru maleje, wynika to z faktu dążenia gospodarstw do uzyskania zróżnicowanego pakietu dóbr.

1.2.1 Funkcja użyteczności gospodarstw domowych

Zachowanie gospodarstw domowych w modelu jest opisywane poprzez funkcję użyteczności. Docelowo gospodarstwa starają się dobrać odpowiednio zmienne ekonomiczne, tj. konsumpcja oraz czas pracy, w celu zmaksymalizowania swojej użyteczności. Ten problem można opisać w postaci znalezienia tych wartości dla których:

$$\max_{C_t, L_t} \mathbb{E} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(C_t, L_t), \quad (1.1)$$

gdzie w powyższym jako $U(C_t, L_t)$ oznaczamy wyżej wspomnianą funkcję użyteczności, natomiast poprzez C_t i L_t oznaczamy poszukiwaną konsumpcję oraz zatrudnienie w chwili t . Na koniec dodatkowo wprowadzamy parametr β opisujący międzyokresowy czynnik dyskontowy – jaką wagę przykładają gospodarstwa do użyteczności w kolejnych przyszłych okresach t . W przypadku rozbudowanych modeli powyższy problem zostaje rozszerzony także o maksymalizację względem innych zmiennych, m.in. wartości portfela obligacji oraz kapitału, co odpowiada sytuacji w której gospodarstwa mogą dodatkowo inwestować w zyski przyszłych okresów.

Zgodnie z warunkami wynikającymi z teorii wyboru konsumenta, funkcja $U(C_t, L_t)$ musi spełniać następujące własności:

- nienasycecie – być rosnącą w kierunkach zmiennych konsumpcji $C_t : \frac{\partial U}{\partial C_t} > 0$ oraz czasu wolnego ($H - L_t$), czyli malejąca dla czasu pracy $L_t : \frac{\partial U}{\partial L_t} < 0$ (jako H została arbitralnie oznaczona ilość czasu w tygodniu),
- wklęsła względem zmiennej konsumpcji $\frac{\partial^2 U}{\partial C_t^2} < 0$ oraz wypukła dla pracy $\frac{\partial^2 U}{\partial L_t^2} > 0$.

W kolejnej części zostaną przedstawione formy funkcyjne użyteczności gospodarstw domowych najczęściej spotykane w literaturze. Funkcje zostaną omówione rozpoczynając od podstawowej formy, opierającej się na pojedynczym dobrze konsumpcyjnym oraz pracy. Następnie zaprezentowana zostanie forma uwzględniająca rozróżnialność dóbr oraz dodatkowe rozszerzenia, m.in. w postaci funkcji uwzględniającej bilans pieniądza na rynku.

1.2.1.1 Funkcja użyteczności z pojedynczym dobrem

W przypadku modeli z pojedynczym dobrem konsumpcyjnym, najczęściej stosowaną w literaturze formą funkcyjną użyteczności jest:

$$U(C_t, L_t) = \frac{C_t^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \frac{L_t^{1+\phi}}{1+\phi}, \quad (1.2)$$

gdzie poprzez parametry σ oraz ϕ oznaczamy względną awersję do ryzyka dla odpowiednich zmiennych.

Powyższa forma nazywana jest funkcją użyteczności ze stałą względną awersją do ryzyka (CRRA, *Constant Relative Risk Aversion*) [46], której podstawową postać zapisujemy następująco:

$$u(c) = \begin{cases} \frac{c^{1-\theta}-1}{1-\theta} & \text{jeśli } \theta > 0, \theta \neq 1, \\ \ln c & \text{jeśli } \theta = 1. \end{cases} \quad (1.3)$$

Na marginesie można zauważyć, że $\lim_{\theta \rightarrow 1} \frac{c^{1-\theta}-1}{1-\theta} = \ln c$. Czynnik -1 w liczniku jest wartością stałą i jest najczęściej pomijany.

W celu pokazania własności funkcji CRRA, rozważmy sytuację dwóch dóbr separowanych addytywnie. Zgodnie z tym użyteczność możemy zapisać jako:

$$U = u(c_1) + u(c_2). \quad (1.4)$$

Pierwszą pochodną funkcji CRRA jest:

$$\frac{du}{dc} = c^{-\theta}. \quad (1.5)$$

Krańcowa stopa substytucji dóbr c_1 oraz c_2 może zostać wyrażona jako:

$$\frac{du/dc_1}{du/dc_2} = \frac{c_1^{-\theta}}{c_2^{-\theta}} = \left(\frac{c_2}{c_1}\right)^{\theta} \quad (1.6)$$

Rozwiązując dla względnego stosunku zmiennych konsumpcji dóbr $\frac{c_2}{c_1}$ mamy:

$$\frac{c_2}{c_1} = \left(\frac{du/dc_1}{du/dc_2}\right)^{1/\theta} \quad (1.7)$$

Zgodnie z powyższym otrzymujemy stałą wartość dla ilorazu zmiennych $\frac{c_2}{c_1}$, a parametr $1/\theta$ opisuje elastyczność stosunku dóbr.

1.2.1.2 Funkcja użyteczności rozróżnialnych dóbr

W tej części zostanie zaprezentowana forma funkcyjna gospodarstw w modelu nowej ekonomii keynesowskiej, opisana na podstawie pracy [21]. Ten wariant zakłada przedstawienie reprezentacji wielu dóbr w postaci funkcji użyteczności. Inną metodą wprowadzenia założeń monopolistycznej konkurencji jest zastosowanie modelu firm detalicznych oraz hurtowych, który zostanie zaprezentowany w dalszej części pracy w sekcji 1.3.5.

Jedną z głównych własności teorii nowej ekonomii keynesowskiej jest wprowadzenie wielu dóbr. W tym celu przyjmijmy model w którym produkowane jest continuum rozróżnialnych dóbr indeksowanych poprzez $i \in [0, 1]$. Gospodarstwa domowe ponownie wybierają konsumpcję oraz pracę w celu zmaksymalizowania $U(C_t, L_t)$, jednak konsumpcja C_t reprezentowana jest poprzez złożony indeks konsumpcji, agregujący konsumpcję poszczególnych dóbr $C_t(i)$.

Wykorzystywana forma funkcyjna agregującą konsumpcję dóbr jest dana poprzez funkcję agregującą CES (*Constant Elasticity of Substitution*):

$$C_t = \left(\int_0^1 C_t(i)^{1-\frac{1}{\xi}} di \right)^{\frac{\xi}{\xi-1}}. \quad (1.8)$$

Najważniejszą właściwością funkcji CES jest zachowanie stałej substytucji dóbr, tj. proporcja zmian w cenach oraz zmiana w ilościach dóbr pozostaje zawsze stała [37]. Została zaproponowana w pracy [17] jako spełniająca powyższą własność, na bazie analizy gospodarek w których występuje zjawisko monopolistycznej konkurencji.

Następnie mając dany indeks agregujący konsumpcje C_t , możemy przedstawić funkcję użyteczności $U(C_t, L_t)$ poprzez wcześniej zastosowaną formę CRRA:

$$U(C_t, L_t) = \frac{C_t^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \frac{L_t^{1+\phi}}{1+\phi}.$$

1.2.1.3 Użyteczność w modelu z pieniądzem

W przypadku wprowadzenia pieniędzy do modelu zmienia się sygnatura funkcji użyteczności:

$$U\left(C_t, \frac{M_t}{P_t}, L_t\right). \quad (1.9)$$

gdzie zmienna M_t opisuje saldo pieniężne w okresie t , a P_t to cena dobra konsumpcyjnego. Zakładamy, że funkcja użyteczności jest rosnąca i wklęsła względem wartości $\frac{M_t}{P_t}$, co przekłada się na sytuację w której gospodarstwa domowe zwiększają swoją użyteczność ze wzrostem siły pieniądza (salda pieniężnego) w stosunku do ceny dóbr.

Następnie $U(C_t, \frac{M_t}{P_t}, L_t)$ może przybierać reprezentację z separowaną addytywnie użytecznością (czynniki odpowiedzialne za pracę, konsumpcję oraz realny balans są addytywne względem siebie w formie użyteczności) lub konsumpcja i realny balans są nieseparowane addytywnie. Zastosowana forma zależy w dużej mierze od modelowanej gospodarki. Przykładowo w obszarze UE w okresie wprowadzenia waluty euro, zachowania konsumentów wskazywały na nieseparowalność bilansu pieniądza i konsumpcji [28].

W przypadku zastosowania separowalnej formy stosowana jest funkcja CRRA:

$$U\left(C_t, \frac{M_t}{P_t}, L_t\right) = \frac{C_t^{1-\sigma}}{1-\sigma} + \frac{(M_t/P_t)^{1-\nu}}{1-\nu} - \frac{L_t^{1+\varphi}}{1+\varphi}, \quad (1.10)$$

gdzie ν opisuje parametr względnej awersji do ryzyka dla bilansu pieniądza.

W przypadku braku addytywnej separowalności, w literaturze stosowana jest forma stałej względnej awersji do ryzyka: [21]:

$$U\left(C_t, \frac{M_t}{P_t}, L_t\right) = \frac{X_t^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \frac{L_t^{1+\varphi}}{1+\varphi}, \quad (1.11)$$

gdzie jako X_t opisujemy łączony indeks konsumpcji i realnego bilansu, który przykładowo może przyjmować formę:

$$X_t \equiv \left[(1-\theta) C_t^{1-\nu} + \theta \left(\frac{M_t}{P_t} \right)^{1-\nu} \right]^{\frac{1}{1-\nu}}.$$

1.2.2 Budżet

Z problemem decyzyjnym gospodarstw związane jest ograniczenie budżetowe. W każdym momencie t możemy z jednej strony wyodrębnić zmienne składające się na wydatki, tj. konsumpcja, inwestycje lub zakup obligacji, oraz z drugiej strony wyszczególnić wpływy i dochody gospodarstwa, m.in. zarobki z pracy, zwrot z kapitału oraz sprzedaż obligacji. Wiążąc te zmienne w postaci równania dostajemy budżet, który pozwoli nam ograniczyć, a następnie rozwiązać problem gospodarstw w celu wyznaczenia poszukiwanych warunków pierwszego rzędu.

W najprostszym modelu, pozbawionym obligacji oraz inwestycji, równanie budżetowe przyjmuje następującą postać:

$$P_t C_t = W_t P_t L_t, \quad (1.12)$$

gdzie P_t – poziom cen dobra konsumpcyjnego oraz W_t – płaca realna. Jednym z założeń wprowadzonych do modelu jest reprezentacja płacy oraz zwrotu z kapitału w postaci realnej, tj. niezależnej od obecnego poziomu cen w gospodarce, stąd wystąpienie elementu $W_t P_t$.

Budżet w modelu, z możliwością akumulowania kapitału przez gospodarstwa, prezentuje się jako równanie:

$$P_t(C_t + I_t) = W_t P_t L_t + R_t^K P_t K_t + D_t, \quad (1.13)$$

gdzie I_t to inwestycja w danym okresie (wyprodukowane towary przeznaczone na akumulację kapitału), D_t to wpływ z dywidend, a $R_t^K P_t K_t$ opisuje zysk z wygenerowanego kapitału K_t przy R_t^K będącym zmienną opisującą realny zwrot z kapitału.

W przypadku rozszerzenia równania podstawowego budżetu (1.12) o obligacje oraz podatki ryczałtowe (stałe podatki, które są niezależne od wartości produkcji lub konsumpcji), przedstawiamy to dodając zmienne odpowiadające obciążeniom fiskalnym oraz portfelowi obligacji:

$$P_t C_t + Q_t B_{t+1} = B_t + W_t P_t L_t - T_t, \quad (1.14)$$

gdzie B_{t+1} – ilość obligacji, które kupione w chwili t w cenie Q_t , osiągają termin zapadalności w $t + 1$. Każda z obligacji zapewnia jednostkę po dojrzeniu (czynnik B_t) oraz T_t – podatki ryczałtowe.

W przypadku dodania obligacji do modelu musimy dołączyć dodatkowe ograniczenie, które ma na celu wyeliminowanie z modelu możliwości udziału w piramidach finansowych:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \mathbb{E}_t\{B_T\} \geq 0, \text{ dla każdego } t \geq 0. \quad (1.15)$$

Powyższe zapewnia że gospodarstwa domowe nie będą próbowały zaciągać nieograniczonego długu, który nigdy nie zostanie spłacony.

Kolejnym wariantem reprezentacji budżetu jest równanie stosowane w przypadku modeli z rozróżnialnymi dobrami, ponownie mamy do czynienia z continuum dóbr indeksowanych przez $i \in [0, 1]$:

$$\int_0^1 P_t(i) C_t(i) di + Q_t B_{t+1} = B_t + W_t P_t L_t,$$

gdzie $P_t(i)$ oznacza cenę dobra i , natomiast $C_t(i)$ jest konsumpcją tego dobra.

W przypadku wprowadzenia pieniędzy do modelu, tj. wprowadzenie zmiennej M_t – salda pieniężnego oraz zastosowanie funkcji użyteczności o sygnaturze $U(C_t, \frac{M_t}{P_t}, L_t)$, budżet reprezentowany jest poprzez równanie:

$$P_t C_t + Q_t B_{t+1} + M_t = B_t + M_{t-1} + W_t P_t L_t. \quad (1.16)$$

Oznaczając $\mathcal{A}_t = B_t + M_{t-1}$ jako całkowite bogactwo na początku okresu t , powyższe przyjmuje postać:

$$P_t C_t + Q_t \mathcal{A}_{t+1} + (1 - Q_t) M_t = \mathcal{A}_t + W_t P_t L_t, \quad (1.17)$$

wraz z analogiczną formą warunku na ograniczenie zaciągania długu:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \mathbb{E}_t\{\mathcal{A}_T\} \geq 0, \text{ dla każdego } t \geq 0. \quad (1.18)$$

Tą reprezentację możemy interpretować jako: wszystkie finansowe aktywa \mathcal{A}_t dostarczają nam rentowność Q_t^{-1} , gdzie agenci mogą kupować usługi pieniężne w cenie jednostkowej $(1 - Q_t)$.

1.2.3 Kapitał

W modelach uwzględniających możliwość inwestowania w sektor firm, gospodarstwa domowe przeznaczają część swoich zysków w celu zakupu aktywów (będących wyprodukowanymi dobrami). Proces ten nazywany jest akumulacją kapitału oraz służy następnie generowaniu zysku w przyszłych okresach w postaci dywidend D_t . Ta relacja przedstawiona została w równaniu budżetu (1.13) jako zmienne: inwestycji I_t , kapitału K_t i realnego zwrotu z kapitału R_t^K (procent zysku z aktywów). Wpływ kapitału na funkcję produkcji zostanie ujęty w kolejnej sekcji przeznaczonej firmom 1.3.

Z kapitałem związane jest dodatkowo prawo ruchu, zgodnie z którym zakłada się, że podlega on deprecjacji pomiędzy kolejnymi okresami zgodnie z mnożnikiem opisywanym przez parametr $\delta \in [0, 1]$. W ogólnej postaci, zaprezentowanej w pracy [23], przedstawiane jest to w postaci równania:

$$K_{t+1} = (1 - \delta)K_t + \Phi\left(\frac{I_t}{K_t}\right)K_t. \quad (1.19)$$

W kolejnych sekcjach zostanie zastosowana uproszczona postać z pracy [13]:

$$K_{t+1} = (1 - \delta)K_t + I_t. \quad (1.20)$$

1.2.4 Rozwiązanie problemu gospodarstw

Mając dane równanie budżetowe oraz ustaloną funkcję użyteczności, możemy zastosować metodę mnożników Lagrange'a w celu rozwiązania problemu maksymalizacji użyteczności gospodarstw domowych. Funkcja Lagrange'a przyjmuje postać:

$$\mathcal{L}(C_t, \dots) = E_t \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t (U(C_t, L_t) - \lambda_t G(C_t, \dots)). \quad (1.21)$$

W powyższym jako $G(C_t, \dots)$ oznaczmy równanie budżetowe, przekształcając je do postaci $G(C_t, \dots) = 0$.

Następnie rozwiązując powyższy problem dostajemy równania – warunki pierwszego rzędu, wynikające z pochodnych cząstkowych:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_t} = \frac{\partial U}{\partial C_t} - \lambda_t \frac{\partial G}{\partial C_t} = 0, \quad (1.22)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L_t} = \frac{\partial U}{\partial L_t} - \lambda_t \frac{\partial G}{\partial L_t} = 0, \quad (1.23)$$

...

Po rozwiązaniu i przekształceniu powyższych dostajemy układ równań reprezentujący komponent gospodarstw domowych w modelu DSGE. W celu przedstawienia przekształceń posłużymy się przykładowymi równaniami modelującymi gospodarstwa. Problem maksymalizowania użyteczności jest dany poprzez:

$$\max_{C_t, L_t, B_{t+1}, K_{t+1}} E_t \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left(\frac{C_t^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \frac{L_t^{1+\phi}}{1+\phi} \right). \quad (1.24)$$

Następnie wprowadzimy ograniczenia na budżet oraz równanie deprecjacji kapitału:

- równanie budżetowe:

$$P_t(C_t + I_t) + Q_t B_{t+1} = B_t + W_t P_t L_t + R_t^K P_t K_t + D_t - T_t, \quad (1.25)$$

- równanie deprecjacji kapitału:

$$K_{t+1} = (1 - \delta)K_t + I_t. \quad (1.26)$$

Przekształcając równanie budżetowe oraz podstawiając $I_t = K_{t+1} - (1 - \delta)K_t$ dostajemy:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = \max_{C_t, L_t, B_{t+1}, K_{t+1}} \mathbb{E}_t \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t & \left[\left(\frac{C_t^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \frac{L_t^{1+\phi}}{1+\phi} \right) - \right. \\ & \left. \lambda_t \left(P_t C_t + P_t K_{t+1} - P_t(1-\delta)K_t + Q_t B_{t+1} - B_t - W_t P_t L_t - R_t^K P_t K_t - D_t + T_t \right) \right]. \end{aligned} \quad (1.27)$$

Następnie obliczamy pochodne cząstkowe, w przypadku zmiennych z indeksem t możemy pominąć E_t ponieważ $E_t X_t = X_t$, dostając:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_t} = C_t^{-\sigma} - \lambda_t P_t = 0, \quad (1.28)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L_t} = -L_t^\phi + \lambda_t W_t P_t = 0, \quad (1.29)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial B_{t+1}} = -\lambda_t Q_t + \beta \mathbb{E}_t (\lambda_{t+1}) = 0, \quad (1.30)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K_{t+1}} = -\lambda_t P_t + \beta \mathbb{E}_t \left(\lambda_{t+1} \left((1-\delta)P_{t+1} + R_{t+1}^K P_{t+1} \right) \right) = 0. \quad (1.31)$$

$$(1.32)$$

Łącząc dwa pierwsze równania otrzymujemy równanie podaży pracy:

$$W_t = L_t^\phi C_t^\sigma. \quad (1.33)$$

Podstawiając z pierwszego równania $\lambda_t = \frac{C_t^{-\sigma}}{P_t}$ do (1.30) otrzymujemy znaną w literaturze postać równania Eulera dla portfela obligacji:

$$-\frac{C_t^{-\sigma}}{P_t} Q_t + \beta \mathbb{E}_t \left(\frac{C_{t+1}^{-\sigma}}{P_{t+1}} \right) = 0 \quad (1.34)$$

$$Q_t = \beta \mathbb{E}_t \left(\left(\frac{C_t}{C_{t+1}} \right)^\sigma \frac{1}{\pi_{t+1}} \right), \quad (1.35)$$

gdzie jako $\pi_{t+1} = \frac{P_{t+1}}{P_t}$ oznaczamy inflację okresu $t+1$.

Następnie postępujemy analogicznie dla równania (1.31), w celu uzyskania postaci równania Eulera dla kapitału:

$$-\frac{C_t^{-\sigma}}{P_t} P_t + \beta \mathbb{E}_t \left(\frac{C_{t+1}^{-\sigma}}{P_{t+1}} \left(P_{t+1}(1-\delta) + R_{t+1}^K P_{t+1} \right) \right) = 0 \quad (1.36)$$

$$\frac{1}{\beta} \mathbb{E}_t \left(\frac{C_{t+1}}{C_t} \right)^\sigma = (1-\delta) + \mathbb{E}_t R_{t+1}^K. \quad (1.37)$$

Powyższe równania (1.33), (1.35), (1.37) tworzą reprezentację problemu gospodarstw domowych w modelu DSGE.

1.2.5 Alternatywne rozwiązanie

Alternatywnie układ równań, będący rozwiązaniem problemu gospodarstw, może zostać wyprowadzony poprzez analizę odchylenia od optimum rozwiązania. Jeśli spojrzymy na to odchylenie jako zwiększenie konsumpcji o wartość dC_t oraz zmniejszenie czasu pracy o dL_t , będziemy mieli zachowane:

$$\frac{\partial U}{\partial C_t} dC_t + \frac{\partial U}{\partial L_t} dL_t = 0, \quad (1.38)$$

dla każdej pary dC_t, dL_t spełniającej równanie budżetowe:

$$P_t dC_t = W_t P_t dL_t. \quad (1.39)$$

Gdyby powyższe warunki nie były zachowane, to nie znajdowalibyśmy się w optimum, gdyż moglibyśmy zwiększyć użyteczność poprzez odpowiednią zmianę C_t i L_t .

Łącząc uzyskane równania dostajemy rozwiązanie:

$$\frac{\frac{\partial U}{\partial L_t}}{\frac{\partial U}{\partial C_t}} = -W_t. \quad (1.40)$$

Rozważając analogicznie warunki dla pozostałych zmiennych możemy wyprowadzić pozostałe równania modelu.

1.3 Firmy

Firmy pełnią rolę producenta dóbr w modelach DSGE. Wyprodukowane dobra są następnie przeznaczone na konsumpcję lub pod postacią inwestycji wykorzystywane w celu akumulacji kapitału. W modelach z jednym dobrem ten komponent będzie opisywany poprzez pojedynczą reprezentatywną firmę, natomiast w przypadku teorii nowokeynesowskiej reprezentacja przyjmie formę zbioru reprezentatywnych firm, gdzie pojedynczy reprezentanci odpowiadają produkcji jednego unikalnego dobra. Poprzez dobór odpowiednich zmiennych, takich jak siła robocza L_t oraz kapitał K_t , ustalana jest produkcja Y_t dla każdego okresu t . W ogólności możemy to przedstawić jako formę funkcyjną:

$$Y_t = f(L_t, K_t). \quad (1.41)$$

Celem firm jest odpowiednie dobranie zmiennych w celu maksymalizacji zysku, co reprezentujemy poprzez rozwiązanie następującego problemu:

$$\max_{K_t, L_t} D_t = \max_{K_t, L_t} (P_t Y_t - W_t P_t L_t - R_t^K P_t K_t), \quad (1.42)$$

gdzie występujące zmienne odpowiadają poznanym wcześniej w ramach opisu problemu gospodarstw domowych. Powyższe może zostać zinterpretowane jako: dochodem firmy jest sprzedaż dóbr w całkowitej cenie $P_t Y_t$, który pomniejszony jest o płacę pracowników $W_t P_t L_t$ oraz koszt obrotu kapitałem $R_t^K P_t K_t$.

Powyższa forma funkcyjna może być rozszerzona o wprowadzenie dodatkowych form kapitału takich jak np. kapitał rządowy, który zostanie przedstawiony w sekcji 1.6.

1.3.1 Funkcja produkcji

W literaturze najczęściej stosowaną funkcją do opisu produkcji reprezentatywnej firmy jest funkcja Cobba-Douglasa, która została opisana w pracy [9]. Na bazie aproksymacji danych ekonomicznych z początku XX wieku została wyznaczona forma prezentująca się następująco:

$$Y_t = A_t K_t^\alpha L_t^{1-\alpha}, \quad (1.43)$$

gdzie A_t opisuje poziom produktywności w gospodarce. Jako parametr α oznaczamy elastyczność produkcji w odniesieniu do kapitału, co w tym przypadku przekłada się na α jako poziom udziału kapitału oraz $1 - \alpha$ jako poziom udziału siły roboczej.

1.3.2 Poziom produktywności

Poziom produktywności jest zmienną opisującą status, jakość oraz stan wiedzy na temat procesów produkcyjnych. W modelach służy oddzieleniu informacji o zmianie stanu technologicznego w gospodarce od problemu firm. Dodatkowo pozwala odwzorować losowe pozytywne lub negatywne zjawiska, m.in. korzystne zmiany polityczne lub nagłe katastrofy, w postaci rozszerzenia tej formy funkcyjnej o czynnik szoku, co zostanie szerzej przedstawiony w sekcji 1.8.1. Najczęściej poziom produktywności reprezentujemy jako proces autoregresyjny pierwszego rzędu:

$$\log A_t = (1 - \rho_A) \log \bar{A}_s + \rho_A \log A_{t-1},$$

gdzie w powyższym parametr ρ_A opisuje zmianę produkcji względem poprzedniego przedziału, natomiast $1 - \rho_A$ opisuje udział stanu ustalonego \bar{A}_s w zmianie wartości. Stan ustalony zostanie dokładniej omówiony w rozdziale 2.2.1.1.

1.3.3 Warunek czyszczenia rynku

Warunek czyszczenia rynku opisuje zależność pomiędzy produkowanymi dobrami oraz konsumowanymi lub inwestowanymi dobrami, gdyż wszystkie dobra wyprodukowane przez firmy w gospodarce muszą być odpowiednio za-alokowane w każdym okresie t . W najprostszym modelu bez możliwości inwestycji, opisujemy to jako równanie:

$$Y_t = C_t. \quad (1.44)$$

W przypadku wprowadzenia reprezentacji dla kapitału oraz inwestycji, powyższa forma może zawierać też dodatkowe powiązanie z inwestycjami:

$$Y_t = C_t + I_t. \quad (1.45)$$

Dodatkowo uwzględniając inwestycje publiczne I_t^G oraz wydatki rządowe G_t , wprowadzone w rozdziale 1.6, równanie czyszczenia rynku przybiera postać:

$$Y_t = C_t + I_t + G_t + I_t^G. \quad (1.46)$$

1.3.4 Rozwiązanie problemu firm w modelu RBC

Pozostałym do omówienia elementem jest konstrukcja równań, wynikających z komponentu firm w modelu. W tym celu potrzebujemy rozwiązać problem optymalizacyjny firm:

$$\max_{L_t, K_t} D_t. \quad (1.47)$$

W celu zaprezentowania powstałych równań posłużymy się modelem firm w środowisku doskonałej konkurencji z pojedynczą reprezentatywną firmą:

$$Y_t = A_t L_t^{1-\alpha} K_t^\alpha, \quad (1.48)$$

$$\max_{L_t, K_t} D_t = \max_{K_t, L_t} (Y_t P_t - W_t P_t L_t - R_t^K P_t K_t). \quad (1.49)$$

Równania następnie konstruujemy obliczając pochodne w celu scharakteryzowania optimum:

$$\frac{\partial \Pi_t}{\partial L_t} = (1 - \alpha) A_t L_t^{-\alpha} K_t^\alpha P_t - W_t P_t = 0, \quad (1.50)$$

$$\frac{\partial \Pi_t}{\partial K_t} = \alpha A_t L_t^{1-\alpha} K_t^{\alpha-1} P_t - R_t^K P_t = 0. \quad (1.51)$$

$$(1.52)$$

Reorganizując dostajemy ostateczne równania budujące komponent firm w modelu:

$$Y_t = A_t L_t^{1-\alpha} K_t^\alpha, \quad (1.53)$$

$$W_t = (1 - \alpha) A_t L_t^{-\alpha} K_t^\alpha = (1 - \alpha) \frac{Y_t}{L_t}, \quad (1.54)$$

$$R_t^K = \alpha A_t L_t^{1-\alpha} K_t^{\alpha-1} = \alpha \frac{Y_t}{K_t}, \quad (1.55)$$

$$Y_t = C_t + I_t. \quad (1.56)$$

1.3.5 Firmy w modelu nowokeynesowskim

Przed przejściem do pozostałych komponentów modelu DSGE, zostanie omówiona reprezentacja komponentu firm w modelach Nowej Ekonomii Keynesowskiej.

Jedną z metod wprowadzenia do modelu wielu heterogenicznych dóbr konsumenckich oraz monopolistycznej konkurencji jest rozdzielenie firm na dwie kategorie: firmy produkujące dobra pośrednie – sektor hurtowy – oraz firmy produkujące dobra końcowe – sektor detaliczny. Pod pojęciem produkcji dóbr końcowych rozumiane jest przygotowanie optymalnego pakietu, składającego się z różnorodnego zestawu dobranych poszczególnych dóbr pośrednich. W takim modelu firmy pośrednie są de facto jedynym producentem w modelu. Możemy zastosować, analogiczne dla gospodarstw domowych, reprezentację użyteczności z poprzednich rozdziałów i przenieść problem reprezentacji monopolistycznej konkurencji na sektor firm. Poniższe modele zostały opracowane na bazie prac [8], [23] oraz [12].

Zakładamy że w sektorze detalicznym mamy zachowane warunki doskonałej konkurencji. Każda firma tego sektora postępuje zgodnie z warunkami stanu równowagi modelu, a co za tym idzie wszystkie są cenobiorcami tj. poszczególne nie mają wpływu na cenę. Zgodnie z tym firmy produkujące dobra końcowe będą reprezentowane poprzez pojedynczą reprezentatywną firmę. W przypadku sektora hurtowego zakładamy, że istnieje continuum firm indeksowanych przez $j \in [0, 1]$, każda produkująca pewne unikalne dobro.

Najczęściej stosowaną formą funkcyjną do przedstawienia produkcji reprezentatywnej firmy sektora końcowego jest agregator Dixita-Stiglitz[17]:

$$Y_t = \left(\int_0^1 Y_{j,t}^{\frac{\psi-1}{\psi}} dj \right)^{\frac{\psi}{\psi-1}}, \quad (1.57)$$

gdzie $Y_{j,t}$ oznacza produkcję firmy j ze zbioru continuum sektora hurtowego $[0, 1]$, natomiast parametr ψ opisuje elastyczność substytucji. Agregator Dixita-Stiglitz został wcześniej wykorzystany do alternatywnej metody wprowadzenia niedoskonałej konkurencji, korzystającej z reprezentacji gospodarstw domowych.

Wprowadzając następnie jako zmienną $P_{j,t}$ cenę dobra produkowanego przez firmę j , celem sektora produkującego dobra końcowe będzie rozwiązanie problemu:

$$\max_{Y_{j,t}} \left(P_t Y_t - \int_0^1 P_{j,t} Y_{j,t} dj \right), \quad (1.58)$$

gdzie poprzez problem $\max_{Y_{j,t}}$ rozważamy problem maksymalizacji dla wszystkich $j \in [0, 1]$.

Następnie będziemy chcieli przedstawić sektor firm pośrednich – producentów dóbr na rynku, które zgodnie z założeniami będą miały wpływ na ustalanie cen produkowanego dobra. Produkcja firmy j z sektora hurtowego opisywana jest poprzez funkcję Cobba-Douglasa, analogicznie do wcześniejszej reprezentacji z modelu RBC:

$$Y_{j,t} = A_t K_{j,t}^\alpha L_{j,t}^{1-\alpha}. \quad (1.59)$$

gdzie $K_{j,t}$ jest zmienną kapitału firmy j , a $L_{j,t}$ jest zatrudnieniem tej firmy.

Celem firmy hurtowej jest rozwiązanie problemu minimalizacji kosztów:

$$\min_{L_{j,t}, K_{j,t}} \left(W_t P_t L_{j,t} + R_t^K P_t K_{j,t} \right). \quad (1.60)$$

Powyższa różni się od optymalizacji zysku firm z równania (1.42), zw względu na fakt, że produkcja w przypadku firm pośrednich jest narzucona przez rozwiązanie problemu firm dóbr końcowych (1.58).

1.3.6 Rozwiązanie problemu firm w modelu NEK

W celu rozwiązania problemu firm dóbr pośrednich zostanie zastosowana metoda mnożników Lagrange dla (1.60), przy ograniczeniu (1.59):

$$\mathcal{L}_j = W_t P_t L_{j,t} + R_t^K P_t K_{j,t} + \mu_{j,t} \left(Y_{j,t} - A_t K_{j,t}^\alpha L_{j,t}^{1-\alpha} \right). \quad (1.61)$$

Obliczając pochodne cząstkowe powyższego, dostajemy następujące równania charakteryzujące stan równowagi modelu:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_j}{\partial L_{j,t}} = W_t P_t - (1 - \alpha) \mu_{j,t} A_t K_{j,t}^\alpha L_{j,t}^{-\alpha} = 0, \quad (1.62)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_j}{\partial K_{j,t}} = R_t^K P_t - \alpha \mu_{j,t} A_t K_{j,t}^{\alpha-1} L_{j,t}^{1-\alpha} = 0. \quad (1.63)$$

Przekształcając oraz podstawiając równanie (1.59) dostajemy:

$$L_{j,t} = (1 - \alpha) \frac{\mu_{j,t}}{P_t} \frac{Y_{j,t}}{W_t}, \quad (1.64)$$

$$K_{j,t} = \alpha \frac{\mu_{j,t}}{P_t} \frac{Y_{j,t}}{R_t^K}. \quad (1.65)$$

Mnożnik Lagrange'a z powyższych równań będziemy traktowali jako realny koszt krańcowy, który oznaczmy jako:

$$MC_{j,t} = \frac{\mu_{j,t}}{P_t}. \quad (1.66)$$

Następnie rozważmy problem sektora firm dóbr końcowych, dany poprzez maksymalizację zysku (1.58):

$$\max_{Y_{j,t}} \left(P_t Y_t - \int_0^1 P_{j,t} Y_{j,t} dj \right). \quad (1.67)$$

Podstawmy do powyższego produkcję z równania (1.57):

$$\max_{Y_{j,t}} \left(P_t \left(\int_0^1 Y_{j,t}^{\frac{\psi-1}{\psi}} dj \right)^{\frac{\psi}{\psi-1}} - \int_0^1 P_{j,t} Y_{j,t} dj \right) = \max_{Y_{j,t}} D_t. \quad (1.68)$$

Następnie zauważmy że powyższy problem jest symetryczny dla każdej firmy $z \in [0, 1]$, w związku z czym rozważmy jedną firmę z . Warunek optimum dla powyższego problemu jest dany poprzez:

$$\frac{\partial \Pi_t}{\partial Y_{z,t}} = \frac{\psi}{\psi-1} P_t \left(\int_0^1 Y_{j,t}^{\frac{\psi-1}{\psi}} dj \right)^{\frac{\psi}{\psi-1}-1} \frac{\psi-1}{\psi} Y_{z,t}^{\frac{\psi-1}{\psi}-1} - P_{z,t} = 0. \quad (1.69)$$

Porządkując:

$$P_t \left(\int_0^1 Y_{j,t}^{\frac{\psi-1}{\psi}} dj \right)^{\frac{1}{\psi-1}} Y_{z,t}^{\frac{-1}{\psi}} = P_{z,t}, \quad (1.70)$$

$$P_t \left(\left(\int_0^1 Y_{j,t}^{\frac{\psi-1}{\psi}} dj \right)^{\frac{\psi}{\psi-1}} \right)^{\frac{1}{\psi}} Y_{z,t}^{\frac{-1}{\psi}} = P_{z,t}. \quad (1.71)$$

$$(1.72)$$

W powyższym mamy agregator wykorzystany w równania produkcji (1.57), stąd podstawmy Y_t :

$$P_t Y_t^{\frac{1}{\psi}} Y_{z,t}^{\frac{-1}{\psi}} = P_{z,t}. \quad (1.73)$$

Rozwiązując dla $Y_{z,t}$ dostajemy:

$$Y_{z,t} = Y_t \left(\frac{P_t}{P_{z,t}} \right)^{\psi}. \quad (1.74)$$

Obliczone równanie nie jest częścią finalnego układu równań dla problemu firm NEK, zostanie natomiast wykorzystane do wyznaczenia poziomu cen dla dóbr w końcowym modelu.

1.4 Poziom cen

Kolejnym niezbędnym elementem modelu gospodarki jest układ równań reprezentujący poziom cen P_t na rynku. Ta część zostanie omówiona początkowo dla pojęcia kosztu krańcowego w gospodarce z jednym dobrem RBC, w celu stworzenia podstaw które zostaną wykorzystane do analizy modeli Nowej Ekonomii Keynesowskiej. W sytuacji gospodarki nowokeynesowskiej wartość poziomu cen będzie odnosiła się do średniej cen dóbr na rynku. Dodatkowo zostanie omówione zjawisko sztywności cen, które zostanie wprowadzone przy pomocy mechanizmu Calvo.

1.4.1 Koszt krańcowy w modelu RBC

W celu wyprowadzenia równania opisującego realny koszt krańcowy MC_t , będziemy potrzebowali na początku znaleźć postać dla całkowitego kosztu produkcji TC_t . W tej części zostanie zastosowany model firm RBC zaprezentowany wcześniej w sekcji 1.3.4, zgodnie z tym całkowity oraz krańcowy koszt produkcji są zdefiniowane jako:

$$TC_t P_t = W_t P_t L_t + R_t^K P_t K_t, \quad (1.75)$$

$$MC_t = \frac{\partial TC_t}{\partial Y_t}. \quad (1.76)$$

Następnie potrzebujemy wyprowadzić postać dla L_t oraz K_t przy pomocy zmiennych W_t , R_t^K , Y_t oraz A_t , co zostanie następnie podstawione do postaci TC_t .

Korzystając z równań (1.54) oraz (1.55), wyprowadzając L_t dostajemy:

$$L_t = \frac{1 - \alpha}{\alpha} K_t \frac{R_t^K}{W_t}. \quad (1.77)$$

Podstawiając powyższą postać do wzoru opisującego produkcję (1.53) możemy wyznaczyć wartość K_t :

$$Y_t = A_t \left(\frac{1 - \alpha}{\alpha} \frac{R_t^K}{W_t} K_t \right)^{1-\alpha} K_t^\alpha \quad (1.78)$$

$$K_t = \frac{Y_t}{A_t} \left(\frac{\alpha W_t}{(1 - \alpha) R_t^K} \right)^{1-\alpha}. \quad (1.79)$$

Następnie podstawiając z powrotem K_t do równania (1.77) otrzymujemy postać dla L_t :

$$L_t = \frac{Y_t}{A_t} \left(\frac{\alpha W_t}{(1 - \alpha) R_t^K} \right)^{-\alpha}. \quad (1.80)$$

Koszt całkowity po podstawieniu (1.80) oraz (1.79) do postaci (1.75) po przekształceniach wyraża się jako:

$$TC_t = \frac{Y_t}{A_t} \left(\frac{W_t}{1 - \alpha} \right)^{1-\alpha} \left(\frac{\alpha}{R_t^K} \right)^{-\alpha}. \quad (1.81)$$

Powyższa postać pozwala nam ostatecznie wyrazić koszt krańcowy jako:

$$MC_t = \frac{1}{A_t} \left(\frac{W_t}{1 - \alpha} \right)^{1-\alpha} \left(\frac{\alpha}{R_t^K} \right)^{-\alpha}. \quad (1.82)$$

W przypadku modeli RBC powyższe równanie pozwala znaleźć stan ustalony dla poziomu płac realnych W_t . Stosuje się w tym przypadku zależność teoretyczną dla teorii RBC $\bar{MC}_t = P_t$, co w przypadku zastosowania realnego kosztu krańcowego możemy sprowadzić jako $MC_t = \frac{\bar{MC}_t}{P_t} = 1$, dzięki czemu dostajemy postać wiążącą zmienne R_t^K , W_t oraz A_t . Poza tym to równanie nie jest częścią układu równań modelu.

1.4.2 Poziom cen w modelu NEK

W przypadku modeli Nowej Ekonomii Keynesowskiej problem wyznaczenia poziomu cen komplikuje się o rozważenie problemu wyceny w środowisku heterogenicznych dóbr.

Podstawowym założeniem modeli nowokeynesowskich jest wprowadzenie niedoskonałej konkurencji do gospodarki, która opiera się o nadanie firmom możliwości ustalania cen. Zgodnie z tym ceny dóbr nie zawsze będą równe stanowi równowagi modelu. Odpowiada to realnej sytuacji, kiedy firmy preferują utrzymanie poprzednich cen, gdyż zmiana ceny może nieść dodatkowe koszty np. zmiana cenników lub w przypadku monopolistycznych firm preferencyjne jest utrzymanie wysokich marży na produkty. To zjawisko nazywane jest sztywnością cen oraz zostanie opisane poprzez zastosowanie mechanizmu Calvo [6].

Definicja 1.4.1 (Wycena Calvo)

W każdym okresie t , pewien ułamek $(1 - \theta)$ firm jest losowany w celu zmiany cen, dla $0 < \theta < 1$. Pozostałe firmy θ pozostawiają swoje ceny zgodnie z zastosowaną regułą sztywności cen:

- pozostawienie takich samych cen jak w poprzednim okresie:

$$P_{j,t} = P_{t-1}, \quad (1.83)$$

- zaktualizowanie cen przez współczynnik inflacji docelowej π^* :

$$P_{j,t} = \pi^* P_{t-1}, \quad (1.84)$$

- zaktualizowanie cen korzystając ze współczynnika inflacji poprzedniego okresu π_{t-1} :

$$P_{j,t} = \pi_{t-1} P_{t-1}. \quad (1.85)$$

1.4.2.1 Poziom cen firm producentów dóbr pośrednich

Podobnie jak w przypadku modelu RBC w celu wyznaczenia poziomu cen skorzystamy z równania reprezentującego całkowity koszt produkcji (1.75), za pomocą którego następnie wyznaczmy równanie kosztu krańcowego z postaci (1.76). Przekształcając równania (1.64) oraz (1.65) uzyskujemy:

$$L_{j,t} = \frac{1 - \alpha}{\alpha} K_{j,t} \frac{R_t^K}{W_t} \quad (1.86)$$

W związku z czym możemy zastosować wyprowadzenie z poprzedniego rozdziału dla modelu firm z jednym dobrem konsumpcyjnym:

$$MC_{j,t} = \frac{1}{A_t} \left(\frac{W_t}{1 - \alpha} \right)^{1-\alpha} \left(\frac{\alpha}{R_t^K} \right)^{-\alpha}. \quad (1.87)$$

Kolejnym krokiem będzie zastosowanie reguły Calvo do ustalenia poziomu cen P_t . W przypadku tego modelu użyta zostanie pierwsza reguła mechanizmu (1.83). W celu odróżnienia ceny rynkowej P_t od ceny zmienianej przez firmę, wprowadzimy oznaczenie $P_{j,t}^*$ dla aktualizowanej ceny. Problem firmy $j \in [0, 1]$ produkującej dobra pośrednie może być alternatywnie opisany jako:

$$\max_{P_{j,t}^*} \mathbb{E}_t \sum_{i=0}^{\infty} (\beta\theta)^i \left(\frac{P_{j,t}^* Y_{j,t+i}}{P_{t+i}} - TC_{j,t+i} \right). \quad (1.88)$$

Dodatkowo skorzystamy z wyznaczonego równania (1.74) uogólniając je do postaci:

$$Y_{j,t+i} = Y_{t+i} \left(\frac{P_{j,t}^*}{P_{t+i}} \right)^{-\psi}. \quad (1.89)$$

Następnie podstawimy postać dla kosztu całkowitego $TC_{j,t+i} = Y_{j,t+1}MC_{j,t+1}$ w celu przygotowania postaci do obliczenia pochodnej cząstkowej:

$$\max_{P_{j,t}^*} \mathbb{E}_t \sum_{i=0}^{\infty} (\beta\theta)^i \left(\frac{P_{j,t}^*}{P_{t+i}} Y_{t+i} \left(\frac{P_{j,t}^*}{P_{t+i}} \right)^{-\psi} - Y_{t+i} \left(\frac{P_{j,t}^*}{P_{t+i}} \right)^{-\psi} MC_{j,t+i} \right). \quad (1.90)$$

Rozwiązanie powyższego problemu jest opisane przez warunek:

$$\frac{\partial *}{\partial P_{j,t}^*} = \mathbb{E}_t \sum_{i=0}^{\infty} (\beta\theta)^i \left((1-\psi) \frac{1}{P_{t+i}} Y_{t+i} \left(\frac{P_{j,t}^*}{P_{t+i}} \right)^{-\psi} + \psi \frac{1}{P_{j,t}^*} Y_{t+i} \left(\frac{P_{j,t}^*}{P_{t+i}} \right)^{-\psi} MC_{j,t+i} \right) = 0 \quad (1.91)$$

Upraszając postać poprzez podstawienie równania (1.89) oraz dodatkowe przekształcenia:

$$\mathbb{E}_t \sum_{i=0}^{\infty} (\beta\theta)^i Y_{j,t+i} \left(\frac{P_{j,t}^*}{P_{t+i}} - \frac{\psi}{\psi-1} MC_{j,t+i} \right) = 0 \quad (1.92)$$

Do powyższej postaci wrócimy później w rozdziale 3.1, gdzie przy pomocy aproksymacji logarytmicznej równanie zostanie uproszczone do postaci liniowej.

1.4.2.2 Rynkowy poziom cen

Pozostałym do przedstawienia jest rynkowy poziom cen P_t . W tym celu wyjdziemy z równania opisującego agregowaną produkcję dóbr końcowych, co opisuje agregator Dixita-Stiglitz (1.57):

$$Y_t = \left(\int_0^1 Y_{j,t}^{\frac{\psi-1}{\psi}} dj \right)^{\frac{\psi}{\psi-1}}. \quad (1.93)$$

Do powyższego podstawiamy (1.74):

$$Y_t = \left(\int_0^1 \left(Y_t \left(\frac{P_t}{P_{z,t}} \right)^{\psi} \right)^{\frac{\psi-1}{\psi}} dj \right)^{\frac{\psi}{\psi-1}}. \quad (1.94)$$

Przekształcamy oraz porządkujemy

$$Y_t = Y_t P_t^{\psi} \left(\int_0^1 \left(\frac{1}{P_{z,t}^{\psi}} \right)^{\frac{\psi-1}{\psi}} dj \right)^{\frac{\psi}{\psi-1}}, \quad (1.95)$$

$$P_t = \left(\int_0^1 \left(\frac{1}{P_{z,t}} \right)^{\psi-1} dj \right)^{\frac{1}{1-\psi}} \quad (1.96)$$

dostając ostatecznie:

$$P_t^{1-\psi} = \int_0^1 P_{j,t}^{1-\psi} dj \quad (1.97)$$

Następnie stosując regułę mechanizmu Calvo (1.83) rozbijamy w powyższym całkę na θ firm które pozostawiają swoją poprzednią cenę, oraz firmy które aktualizują cenę:

$$P_t^{1-\psi} = \int_0^{\theta} P_{t-1}^{1-\psi} dj + \int_{\theta}^1 P_t^{*1-\psi} dj \quad (1.98)$$

Rozwiązujemy:

$$P_t^{1-\psi} = [jP_{t-1}^{1-\psi}]_0^\theta + [jP_t^{*1-\psi}]_\theta^1 \quad (1.99)$$

Dostając równanie opisujące rynkowy poziom cen:

$$P_t^{1-\psi} = \theta P_{t-1}^{1-\psi} + (1-\theta)P_t^{*1-\psi} \quad (1.100)$$

W powyższych przekształceniach możemy porzucić indeksowanie cen przez j jako, że problem jest symetryczny dla każdej firmy $j \in [0, 1]$.

1.4.2.3 Inflacja

Pozostałym równaniem związanym z poziomem cen w modelach nowokeynesowskich jest równanie na stopę inflacji:

$$\Pi_t = \frac{P_t}{P_{t-1}}. \quad (1.101)$$

1.5 Polityka monetarna

W celu zaprezentowania polityki monetarnej posłużymy się prostym modelem gospodarki z obligacjami państwowymi. W związku z tym zastosujemy wcześniej przedstawiony problem gospodarstw domowych z portfelem obligacji B_t oraz ze zmienną Q_t opisującą cenę nabycia obligacji w okresie t . Zostało to ujęte w postaci równania budżetowego:

$$P_t C_t + Q_t B_{t+1} = B_t + W_t P_t L_t. \quad (1.102)$$

Następnie zastąpimy zmienną Q_t przez nową zmienną R_t^Q reprezentującą realną stopę procentową:

$$Q_t = \frac{1}{R_t^Q}. \quad (1.103)$$

Korzystając z wyprowadzonych wcześniej równań dla rozwiązania problemu gospodarstw, zmienne te będą związane z resztą układu modelu poprzez równanie (1.35):

$$\frac{1}{R_t^Q} = \beta \mathbb{E}_t \left(\left(\frac{C_t}{C_{t+1}} \right)^\sigma \frac{1}{\pi_{t+1}} \right). \quad (1.104)$$

Kolejnym etapem jest związanie realnej stopy procentowej z nominalną stopą procentową:

$$R_t^Q = R_t^{Q*(1-\rho_Q)} R_{t-1}^{Q\rho_Q}, \quad (1.105)$$

gdzie ρ_Q jest nazywane parametrem wygładzającym, natomiast R_t^{Q*} jest nominalną stopą procentową.

Celem polityki monetarnej jest stabilizowanie cen na rynku, czemu odpowiada niska inflacja. Podstawowym narzędziem banku centralnego będzie ustalanie nominalnej stopy procentowej, zdefiniowanej poprzez R_t^{Q*} . W kolejnej części zostaną opisane reguły ustalania nominalnej stopy procentowej bazujące na inflacji i luce produktu krajowego brutto (PKB), tj. ilorazowi wartości produkcji na rynku i wartości stanu ustalonego produkcji.

W przypadku stosowania modelu z reprezentacją zasobu pieniądza na rynku, polityka monetarna dodatkowo ustala reguły ilości zasobu pieniężnego na rynku. W pracy prezentacja reguł ustalania podaży pieniądza M_t została pominięta, przykładowe reguły i ich oddziaływanie na gospodarkę zostały omówione m.in. w pracy [21].

1.5.1 Reguła ustalania stopy procentowej

Szeroko stosowana w modelach reguła ustalania nominalnej stopy procentowej, wykorzystywana między innymi w pracach [12] oraz [26], jest dana poprzez następujący wzór:

$$R_t^{Q*} = \bar{R}_s \pi^* \left(\frac{\pi_t}{\pi^*} \right)^{\psi_1} \left(\frac{y_t}{\bar{y}_s} \right)^{\psi_2}, \quad (1.106)$$

gdzie zmienna \bar{R}_s to stan ustalony stopy procentowej, π^* opisuje docelową wartość inflacji (*targeted inflation rate*), stosunek $\frac{y_t}{\bar{y}_s}$ nazywany jest luką PKB, natomiast ψ_1 oraz ψ_2 to dodatkowe kontrolujące parametry.

W celu wyjaśnienia genezy zaprezentowanego wzoru po zlogarytmowaniu równanie (1.106) przybiera postać:

$$\log R_t^{Q*} = \log (\bar{R}_s \pi^*) + \psi_1 \log \frac{\pi_t}{\pi^*} + \psi_2 \log \frac{y_t}{\bar{y}_s}. \quad (1.107)$$

Reorganizując dostajemy:

$$\log R_t^{Q*} = \log \bar{R}_s + (1 - \psi_1) \log \pi^* + \psi_1 \log \pi_t + \psi_2 \log \frac{y_t}{\bar{y}_s}. \quad (1.108)$$

Powyższy wzór nazywany jest "zmodyfikowaną regułą Taylora". Podstawiając nowe zmienne w miejsce logarytmów zmiennych otrzymujemy postać oryginalnej reguły Taylora, która została opisana w pracach [44] [23]. Ogólną formę tej metody ustalania nominalnej stopy procentowej możemy przepisać następująco:

$$R_t^{Q*} = \theta + \psi_1 \pi_t + \psi_2 y_t^x, \quad (1.109)$$

gdzie wartość y_t^x opisuje lukę PKB (opisywaną w postaci (1.108) poprzez logarytm ilorazu obecnej produkcji do stanu ustalonego), natomiast jako $\theta = \bar{R}_s + (1 - \psi_1) \pi^*$ został opisany czynnik stały modelu reprezentowany przez parametry, docelową wartość inflacji oraz stan ustalony stopy procentowej. W przypadku gdy $\psi_1 > 0$ oraz $\psi_2 > 0$ wtedy realna stopa procentowa dostosowuje się, zapewniając stabilizację inflacji oraz produkcji [12].

Innym wariantem upraszczającym regułę Taylora jest specjalny przypadek eliminujący zależność od luki PKB:

$$R_t^{Q*} = \bar{R}_s + \psi_1 \pi_t \quad (1.110)$$

Powyższa postać została zastosowana w modelach z prac [23] oraz [21], gdzie dodatkowo została szerzej opisana teoria ekonomiczna związana z zastosowaniem tej reguły.

1.6 Sektor rządowy

Sektor rządowy w gospodarce odpowiada za politykę fiskalną. Rząd ustala rodzaje i kwoty podatków, z których wpływy następnie są przeznaczane na programy socjalne oraz dofinansowanie sektora firm. Zazwyczaj w modelach DSGE podatki dzieli się na dwie kategorie:

- podatki ryczałtowe – podatek w formie stałej opłaty,
- podatki zaburzające – podatki nakładane na konsumpcję oraz przepracowany czas.

Podatki ryczałtowe są ustalane jako obciążenie stałą kwotą i nie wpływają na zmianę oczekiwań i zachowań agentów ekonomicznych, dodatkowo ten podatek nakładany jest na całą grupę agentów [12]. Wprowadzenie tych zobowiązań nie zaburza efektywności działania gospodarki. Natomiast w przypadku podatków zaburzających, zmiana kwoty będzie niosła za sobą zmiany w zachowaniach agentów. Podatki nakładane na dochody domostw mogą prowadzić do sytuacji zmieniającej dynamikę cen na rynku, w której konsumenci są w gorszej pozycji niż płacąc to samo obciążenie w postaci podatku ryczałtowego [2].

Przedstawione postaci funkcyjne dla podatków, budżetu i wydatków rządu opierają się o model przedstawiony w pracach [12] i [23]. W następnych sekcjach zostaną przedstawione formy funkcyjne pozwalające na dofinansowanie firm i wsparcie sektora domostw, odpowiednio w postaci kapitału publicznego oraz emitowania obligacji. Alternatywne metody przedstawienia sektora rządowego tj. wprowadzenie pomocy socjalnej oraz publicznego zatrudnienia są przedstawione w pracy [12].

1.6.1 Podatki

Wprowadzenie podatków ryczałtowych do modelu gospodarki odbywa się poprzez dodanie nowej wartości ekonomicznej Tr_t , która jest kwotą obciążenia ryczałtowego. Ta zmienna może być wprowadzona do formy odpowiadającej ograniczeniu budżetu gospodarstw w najprostszym wariancie w postaci:

$$P_t C_t = W_t P_t L_t - Tr_t. \quad (1.111)$$

W przypadku drugiej kategorii porządków zaburzających wyróżniamy:

- Podatki nakładane na dochody – wprowadzimy dodatkowy parametr τ^T opisujący opodatkowanie dochodu. Następnie zostanie on wprowadzony do równania budżetu w postaci mnożnika dla wpływów gospodarstw:

$$P_t C_t = (1 - \tau^Y) W_t P_t L_t. \quad (1.112)$$

Inną metodą wprowadzenia podatków dochodowych jest osobne opodatkowanie każdego źródła dochodu, wprowadzając do równania budżetu odpowiednie pomniejszenie o obciążenia dla każdej kategorii:

$$P_t (C_t + I_t) = (1 - \tau^L) W_T P_t L_t + (1 - \tau^K) R_t^k P_t K_t. \quad (1.113)$$

W tym przypadku kategorie podatków są reprezentowane przez opodatkowanie pracy τ^L oraz wpływu z kapitału τ^K .

- Podatki nakładane na konsumpcję – w podobny sposób jak w przypadku podatków dochodowych, wprowadzamy nowy parametr opodatkowania τ^C odpowiednio zmieniając równanie budżetu:

$$(1 + \tau^C) P_t (C_t + I_t) = W_t P_t L_t. \quad (1.114)$$

1.6.2 Budżet rządowy

Podatki następnie trafiają do budżetu rządu, który jest reprezentowany, podobnie jak w przypadku gospodarstw domowych, poprzez równanie budżetowe. W pracy zostanie przedstawiony model oparty o następującą postać:

$$B_{t+1} Q_t + TAX_t = B_t + P_t G_t + P_t I_t^G. \quad (1.115)$$

W powyższym lewa strona reprezentuje przychody rządu, B_{t+1} odpowiada portfelowi obligacji zakupionemu przez gospodarstwa domowe. Rząd wypuszcza B_{t+1} obligacji w momencie t , za które gospodarstwa płacą jednostkowo Q_t . Portfel obligacji oraz cena jednostkowa została szerzej opisany w poprzedniej sekcji poświęconej polityce monetarnej 1.5. Ostatnim elementem jest TAX_t opisujący całkowity podatek wpływający do budżetu:

$$TAX_t = \tau_t^C P_t(C_t + I_t) + \tau^L W_T P_t L_t + \tau^K R_t^K P_t K_t + Tr_t. \quad (1.116)$$

Prawa strona równania budżetowego (1.115) opisuje obciążenia rządowe. Rząd wykupuje od gospodarstw domowych obligacje państwowe B_t , zakupione w poprzednim okresie po jednostkowej cenie. Wartość G_t opisuje wydatki rządowe, a zmienna I_t^G reprezentuje kwotę inwestycji w obecnym okresie czasu. Wartości G_t oraz I_t^G są ilością dóbr w danym przedziale czasowym, stąd uzyskanie kwoty kosztów wymaga przemnożenia przez cenę dóbr P_t .

1.6.3 Dofinansowanie sektora firm

W tej części zostanie przedstawiona reprezentacja inwestycji rządowych w sektor firm. W tym celu rozszerzymy funkcję produkcji dóbr na rynku (1.43) oraz (1.59), poprzez wprowadzenie dodatkowego czynnika odpowiadającemu zakumulowanemu kapitałowi rządowemu:

$$Y_t = A_t K_t^{\alpha_1} L_t^{\alpha_2} K_t^{G\alpha_3}, \quad (1.117)$$

gdzie w powyższym zmienna K_t^G jest zmienną kapitału rządowego, a K_t jest poprzednio opisaną zmienną odpowiadającą wpływowi z kapitału sektora prywatnego – gospodarstw domowych. Parametry α_1 , α_2 oraz α_3 opisują udział poszczególnych czynników na produkcji.

Dla kapitału rządowego dodatkowo dokładamy, analogicznie jak dla kapitału prywatnego, równanie ruchu:

$$K_{t+1}^G = (1 - \delta_g) K_t^G + I_t^G, \quad (1.118)$$

gdzie δ_g jest współczynnikiem deprecjacji kapitału rządowego.

1.7 Import

Wszystkie poprzednie komponenty skupiały się na stworzeniu modelu gospodarki zamkniętej, w którym firmy oraz gospodarstwa domowe nie mogły sprzedawać oraz kupować towarów na zagranicznym rynku. W tej części zostanie omówione przedstawienie gospodarki otwartej, wprowadzając podstawowy element handlu międzynarodowego – reprezentacje importu oraz eksportu dóbr. Dodatkowo zostanie założone, że zaprezentowana gospodarka ma znikomy wpływ na rynek światowy, czyli że skala produkcji krajowej jest znikoma w porównaniu do rozmiaru rynku. Taki system ekonomiczny jest nazywany małą gospodarką otwartą, wśród przykładowych krajów spełniających te cechy można wymienić Polskę.

W celu zaprezentowania komponentu skorzystamy z modeli opracowanych dla gospodarki Polski w pracach [24] oraz [31], dodatkowo posiłkując się uwagami zamieszczonymi w książce [21].

Gospodarka światowa w zaprezentowanym modelu zostanie przedstawiona w postaci continuum gospodarek krajowych indeksowanych przez $i \in [0, 1]$. Możemy tą reprezentację

interpretować jako odcinek $[0, 1]$, w którym pojedyncze punkty odpowiadają małym krajowym rynkom. W takim modelu zachowania oraz wydajność pojedynczych gospodarek nie wpływa na gospodarkę światową, gdyż każda z nich odpowiada punktowi miary zero (korzystając np. z miary Lebesgue'a).

Wprowadzenie importowanych dóbr jest dokonane poprzez wprowadzenie podziału konsumpcji C_t na: konsumpcję dóbr krajowych $C_{H,t}$ oraz indeks agregujący dobra importowane $C_{F,t}$. Konsumpcja C_t jest zdefiniowana przez łączony indeks konsumpcji:

$$C_t = [(1 - \alpha)^{\frac{1}{\eta}} (C_{H,t})^{\frac{\eta-1}{\eta}} + \alpha^{\frac{1}{\eta}} (C_{F,t})^{\frac{\eta-1}{\eta}}]^{\frac{\eta}{\eta-1}}, \quad (1.119)$$

gdzie przyjmujemy $\eta > 0$ oraz $\alpha \in [0, 1]$. Parametr α może być interpretowany jako miarę otwartości gospodarki krajowej [31], w przypadku gdy $\alpha = 0$ równanie (1.119) sprowadza się do równania gospodarki zamkniętej, natomiast $\alpha = 1$ opisuje sytuację w której cała konsumpcja pochodzi z importu.

W przypadku konsumpcji dóbr krajowych dla kategorii dóbr $j \in [0, 1]$ stosujemy funkcję agregującą CES daną wzorem:

$$C_{H,t} = \left(\int_0^1 C_{H,t}(j)^{\frac{\xi-1}{\xi}} dj \right)^{\frac{\xi}{\xi-1}}. \quad (1.120)$$

Indeks konsumpcji dóbr importowanych $C_{F,t}$ podobnie reprezentujemy przez funkcję agregującą CES:

$$C_{F,t} = \left(\int_0^1 C_{i,t}^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} dj \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}. \quad (1.121)$$

Poszczególne indeksy dla gospodarek $C_{i,t}$ dane są przez funkcję agregującą CES, analogiczną do postaci (1.120) przy konsumpcji $C_{i,t}(j)$ dóbr $j \in [0, 1]$:

$$C_{i,t} = \left(\int_0^1 C_{i,t}(j)^{\frac{\xi-1}{\xi}} dj \right)^{\frac{\xi}{\xi-1}}. \quad (1.122)$$

Parametr ξ , zastosowany w powyższych funkcjach agregujących, opisuje elastyczność substytucji dóbr produkowanych w dowolnym kraju produkcji. Parametr γ opisuje elastyczność substytucji dóbr produkowanych przez różne kraje, natomiast parametr η opisuje elastyczność substytucji dóbr produkowanych na rynku krajowym z zagranicznymi.

Równanie budżetu gospodarstw zostaje rozszerzone o wydatki poświęcone dobrom importowanym z rynku światowego:

$$\int_0^1 P_{H,t}(j) C_{H,t}(j) dj + \int_0^1 \int_0^1 P_{i,t}(j) C_{i,t}(j) dj di + \mathbb{E}_t(Q_{t+1} D_{t+1}) = D_t + W_t L_t. \quad (1.123)$$

W powyższym $P_{H,t}(j)$ jest ceną dobra j na rynku krajowym, analogicznie $P_{i,t}(j)$ jest ceną dobra j na rynku kraju opisywanego przez i . Czynniki D_t opisuje zysk z portfela (obligacji oraz udziałów) w czasie t , natomiast Q_{t+1} jest zmienną opisującą czynnik dyskontujący pomiędzy okresem t a $t + 1$ na rynku krajowym.

Dobra eksportowane są ujęte w postaci równania czyszczenia rynku, rozszerzonego o konsumpcję towarów krajowych na rynkach zagranicznych:

$$Y_t = C_{H,t} + \int_{[0,1]} C_{H,t}^i di, \quad (1.124)$$

gdzie $C_{H,t}^i$ opisuje popyt kraju $i \in [0, 1]$ na produkcję dobra produkowanego w gospodarce krajowej w okresie t .

1.8 Szoki

Szoki w modelu pełnią rolę zewnętrznych niezależnych procesów, których dynamika zmian nie jest efektem konstrukcji równań modelu. Zmienne opisujące te zjawiska są nazywane zmiennymi egzogenicznymi modelu DSGE. Szoki są głównym źródłem procesów stochastycznych i są one opisane jako zmienne losowe odwzorowujące pewne procesy świata realnego, np. szok technologiczny może być nagłym odkryciem w dziedzinie inżynierii produkcji, szok surowcowy opisujący nagłe zmiany u dostawców, zmiany atmosferyczne lub katastrofy klimatyczne.

1.8.1 Szok produktywności

Szok produktywności jest jednym z podstawowych szoków wykorzystywanych w modelach. Odpowiada zjawisku wzrostu jakości oraz efektywności procesów produkcyjnych. W pierwszych modelach miał na celu przedstawienie głównej siły napędzającej dynamikę zmian gospodarczych.

Wprowadzenie szoku do modelu odbywa się poprzez dodanie do formy funkcyjnej produktywności zmiennej losowej $\epsilon_{A,t}$. Zachowujemy założenie, że na zmianę produktywności nie ma efektu działanie polityki monetarnej oraz fiskalnej. Rozkład zmiennej szoku jest jednym z parametrów wejściowych modelu, stąd poniższa forma nie wprowadza dodatkowych ograniczeń. Rozszerzoną definicję produktywności przedstawia równanie:

$$\log A_t = (1 - \rho_A) \log \bar{A}_s + \rho_A \log A_{t-1} + \epsilon_{A,t}. \quad (1.125)$$

1.8.2 Szok gospodarstw domowych

Problem gospodarstw domowych jest innym z elementów, które mogą zostać rozszerzone o zewnętrzny szok. Interpretacją takiego zjawiska jest np. wariancja w niecierpliwości gospodarstw do konsumpcji. W przypadku badania wpływu tego szoku na parametry ekonomiczne gospodarki, zmieniamy sygnaturę funkcji użyteczności gospodarstw do przykładowej postaci:

$$U(C_t, L_t, g_{Ct}) = g_{Ct} \frac{C_t^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \frac{L^{1+\phi}}{1+\phi}, \quad (1.126)$$

gdzie w powyższym g_{Ct} jest procesem opisującym niecierpliwość konsumpcji, który występuje jako dodatkowy mnożnik użyteczności. W przypadku tej zmiennej, podobnie jak w przypadku szoku produktywności, zastosujemy postać autoregresyjną pierwszego rzędu:

$$\log g_{Ct} = (1 - \rho_C) \log \bar{g}_C + \rho_C \log g_{Ct-1} + \epsilon_{C,t}. \quad (1.127)$$

1.8.3 Szok polityki monetarnej

Szok polityki monetarnej związany jest z równaniem ustalającym realną stopę procentową R_t^Q (1.105). Wprowadzony zostaje jako dodatkowy czynnik zaburzający wartość realnej stopy procentowej:

$$R_t^Q = R_t^{Q* (1-\rho_R)} R_{t-1}^{Q\rho_R} S_t^m. \quad (1.128)$$

W przypadku szoku monetarnego może on zostać opisany bezpośrednio przez wartość szoku, jak ma to miejsce w modelu z pracy [26]:

$$S_t^m = \epsilon_{R,t}. \quad (1.129)$$

Inną stosowaną postacią szoku monetarnego jest znana postać procesu autoregresyjnego pierwszego rzędu, zgodnie z modelem zaprezentowanym w pracy [12]:

$$\log S_t^m = (1 - \rho_m) \log \bar{S}_s^m + \rho_m \log S_{t-1}^m + \epsilon_{R,t}. \quad (1.130)$$

1.9 Przykładowe modele gospodarek

Jako podsumowanie zostaną przedstawione dwa pełne przykłady modeli, które wykorzystują formy funkcyjne oraz komponenty przedstawione wcześniej: pierwszy opisujący podstawowy wariant teorii RBC i drugi dla Nowej Ekonomii Keynesowskiej.

1.9.1 Model RBC

Zaprezentowany w tej części model RBC postara się przedstawić złożenie wyprowadzonych wcześniej komponentów w celu zobrazowania prostej gospodarki. Jedynym źródłem wahań zmiennych ekonomicznych będzie zastosowanie szoku technologicznego w ramach produktywności.

Reprezentatywne gospodarstwa optymalizują funkcję użyteczności poprzez odpowiedni dobór konsumpcji, pracy oraz rozmiaru kapitału kolejnego okresu. co przedstawia następujący problem:

$$\max_{C_t, L_t, K_{t+1}} \mathbb{E} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left(\frac{C_t^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \frac{L_t^{1+\phi}}{1+\phi} \right). \quad (1.131)$$

Funkcjonał maksymalizujący jest następnie poddany ograniczeniu budżetowemu, które reprezentowane jest przez równanie:

$$P_t(C_t + I_t) = W_t P_t L_t + R_t^K P_t K_t + D_t. \quad (1.132)$$

Rozwiązanie problemu, dodatkowo rozszerzone o prawo ruchu kapitału, daje nam następujący układ równań:

$$K_{t+1} = (1 - \delta)K_t + I_t, \quad (1.133)$$

$$W_t = L_t^\phi C_t^\sigma, \quad (1.134)$$

$$\frac{1}{\beta} \mathbb{E}_t \left(\frac{C_{t+1}}{C_t} \right)^\sigma = (1 - \delta) + \mathbb{E}_t R_{t+1}^K. \quad (1.135)$$

Rynek modelowanej gospodarki opiera się o doskonałą konkurencję z jednym dobrem rynkowym, stąd w celu zobrazowania sektora firm zostanie wprowadzona pojedyncza reprezentatywna firma, której produkcja opisana jest przez równanie:

$$Y_t = A_t K_t^\alpha L_t^{1-\alpha}. \quad (1.136)$$

Celem firmy jest maksymalizacja zysku:

$$\max_{L_t, K_t} \left(A_t K_t^\alpha L_t^{1-\alpha} P_t - W_t P_t L_t - R_t^K P_t K_t \right). \quad (1.137)$$

Rozwiązanie powyższego problemu optymalizacyjnego jest wyrażone przez następujący układ równań:

$$W_t = (1 - \alpha) \frac{Y_t}{L_t}, \quad (1.138)$$

$$R_t^K = \alpha \frac{Y_t}{K_t}. \quad (1.139)$$

Równanie czyszczenia rynku w gospodarce łączy konsumpcję i inwestycję z produkcją:

$$Y_t = C_t + I_t. \quad (1.140)$$

Ostatnim elementem jest produktywność, która jest jedynym źródłem wahań w modelowanej gospodarce. Równanie produktywności opisane jest procesem autoregresyjnym:

$$\log A_t = (1 - \rho_A) \log \bar{A}_s + \rho_A \log A_{t-1} + \epsilon_{A,t}. \quad (1.141)$$

1.9.2 Model NEK

W tej części zostanie przedstawiony model Nowej Ekonomii Keynesowskiej, który zostanie później wykorzystany w rozdziale 3.1 w celu przedstawienia wyników przedstawionych w pracy metod. Zastosowany zostanie wariant z rozdzieleniem rynku firm na producentów dóbr pośrednich oraz producentów dóbr końcowych, upraszczając problem gospodarstw domowych. Dodatkowo model zostanie rozszerzony o prosty system polityki monetarnej, który został oparty o wprowadzenie portfela obligacji oraz banku centralnego. Ten ostatni koryguje nominalną stopę procentową zgodnie ze zmodyfikowaną regułą Taylora.

Reprezentatywne gospodarstwo będzie opierało się o problem przedstawiony oraz rozwiązany w 1.2.4:

$$\max_{C_t, L_t, B_{t+1}, K_{t+1}} \mathbb{E} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left(\frac{C_t^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \frac{L_t^{1+\phi}}{1+\phi} \right), \quad (1.142)$$

przy ograniczeniach:

$$P_t(C_t + I_t) + Q_t B_{t+1} = B_t + W_t P_t L_t + R_t^K P_t K_t + D_t - T_t, \quad (1.143)$$

$$K_{t+1} = (1 - \delta) K_t + I_t. \quad (1.144)$$

Rozwiązaniem powyższego jest układ równań:

$$K_{t+1} = (1 - \delta) K_t + I_t, \quad (1.145)$$

$$W_t = L_t^\phi C_t^\sigma, \quad (1.146)$$

$$Q_t = \beta \mathbb{E}_t \left(\left(\frac{C_t}{C_{t+1}} \right)^\sigma \frac{1}{\pi_{t+1}} \right), \quad (1.147)$$

$$\frac{1}{\beta} \mathbb{E}_t \left(\frac{C_{t+1}}{C_t} \right)^\sigma = (1 - \delta) + \mathbb{E}_t R_{t+1}^K. \quad (1.148)$$

Sektor firm modelu będzie opierał się o reprezentację opisaną w części 1.3.5 z rozwiązaniem zaprezentowanym w 1.3.6. Producenci dóbr końcowych przekształcają dobra pośrednie w końcowe zgodnie z funkcją:

$$Y_t = \left(\int_0^1 Y_{j,t}^{\frac{\psi-1}{\psi}} dj \right)^{\frac{\psi}{\psi-1}}, \quad (1.149)$$

w celu maksymalizacji zysku:

$$\max_{Y_{j,t}} \left(P_t Y_t - \int_0^1 P_{j,t} Y_{j,t} dj \right). \quad (1.150)$$

Sektor firm–producentów dóbr pośrednich wytwarza dobra zgodnie z funkcją produkcji:

$$Y_{j,t} = A_t K_{j,t}^\alpha L_{j,t}^{1-\alpha}. \quad (1.151)$$

w celu minimalizacji kosztów produkcji:

$$\min_{L_{j,t}, K_{j,t}} \left(W_t P_t L_{j,t} + R_t^K P_t K_{j,t} \right). \quad (1.152)$$

Rozwiązanie powyższego tworzy podstawę równań komponentu firm:

$$Y_{j,t} = A_t K_{j,t}^\alpha L_{j,t}^{1-\alpha}, \quad (1.153)$$

$$L_{j,t} = (1 - \alpha) MC_{j,t} \frac{Y_{j,t}}{W_t}, \quad (1.154)$$

$$K_{j,t} = \alpha MC_{j,t} \frac{Y_{j,t}}{R_t^K}. \quad (1.155)$$

Wyznaczenie poziomu cen oraz odpowiadających równań zostało zaprezentowane w 1.4.2. Układ równań opisujący poziom cen prezentuje się następująco:

$$0 = \mathbb{E}_t \sum_{i=0}^{\infty} (\beta\theta)^i Y_{j,t+i} \left(\frac{P_{j,t}^*}{P_{t+i}} - \frac{\psi}{\psi-1} MC_{j,t+i} \right), \quad (1.156)$$

$$P_t^{1-\psi} = \theta P_{t-1}^{1-\psi} + (1-\theta) P_t^{*1-\psi}, \quad (1.157)$$

$$\Pi_t = \frac{P_t}{P_{t-1}}. \quad (1.158)$$

Dodatkowo do modelu dokładamy równanie czyszczenia rynku oraz funkcję produktywności:

$$Y_t = C_t + I_t, \quad (1.159)$$

$$\log A_t = (1 - \rho_A) \log \bar{A}_s + \rho_A \log A_{t-1} + \epsilon_{A,t}. \quad (1.160)$$

Ostatnim elementem modelu będzie układ odpowiadający polityce monetarnej, prowadzonej przez bank centralny. Zastosowana zostanie reprezentacja realnej stopy procentowej wraz ze "zmodyfikowaną regułą Taylora", opisana odpowiednio poprzez równania (1.105) i (1.106). W związku z tym zastępujemy zmienną Q_t przez $\frac{1}{R_t^Q}$ oraz dokładamy do modelu:

$$R_t^Q = R_t^{Q^*(1-\rho_Q)} R_{t-1}^{Q\rho_Q}, \quad (1.161)$$

$$R_t^{Q^*} = \bar{R}^Q \pi^* \left(\frac{\pi_t}{\pi^*} \right)^{\psi_1} \left(\frac{y_t}{\bar{y}_s} \right)^{\psi_2}. \quad (1.162)$$

Powyższy model zostanie następnie opracowany w rozdziale 3.1.

Rozdział 2

Implementacja rozwiązywania modeli

2.1 Wstęp

W tym rozdziale zostaną przedstawione metody implementacji rozwiązywania modeli DSGE. Najczęściej wynikiem analizy modelu są prognozy, jak gospodarka będzie zachowywać się w reakcji na wystąpienie pewnego konkretnego szoku lub zbioru szoków. W całym rozdziale zakładamy, że mamy dany model DSGE składający się z następujących elementów:

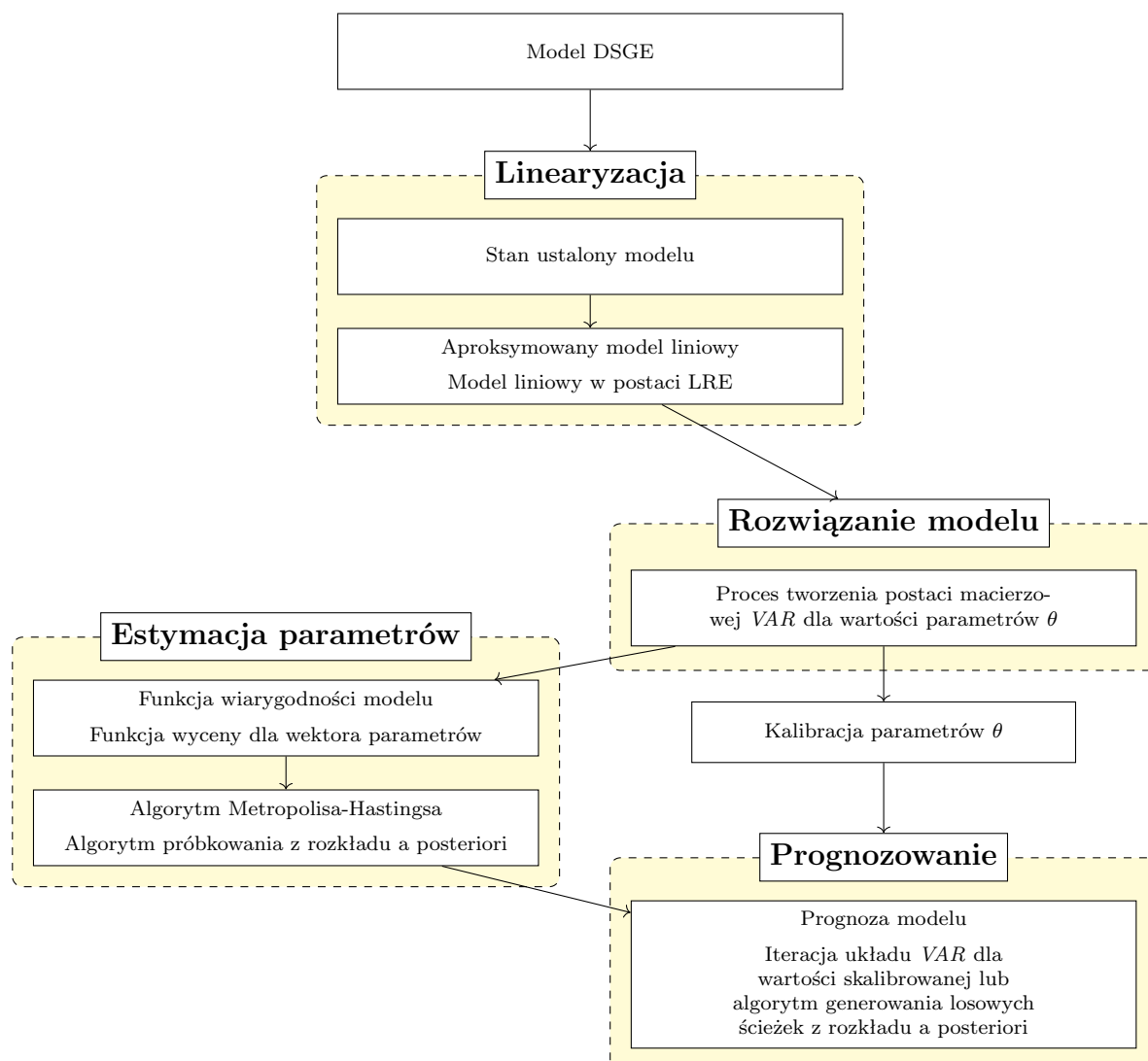
- zmienne tj. parametry modelu, zmienne makroekonomiczne oraz zmienne reprezentujące szoki,
- równania modelu dla rozwiązyanych problemów np. w postaci równań (1.145) do (1.148), wiążące wystąpienia zmiennych makroekonomicznych ze zmiennymi reprezentującymi szoki oraz parametrami modelu,
- rozkłady dla zmiennych szoku – standardowo przyjmuje się, że zmienne szoku mają rozkłady normalne z wartością oczekiwaną 0,
- kalibracja parametrów modelu – najczęściej dokonywana na bazie historycznych wartości dla rozważanej gospodarki, często na bazie danych np. sprzed kilkunastu lat,
- dane gospodarcze dla pewnego okresu poprzedzającego okres prognozowany np. pomiary PKB, informacje o zatrudnieniu, wskaźniki inflacji czy wartości pieniądza.

Następnie, w celu rozwiązania modelu DSGE będziemy wykonywali następujące czynności:

1. Linearyzacja równań – aproksymacja układu równań modelu poprzez zamianę pierwotnych wielkości na zmienne reprezentujące odchylenie wartości od stanu ustalonego (stanu będącego niezmiennikiem modelu). Efektem tego etapu jest zlinearyzowany układ równań, który dobrze charakteryzuje zachowanie układu wokół stabilnego stanu równowagi modelu.
2. Rozwiązanie modelu – aproksymacja układu liniowych równań modelu przy pomocy metody Blancharda-Kahna, na bazie skalibrowanego wektora parametrów, w celu

wyeliminowanie zależności od zmiennych wartości oczekiwanych kolejnych przedziałów. W ramach tego etapu wykonywana jest dodatkowo walidacja układu pod kątem istnienia unikalnego ograniczonego rozwiązania.

3. Estymacja parametrów modelu – poszukiwanie rozkładu empirycznego opisującego parametry modelu na bazie kalibracji parametrów z przeszłości oraz sekwencji danych gospodarczych. W ramach tej części skorzystamy z algorytmu rozwiązywania modelu z poprzedniego etapu, który przygotuje model dla rozważanych wektorów parametrów. Metody prognozowania opierają się o wiedzę na temat rozkładów parametrów, które pomimo braku zależności od przyjętej polityki na rynku, ulegają przemianie pod wpływem zmiany zachowań i oczekiwań podmiotów gospodarczych. Estymacja pozwoli nam przygotować rozkład parametrów dla obecnej chwili, przy pomocy dostępnych kalibracji historycznych, wykorzystując metody wnioskowania bayesowskiego oraz algorytmu Metropolis-Hastingsa.
4. Prognozowanie – korzystając z rozwiązanego modelu dla znanej kalibracji lub rozkładu estymowanych kalibracji, przeprowadzamy algorytm obliczający zmianę zmiennych modelu na bazie wybranej metody losowania próbek szoków. Ten etap opiera się o postać macierzową uzyskaną z rozwiązania modelu oraz kalibracje parametrów lub wyjściowy rozkład z przeprowadzenia estymacji parametrów.



2.2 Równania modelu

Zgodnie z wprowadzeniem poprzedniego rozdziału 1.1, zmienne występujące w równaniach możemy podzielić na następujące kategorie:

- zmienne endogeniczne – zmienne modelu, które opisują wartości makroekonomiczne gospodarki, w tym rozdziale będą oznaczane przez duże litery alfabetu łacińskiego,
- parametry modelu – parametry opisujące zachowania agentów, w tym rozdziale zostaną opisane przez litery alfabetu greckiego,
- zmienne egzogeniczne (szoki) – zmienne losowych szoków, opisywane poprzez symbol ϵ z odpowiednim indeksem opisującym typ danego szoku np. $\epsilon_{A,t}$ jako szok technologiczny (tj. dotyczący zmiennej A) w chwili t .

W przypadku zmiennych endogenicznych dodatkowo rozróżniamy 3 podkategorie w zależności od indeksu czasowego:

- zmienne opisujące predykcje w następnym okresie, które będą oznaczane przez indeks okresu $t+1$ z operatorem wartości oczekiwanej przed nazwą zmiennej, np. oczekiwana konsumpcja w okresie $t+1$ oznaczana poprzez $\mathbb{E}_t C_{t+1}$,
- zmienne opisujące stan gospodarki w obecnym okresie, np. konsumpcja C_t , produkcja Y_t ,
- zmienne stanu wstecznego, które opisują wartość stanu poprzedniego okresu. W następnej części, w celu uproszczenia prezentacji układu równań, będziemy zakładali że takie zmienne występują tylko dla poprzedniego okresu $t-1$, jednak w ostatniej części zostanie wskazana redukcja układu pozwalająca na wprowadzenie do modelu zmiennych dla dowolnego okresu $t-j$.

W celu ogólnej reprezentacji równań modelu, zgrupujemy zmienne w następujące wektory:

- zmienne predykcji jako $s_{t+1} = [\mathbb{E}_t C_{t+1}, \dots]$,
- zmienne obecnego okresu $s_t = [C_t, \dots]$,
- zmienne poprzedniego okresu $s_{t-1} = [C_{t-1}, \dots]$,
- parametry modelu $\Phi = [\beta, \dots]$,
- szoki $\epsilon_t = [\epsilon_{A,t}, \dots]$.

Równania modelu są reprezentowane poprzez formy funkcyjne:

$$F(s_{t+1}, s_t, s_{t-1}, \Phi, \epsilon_t) = 0. \quad (2.1)$$

Docelowo będziemy chcieli przekształcić F w postać liniową, gdzie przekształcone równania będą reprezentowały funkcje liniowe względem zmiennych endogenicznych modelu.

2.2.1 Linearyzacja

Istnieje wiele technik pozwalających na rozwiązywanie równań modelu w postaci opisanej powyżej. Część z nich operuje na równaniach nieliniowych np. filtry cząsteczkowe [26]. Jednak najpopularniejszym sposobem jest sprowadzenie do układu równań liniowych wokół stabilnego stanu równowagi. W szczególności, często jest stosowana metoda log-linearyzacji, zaproponowana przez Uhliga [45]. Głównym etapem aproksymacji będzie zastąpienie zmiennych przez zlogarytmowane odchylenia wartości od stanu ustalonego, czyli stanu, w którym zmienne nie zmieniają się w czasie $s_{t+1} = s_t = s_{t-1}$.

Na log-linearyzację równań składają się następujące etapy:

- stan ustalony – znalezienie wartości stanu ustalonego charakteryzującego stan gospodarki przy braku udziału zewnętrznych szoków,
- log-linearyzacja – wprowadzenie nowych zmiennych jako logarytmów odchylenia od stanu ustalonego, a następnie uproszczenie i modyfikacja równań przy pomocy zbioru reguł aproksymacji.

Jako alternatywne metody aproksymacji można wymienić szereg technik bazujących na teorii perturbacji oraz metod projekcji [1], [20], jednak w zakresie tej pracy została zastosowana log-linearyzacja metodą Uhliga.

2.2.1.1 Stan ustalony

Zgodnie z wcześniejszą definicją stan ustalony \bar{s}_s jest zdefiniowany jako wektor wartości niezmiennych modelu, przy ustaleniu zerowych szoków:

$$\bar{s}_s = s_{t+1} = s_t = s_{t-1}, \quad (2.2)$$

$$\varepsilon_t = 0. \quad (2.3)$$

Stan ustalony obliczamy podstawiając powyższe do (2.1). Otrzymujemy do rozwiązania problem:

$$F(\bar{s}_s, \bar{s}_s, \bar{s}_s, \Phi, \varepsilon_t) = 0. \quad (2.4)$$

Rozwiązanie powyższego i znalezienie \bar{s}_s pozwoli nam następnie przeprowadzić log-linearyzację. Często znalezienie stanu ustalonego wymaga dodatkowych założeń, jednym z nich jest znormalizowanie produktywności przyjmując wartość $\bar{A}_s = 1$, co zostało wykorzystane m.in. w pracy [12].

2.2.1.2 Log-linearyzacja metodą Uhliga

Przedstawiona metoda logarytmicznej linearyzacji została opracowana na bazie pracy [45], dodatkowo posiłkując się uwagami z książki [12] oraz pracy [49]. Cały proces opiera się o przeprowadzenie aproksymacji za pomocą funkcji pierwszego rzędu Taylora dla zmiennych reprezentujących odchylenie logarytmiczne od stanu ustalonego modelu.

Mając wektor s_t zmiennych stanu oraz wartość stanu ustalonego \bar{s}_s , rozważamy zmienną $x_t \in s_t$ dla której wprowadzamy zmienną odchylenia logarytmicznego \hat{s}_t :

$$\hat{x}_t = \ln x_t - \ln \bar{x}_s. \quad (2.5)$$

Przekształcając prawą część powyższego, a następnie podnosząc do funkcji wykładniczej:

$$\hat{x}_t = \ln \frac{x_t}{\bar{x}_s}, \quad (2.6)$$

$$e^{\hat{x}_t} = \frac{x_t}{\bar{x}_s}. \quad (2.7)$$

Aproksymując następnie $e^{\hat{x}_t}$ wzorem Taylora wokół wartości 0 reprezentującej stan ustalony (tj. dla $x_t = \bar{x}_s$):

$$e^{\hat{x}_t} \simeq 1 + e^0(\hat{x}_t - 0) = 1 + \hat{x}_t. \quad (2.8)$$

Następnie wyznaczając z 2.6 postać dla x_t :

$$x_t = \bar{x}_s e^{\hat{x}_t}. \quad (2.9)$$

Podstawiamy aproksymowaną postać $e^{\hat{x}_t}$ otrzymując

$$x_t \simeq \bar{x}_s(1 + \hat{x}_t), \quad (2.10)$$

$$\frac{x_t}{\bar{x}_s} \simeq \hat{x}_t + 1. \quad (2.11)$$

Aproksymacja pozwala nam interpretować odchylenie logarytmiczne \hat{x}_t jako procentowe odchylenie zmiennej x_t od stanu ustalonego \bar{x}_s . Jest to dobre przybliżenie jedynie w sąsiedztwie stanu ustalonego, stąd aproksymacja jest lokalna. W dalszej części pracy, w sekcji poświęconej rozwiązywaniu modeli 2.3, zostaną omówione warunki narzucone na zmienne w celu ograniczenia wzrostu wartości.

Następnie możemy zastosować powyższą metodę do wyprowadzenia aproksymacji dla postaci występujących w równaniach modelu x_t^α , gdzie α występuje jako pewien parametr:

$$x_t^\alpha = (\bar{x}_s e^{\hat{x}_t})^\alpha = \bar{x}_s^\alpha e^{\alpha \hat{x}_t}. \quad (2.12)$$

Aproksymując $e^{\alpha \hat{x}_t}$ dostajemy:

$$e^{\alpha \hat{x}_t} \simeq 1 + \alpha(\hat{x}_t - 0) = 1 + \alpha \hat{x}_t. \quad (2.13)$$

Co przekłada się na jedną z reguł aproksymacji równań:

$$x_t^\alpha \simeq \bar{x}_s^\alpha(1 + \alpha \hat{x}_t). \quad (2.14)$$

Analogiczną metodą możemy także rozwiązać log-linearyzację dla dwóch zmiennych $x_t, y_t \in s_t$ związanych w wyrażeniu $\frac{x_t}{y_t}$, dostając:

$$\frac{x_t}{y_t} \simeq \frac{\bar{x}_s}{\bar{y}_s}(1 + \hat{x}_t + \hat{y}_t). \quad (2.15)$$

Uogólniając metodę w celu aproksymacji, każdą zmienną $x_t \in s_t$ zastąpimy przez $\bar{x}_s e^{\hat{x}_t}$, a następnie przy pomocy następujących bloków przekształcimy równania modelu do log-linearyzowanej postaci:

$$e^{\hat{x}_t + \alpha \hat{y}_t} \approx 1 + \hat{x}_t + \alpha \hat{y}_t, \quad (2.16)$$

$$\hat{x}_t \hat{y}_t \approx 0, \quad (2.17)$$

$$\mathbb{E}_t[\alpha e^{\hat{x}_{t+1}}] \approx \alpha + \alpha \mathbb{E}_t[\hat{x}_{t+1}]. \quad (2.18)$$

Kolejne etapy zakładają, że model dany jest w postaci układu aproksymowanych równań liniowych. W rozdziale 3 został omówiony przykładowy model, dla którego przedstawiono stan ustalony oraz linearyzację modelu.

2.2.2 Model liniowych racjonalnych oczekiwań

Układ równań w postaci funkcji liniowych pozwala nam przedstawić model w postaci modelu liniowych racjonalnych oczekiwań (*Linear Rational Expectations Model*).

Układ równań modelu (2.1) będziemy przekształcać do postaci:

$$\Gamma_1 \begin{bmatrix} x_t \\ \mathbb{E}_t y_{t+1} \end{bmatrix} = \Gamma_2 \begin{bmatrix} x_{t-1} \\ y_t \end{bmatrix} + \Psi \epsilon_t. \quad (2.19)$$

W powyższym równaniu Γ_1 , Γ_2 oraz Ψ są macierzami zawierającymi parametry modelu θ . W wektorze x_t zbieramy część zmiennych, dla których występuje wartość w wektorze s_{t-1} lub nie występuje w wektorze s_{t+1} . W wektorze y_t zbieramy wszystkie zmienne które występują w równaniach w wektorze s_{t+1} , czyli w oryginalnych równaniach ich wartość występowała w postaci wartości oczekiwanej kolejnego przedziału czasowego $\mathbb{E}_t y_{t+1}$. W dalszej części pracy zmienne wektora x_t będą nazywane zmiennymi wstecznymi lub zmiennymi stanu, rozmiar wektora x_t będzie oznaczany jako n . Zmienne wektora y_t będą nazywane zmiennymi oczekiwań lub zmiennymi kontrolnymi. Rozmiar wektora y_t oznaczony zostanie symbolem m . Wektor ϵ_t zbiera zmienne egzogeniczne tj. szoki, a jego rozmiar będzie oznaczany poprzez e .

W przypadku estymacji bayesowskiej zastosujemy uogólnioną postać modelu liniowych racjonalnych oczekiwań, zwaną postacią kanoniczną równań. Postać kanoniczna naszego układu równań prezentuje się jako:

$$\Gamma_1(\theta) \begin{bmatrix} x_t \\ \mathbb{E}_t y_{t+1} \end{bmatrix} = \Gamma_2(\theta) \begin{bmatrix} x_{t-1} \\ y_t \end{bmatrix} + \Psi(\theta) \epsilon_t. \quad (2.20)$$

W powyższym oraz w następnych reprezentacjach, postaci parametryzowane przez θ będziemy interpretowali jako funkcje generujące macierze na bazie wartości wektora θ . Zgodnie z tym funkcje Γ_1 , Γ_2 są postaci $\theta \rightarrow M_{(m+n) \times (m+n)}$, natomiast Ψ jest postaci $\theta \rightarrow M_{(m+n) \times e}$.

2.2.3 Rozszerzony model

W poprzednich sekcjach poświęconych strukturze układu równań zakładaliśmy, że układ równań musi być postaci (2.19). Model może zostać jednak rozszerzony, pozwalając na wprowadzenie dodatkowych indeksów czasowych x_{t-j} dla dowolnego $j \in \mathbb{N}$ oraz zmiennych "mieszanych", które występują z indeksem czasowym $t+1$ oraz $t-j$ (zmienne które występują w postaci wartości oczekiwanej predykcji następnego okresu oraz ustalonych wartości poprzednich przedziałów czasowych).

W celu przekształcenia rozszerzonego modelu do postaci podstawowej, dla każdej zmiennej występującej z indeksem czasowym ujemnym, takim że $j > 1$ oraz j jest największym wystąpieniem zmiennej x_{t-j} w równaniach modelu, przeprowadzamy następujące kroki:

1. wprowadzamy nowe zmienne z^k , dla $k \in \{1, \dots, j\}$,
2. dokładamy nowe równania

$$\begin{aligned} z_t^1 &= x_{t-1}, \\ z_t^k &= z_{t-1}^{k-1}, \text{ dla } k \in \{1, \dots, j\}, \end{aligned}$$

3. zastępujemy wystąpienia x_{t-j} nowymi transformowanymi zmiennymi z_t^j .

W przypadku zmiennych mieszanych zastosujemy analogiczną transformację. Dla każdej zmiennej mieszanej x_t :

1. wprowadzamy nową zmienną v ,
2. rozszerzamy model poprzez dołożenie równania $v_t = x_t$,
3. zastępujemy wystąpienia $\mathbb{E}_t x_{t+1}$ przez nową zmienną $\mathbb{E}_t v_{t+1}$.

Powyższe redukcje generują równoważny model, dla którego zbiór zmiennych występujących z indeksem okresu poprzedniego x_t jest rozłączny ze zmiennymi wektora y_t . Dodatkowo każda zmienna występuje z maksymalnym indeksem czasowym x_{t-1}/y_{t+1} . Zgodnie z tym w dalszej części pracy wystarczy rozważać jedynie modele postaci:

$$\Gamma_1 \begin{bmatrix} x_t \\ \mathbb{E}_t y_{t+1} \end{bmatrix} = \Gamma_2 \begin{bmatrix} x_{t-1} \\ y_t \end{bmatrix} + \Psi \epsilon_t.$$

2.3 Rozwiązywanie metodą Blancharda-Kahna

W tej części pracy zostanie omówione poszukiwanie rozwiązania modelu liniowych racjonalnych oczekiwań, przy wykorzystaniu metody Blancharda-Kahna oraz pokrewnych technik wywodzących się z tego sposobu. Sekcja została opracowana przy pomocy prac [4], [29], [47] oraz [30]. Celem tego etapu jest sprawdzenie czy model, dla danej wartości parametrów θ , posiada unikalne stabilne rozwiązanie oraz następnie znalezienie funkcji pozwalającej na jego wyznaczenie.

Model mamy dany w postaci równania (2.19) z następującymi kategoriami zmiennych:

- zmienne endogeniczne – zmienne modelu charakteryzujące pewne wartości ekonomiczne, rozdzielone w wektory zmiennych: x_t – wstecznych oraz y_t – kontrolnych,
- parametry modelu – parametry opisujące zachowania agentów i własności pomiędzy komponentami rynku, zaszyte w postaci macierzy Γ_1 , Γ_2 i Ψ ,
- zmienne egzogeniczne (szoki) – źródła fluktuacji na rynku ϵ_t .

Dodatkowo zakładamy, że posiadamy następujące dane:

- kalibracje wartości parametrów – przyjmujemy że te dane są w postaci konkretnych skalibrowanych wartości w wektorze θ ,
- model został przekształcony do postaci bez zmiennych mieszanych.

Następnie celem jest zbadanie zachowania modelu przy zadanych wartościach parametrów. W związku z tym korzystając z wartości skalibrowanych parametrów θ , obliczamy macierze z funkcji Γ_1 , Γ_2 i Ψ , które odpowiednio oznaczamy jako A , B oraz C . Problem rozwiązywania modelu sprowadza się do rozwiązania następującego problemu rekurencyjnego:

$$A \begin{bmatrix} x_t \\ \mathbb{E}_t y_{t+1} \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} x_{t-1} \\ y_t \end{bmatrix} + C \epsilon_t. \quad (2.21)$$

Rozwiązanie będzie miało postać funkcji przejścia, która mając dane x_t wygeneruje nam odpowiednio wartości zmiennych kontrolnych oraz przejście do x_{t+1} :

$$\begin{aligned} y_t &= H_y x_t + G_y e, \\ x_{t+1} &= H_x x_t + G_x e. \end{aligned} \quad (2.22)$$

2.3.1 Macierz nieosobliwa

Metoda Blancharda-Kahna opisuje w jaki sposób poszukujemy rozwiązania powyższego modelu, w przypadku gdy macierz A jest nieosobliwa. Wychodząc z postaci (2.21) wymnażamy przez A^{-1} , sprowadzając równanie do postaci:

$$\begin{bmatrix} x_{t+1} \\ \mathbb{E}_t y_{t+1} \end{bmatrix} = A^{-1}B \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} + A^{-1}C e_t. \quad (2.23)$$

W celu uproszczenia zapisu, wprowadzamy oznaczenia $F = A^{-1}B$ oraz $G = A^{-1}C$ otrzymując:

$$\begin{bmatrix} x_{t+1} \\ \mathbb{E}_t y_{t+1} \end{bmatrix} = F \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} + G e_t. \quad (2.24)$$

Następnie zastosujemy dekompozycję Jordana dla macierzy $F = H^{-1}\Lambda H$. Macierz Λ ma postać:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{n+m} \end{bmatrix}, \quad (2.25)$$

dla wartości własnych $|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \dots \leq |\lambda_n|$.

Model posiada stabilne rozwiązanie w przypadku, gdy liczba wartości własnych $|\lambda_k| > 1$ jest równa ilości zmiennych kontrolnych $|y_t|$. Ta własność nazywana jest własnością porządku Blancharda-Kahna, w szerszej postaci opisana w pracy [4]. Gdy liczba wartości własnych $|\lambda_k| > 1$:

- jest równa liczbie zmiennych kontrolnych to układ posiada jedno unikalne ograniczone rozwiązanie,
- przekracza liczbę zmiennych kontrolnych to układ nie posiada stabilnego rozwiązania,
- jest mniejsza niż liczba zmiennych kontrolnych to układ posiada nieskończoną ilość rozwiązań.

Po podstawieniu oraz przemnożeniu równania (2.24) przez H otrzymujemy postać:

$$H \begin{bmatrix} x_{t+1} \\ \mathbb{E}_t y_{t+1} \end{bmatrix} = \Lambda H \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} + H G e_t. \quad (2.26)$$

Następnie rozpisujemy macierze występujące w powyższym równaniu do postaci blokowej, gdzie każdy blok odpowiada kolejno wektorom x_t , y_t , co zobrazowane jest jako:

$$H = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix}. \quad (2.27)$$

Macierz H_{11} jest rozmiaru $n \times n$, a H_{22} jest rozmiaru $m \times m$.

Aplikując zapis do (2.26) otrzymujemy postać:

$$\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{t+1} \\ \mathbb{E}_t y_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda_1 & 0 \\ 0 & \Lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} G e_t. \quad (2.28)$$

Następnie definiujemy wektor transformowanych zmiennych:

$$\begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y}_t \end{bmatrix} = H \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix}. \quad (2.29)$$

Dodatkowo w celu uproszczenia zapisu zdefiniujemy:

$$\hat{G} = \begin{bmatrix} \hat{G}_1 \\ \hat{G}_2 \end{bmatrix} = HG. \quad (2.30)$$

Po podstawieniu zmiennych transformowanych równanie przybiera postać:

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_{t+1} \\ \mathbb{E}_t \hat{y}_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda_1 & 0 \\ 0 & \Lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_t \\ \hat{y}_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{G}_1 \\ \hat{G}_2 \end{bmatrix} e_t. \quad (2.31)$$

Korzystamy z faktu że macierz Λ jest diagonalna, stąd mamy do czynienia ze zbiorem niezależnych równań. Następnie rozważamy część niestabilną modelu y_t :

$$\mathbb{E}_t \hat{y}_{t+1} = \Lambda_2 \hat{y}_t + \hat{G}_2 e_t. \quad (2.32)$$

Rozwiązując dla \hat{y}_t :

$$\hat{y}_t = \Lambda_2^{-1} \mathbb{E}_t \hat{y}_{t+1} - \Lambda_2^{-1} \hat{G}_2 e_t. \quad (2.33)$$

Iterując do nieskończoności, zastępując kolejne wystąpienia y_{t+k} we wzorze dla y_t otrzymujemy:

$$\hat{y}_t = -\Lambda_2^{-1} \hat{G}_2 e_t - \Lambda_2^{-2} \mathbb{E}_t (\hat{G}_2 e_{t+1}) - \Lambda_2^{-3} \mathbb{E}_t (\hat{G}_2 e_{t+2}) - \dots \quad (2.34)$$

Następnie korzystamy z faktu że dla zmiennych szoku mamy $\mathbb{E}_t e_{t+1} = \mathbb{E}_t e_{t+2} = \dots = 0$:

$$\hat{y}_t = -\Lambda_2^{-1} \hat{G}_2 e_t. \quad (2.35)$$

Wracamy do równania (2.29), rozwiązując dla y_t :

$$\begin{aligned} \hat{y}_t &= H_{21} x_t + H_{22} y_t \\ y_t &= H_{22}^{-1} \hat{y}_t - H_{22}^{-1} H_{21} x_t. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Po podstawieniu \hat{y}_t z równania (2.35) dostajemy:

$$y_t = -H_{22}^{-1} H_{21} x_t + (-H_{22}^{-1} \Lambda_2^{-1} \hat{G}_2) e_t. \quad (2.37)$$

W powyższej postaci odwracalność H_{22} nazywamy warunkiem rzędu Blancharda-Kahna. Model posiada stabilne rozwiązanie tylko jeśli $\text{rank}(H_{22}) = n$.

Kolejnym etapem jest znalezienie wzoru dla x_{t+1} . Korzystając z oryginalnego równania (2.24) wyznaczamy x_{t+1} , dodatkowo rozbijając macierz F na F_{11}, F_{12} :

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= F_{11} x_t + F_{12} y_t + G_1 e_t, \\ x_{t+1} &= F_{11} x_t + F_{12} (-H_{22}^{-1} H_{21} x_t + (-H_{22}^{-1} \Lambda_2^{-1} \hat{G}_2) e_t) + G_1 e_t. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Po uporządkowaniu:

$$x_{t+1} = (F_{11} - F_{12} H_{22}^{-1} H_{21}) x_t + (G_1 - F_{12} H_{22}^{-1} \Lambda_2^{-1} \hat{G}_2) e_t. \quad (2.39)$$

Dostajemy poszukiwane macierze przejścia z definicji problemu (2.22):

$$\begin{aligned} H_x &= F_{11} - F_{12} H_{22}^{-1} H_{21}, \\ G_x &= G_1 - F_{12} H_{22}^{-1} \Lambda_2^{-1} \hat{G}_2, \\ H_y &= -H_{22}^{-1} H_{21}, \\ G_y &= -H_{22}^{-1} \Lambda_2^{-1} \hat{G}_2. \end{aligned} \quad (2.40)$$

2.3.2 Uogólnione rozwiązanie

W dużej ilości modeli macierz A może być osobliwa. W celu rozwiązania problemu (2.21) w takim przypadku, przeprowadzimy dodatkową aproksymację problemu. Problem prognozowania modelu DSGE sprowadza się do rozwiązania (2.1). W kolejnej części przemianujemy tę postać do:

$$\mathbb{E}_t f(y_{t+1}^+, y_t, y_{t-1}^-, \epsilon_t) = 0, \quad (2.41)$$

gdzie poprzez y_t^+ oraz y_t^- będziemy oznaczali odpowiednio wektor zmiennych predykcji (kontrolnych) s_{t+1} oraz zmiennych wstecznych (stanu) s_{t-1} , wektor y_t odpowiada wektorowi wszystkich zmiennych endogenicznych modelu. W tej postaci operacja wartości oczekiwanej została wyciągnięta z wektora s_{t+1} przed funkcję układu.

Dodatkowo zdefiniujemy stan ustalony dla funkcji modelu $(\bar{y}_s, \bar{\epsilon}_s)$, zgodnie z sekcją 2.2.1.1 mamy zachowane:

$$\bar{\epsilon}_s = 0, \quad (2.42)$$

$$f(\bar{y}_s^+, \bar{y}_s, \bar{y}_s^-, \bar{\epsilon}_s) = 0. \quad (2.43)$$

Docelowym jest znalezienie reprezentacji funkcji przejścia (2.22), którą w następnej części będziemy opisywali symbolem g :

$$y_t = g(y_{t-1}^-, \epsilon_t). \quad (2.44)$$

Następnie problem (2.41) sprowadza się do:

$$\mathbb{E}_t f(g_y^+(g_y^-(y_{t-1}^-, \epsilon_t), \epsilon_{t+1}), g_y(y_{t-1}^-, \epsilon_t), y_{t-1}^-, \epsilon_t) = 0, \quad (2.45)$$

gdzie funkcje g^+ , g^- opisują zastrzeżenie g do odpowiednio zmiennych kontrolnych i stanu. Oznaczmy jako:

$$f_y^+ = \frac{\partial f}{\partial y_{t+1}^+}, f_y^0 = \frac{\partial f}{\partial y_t}, f_y^- = \frac{\partial f}{\partial y_{t-1}^-}, f_\epsilon = \frac{\partial f}{\partial \epsilon_t}, \quad (2.46)$$

$$g_y = \frac{\partial g}{\partial y_{t-1}^-}, g_\epsilon = \frac{\partial g}{\partial \epsilon_t}. \quad (2.47)$$

Powyższe pochodne bierzemy w punkcie stanu ustalonego $(\bar{y}_s, \bar{\epsilon}_s)$. Dodatkowo oznaczmy $\hat{y}_{t-1} = y_{t-1} - \bar{y}_s$. Uogólniając funkcję przejścia poprzez aproksymację pierwszego rzędu dostajemy:

$$g(y_{t-1}^-, \epsilon_t) = \bar{y}_s + g_y \hat{y}_{t-1} + g_\epsilon \epsilon_t. \quad (2.48)$$

Następnie wykorzystujemy tę aproksymację dla równania (2.45). Zgodnie z tym problem przedstawia się następująco:

$$f(\bar{y}_s^+, \bar{y}_s, \bar{y}_s^-, \bar{\epsilon}_s) + f_y^+(g_y^+(\hat{y}_{t-1} + g_\epsilon \epsilon_t) + g_\epsilon^+ \mathbb{E}_t[\epsilon_{t+1}]) + f_y^0(g_y \hat{y}_{t-1} + g_\epsilon \epsilon_t) + f_y^- \hat{y}_{t-1} + f_\epsilon \epsilon_t = 0. \quad (2.49)$$

Korzystając z własności stanu ustalonego $f(\bar{y}_s^+, \bar{y}_s, \bar{y}_s^-, \bar{\epsilon}_s) = 0$ oraz $\mathbb{E}_t(\epsilon_{t+1}) = 0$, dostajemy po uporządkowaniu powyższego równania:

$$(f_y^+ g_y^+ g_y^- + f_y^0 g_y + f_y^-) \hat{y}_{t-1} + (f_y^+ g_y^+ g_\epsilon^- + f_y^0 g_\epsilon + f_\epsilon) \epsilon_t = 0. \quad (2.50)$$

Pierwszym krokiem będzie znalezienie rozwiązania dla g_y . W powyższym popatrzmy na część stojącą przy y_{t-1}^- . Wiemy że równanie musi być spełnione dla dowolnej wartości ϵ_t , stąd:

$$(f_y^+ g_y^+ g_y^- + f_y^0 g_y + f_y^-) \hat{y}_{t-1}^- = 0. \quad (2.51)$$

Następnie korzystamy z funkcji przejścia (2.44) dla zmiennych \hat{y} :

$$g_y^+ g_y^- \hat{y}_{t-1}^- = g_y^+ \hat{y}_t^- = \hat{y}_{t+1}^+, \quad (2.52)$$

$$g_y \hat{y}_{t-1}^- = \hat{y}_t. \quad (2.53)$$

Podstawiając do równania (2.51):

$$f_y^+ \hat{y}_{t+1}^+ + f_y^0 \hat{y}_t + f_y^- \hat{y}_{t-1}^- = 0. \quad (2.54)$$

W powyższym f_y^+ , f_y^0 oraz f_y^- są w postaci macierzowej, reorganizujemy je do postaci:

$$\begin{pmatrix} f_y^{0-} & f_y^+ \end{pmatrix} \begin{bmatrix} y_t^- \\ y_{t+1}^+ \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -f_y^- & -f_y^{0+} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} y_{t-1}^- \\ y_t^+ \end{bmatrix}, \quad (2.55)$$

co po uproszczeniu $A = \begin{pmatrix} f_y^{0-} & f_y^+ \end{pmatrix}$ oraz $B = \begin{pmatrix} -f_y^- & -f_y^{0+} \end{pmatrix}$ zapisujemy jako:

$$A \begin{bmatrix} y_t^- \\ y_{t+1}^+ \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} y_{t-1}^- \\ y_t^+ \end{bmatrix}. \quad (2.56)$$

Ta postać sprowadza się do aproksymowania rozwiązania problemu (2.21) z zastrzeżeniem jedynie dla wartości endogenicznych. Stosując $g_y^+ y_t^- = y_{t+1}^+$ wyznaczamy stan y_t^- poza wektor:

$$A \begin{bmatrix} I_{n-} \\ g_y^+ \end{bmatrix} y_t^- = B \begin{bmatrix} I_{n-} \\ g_y^+ \end{bmatrix} y_{t-1}^-. \quad (2.57)$$

Następnie dla macierzy A , B zastosujemy uogólnioną postać Schura, zwaną również dekompozycją QZ.

Twierdzenie 1 (Uogólniona postać Schura)

Niech dane będą macierze A oraz B rozmiaru $n \times n$, takie że istnieje $z \in \mathbb{C}$ dla którego $Az \neq B$. Niech $\lambda(A, B) = \{z \in \mathbb{C} : |Az - B| = 0\}$ oznacza zbiór uogólnionych wartości własnych dla A i B . Wówczas istnieją macierze unitarne Q , Z rozmiaru $n \times n$ takie że:

1. istnieje macierz S , dla której $QSZ = A$ oraz S jest macierzą trójkątną górną,
2. istnieje macierz T , dla której $QTZ = B$ oraz T jest macierzą trójkątną górną,
3. każdą liczbę $z \in \lambda(A, B)$ można przedstawić jako $\frac{t_{ii}}{s_{ii}}$, takie że przynajmniej jedna z s_{ii} , t_{ii} nie jest równa zero,
4. pary $(s_{ii}, t_{ii}) \forall i \in \{1, \dots, n\}$ mogą być ustawione w dowolnym porządku.

Stosując powyższe twierdzenie uzyskujemy macierze Q , Z , S , T . Dodatkowo zgodnie z twierdzeniem, wybieramy taką postać QZ w której uogólnione wartości własne $\lambda(A, B)$ występują w porządku:

$$\left| \frac{t_{11}}{s_{11}} \right| < \left| \frac{t_{22}}{s_{22}} \right| < \dots < \left| \frac{t_{nn}}{s_{nn}} \right|. \quad (2.58)$$

Postać równań po dekompozycji QZ prezentuje się następująco:

$$QSZ \begin{bmatrix} I_{n^-} \\ g_y^+ \end{bmatrix} y_t^- = QTZ \begin{bmatrix} I_{n^-} \\ g_y^+ \end{bmatrix} y_{t-1}^-. \quad (2.59)$$

Po przemnożeniu równań przez Q^T otrzymujemy postać:

$$SZ \begin{bmatrix} I_{n^-} \\ g_y^+ \end{bmatrix} y_t^- = TZ \begin{bmatrix} I_{n^-} \\ g_y^+ \end{bmatrix} y_{t-1}^-. \quad (2.60)$$

W wariancie z wykorzystaniem dekompozycji QZ warunek porządku Blancharda-Kahna wymaga, żeby liczba uogólnionych wartości własnych $|\lambda(A, B)| > 1$ była równa ilości zmiennych kontrolnych występujących w wektorze y_t .

Zapisując równanie (2.59) z uwzględnieniem rozbicia blokowego macierzy T , S oraz Z , odpowiednio na bloki uwzględniające zmienne stabilne(stanu) oraz kontrolne:

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ 0 & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{n^-} \\ g_y^+ \end{bmatrix} y_t^- = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{n^-} \\ g_y^+ \end{bmatrix} y_{t-1}^-. \quad (2.61)$$

Następnie wiemy że dla uogólnionych zmiennych własnych bloku niestabilnego mamy zachowane $\frac{s_{ii}}{t_{ii}} > 1$, stąd w celu wykluczenia nieograniczonych rozwiązań:

$$\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{n^-} \\ g_y^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.62)$$

Nieosobliwość macierzy Z_{22} jest w tym przypadku warunkiem rzędu Blancharda-Kahna. Korzystając z tego faktu rozwiązujemy dla g_y^+ :

$$g_y^+ = -(Z_{22})^{-1} Z_{21}. \quad (2.63)$$

Oznaczmy $Z' = Z^T$, z własności ortogonalności $ZZ^T = I$ mamy:

$$\begin{bmatrix} I_{n^-} \\ g_y^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z'_{11} & Z'_{12} \\ Z'_{21} & Z'_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.64)$$

Uzyskujemy $X = (Z'_{11})^{-1}$. Następnie podstawiając postać (2.62) do równania (2.61) otrzymujemy:

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ 0 & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ 0 \end{bmatrix} y_t^- = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ 0 \end{bmatrix} y_{t-1}^-. \quad (2.65)$$

Korzystając z faktu $y_t^- = g_y^- y_{t-1}^-$:

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ 0 & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ 0 \end{bmatrix} g_y^- = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.66)$$

Podstawiając $X = (Z'_{11})^{-1}$ dostajemy poszukiwane rozwiązanie dla g_y^- :

$$g_y^- = Z'_{11} T_{11}^{-1} S_{11} (Z'_{11})^{-1}. \quad (2.67)$$

Ostatnim etapem jest znalezienie zastrzeżenia funkcji przejścia dla szoków g_ϵ . Rozważamy część równania (2.50), gdzie występują szoki:

$$\begin{aligned} (f_y^+ g_y^+ g_\epsilon^- + f_y^0 g_\epsilon + f_\epsilon) \epsilon_t &= 0, \\ f_y^+ g_y^+ g_\epsilon^- + f_y^0 g_\epsilon + f_\epsilon &= 0. \end{aligned} \quad (2.68)$$

Oznaczmy J^- jako macierz wybierającą zmienne wsteczne(zmienne stanu), tj. macierz składającą się z macierzy jednostkowej z dodatkowymi kolumnami wartości zero:

$$f_y^+ g_y^+ J^- g_\epsilon + f_y^0 g_\epsilon + f_\epsilon = 0. \quad (2.69)$$

Rozwiązując powyższe równanie dla g_ϵ otrzymujemy poszukiwane:

$$g_\epsilon = -(f_y^+ g_y^+ J^+ f_y^0)^{-1} f_\epsilon. \quad (2.70)$$

Łącząc uzyskane wyniki (2.63), (2.67) oraz (2.70) dostajemy poszukiwane macierze przejścia dla problemu (2.22):

$$\begin{aligned} H_x &= g_y^- = Z_{11} S_{11}^{-1} T_{11} Z_{11}^{-1}, \\ G_x &= g_\epsilon^- = -(f_y^+ g_y^+ J^+ f_y^0)^{-1} f_\epsilon^-, \\ H_y &= g_y^+ = -Z_{22}^{-1} Z_{21}, \\ G_y &= g_\epsilon^+ = -(f_y^+ g_y^+ J^+ f_y^0)^{-1} f_\epsilon^+. \end{aligned} \quad (2.71)$$

Zaprezentowana metoda jest aproksymacją rozwiązywania modeli DSGE. Dokładniejsza metoda stosowalna dla przypadku osobliwego została zaprezentowana w pracy [30]. Ta metoda opiera się o zastosowanie podobnego rozważanie zmiennych kontrolnych wprzód, jak w przypadku rozwiązania opisanego w sekcji poświęconej macierzy nieosobliwej 2.3.1.

2.3.3 Zmienne statyczne

Duża ilość modeli zawiera w swoich równaniach zmienne, które nie są zmiennymi kontrolnymi ani stanu(występują jedynie z indeksem czasowym t). Takie zmienne będziemy nazywali statycznymi. Zmienne statyczne wprowadzają odpowiednią ilość kolumn zerowych do macierzy B , a odpowiadające im generalizowane wartości własne $S^{-1}T$ wynikające z dekompozycji QZ będą odpowiednio wynosiły 0. W związku z tym przed zastosowaniem metody z poprzedniego rozdziału wprowadzimy dodatkowy krok, pozwalający na usunięcie zmiennych statycznych z problemu szukania dekompozycji QZ, co pozwoli nam następnie na obliczenie funkcji przejścia z postaci wynikowej (2.71).

Na początku powrócimy do postaci (2.54):

$$f_y^+ \hat{y}_{t-1}^+ + f_y^0 \hat{y}_t + f_y^- \hat{y}_{t-1}^- = 0. \quad (2.72)$$

Z macierzy f_y^0 konstruujemy macierz S , składającą się z tych kolumn macierzy f_y^0 , które odpowiadają kolumnom ze zmiennymi statycznymi. Następnie przeprowadzamy dekompozycję QR macierzy S , otrzymując macierze Q i R , dla których $S = QR$. Macierz Q jest macierzą ortogonalną, natomiast macierz R jest prostokątną macierzą trójkątną górną. Oznaczmy przez n_s ilość zmiennych statycznych w naszym modelu.

Przemnażając macierze f^0 , f^- , f^+ przez Q oznaczmy:

$$A^+ = Q f^+, A^0 = Q f^0, A^- = Q f^-. \quad (2.73)$$

Podstawiając dostajemy równanie:

$$A^+ \hat{y}_{t-1}^+ + A^0 \hat{y}_t + A^- \hat{y}_{t-1}^- = 0. \quad (2.74)$$

W tej reprezentacji z konstrukcji macierzy A^0 wiemy, że dla kolumn odpowiadającym zmiennym statycznym w dolnych wierszach $i > n_s$ mamy wartości zero $A_{i,j \in \{n_s\}}^0 = 0$.

Z macierzy A^+ , A^0 , A^- bierzemy teraz dolne $n - n_s$ wierszy. Dodatkowo macierz A^0 rozbijamy na część odpowiedzialną za zmienne kontrolne i zmienne wsteczne, oznaczając odpowiednio macierze \bar{A}^+ , \bar{A}^{0+} , \bar{A}^{0-} oraz \bar{A}^- . Postać macierzową (2.55) zgodną z powyższymi oznaczeniami zapisujemy jako:

$$\begin{pmatrix} \bar{A}^{0+} & \bar{A}^+ \end{pmatrix} \begin{bmatrix} y_t^- \\ y_{t+1}^+ \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -\bar{A}^- & -\bar{A}^{0+} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} y_{t-1}^- \\ y_t^+ \end{bmatrix}. \quad (2.75)$$

Rozwiązując powyższe, zgodnie z uogólnionym rozwiązaniem modelu, dostajemy funkcję g_y^+ oraz g_y^- . Następnie rozważmy n_s górnych wierszy układu równań (2.74), podstawiając rozwiązane funkcje g_y , rozdzielając przy tym A^0 na macierze odpowiadające za zmienne niestacyjne A^{0ns} oraz zmienne statyczne A^{0s} :

$$\tilde{A}^+ g_y^+ g_y^- \hat{y}_{t-1}^- + \tilde{A}^{0ns} g_y^{ns} \hat{y}_{t-1}^- + \tilde{A}^{0s} \hat{y}_t^s + \tilde{A}^- \hat{y}_{t-1}^- = 0. \quad (2.76)$$

Podstawiamy $\hat{y}_t^s = g_y^s \hat{y}_{t-1}^-$ oraz rozwiązujemy dla g_y^s otrzymując:

$$g_y^s = -[\tilde{A}^{0s}](\tilde{A}^+ g_y^+ g_y^- + \tilde{A}^{0ns} g_y^{ns} + \tilde{A}^-). \quad (2.77)$$

Równania obliczające g_e nie zmieniają się w tym przypadku i dalej dają rezultaty dla zmiennych statycznych.

2.4 Estymowanie modelu DSGE

Analizując modele DSGE często spotykamy się z sytuacją braku dostępu do skali-browanych parametrów gospodarki dla obecnego okresu t . Niestety analiza oraz badanie zmieniającego rynku pod kątem poszukiwania przybliżenia tych wartości może być utrudniona i wymagać wnikliwego zrozumienia stanu rynku. Zamiast tego wykorzystamy metodę opierającą się o zastosowanie twierdzenia Bayesa zwaną wnioskowaniem bayesowskim. Ideą procedury estymacji będzie wykorzystanie historycznej kalibracji parametrów sprzed dłuższego okresu czasu (np. dane sprzed kilku dekad) oraz sekwencji danych opisujących zmierzone wartości ekonomiczne gospodarki z okresu poprzedzającego badany (np. wartości PKB, zatrudnienia, inflacji z okresu 10 lat), w celu oszacowania wartości dla obecnego okresu.

Formalizując procedura będzie opierała się na następujących elementach:

- model bayesowski – model składający się ze wspólnego rozkładu prawdopodobieństwa danych Y oraz parametrów θ , oznaczanego przez gęstość prawdopodobieństwa $p(Y, \theta)$,
- rozkład a priori – rozkład opisywany przez gęstość prawdopodobieństwa $p(\theta)$, który opisuje estymację historyczną parametrów modelu, co można interpretować jako wiedzę na temat θ ,
- dane Y – dane ekonomiczne opisujące pewien przedział czasu poprzedzający moment estymacji,
- funkcja wiarygodności (*likelihood function*) – funkcja parametru θ , która opisywać będzie jak bardzo prawdopodobne jest wystąpienie danych ekonomicznych Y przy zadanej wartości parametrów θ .

W kontekście omawianej metody możemy wskazać model bayesowski jako rozważany model DSGE, w którym zmienne ekonomiczne Y związane są w układzie równań ze współczynnikami θ , a gęstość prawdopodobieństwa $p(Y, \theta)$ będzie opisywała szansę na zajście danej sekwencji pomiarów Y przy wartości zadanej parametrów θ . Rozkładem a priori jest znana estymacja parametrów pewnego historycznego okresu, dopuszczając zastosowanie wartości z czasu kiedy struktura gospodarki mogła różnić się od stanu obecnego. Dane Y zostaną szerzej opracowane w rozdziale 2.4.3, pokrótce są to wartości wynikające z wartości zmiennych ekonomicznych modelu, które odpowiadają mierzalnym wartościom ekonomicznym, m.in. PKB, poziom zatrudnienia. Powodem rozdziału zmiennych modelu od wartości obserwowalnych jest dodatkowa reprezentacja błędów pomiarowych w przypadku rozważania danych realnych. Funkcja wiarygodności zostanie szerzej omówiona w rozdziale 2.4.4.

Mając powyższy model bayesowski celem będzie policzenie rozkładu a posteriori $p(\theta|Y)$, który następnie zostanie wykorzystany w algorytmie Metropolisa-Hastinga, opisującego metodę próbkowania danych z powyższego rozkładu w celu znalezienia poszukiwanej kalibracji θ . Algorytmy przedstawione w tym rozdziale będą wykorzystywały metody numeryczne m.in. próbkowanie metodą Monte Carlo oraz algorytm filtrowania Kalmana.

2.4.1 Układ równań modelu

Algorytm próbkowania opiera się na dobieraniu próbek wartości parametrów θ modelu, stąd w tej sekcji zostanie opisana procedura przekształcenia do postaci wymaganej w estymacji bayesowskiej. Zakładamy, że mamy model w postaci kanonicznej z równania (2.20):

$$\Gamma_1(\theta) \begin{bmatrix} x_t \\ \mathbb{E}_t y_{t+1} \end{bmatrix} = \Gamma_2(\theta) \begin{bmatrix} x_{t-1} \\ y_t \end{bmatrix} + \Psi(\theta) \epsilon_t. \quad (2.78)$$

Następnie rozważmy pewien wektor θ parametrów w celu uzyskania macierzy w postaci liczbowej z funkcji $\Gamma_1(\theta)$, $\Gamma_2(\theta)$ oraz $\Psi(\theta)$. Algorytm będzie opierał się na przekształceniu powyższego do postaci modelu wektorowej autoregresji (VAR):

$$s_t = H s_{t-1} + G \epsilon_t, \quad (2.79)$$

gdzie wektor s_t zbiera wszystkie zmienne x_t oraz y_t po wyłączeniu z postaci wartości oczekiwanych $\mathbb{E}_t y_t$. Model wymaga usunięcia zależności od zmiennych kontrolnych oraz zapewnienia istnienia unikalnego ograniczonego rozwiązania. W związku z tym możemy zauważyć, że powyższa postać jest równoważna funkcji przejścia (2.22) oraz uzyskanego wyniku dla uogólnionej postaci macierzy (osobliwej lub nieosobliwej) z (2.71). W związku z tym stosując to rozwiązanie przekształcimy je do postaci (2.79), zakładając że wektor s_t zbiera zmienne:

$$s_t = \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix}. \quad (2.80)$$

Macierze H , G są skonstruowane poprzez odpowiednie wstawienie H_x , H_y , G_x , G_y i kolumn wypełnionych zerami w celu zachowania odpowiednich rozmiarów macierzy, jako że oryginalne rozwiązanie (2.22) zakładało używanie jedynie wektora zmiennych stanu.

2.4.2 Wnioskowanie bayesowskie

Zgodnie z wcześniejszym opisem ideą wnioskowania bayesowskiego jest skonstruowanie rozkładu $p(\theta|Y)$, który pozwoli ocenić szansę wystąpienia danej próbki wektora wartości

parametrów θ przy wystąpieniu danych Y . Rozkład ten jest niemożliwy do obliczenia ale w kolejnej części zostanie wykorzystany algorytm Metropolis-Hastingsa opisujący próbkowanie z tego rozkładu. Jednak zanim go zastosujemy musimy znaleźć postać dla funkcji gęstości prawdopodobieństwa $p(\theta|Y)$, w związku z tym w tej sekcji zostanie opisana metoda opierająca się na znalezieniu funkcji wiarygodności $p(Y|\theta)$, która następnie przy pomocy twierdzenia Bayesa pozwoli aproksymować $p(\theta|Y)$. Ten etap został opisany w sekcji 2.4.4 oraz w dalszej części, gdzie został zaprezentowany kluczowy algorytm filtrowania.

Przed przystąpieniem do części poświęconej opisowi metody, zostanie omówiona struktura modelu bayesowskiego. Zgodnie ze wcześniejszym wprowadzeniem model składa się ze wspólnego rozkładu prawdopodobieństwa danych Y oraz parametrów θ , charakteryzowany przez gęstość prawdopodobieństwa $p(Y, \theta)$. Dodatkowo mamy dany rozkład a priori $p(\theta)$, opisujący stan wiedzy o parametrach θ przed zaobserwowaniem danych Y , czyli kalibracja modelu opisująca gospodarkę przez wystąpieniem sekwencji danych Y .

Stosując twierdzenie Bayesa możemy zapisać poszukiwaną gęstość rozkładu a posteriori jako:

$$p(\theta|Y) = \frac{p(Y|\theta)p(\theta)}{p(Y)}. \quad (2.81)$$

W powyższym rozkład $p(Y)$ nazywany jest rozkładem marginalnym wiarygodności i zdefiniowany jest jako:

$$p(Y) = \int p(Y|\theta)p(\theta)d\theta. \quad (2.82)$$

Rozkład marginalny $p(Y)$ nie zależy od wartości θ i służy jedynie normalizacji wartości, w celu zachowania własności funkcji gęstości $\int p(Y) = 1$. W związku z czym jest on wspólny dla wszystkich wartości θ i będzie on pomijany przy dalszych obliczeniach.

Gęstość $p(Y|\theta)$ jest kluczowym elementem wnioskowania bayesowskiego. Interpretujemy to jako funkcję parametrów θ oraz nazywamy ją funkcją wiarygodności. Możemy to interpretować jako funkcja prawdopodobieństwa wystąpienia danych Y dla zadanych parametrów θ .

2.4.3 Wartości obserwowalne

Przedstawienie modelu DSGE jako modelu bayesowskiego wymaga zdefiniowania zbioru danych Y . W tym celu wprowadzimy dodatkową kategorię zmiennych zwanych wartościami obserwowalnymi. Wartości obserwowalne będą pozwalały nam przedstawić wartości endogeniczne modelu jako realne obserwowalne wartości ekonomiczne m.in. PKB, zatrudnienie lub inflacja, które dodatkowo rozszerzamy o reprezentacje błędów pomiarowych.

Formalizując wartości obserwowalne y_t będziemy definiowali poprzez dodatkowe równania modelu zwane równaniami pomiaru:

$$y_t = \Psi_0(\theta) + \Psi_1(\theta)t + \Psi_2(\theta)s_t + u_t, \quad (2.83)$$

gdzie podobnie jak w przypadku postaci równań, macierze pomiaru Ψ_0, Ψ_1, Ψ_2 są funkcjami generującymi macierze na bazie wartości parametrów θ . Zmienna u_t opisuje wektor błędów pomiarowych, który zazwyczaj będzie dobierany z rozkładu normalnego $u_t \sim N(0, \Sigma_u)$. Przykładowo będziemy mieli dany układ pomiarowy poprzez równania:

$$INFL_t = \pi^{(A)} + 400\hat{\pi}_t \quad (2.84)$$

$$INT_t = \pi^{(A)} + r^{(A)} + 4\gamma^{(Q)} + 400\hat{R}_t \quad (2.85)$$

W powyższym wartości $\pi^{(A)}$, $r^{(A)}$, $\gamma^{(Q)}$ opisują wartości stanu ustalonego gospodarki. Będziemy je traktowali jako wartości wektora θ , czyli poszukiwanych kalibracji parametrów modelu. W powyższym przykładzie utworzymy odpowiednio macierze Ψ_0 , Ψ_2 . Z uwagi na fakt, że w równaniach nie występuje t , Ψ_1 będzie macierzą zerową.

2.4.4 Funkcja wiarygodności

Mając zdefiniowany zbiór danych Y dla naszego modelu możemy przejść do przedstawienia funkcji wiarygodności $p(Y|\theta)$. Zakładamy że dane Y są w postaci sekwencji y_t dla $t \in \{1, \dots, T\}$, co będzie oznaczali jako zbiór $Y_{1:T}$. Analogicznie zastrzeżenie danych do pewnego okresu t będziemy opisywali jako $Y_{1:t}$. Funkcję wiarygodności możemy następnie przedstawić jako iloczyn prawdopodobieństw:

$$P(Y|\theta) = P(Y_{1:T}|\theta) = \prod_{t=1}^T P(y_t|Y_{1:t-1}, \theta). \quad (2.86)$$

Reprezentacja modelu w postaci modelu wektorowej autoregresji (2.79) wraz z reprezentacją funkcji pomiaru (2.83) tworzy niestety model z zależnością od wewnętrznego stanu tj. zmiennych endogenicznych, co opisuje łączony rozkład prawdopodobieństwa $p(Y_{1:T}, S_{1:T}|\theta)$. W celu obliczenia wartości po prawej stronie musimy wyeliminować z modelu wewnętrzny stan zmiennych S_T . W związku z tym zostanie zastosowany algorytm filtrujący, za pomocą którego obliczymy predykcje wartości wewnętrznych zmiennych stanu modelu, a następnie odpowiednio zaktualizujemy rozkłady na bazie danych pomiarowych otrzymanych z wejścia Y . Filtr opiera się o zastosowanie macierzy przejścia z postaci autoregresji modelu oraz macierzy pomiarowych.

2.4.5 Funkcja filtru

Zgodnie z poprzednimi sekcjami algorytm filtru spełnia zadanie wyeliminowania zależności od wartości zmiennych stanu wewnętrznego. Filtr korzystając z macierzy układu równań modelu, generuje sekwencje warunkowych rozkładów $s_t|Y_{1:t}$ oraz $p(y_t|Y_{1:t-1}, \theta)$.

Algorytm 2.4.1 (Filtr)

1. *Inicjalizacja w okresie t : $p(s_{t-1}|Y_{1:t-1}, \theta)$*

2. *Predykcja okresu t przy danych z $t-1$*

(a) *Funkcja przejścia:*

$$p(s_t|Y_{1:t-1}, \theta) = \int p(s_t|s_{t-1}, Y_{1:t-1}, \theta)p(s_{t-1}|Y_{1:t-1}, \theta)ds_{t-1}.$$

(b) *Funkcja pomiaru:*

$$p(y_t|Y_{1:t-1}, \theta) = \int p(y_t|s_t, Y_{1:t-1}, \theta)p(s_t|Y_{1:t-1}, \theta)ds_t.$$

3. *Aktualizowanie rozkładu za pomocą twierdzenia Bayesa przy pomocy nowego pomiaru y_t :*

$$p(s_t, Y_{1:t}, \theta) = p(s_t|y_t, Y_{1:t-1}, \theta) = \frac{p(y_t|s_t, Y_{1:t-1}, \theta)p(s_t|Y_{1:t-1}, \theta)}{p(y_t|Y_{1:t-1}, \theta)}.$$

Pozostałym elementem dla algorytmu filtru jest rozkład początkowy s_0 . Najczęściej stosowanym startowym rozkładem jest rozkład odpowiadający rozkładowi niezmiennemu dla funkcji przejścia s_t . Zostanie on wyprowadzony w kolejnej sekcji 2.4.5.1.

2.4.5.1 Filtr Kalmana

W przypadku modeli DSGE często przyjmuje się że rozkłady zmiennych stanu oraz błędów pomiarowych są zgodne z rozkładem Gaussa. To założenie pozwoli nam wykorzystać filtr Kalmana do oszacowania oraz wyeliminowania zależności od stanu wewnętrznego. Do opisu tej procedury wykorzystane zostały opracowania oraz uwagi z prac [26] oraz [34]. Algorytm filtru Kalmana prezentuje się następująco:

Algorytm 2.4.2 (Filtr Kalmana)

1. Inicjalizacja w okresie t danymi z kroku $t - 1$ dana poprzez

$$s_{t-1}|Y_{1:t-1} \sim N(\tilde{s}_{t-1|t-1}, \tilde{P}_{t-1|t-1}). \quad (2.87)$$

2. Krok predykcji rozkładu $s_t|Y_{1:t-1} \sim N(\tilde{s}_{t|t-1}, \tilde{P}_{t|t-1})$:

$$\tilde{s}_{t|t-1} = H\tilde{s}_{t-1|t-1}, \quad (2.88)$$

$$\tilde{P}_{t|t-1} = H\tilde{P}_{t-1|t-1}H^T + G\Sigma_\epsilon G^T. \quad (2.89)$$

Predykcja rozkładu pomiaru $y_t|Y_{1:t-1} \sim N(\tilde{y}_{t|t-1}, F_{t|t-1})$:

$$\tilde{y}_{t|t-1} = \Psi_0 + \Psi_1 t + \Psi_2 \tilde{s}_{t|t-1}, \quad (2.90)$$

$$\tilde{Y}_{t|t-1}^c = \Psi_2 \tilde{P}_{t|t-1} \Psi_2^T + \Sigma_u. \quad (2.91)$$

3. Krok aktualizacji rozkładów przy obecności zmierzonej wartości y_t :

(a) błąd predykcji $v_t = y_t - \tilde{y}_{t|t-1}$,

(b) przyrost Kalmana $k_t = F\tilde{P}_{t|t-1}\Psi_2^T\tilde{Y}_{t|t-1}^{c-1}$.

Aktualizowany rozkład $s_t|Y_{1:t} \sim N(\tilde{s}_{t|t}, \tilde{P}_{t|t})$:

$$\tilde{s}_{t|t} = \tilde{s}_{t-1|t} + k_t v_t, \quad (2.92)$$

$$\tilde{P}_{t|t} = \tilde{P}_{t-1|t} - k_t \Psi_2 \tilde{P}_{t-1|t} (k_t \Psi_2)^T + k_t \tilde{Y}_{t|t-1}^c k_k^T. \quad (2.93)$$

4. Wartość funkcji logarytmicznej wiarygodności kroku:

$$\log(f) = \frac{|y|}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2} \log(\det(\tilde{Y}_{t|t-1}^c)) - \frac{1}{2} v_t \tilde{Y}_{t|t-1}^{c-1} v_t^T. \quad (2.94)$$

W tym miejscu dodatkowo możemy zdefiniować rozkład startowy s_0 i P_0 . Oznaczmy wartość oczekiwaną $E(s)$ i wariancję Σ tego rozkładu, zgodnie z tym mamy zachowane dla niezmiennika:

$$E(s) = E(s_{t+1}) = E(Hs_t + G\epsilon_{t+1}G^T) = HE(s), \quad (2.95)$$

$$(I - H)s_0 = 0. \quad (2.96)$$

w powyższym skorzystaliśmy z własności $E(\epsilon_{t+1}) = 0$, co jest jednym z warunków wykorzystania filtru Kalmana. Rozwiązując dostajemy $s_0 = E(s) = 0$. Dla kowariancji postać uzyskujemy korzystając z:

$$\Sigma = E[(Hs_t + G\epsilon_{t+1}G^T)(Hs_t + G\epsilon_{t+1}G^T)^T] \quad (2.97)$$

$$= E[Hs_t s_t^T H^T + G\epsilon_{t+1} \epsilon_{t+1}^T G^T] \quad (2.98)$$

$$= H\Sigma H^T + G\Sigma_\epsilon G^T. \quad (2.99)$$

Ta postać nazywana jest równaniem Lapunowa, dla którego istnieje rozwiązujący algorytm numeryczny. Następnie podstawiamy $P_0 = \Sigma$.

2.4.6 Algorytmy próbkowania

Mając daną funkcję wiarygodności, którą otrzymujemy poprzez odpowiednie zastosowanie algorytmu filtru oraz iterację sekwencji danych, jesteśmy w stanie opisać prawdopodobieństwa zajścia danych Y jako funkcję parametrów modelu θ , czyli aproksymację prawdopodobieństwa $p(\theta|Y)$. Wykorzystanie tego rozkładu zostanie przedstawione w kolejnej sekcji 2.4.6.1. Następnym krokiem procesu estymacji jest przeprowadzenie algorytmu próbkowania, dzięki któremu wygenerujemy zbiór próbek z poszukiwanego rozkładu $p(\theta|Y)$. Ideą algorytmu będzie generowanie coraz lepszych przybliżeń rozkładu $p(\theta|Y)$, poprzez iteracyjne poprawianie obecnej „najlepszej” próbki, a zbiór wylosowanych wartości θ od pewnego kroku utworzy ostatecznie przybliżenie $p(\theta|Y)$. Istnieje wiele alternatywnych metod próbkowania Monte Carlo, np. *Importance Sampling* [26], lub pochodnych randomizowanych metod opartych o symulowane wyżarzanie np. symulowanie hartowanie [25], jednak najpopularniejszą jest algorytm Metropolisa-Hastingsa.

2.4.6.1 Algorytm Metropolisa-Hastingsa

W tej części zostanie przedstawiony algorytm Metropolisa-Hastingsa (MH) w oparciu o pracę [26]. Istnieje wiele różnych wariantów tych algorytmów, każdy z nich oblicza łańcuch Markowa o unikalnym rozkładzie stacjonarnym równym poszukiwanemu. Ich działanie opiera się o metodę losowania wartości w kolejnych iteracjach w celu zbudowania zbioru wartości, stąd możemy je zaklasyfikować do klasy algorytmów Monte Carlo. Wśród wariantów algorytmów MH można wymienić algorytm *Random Walk Metropolis-Hastings*, algorytm *Metropolis-Adjusted Langevin* [26] lub algorytm blokowy Metropolisa-Hastingsa [14].

Głównym elementem przedstawionej wersji algorytmu Metropolisa-Hastingsa będzie rozkład $q(\vartheta|\theta^{i-1})$, który będzie zależał od wartości θ^{i-1} wybranej w ramach iteracji $i - 1$ algorytmu. Wylosowana wartość w obecnym kroku θ^i będzie zawsze akceptowana w przypadku, gdy wartość gęstości rozkładu a posteriori rośnie w porównaniu do wartości θ^i . Jeśli nie jest spełniony ten warunek dopuszczamy możliwość zaakceptowania wartości θ^i z pewnym prawdopodobieństwem. W przypadku gdy wylosowana wartość nie została zaakceptowana ustawiamy $\theta^i = \theta^{i-1}$. Prawdopodobieństwo akceptacji wartości obniżającej gęstość jest dobierane w taki sposób, żeby losowane wartości były zbieżne do docelowej wartości a posteriori, szczegółowo ta część algorytmu zostanie omówiona przy wariantach algorytmu.

Algorytm 2.4.3 (Uogólniony algorytm Metropolisa-Hastingsa)

W iteracjach $i = 1, \dots, n$:

1. Wylosuj ϑ z rozkładu opisywanego gęstością $q(\vartheta|\theta^{i-1})$.
2. Ustal $\theta^i = \nu$ z prawdopodobieństwem

$$\alpha(\vartheta|\theta^i) = \min\left\{1, \frac{p(\vartheta|Y)/q(\vartheta|\theta^{i-1})}{p(\theta^{i-1}|Y)/q(\theta^{i-1}|\vartheta)}\right\}, \quad (2.100)$$

oraz $\theta^i = \theta^{i-1}$ w przeciwnym przypadku.

Wracając do problemu poszukiwanej estymacji:

$$p(\theta|Y) = \frac{p(Y|\theta)p(\theta)}{p(Y)}. \quad (2.101)$$

Możemy zauważyć że dla ustalonych danych Y prawdopodobieństwo $p(Y)$ służy jedynie normalizacji funkcji gęstości prawdopodobieństwa. W związku z tym możemy wykluczyć czynnik $p(y)$ oraz aproksymować rozkład a posteriori jako:

$$p(\theta|Y) \propto p(Y|\theta)p(\theta). \quad (2.102)$$

Prawdopodobieństwo $\alpha(\vartheta|\theta^i)$ po wykluczeniu czynnika $p(y)$ przyjmuje postać:

$$\alpha(\vartheta|\theta^i) = \min \left\{ 1, \frac{p(Y|\vartheta)p(\vartheta)/q(\vartheta|\theta^{i-1})}{p(Y|\theta^{i-1})p(\theta^{i-1})/q(\theta^{i-1}|\vartheta)} \right\}. \quad (2.103)$$

Różne warianty algorytmu Metropolis-Hastingsa są najczęściej oparte o różne rozkłady $q(\vartheta|\theta^{i-1})$ oraz różne metody losowania kolejnych wartości ϑ z tego rozkładu.

Warunkiem dla poprawnego działania powyższego algorytmu, tj. że powyższy algorytm poprawnie wygeneruje sekwencję losów z rozkładu a posteriori $p(\theta|Y)$, jest warunek, że rozkład a posteriori musi być niezmienny dla jądra przejścia $K(\cdot|\cdot)$. Czyli musi być spełnione:

$$p(\theta|Y) = \int K(\theta|\tilde{\theta})p(\tilde{\theta}|Y)d\tilde{\theta}. \quad (2.104)$$

Powyższy warunek zapewni nam, że jeśli θ^{i-1} zostało wylosowane z rozkładu a posteriori $p(\theta|Y)$, wtedy próbka θ^i też zostanie wylosowana z rozkładu a posteriori.

W celu udowodnienia powyżej właściwości jądro przejścia możemy wyrazić jako:

$$K(\theta|\tilde{\theta}) = u(\theta|\tilde{\theta}) + r(\tilde{\theta})\delta_{\tilde{\theta}}(\theta). \quad (2.105)$$

W powyższym wzorze $u(\theta|\tilde{\theta})$ opisuje gęstość jądra dla akceptowania losów:

$$u(\theta|\tilde{\theta}) = \alpha(\theta|\tilde{\theta})q(\theta|\tilde{\theta}). \quad (2.106)$$

Prawdopodobieństwa α oraz q są w algorytmie odpowiednio rozkładami opisującymi zaakceptowanie wylosowanego wektora θ^i oraz doboru wektora. Wartość $r(\tilde{\theta})$ opisuje prawdopodobieństwo warunkowe dla $\tilde{\theta}$, że wylosowana wartość zostanie odrzucona:

$$r(\tilde{\theta}) = \int (1 - \alpha(\theta|\tilde{\theta}))q(\theta|\tilde{\theta})d\theta = 1 - \int u(\theta|\tilde{\theta})d\theta. \quad (2.107)$$

W przypadku gdy wylosowana wartość zostanie odrzucona, algorytm ustawia $\theta^i = \theta^{i-1}$, co oznacza że gęstość prawdopodobieństwa przejścia jest zdegenerowana do masy punktowej $\theta = \tilde{\theta}$, co pokrywa funkcja Diraca $\delta_{\tilde{\theta}}(\theta)$ we wzorze (2.105).

Następnie będziemy chcieli udowodnić, że prawdopodobieństwo przejścia z $\tilde{\theta}$ do θ jest równe przejściu z θ do $\tilde{\theta}$:

$$p(\tilde{\theta}|Y)u(\theta|\tilde{\theta}) = p(\tilde{\theta}|Y)q(\theta|\tilde{\theta}) \min \left\{ 1, \frac{p(\theta|Y)/q(\theta|\tilde{\theta})}{p(\tilde{\theta}|Y)/q(\tilde{\theta}|\theta)} \right\} \quad (2.108)$$

$$= \min \left\{ p(\tilde{\theta}|Y)q(\theta|\tilde{\theta}), p(\theta|Y)q(\tilde{\theta}|\theta) \right\} \quad (2.109)$$

$$= p(\theta|Y)q(\tilde{\theta}|\theta) \min \left\{ \frac{p(\tilde{\theta}|Y)/q(\tilde{\theta}|\theta)}{p(\theta|Y)/q(\theta|\tilde{\theta})}, 1 \right\} \quad (2.110)$$

$$= p(\theta|Y)u(\tilde{\theta}|\theta). \quad (2.111)$$

Korzystając z powyżej właściwości oraz własności funkcji Diraca dowodzimy (2.104):

$$\int K(\theta|\tilde{\theta})p(\tilde{\theta}|Y)d\tilde{\theta} = \int p(\tilde{\theta}|Y)d\tilde{\theta}u(\theta|\tilde{\theta})d\tilde{\theta} + \int p(\tilde{\theta}|Y)d\tilde{\theta}r(\tilde{\theta})\delta_{\tilde{\theta}}(\theta)d\tilde{\theta} \quad (2.112)$$

$$= \int p(\theta|Y)u(\theta|\tilde{\theta})d\tilde{\theta} + p(\theta|Y)r(\theta) \quad (2.113)$$

$$= p(\theta|Y). \quad (2.114)$$

2.4.6.2 Algorytm Random Walk Metropolis-Hastings

Szeroko stosowanym wariantem algorytmu Metropolisa-Hastingsa jest metoda Random Walk MH (*RWMH*). W tym algorytmie rozkład $q(\vartheta|\theta^{i-1})$ będzie odwzorowywał losowy spacer z $\vartheta = \theta^{i-1} + \eta$, gdzie η jest losowana z rozkładu wokół zera.

Rozkład $\vartheta = \theta^{i-1} + \eta$ możemy wyrazić poprzez wartość oczekiwaną oraz odchylenie standardowe:

$$\mu(\theta_t) = \theta_{t-1} \text{ oraz } \Sigma(\theta_t) = c^2 \hat{\Sigma}. \quad (2.115)$$

W tym przypadku z uwagi na symetryczną postać rozkładu q , mamy $q(\vartheta|\theta^{i-1}) = q(\theta^{i-1}|\vartheta)$, dzięki czemu możemy uprościć (2.100) do postaci:

$$\alpha = \min \left\{ \frac{p(\vartheta|Y)}{p(\theta^{i-1}|Y)}, 1 \right\}. \quad (2.116)$$

Wylosowana wartość ϑ jest akceptowana w przypadku gdy rozkład a posteriori dla ϑ ma większą wartość niż rozkład θ^{i-1} . Taka sytuacja może być interpretowana jako wybór wektora parametrów ϑ , który jest bardziej prawdopodobną odpowiedzią modelu na obecność danych Y .

Pozostałymi elementami algorytmu są wartości c oraz $\hat{\Sigma}$ ze wzoru (2.115). Rozkładem z którego będziemy losować wartości do spaceru losowego będzie rozkład normalny, natomiast wartość c zazwyczaj dobierana jest jako parametr skalujący, który może zmieniać swoją wartość w przebiegu algorytmu lub być ustawiony jako stały. Jego wartość zostanie omówiona po wartości Σ – wartości kontrolującej wariancję i korelację w generowanym rozkładzie.

Wartość Σ musi dobrze opisywać relacje w parametrach naszego modelu. W przypadku gdy wariancja opisana przez macierz $\hat{\Sigma}$ nie ujmuje relacji między zmiennymi zależnymi, może okazać się że dwie wartości β , δ są zależne między sobą w rozkładzie a posteriori, a nasze estymacje tego nie odwzorowują. Przykładowo nadając β dużą wartość, podczas gdy wartość δ pozostanie mała. Takie wartości będą dawały małą wartość $p(\vartheta|Y)$ i będą najpewniej odrzucane, a łańcuch będzie silnie auto-skorelowany.

Zamiast tego będziemy stosowali estymację kowariancji rozkładu a posteriori w postaci wariantu *RWMH-V*, gdzie wartość Σ to pewna przygotowana wstępna estymacja kowariancji rozkładu. Metoda ta niesie ze sobą pewną niepraktyczność, gdyż wymaga znalezienia estymacji kowariancji rozkładu a posteriori, co jest docelowo szukanym rezultatem. Zamiast tego możliwe jest zastosowanie przybliżonych wartości stosując metody numeryczne, ewentualnie traktując wynik wstępnego uruchomienia algorytmu z wartościami kowariancji równymi rozkładowi a priori jako wejście do kolejnej iteracji algorytmu *RWMH-V*. Ta metoda może zostać zastosowana wielokrotnie, poprawiając wynik procedury.

Wartość parametru c najczęściej jest ustalana na stałą wartość $c = 0.234$, zgodnie z wcześniejszymi wynikami dla rozkładów normalnych wielu zmiennych [26]. Wartość ta może również być zmienna w trakcie przebiegu algorytmu. Najczęściej stosowane są wartości z przedziału 0.2 do 0.4. W przypadku algorytmu wykorzystanego w pracy parametr c jest skalowany o 75% co 100 iteracji algorytmu.

2.4.6.3 Parametry z ograniczeniami

Często parametry występujące w modelach DSGE są ograniczone przez zależności gospodarcze. Układ równań dla problemu gospodarstw lub firm nie dostarcza dodatkowych informacji na temat przedziałów wartości parametrów. W przypadku estymacji te

informacje mogą być kluczowe w celu zapewnienia realnego znaczenia, jednak postać algorytmu Metropolisa-Hastingsa wymagałaby odrzucania próbek dla wartości niezgodnych z założonymi kresami. W związku z tym w części implementacyjnej zostało wprowadzone mapowanie między utrzymywaną losową nieograniczoną próbką $\bar{\theta}$, a realnymi wartościami parametru θ . Poniżej przedstawiona została transformacja między tymi zmiennymi dla pewnego parametru $x \in \theta$:

- $x \in [\bar{a}, \infty)$ – wprowadzamy nową nieograniczoną zmienną \bar{x} z mapowaniami:

$$\bar{x} = \log(x - \bar{a}), \quad (2.117)$$

$$x = \bar{a} + \exp(\bar{x}), \quad (2.118)$$

- $x \in (-\infty, \bar{b}]$ – wprowadzamy nową nieograniczoną zmienną \bar{x} z mapowaniami:

$$\bar{x} = \log(\bar{b} - x), \quad (2.119)$$

$$x = \bar{b} - \exp(\bar{x}), \quad (2.120)$$

- $x \in [\bar{a}, \bar{b}]$ – wprowadzamy nową nieograniczoną zmienną \bar{x} z mapowaniami:

$$\bar{x} = \log\left(\frac{\bar{b} - x}{x - \bar{a}}\right), \quad (2.121)$$

$$x = \frac{\bar{b} + \bar{a} \exp(\bar{x})}{1 + \exp(\bar{x})}. \quad (2.122)$$

2.5 Prognozowanie modelu

Ostatnim etapem analizy modelu DSGE jest przeprowadzenie prognozowania na bazie dostępnej kalibracji lub rozkładu a posteriori parametrów. W przypadku wykorzystania kalibracji w postaci wektora wartości θ , możemy bezpośrednio zastosować rozwiązanie modelu metodą uogólnioną 2.3.2 generując macierz przejścia. W przypadku gdy wykonujemy estymację bayesowską z sekcji 2.4 dostajemy rozkład w postaci zbioru zaakceptowanych wektorów w ramach algorytmu Metropolisa-Hastingsa. Dla każdego z wektorów tego zbioru, analogicznie przy pomocy uogólnionej metody 2.3.2, generujemy rozwiązanie modelu w postaci macierzy przejścia. W związku z tym model sprowadza się do układu równań autoregresji (*VAR*):

$$y_t = \Phi_1 y_{t-1} + \Phi_\epsilon \epsilon_t, \quad (2.123)$$

gdzie macierze Φ_1 oraz Φ_ϵ są wygenerowane dla poszczególnego z wektorów parametrów θ .

2.5.1 Badanie szoku impulsowego

W tej części zostanie opisany proces prognozowania wykorzystywany głównie w przypadku kalibracji danych ekonomicznych. Pod pojęciem szoku impulsowego rozumiemy zmienną egzogeniczną opisywaną jako:

$$\epsilon_t = \begin{cases} a & \text{dla } t = 1, \\ 0 & \text{dla } t > 1. \end{cases} \quad (2.124)$$

Powyższa sytuacja ma głównie sens przy analizie modeli z dostępną kalibracją, jako badanie reakcji gospodarki na prosty szok. Najczęściej w przypadku opisu gospodarki z wieloma szokami, procedura jest przeprowadzona niezależnie dla każdego z nich (dla pozostałych szoków ustawiamy wartość zero). Algorytm prognozowania opiera się na zastosowaniu postaci VAR i iterowaniu zmiennej wprzód:

Algorytm 2.5.1

Startowy wektor $y_0 = \vec{0}$.

Wykonaj następujący krok dla $t = 1, \dots, T$:

$$y_t = \Phi_1 y_{t-1} + \Phi_\epsilon \epsilon_t, \quad (2.125)$$

Wyjściem algorytmu jest sekwencja wartości zmiennych y_t dla $t \in [1, T]$. W przypadku wykorzystania powyższego dla rozkładu a posteriori możemy zastosować iteracje dla każdego z wektora osobno i następnie obliczyć średnią wartość zmiennych w czasie lub przedstawić przedziały możliwych wartości ze średnią. Wektor startowy y_0 przyjmuje wartość $\vec{0}$ ze względu na założenie, że model przed działaniem szoku znajduje się w stanie ustalonym, stąd w postaci logarytmicznych odchyień od stanu ustalonego wynosi zero.

2.5.2 Prognozowanie metodą losowych ścieżek

W przypadku rozkładu a posteriori otrzymanego z estymacji możemy otrzymać więcej informacji na temat potencjalnego zachowania gospodarki. Problem prognozowanie kolejnych H przedziałów czasowych możemy zapisać jako sekwencję przyszłych wartości mierzalnych y_{T+1}, \dots, y_{T+H} , których prawdopodobieństwo wystąpienia wynosi

$$p(y_{T+1}, \dots, y_{T+H} | Y_{1:T}) = \int_{\theta \in \Theta} p(y_{T+1}, \dots, y_{T+H} | Y_{1:T}, \theta) p(\theta | Y_{1:T}) d\theta. \quad (2.126)$$

W powyższym możemy przyjąć, że θ opisuje zbiór zaakceptowanych wylosowanych parametrów θ w trakcie działania algorytmu próbkowania rozkładu a posteriori. Dobrym pomysłem w tym przypadku jest odrzucenie pewnej puli pierwszy wylosowanych wartości, zanim algorytm zbliży się do możliwych wartości rozkładu a posteriori. Następnie algorytm losowania odbywa się metodą Monte Carlo:

Algorytm 2.5.2

Prognozowanie metodą ścieżek Monte Carlo

Wykonaj następujące kroki dla $i = 1, \dots, M_2$:

1. Wybierz wektor θ_i z otrzymanego rozkładu a posteriori $p(\theta | Y_{1:T})$.
2. Wykonaj następujące kroki M_1 razy dla wektora θ_i :
 - (a) wylosuj wartości stanu w momencie T z rozkładu $\xi_T \sim N(\xi_{T|T}, P_{T|T})$, gdzie $\xi_{T|T}$ oraz $P_{T|T}$ otrzymujemy jako wyjście z algorytmu filtrowania w trakcie estymacji na bazie wektora θ_i oraz danych $Y_{1:T}$,
 - (b) przeprowadź symulację ścieżki za pomocą równania modelu VAR 2.123 z wartością startową ξ_T , próbkując sekwencję szoków $\epsilon_{T+1}, \dots, \epsilon_{T+H}$ z rozkładu szoków $N(0, \Sigma_\epsilon)$,
 - (c) wylosuj sekwencję błędów pomiarowych $\eta_{T+1}, \dots, \eta_{T+H}$ z rozkładu dla błędów pomiarowych $N(0, \Sigma_\eta)$, obliczając następnie sekwencję wartości obserwowalnych y_{T+1}, \dots, y_{T+H} zgodnie z równaniem pomiarowym (2.83).

3. Zwróć $M = M_1 M_2$ wygenerowanych ścieżek dla wartości obserwowalnych.

Z uzyskanych $M = M_1 M_2$ ścieżek z rozkładu (2.126) możemy obliczyć kwantyle, estymacje punktów oraz estymacje interwałów. W przypadku liczenia jedynie wartości oczekiwanej możemy policzyć wartość średnią dla powyższych ścieżek dostając poszukiwaną sekwencję wartości prognozowanych.

Możemy zauważyć, że powyższy algorytm odpowiada prostemu iterowaniu przy pomocy funkcji przejścia, jednak w tym przypadku stosujemy rozszerzoną reprezentację bazującą na błędach pomiarowych oraz stosujemy otrzymane macierze kowariancji dla rozkładu a posteriori.

Rozdział 3

Wyniki pracy

Ten rozdział poświęcony został wynikom implementacji oraz symulacji modeli DSGE. W części 3.1 został wyznaczony stan ustalony oraz obczliona aproksymacja liniowa dla modelu gospodarki z rozdziału 1.9. W sekcji 3.1.3 przedstawiony został pełny liniowy model, wraz z kalibracją parametrów niezbędną do przeprowadzenia prognozowania metodą Blancharda-Kahna. Następna część 3.2 poświęcona jest przedstawieniu solucji implementującej metody z rozdziału 2, rozpoczynając od struktury folderów repozytorium oraz krótkiego opisu wykorzystanych bibliotek, kończąc opisem pliku modelu na podstawie modelu zaprezentowanego na początku rozdziału.

Zakończenie rozdziału zostało poświęcone opracowaniu wyników prognozowania dla wybranych modeli oraz różnych szoków impulsowych. Jako pierwszy przedstawiono model z rozdziału 3.1 dla dwóch szoków: produktywności oraz polityki monetarnej. Kolejnym jest model RBC, który został przedstawiony w sekcji 1.9.1, dla predykcji zachowania szoku produktywności. Na koniec zaprezentowano model gospodarki Irlandii z 2004 roku oparty o pracę [27] z estymacją bayesowską parametrów dla sekwencji kilkudziesięciu lat danych gospodarczych.

3.1 Linearyzacja modelu NEK

W celu prezentacji wyników pracy zostanie zastosowany model przedstawiony w rozdziale 1.9.2. Poniżej postać modelu w postaci nieliniowej:

- Układ równań problemu optymalizacji użyteczności gospodarstw domowych:

$$W_t = L_t^\phi C_t^\sigma, \quad (3.1)$$

$$\frac{1}{R_t^Q} = \beta \mathbb{E}_t \left(\left(\frac{C_t}{C_{t+1}} \right)^\sigma \frac{1}{\pi_{t+1}} \right), \quad (3.2)$$

$$\frac{1}{\beta} \mathbb{E}_t \left(\frac{C_{t+1}}{C_t} \right)^\sigma = (1 - \delta) + \mathbb{E}_t R_{t+1}^K, \quad (3.3)$$

$$K_{t+1} = (1 - \delta)K_t + I_t. \quad (3.4)$$

- Rozwiązanie komponentu firm:

$$Y_{j,t} = A_t K_{j,t}^\alpha L_{j,t}^{1-\alpha}, \quad (3.5)$$

$$L_{j,t} = (1 - \alpha) MC_{j,t} \frac{Y_{j,t}}{W_t}, \quad (3.6)$$

$$K_{j,t} = \alpha MC_{j,t} \frac{Y_{j,t}}{R_t^K}, \quad (3.7)$$

$$\log A_t = (1 - \rho_A) \log \bar{A}_s + \rho_A \log A_{t-1} + \epsilon_{A,t}. \quad (3.8)$$

- Układ równań opisujący poziom cen:

$$0 = \mathbb{E}_t \sum_{i=0}^{\infty} (\beta\theta)^i Y_{j,t+i} \left(\frac{P_{j,t}^*}{P_{t+i}} - \frac{\psi}{\psi-1} MC_{j,t+i} \right), \quad (3.9)$$

$$P_t^{1-\psi} = \theta P_{t-1}^{1-\psi} + (1 - \theta) P_t^{*1-\psi}, \quad (3.10)$$

$$\Pi_t = \frac{P_t}{P_{t-1}}. \quad (3.11)$$

- Równanie czyszczenia rynku:

$$Y_t = C_t + I_t. \quad (3.12)$$

- Polityka monetarna:

$$R_t^Q = R_t^{Q^*(1-\rho_Q)} R_{t-1}^{Q\rho_Q}, \quad (3.13)$$

$$R_t^{Q^*} = \bar{R}^Q \pi^* \left(\frac{\pi_t}{\pi^*} \right)^{\psi_1} \left(\frac{y_t}{\bar{y}_s} \right)^{\psi_2}. \quad (3.14)$$

W kolejnych sekcjach zostanie przeprowadzony proces aproksymacji liniowej, rozpoczynając od obliczenia stanu ustalonego. W ostatniej sekcji 3.1.3 zaprezentowany został końcowy model. Warto w tym miejscu nadmienić, że zmienne indeksowane firmą j zostaną sprowadzone do postaci bez indeksu j . Wynika to z faktu, że problem jest symetryczny dla każdej z firm i wystarczy przedstawić rozwiązanie dla jednej reprezentatywnej zmiennej.

3.1.1 Stan ustalony

Pierwszym krokiem niezbędnym do ustalenia aproksymacji liniowej modelu jest znalezienie stanu ustalonego. Sprowadzamy zmienne do postaci bez sztywności, tj. podstawiamy $y_t^* = y_t$ a następnie zastępujemy $\bar{y}_s = \mathbb{E}_t y_{t+1} = y_t = y_{t-1}$, otrzymując układ równań:

$$\bar{W}_s = \bar{L}_s^\phi \bar{C}_s^\sigma, \quad (3.15)$$

$$\frac{1}{\bar{R}^Q_s} = \beta \left(\frac{\bar{C}_s}{\bar{C}_s} \right)^\sigma \frac{1}{\bar{\pi}_s}, \quad (3.16)$$

$$\frac{1}{\beta} \left(\frac{\bar{C}_s}{\bar{C}_s} \right)^\sigma = (1 - \delta) + \bar{R}^K_s, \quad (3.17)$$

$$\bar{K}_s = (1 - \delta) \bar{K}_s + \bar{I}_s, \quad (3.18)$$

$$\bar{Y}_s = \bar{A}_s \bar{K}_s^\alpha \bar{L}_s^{1-\alpha}, \quad (3.19)$$

$$\bar{L}_s = (1 - \alpha) \bar{M} \bar{C}_s \frac{\bar{Y}_s}{\bar{W}_s}, \quad (3.20)$$

$$\bar{K}_s = \alpha \bar{M} \bar{C}_s \frac{\bar{Y}_s}{\bar{R}^K_s}, \quad (3.21)$$

$$\log \bar{A}_s = (1 - \rho_A) \log \bar{A}_s + \rho_A \log \bar{A}_s, \quad (3.22)$$

$$0 = \mathbb{E}_t \sum_{i=0}^{\infty} (\beta \theta)^i \bar{Y}_s \left(\frac{\bar{P}_s}{\bar{P}_s} - \frac{\psi}{\psi - 1} \bar{M} \bar{C}_s \right), \quad (3.23)$$

$$\bar{P}_s^{1-\psi} = \theta \bar{P}_s^{1-\psi} + (1 - \theta) \bar{P}_s^{1-\psi}, \quad (3.24)$$

$$\bar{\Pi}_s = \frac{\bar{P}_s}{\bar{P}_s}, \quad (3.25)$$

$$\bar{Y}_s = \bar{C}_s + \bar{I}_s, \quad (3.26)$$

$$\bar{R}^Q_s = \bar{R}_s^{Q*(1-\rho_Q)} \bar{R}_s^{Q\rho_Q}, \quad (3.27)$$

$$\bar{R}_s^Q = \bar{R}_s^Q \pi^* \left(\frac{\bar{\pi}_s}{\pi^*} \right)^{\psi_1} \left(\frac{\bar{y}_s}{\bar{y}_s} \right)^{\psi_2}. \quad (3.28)$$

W pierwszym kroku wyeliminujemy trywialne równania oraz znormalizujemy zmienną produkcji. Możemy zauważyć że w stanie ustalonym cena nie zmienia się w czasie, stąd otrzymujemy:

$$\bar{\Pi}_s = 1. \quad (3.29)$$

Dodatkowo zgodnie ze wspomnianą normalizacją zakładamy:

$$\bar{A}_s = 1. \quad (3.30)$$

Z tych zależności możemy następnie wyznaczyć stan ustalony dla pozostałych zmiennych. Korzystając z równania (3.17) po uproszczeniu dostajemy:

$$\bar{R}_s^K = \frac{1}{\beta} - (1 - \delta). \quad (3.31)$$

Stopa procentowa w stanie ustalonym, korzystając z równania (3.16), wynosi:

$$\bar{R}_s^Q = \frac{1}{\beta}. \quad (3.32)$$

Następnie wychodząc z równania (3.23) otrzymujemy wartość stanu ustalonego zmiennej kosztu krańcowego $\bar{M} \bar{C}_s$:

$$\bar{M} \bar{C}_s = \frac{\psi - 1}{\psi}. \quad (3.33)$$

Korzystając kolejno z wartości $\bar{M}C_s$ oraz równań dla układu pracy (3.20) i (3.21), otrzymujemy:

$$\bar{L}_s^{1-\alpha} \bar{K}_s^\alpha = (1-\alpha)^{(1-\alpha)} \alpha^\alpha \bar{M}C_s \bar{Y}_s \frac{1}{\bar{W}_s^{(1-\alpha)} \bar{R}_s^{K\alpha}}. \quad (3.34)$$

Podstawiając równanie (3.19):

$$\frac{\bar{Y}_s}{\bar{A}_s} = (1-\alpha)^{(1-\alpha)} \alpha^\alpha \bar{M}C_s \bar{Y}_s \frac{1}{\bar{W}_s^{(1-\alpha)} \bar{R}_s^{K\alpha}}. \quad (3.35)$$

Po reorganizacji dostajemy stan ustalony dla realnej płacy:

$$\bar{W}_s = (1-\alpha) \left(\bar{A}_s \bar{M}C_s \left(\frac{\alpha}{\bar{R}_s^K} \right)^\alpha \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}. \quad (3.36)$$

W celu znalezienia wartości stanu ustalonego dla produkcji Y , kapitału K , inwestycji I oraz konsumpcji C , najpierw skorzystamy z równania opisującego prawo ruchu kapitału (3.18). Opiszmy stan ustalony kapitału przez inwestycje:

$$\bar{K}_s = \frac{1}{\delta} \bar{I}_s. \quad (3.37)$$

Następnie z równania (3.21) mamy:

$$\bar{I}_s = \delta \alpha \bar{M}C_s \frac{\bar{Y}_s}{\bar{R}_s^K}, \quad (3.38)$$

a dla czasu pracy z równania (3.20):

$$\bar{L}_s = (1-\alpha) \bar{M}C_s \frac{\bar{Y}_s}{\bar{W}_s}. \quad (3.39)$$

Kolejnym krokiem jest podstawienie równania (3.20) do równania (3.15):

$$\bar{C}_s = \left(\bar{W}_s \left(\frac{\bar{W}_s}{\bar{Y}_s(1-\alpha)\bar{M}C_s} \right)^\phi \right)^{\frac{1}{\sigma}}. \quad (3.40)$$

Pozostaje w powyższych zależność od stanu ustalonego produkcji Y , stąd skorzystamy z równania czyszczenia rynku (3.19):

$$\bar{Y}_s = \bar{C}_s + \bar{I}_s \quad (3.41)$$

$$= \left(\bar{W}_s \left(\frac{\bar{W}_s}{\bar{Y}_s(1-\alpha)\bar{M}C_s} \right)^\phi \right)^{\frac{1}{\sigma}} + \delta \alpha \bar{M}C_s \frac{\bar{Y}_s}{\bar{R}_s^K}, \quad (3.42)$$

z którego po uporządkowaniu otrzymujemy:

$$\bar{Y}_s = \left(\bar{W}_s \left(\frac{\bar{W}_s}{(1-\alpha)\bar{M}C_s} \right)^\phi \right)^{\frac{1}{\sigma+\phi}} \frac{\bar{R}_s^K}{\bar{R}_s^K - \delta \alpha \bar{M}C_s}^{\frac{\sigma}{\sigma+\phi}}. \quad (3.43)$$

Ostatecznie stan ustalony dla zmiennych modelu prezentuje się następująco:

$$\bar{A}_s = 1, \quad (3.44)$$

$$\bar{\Pi}_s = 1, \quad (3.45)$$

$$\bar{R}_s^Q = \frac{1}{\beta}, \quad (3.46)$$

$$\bar{R}_s^K = \frac{1}{\beta} - (1 - \delta), \quad (3.47)$$

$$\bar{M}C_s = \frac{\psi - 1}{\psi}, \quad (3.48)$$

$$\bar{W}_s = (1 - \alpha) \left(\bar{A}_s \bar{M}C_s \left(\frac{\alpha}{\bar{R}_s^K} \right)^\alpha \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad (3.49)$$

$$\bar{Y}_s = \left(\bar{W}_s \left(\frac{\bar{W}_s}{(1 - \alpha) \bar{M}C_s} \right)^\phi \right)^{\frac{1}{\sigma + \phi}} \frac{\bar{R}_s^K}{\bar{R}_s^K - \delta \alpha \bar{M}C_s}^{\frac{\sigma}{\sigma + \phi}}, \quad (3.50)$$

$$\bar{L}_s = (1 - \alpha) \bar{M}C_s \frac{\bar{Y}_s}{\bar{W}_s}, \quad (3.51)$$

$$\bar{C}_s = \left(\bar{W}_s \left(\frac{\bar{W}_s}{\bar{Y}_s (1 - \alpha) \bar{M}C_s} \right)^\phi \right)^{\frac{1}{\sigma}}, \quad (3.52)$$

$$\bar{I}_s = \delta \alpha \bar{M}C_s \frac{\bar{Y}_s}{\bar{R}_s^K}, \quad (3.53)$$

$$\bar{K}_s = \bar{I}_s \frac{1}{\delta}. \quad (3.54)$$

3.1.2 Linearyzacja równań

Korzystając z wartości stanu ustalonego możemy przeprowadzić aproksymację liniową układu równań naszego modelu. Linearyzacja równania podaży pracy przebiega następująco:

$$C_t^\sigma L_s^\phi = W_t, \quad (3.55)$$

$$\bar{C}_s e^{\sigma c_t} \bar{L}_s e^{\phi l_t} = \bar{W}_s e^{w_t}. \quad (3.56)$$

Równanie dla stanu ustalonego $\bar{C}_s \bar{L}_s = \bar{W}_s$ pozwala uprościć równość do postaci:

$$e^{\sigma c_t + \phi l_t} = e^{w_t}. \quad (3.57)$$

Ostatnim krokiem jest zastosowanie reguły aproksymacji $e^{\hat{x}_t + \alpha \hat{y}_t} \approx 1 + \hat{x}_t + \alpha \hat{y}_t$:

$$1 + \sigma c_t + \phi l_t = 1 + w_t, \quad (3.58)$$

$$\sigma c_t + \phi l_t = w_t. \quad (3.59)$$

Sprowadzenie równania Eulera wiążącego obligacje przebiega następująco:

$$\frac{1}{R_t^Q} = \beta \mathbb{E}_t \left(\left(\frac{C_t}{C_{t+1}} \right)^\sigma \frac{1}{\pi_{t+1}} \right), \quad (3.60)$$

$$\frac{1}{\bar{R}_s^Q e^{r_t^Q}} = \beta \mathbb{E}_t \left(\left(\frac{\bar{C}_s e^{c_t}}{\bar{C}_s e^{c_{t+1}}} \right)^\sigma \frac{1}{\bar{\pi}_s e^{\pi_{t+1}}} \right). \quad (3.61)$$

Ponownie korzystamy z definicji stanu ustalonego $\bar{R}_s^Q = \frac{1}{\beta}$ oraz uporządkowujemy:

$$e^{-r_t^Q} = \mathbb{E}_t \left(e^{\sigma c_t - \sigma c_{t+1} - \pi_{t+1}} \right). \quad (3.62)$$

Korzystamy z przybliżenia przy pomocy szeregu Taylora:

$$1 - r_t^Q = \mathbb{E}_t (1 + \sigma(c_t - c_{t+1}) - \pi_{t+1}). \quad (3.63)$$

Po reorganizacji postać liniowa prezentuje się następująco:

$$\sigma(\mathbb{E}_t c_{t+1} - c_t) = r_t^Q - \mathbb{E}_t \pi_{t+1}. \quad (3.64)$$

Aproksymacja liniowa równania Eulera dla kapitału przebiega w analogiczny sposób:

$$\frac{1}{\beta} \left(\frac{\mathbb{E}_t C_{t+1}}{C_t} \right)^\sigma = (1 - \delta) + \mathbb{E}_t R_{t+1}^K, \quad (3.65)$$

$$\frac{1}{\beta} \frac{\bar{C}_s^\sigma \mathbb{E}_t e^{\sigma c_{t+1}}}{\bar{C}_s^\sigma e^{\sigma c_t}} = (1 - \delta) + \mathbb{E}_t \left(\bar{R}_s^K e^{r_{t+1}^K} \right), \quad (3.66)$$

$$\frac{1}{\beta} e^{\mathbb{E}_t \sigma c_{t+1} - \sigma c_t} = (1 - \delta) + \bar{R}_s^K e^{\mathbb{E}_t r_{t+1}^K}. \quad (3.67)$$

Ponownie korzystamy z reguły aproksymacji:

$$\frac{1}{\beta} (1 + \sigma(\mathbb{E}_t c_{t+1} - c_t)) = (1 - \delta) + \bar{R}_s^K (1 + \mathbb{E}_t r_{t+1}^K), \quad (3.68)$$

$$\frac{1}{\beta} + \frac{\sigma}{\beta} (\mathbb{E}_t c_{t+1} - c_t) = (1 - \delta) + \bar{R}_s^K + \bar{R}_s^K \mathbb{E}_t r_{t+1}^K. \quad (3.69)$$

Ostatnim etapem jest uproszczenie równania, wiedząc że w stanie ustalonym zachodzi:

$$\frac{1}{\beta} = (1 - \delta) + \bar{R}_s^K, \quad (3.70)$$

skąd dostajemy postać aproksymowaną:

$$\frac{\sigma}{\beta} (\mathbb{E}_t c_{t+1} - c_t) = \bar{R}_s^K \mathbb{E}_t r_{t+1}^K. \quad (3.71)$$

Ostatnim równaniem układu gospodarstw domowych jest reguła ruchu (deprecjacji) kapitału. Linearyzacja przebiega następująco:

$$K_{t+1} = (1 - \delta)K_t + I_t \quad (3.72)$$

$$\bar{K}_s e^{k_{t+1}} = (1 - \delta)\bar{K}_s e^{k_t} + \bar{I}_s e^{i_t}. \quad (3.73)$$

Korzystamy z reguły aproksymacji $e^{\hat{x}_t} \approx 1 + \hat{x}_t$:

$$\bar{K}_s (1 + k_{t+1}) = (1 - \delta)\bar{K}_s (1 + k_t) + \bar{I}_s (i_t + 1). \quad (3.74)$$

Następnie dla stanu ustalonego mamy zachowane $\delta \bar{K}_s = \bar{I}_s$:

$$\bar{K}_s (1 + k_{t+1}) = (1 - \delta)\bar{K}_s (1 + k_t) + \delta \bar{K}_s (i_t + 1), \quad (3.75)$$

$$1 + k_{t+1} = (1 - \delta)(1 + k_t) + \delta(i_t + 1), \quad (3.76)$$

$$1 + k_{t+1} = (1 - \delta)k_t + \delta i_t + 1 - \delta + \delta. \quad (3.77)$$

Końcowa postać liniowa:

$$k_{t+1} = (1 - \delta)k_t + \delta i_t. \quad (3.78)$$

Kolejnym komponentem modelu jest układ równań problemu firm. Aproksymacja liniowa funkcji produkcji wokół stanu ustalonego prezentuje się następująco:

$$Y_t = A_t K_t^\alpha L_t^{1-\alpha}, \quad (3.79)$$

$$\bar{Y}_s e^{y_t} = \bar{A}_s e^{a_t} \bar{K}_s^\alpha e^{\alpha k_t} \bar{L}_s^{1-\alpha} e^{(1-\alpha)l_t}, \quad (3.80)$$

$$\bar{Y}_s e^{y_t} = \bar{A}_s \bar{K}_s^\alpha \bar{L}_s^{1-\alpha} e^{a_t + \alpha k_t + (1-\alpha)l_t}, \quad (3.81)$$

$$\bar{Y}_s(1 + y_t) = \bar{A}_s \bar{K}_s^\alpha \bar{L}_s^{1-\alpha} (1 + a_t + \alpha k_t + (1 - \alpha)l_t). \quad (3.82)$$

Analogicznie do poprzednich przykładów, skorzystamy z równowagi w stanie ustalonym $\bar{Y}_s = \bar{A}_s \bar{K}_s^\alpha \bar{L}_s^{1-\alpha}$ dostając liniowe równanie:

$$y_t = a_t + \alpha k_t + (1 - \alpha)l_t. \quad (3.83)$$

Równanie zapotrzebowania na pracę, stosując dla stanu ustalonego $\bar{L}_s = (1 - \alpha)\bar{M}\bar{C}_s \frac{\bar{Y}_s}{\bar{W}_s}$, jest aproksymowane przez przekształcenia:

$$L_t = (1 - \alpha)MC_t \frac{Y_t}{W_t}, \quad (3.84)$$

$$\bar{L}_s e^{l_t} = (1 - \alpha)\bar{M}\bar{C}_s e^{mc_t} \frac{\bar{Y}_s e^{y_t}}{\bar{W}_s e^{w_t}}, \quad (3.85)$$

$$\bar{L}_s e^{l_t} = (1 - \alpha)\bar{M}\bar{C}_s \frac{\bar{Y}_s}{\bar{W}_s} e^{mc_t + y_t - w_t}, \quad (3.86)$$

$$1 + l_t = mc_t + y_t - w_t + 1, \quad (3.87)$$

$$l_t = mc_t + y_t - w_t. \quad (3.88)$$

Kolejnym składnikiem komponentu jest równanie zapotrzebowania na kapitał, analogicznie aproksymowane z wykorzystaniem $\bar{K}_s = \bar{M}\bar{C}_s \frac{\bar{Y}_s}{\bar{R}_s}$:

$$K_t = \alpha MC_t \frac{Y_t}{R_t^K}, \quad (3.89)$$

$$\bar{K}_s e^{k_t} = \alpha \bar{M}\bar{C}_s e^{mc_t} \frac{\bar{Y}_s e^{y_t}}{\bar{R}_s^K e^{r_t^K}}, \quad (3.90)$$

$$\bar{K}_s e^{k_t} = (1 - \alpha)\bar{M}\bar{C}_s \frac{\bar{Y}_s}{\bar{R}_s^K} e^{mc_t + y_t - r_t^K}, \quad (3.91)$$

$$1 + k_t = 1 + mc_t + y_t - r_t^K, \quad (3.92)$$

$$k_t = mc_t + y_t - r_t^K. \quad (3.93)$$

Równanie opisujące produktywność przy założeniu $\bar{A}_s = 1$:

$$\log A_t = \log \bar{A}_s + \rho_A \log A_{t-1} + \epsilon_{A,t}, \quad (3.94)$$

$$\log e^{a_t} = \rho_A \log e^{a_{t-1}} + \epsilon_t, \quad (3.95)$$

$$a_t = \rho_A a_{t-1} + \epsilon_{A,t}. \quad (3.96)$$

Komponent odpowiedzialny za poziom cen oraz inflację składa się z trzech równań, które zostaną uproszczone i połączone w jedno liniowe równanie. Rozpocznijmy od znalezienia równania dla poziomu cen ustalanego przez aktualizujące firmy (3.9):

$$0 = \mathbb{E}_t \sum_{i=0}^{\infty} (\beta\theta)^i Y_{t+i} \left(\frac{P_t^*}{P_{t+i}} - \frac{\psi}{\psi - 1} MC_{t+i} \right). \quad (3.97)$$

Wprowadzając zmienne odchylenia od stanu ustalonego:

$$0 = \mathbb{E}_t \sum_{i=0}^{\infty} (\beta\theta)^i \bar{Y}_s e^{y_{t+i}} \left(\frac{\bar{P}_s e^{p_t^*}}{\bar{P}_s e^{p_{t+i}}} - \frac{\psi}{\psi-1} \bar{M}C_s e^{mc_{t+i}} \right). \quad (3.98)$$

Porządkując oraz korzystając ze stanu ustalonego $1 = \frac{\psi}{\psi-1} \bar{M}C_s$ dostajemy:

$$0 = \mathbb{E}_t \sum_{i=0}^{\infty} (\beta\theta)^i \left(e^{y_{t+i}+p_t^*-p_{t+i}} - e^{y_{t+i}+mc_{t+i}} \right). \quad (3.99)$$

Następnie stosujemy aproksymację szeregiem Taylora:

$$0 = \mathbb{E}_t \sum_{i=0}^{\infty} (\beta\theta)^i (1 + y_{t+i} + p_t^* - p_{t+i} - (1 + y_{t+i} + mc_{t+i})), \quad (3.100)$$

$$0 = p_t^* \sum_{i=0}^{\infty} (\beta\theta)^i - \mathbb{E}_t \sum_{i=0}^{\infty} (\beta\theta)^i (mc_{t+i} + p_{t+i}), \quad (3.101)$$

$$0 = p_t^* \frac{1}{1-\beta\theta} - \mathbb{E}_t \sum_{i=0}^{\infty} (\beta\theta)^i (mc_{t+i} + p_{t+i}), \quad (3.102)$$

$$p_t^* = (1-\beta\theta) \mathbb{E}_t \sum_{i=0}^{\infty} (\beta\theta)^i (mc_{t+i} + p_{t+i}). \quad (3.103)$$

Przed zastosowaniem powyższego potrzebujemy uprościć równanie reguły poziomu cen z wyceny Calvo (3.10):

$$P_t^{1-\psi} = \theta P_{t-1}^{1-\psi} + (1-\theta) P_t^{*1-\psi}, \quad (3.104)$$

$$\bar{P}_s e^{p_t(1-\psi)} = \theta \bar{P}_s^{1-\psi} e^{p_{t-1}(1-\psi)} + (1-\theta) \bar{P}_s^{1-\psi} e^{p_t^*(1-\psi)}. \quad (3.105)$$

Uproszczenie \bar{P}_s oraz zastosowanie aproksymacji szeregiem Taylora:

$$(1 + p_t + (1-\psi)) = \theta (1 + p_{t-1} + (1-\psi)) + (1-\theta) (1 + p_t^* + (1-\psi)), \quad (3.106)$$

$$p_t = \theta p_{t-1} + (1-\theta) p_t^*. \quad (3.107)$$

W tej postaci możemy podstawić wyrażenie dla p_t^* z (3.103):

$$p_t = \theta p_{t-1} + (1-\theta) (1-\beta\theta) \mathbb{E}_t \sum_{i=0}^{\infty} (\beta\theta)^i (mc_{t+i} + p_{t+i}). \quad (3.108)$$

Następnie zastosujemy metodę quasi-różniczkowania (*quasi-differencing* [12]) w celu wyeliminowania sumy nieskończonej przewidywanych kosztów krańcowych z równania. W tym celu wprowadzimy operator opóźnienia L^{-1} , dla którego zachodzi $L^{-1}X_t = X_{t+1}$. Mnożąc obustronnie przez $(1-\beta\theta L^{-1})$ otrzymujemy:

$$\begin{aligned} p_t - \beta\theta p_{t+1} &= \theta p_{t-1} - \beta\theta^2 p_t + (1-\theta)(1-\beta\theta) \mathbb{E}_t \sum_{i=0}^{\infty} (\beta\theta)^i (mc_{t+i} + p_{t+i}) \\ &\quad - (1-\theta)(1-\beta\theta) \mathbb{E}_t \sum_{i=1}^{\infty} (\beta\theta)^i (mc_{t+i} + p_{t+i}), \end{aligned} \quad (3.109)$$

$$p_t - \beta\theta p_{t+1} = \theta p_{t-1} - \beta\theta^2 p_t + (1-\theta)(1-\beta\theta) (mc_t + p_t). \quad (3.110)$$

Kolejno porządkujemy:

$$p_t - \beta\theta p_{t+1} = \theta p_{t-1} - \beta\theta^2 p_t + (1 - \theta)(1 - \beta\theta)mc_t + (1 - \theta)(1 - \beta\theta)p_t, \quad (3.111)$$

$$\theta(p_t - p_{t-1}) = \beta\theta(p_{t+1} - p_t) + (1 - \theta)(1 - \beta\theta)mc_t, \quad (3.112)$$

$$p_t - p_{t-1} = \beta(p_{t+1} - p_t) + \frac{(1 - \theta)(1 - \beta\theta)}{\theta}mc_t. \quad (3.113)$$

Powyższe równanie nazywane jest równaniem Phillipsa [12]. Ostatnim elementem komponentu poziomu cen jest równanie definiujące inflację, korzystamy z $\bar{\Pi}_s = 1$:

$$\Pi_t = \frac{P_t}{P_{t-1}}, \quad (3.114)$$

$$\bar{\Pi}_s e^{\pi_t} = \frac{\bar{P}_s e^{p_t}}{\bar{P}_s e^{p_{t-1}}} = e^{p_t - p_{t-1}}, \quad (3.115)$$

$$1 + \pi_t = 1 + p_t - p_{t-1}, \quad (3.116)$$

$$\pi_t = p_t - p_{t-1}. \quad (3.117)$$

Uposażeni w postać liniową inflacji możemy uprościć zapis równania Philipsa (3.113):

$$\pi_t = \beta\pi_{t+1} + \frac{(1 - \theta)(1 - \beta\theta)}{\theta}mc_t. \quad (3.118)$$

Pozostałą częścią modelu są równania polityki monetarnej oraz czyszczenia rynku. Aproksymacja tego ostatniego przebiega następująco:

$$Y_t = C_t + I_t \quad (3.119)$$

$$\bar{Y}_s e^{y_t} = \bar{C}_s e^{c_t} + \bar{I}_s e^{i_t}, \quad (3.120)$$

$$\bar{Y}_s(1 + y_t) = \bar{C}_s(1 + c_t) + \bar{I}_s(1 + i_t), \quad (3.121)$$

$$\bar{Y}_s y_t = \bar{C}_s c_t + \bar{I}_s i_t, \quad (3.122)$$

gdzie w ostatnim kroku skorzystaliśmy z równowagi stanu ustalonego $\bar{Y}_s = \bar{C}_s + \bar{I}_s$.

Reguła opóźnienia realnej stopy procentowej:

$$R_t^Q = R_t^{Q^{*1-\rho_Q}} R_{t-1}^{Q\rho_Q}, \quad (3.123)$$

$$\bar{R}_s^Q e^{r_t^q} = \bar{R}_s^Q e^{r_t^{q*}(1-\rho_Q)} e^{r_{t-1}^q \rho_Q}, \quad (3.124)$$

$$1 + r_t^q = 1 + (1 - \rho_Q)r_t^{q*} + r_{t-1}^q \rho_Q, \quad (3.125)$$

$$r_t^q = (1 - \rho_Q)r_t^{q*} + \rho_Q r_{t-1}^q. \quad (3.126)$$

Ostatnim równaniem modelu jest równanie nominalnej stopy procentowej ustalonej przez bank centralny:

$$R_t^{Q*} = \bar{R}_s^Q \pi^* \left(\frac{\pi_t}{\pi^*} \right)^{\psi_1} \left(\frac{y_t}{\bar{y}_s} \right)^{\psi_2}, \quad (3.127)$$

$$\bar{R}_s^Q e^{r_t^{Q*}} = \bar{R}_s^Q \pi^* \left(\frac{\bar{\pi}_s e^{\pi_t}}{\pi^*} \right)^{\psi_1} \left(\frac{\bar{y}_s e^{y_t^*}}{\bar{y}_s} \right)^{\psi_2}, \quad (3.128)$$

$$e^{r_t^{Q*}} = \pi^{*1-\psi_1} (\bar{\pi}_s e^{\pi_t})^{\psi_1} \bar{y}_s^{*\psi_2}, \quad (3.129)$$

$$1 + r_t^{Q*} = \pi^{*1-\psi_1} (1 + \psi_1 \pi_t + \psi_2 y_t^*). \quad (3.130)$$

3.1.3 Pełna postać modelu

Ostatecznie nasz model składa się z:

1. Definicji wartości stanu ustalonego:

$$\bar{A}_s = 1, \quad (3.131)$$

$$\bar{\Pi}_s = 1, \quad (3.132)$$

$$\bar{R}_s^Q = \frac{1}{\beta}, \quad (3.133)$$

$$\bar{R}_s^K = \frac{1}{\beta} - (1 - \delta), \quad (3.134)$$

$$\bar{M}C_s = \frac{\psi - 1}{\psi}, \quad (3.135)$$

$$\bar{W}_s = (1 - \alpha) \left(\bar{A}_s \bar{M}C_s \left(\frac{\alpha}{\bar{R}_s^K} \right)^\alpha \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad (3.136)$$

$$\bar{Y}_s = \left(\bar{W}_s \left(\frac{\bar{W}_s}{(1 - \alpha) \bar{M}C_s} \right)^\phi \right)^{\frac{1}{\sigma + \phi}} \frac{\bar{R}_s}{\bar{R}_s - \delta \alpha \bar{M}C_s}^{\frac{\sigma}{\sigma + \phi}}, \quad (3.137)$$

$$\bar{L}_s = (1 - \alpha) \bar{M}C_s \frac{\bar{Y}_s}{\bar{W}_s}, \quad (3.138)$$

$$\bar{C}_s = \left(\bar{W}_s \left(\frac{\bar{W}_s}{\bar{Y}_s (1 - \alpha) \bar{M}C_s} \right)^\phi \right)^{\frac{1}{\sigma}}, \quad (3.139)$$

$$\bar{I}_s = \delta \alpha \bar{M}C_s \frac{\bar{Y}_s}{\bar{R}_s}, \quad (3.140)$$

$$\bar{K}_s = \bar{I}_s \frac{1}{\delta}. \quad (3.141)$$

2. Układu liniowych równań modelu:

- Część gospodarstw domowych:

$$\sigma c_t + \phi l_t = w_t, \quad (3.142)$$

$$\sigma(\mathbb{E}_t c_{t+1} - c_t) = r_t^Q - \mathbb{E}_t \pi_{t+1}, \quad (3.143)$$

$$\frac{\sigma}{\beta}(\mathbb{E}_t c_{t+1} - c_t) = \bar{R}_s^K \mathbb{E}_t r_{t+1}^K, \quad (3.144)$$

$$k_{t+1} = (1 - \delta)k_t + \delta i_t. \quad (3.145)$$

- Część firm:

$$y_t = a_t + \alpha k_t + (1 - \alpha)l_t, \quad (3.146)$$

$$k_t = m c_t + y_t - r_t^K, \quad (3.147)$$

$$l_t = m c_t + y_t - w_t, \quad (3.148)$$

$$a_t = \rho_A a_{t-1} + \epsilon_{A,t}. \quad (3.149)$$

- Poziom cen:

$$\pi_t = \beta \pi_{t+1} + \frac{(1 - \theta)(1 - \beta \theta)}{\theta} m c_t. \quad (3.150)$$

- Równanie czyszczenia rynku:

$$\bar{Y}_s y_t = \bar{C}_s c_t + \bar{I}_s i_t. \quad (3.151)$$

- Polityka monetarna:

$$r_t^q = (1 - \rho_Q) r_t^{q*} + \rho_Q r_{t-1}^q, \quad (3.152)$$

$$1 + r_t^{Q*} = \pi^{*1-\psi_1} (1 + \psi_1 \pi_t + \psi_2 y_t^*). \quad (3.153)$$

3. Kalibracji parametrów, wziętej z literatury [12], [23] oraz [21]:

Parametr	Wartość
σ	2
ϕ	1.5
α	0.35
β	0.985
δ	0.035
ρ_A	0.95
ψ	3
θ	0.75
ψ_1	1.5
ψ_2	0
ρ_Q	0.015

4. Kalibracji szoków (szok impulsowy):

$$\epsilon_{A,t} = \begin{cases} 0.1 & \text{dla } t = 1, \\ 0 & \text{dla } t > 1. \end{cases} \quad (3.154)$$

3.2 Opis implementacji

Implementacja została wykonana w języku Python w wersji 3.9. Decyzja na wykorzystanie tej technologii motywowana była dostępnością wielu bibliotek numerycznych oraz parserów równań, które ułatwią szeroko stosowane obliczenia macierzowe wykorzystywane w rozwiązaniach. Dodatkowo język pozwala na zwięzłe przedstawienie idei wykorzystanych metod. Zastosowane biblioteki zostały opisane w sekcji 3.2.2. Dodatkowo w celu porównania rozwiązań została użyta platforma Dynare, udostępniająca implementacje narzędzi ekonomicznych. Do przygotowanej solucji zostały dołączone modele z rozszerzeniem *.mod*, które mogą zostać uruchomione na wspomnianej platformie.

Repozytorium z kodem dostępne jest pod adresem <https://github.com/wgrabis/DSGE>. Platforma Dynare dostępna jest pod adresem <https://www.dynare.org/>. Uruchomienie programu odbywa się poprzez komendę:

```
program <model-file> [optional args]
```

z następującymi argumentami:

<code>-m/--mode</code>	Tryb uruchomienia programu dopuszczalne wartości to <i>fblanchard</i> , <i>estimate</i> lub <i>festimate</i> .
<code>-d/--debug</code>	Ustawia flagę dla logowania dodatkowych informacji.
<code>-t/--time [liczba]</code>	Czas prognozowania modelu w postaci liczby naturalnej, domyślnie 40.
<code>-r/--rounds [liczba]</code>	Ilość wykonanych rund w algorytmie estymacji, domyślnie 100.
<code>-sp/--singlePlot</code>	Opcja włączająca wyświetlanie wykresów dla wszystkich zmiennych w jednym oknie.
<code>-pdir/--plotDir [ścieżka]</code>	Ścieżka do zapisu dla wygenerowanych wykresów w formacie <i>.png</i> .
<code>-ds/--disableShow</code>	Wyłączenie opcji renderowania okien z wykresami.
<code>-ra/--runAgainst [ścieżka]</code>	Uruchamia drugi plik modelu z tymi samymi argumentami i nakłada wyniki na wykresy obecnego modelu, dostępne jedynie dla opcji <i>fblanchard</i> .

W zależności od wykorzystanej opcji `--mode` program zostanie uruchomiony jako:

- *fblanchard* - zostanie wykonana prognoza szoku impulsowego dla dostępnej kalibracji lub wartości oczekiwanych parametrów dla czasu `--time`,
- *estimate* - zostanie przeprowadzona estymacja dla `--rounds` rund i zostaną wygenerowane wykresy dla przebiegu zaakceptowanej próbki w algorytmie Metropolisa-Hastingsa,
- *festimate* - zostaną wyświetlone wykresy dla estymacji jak w przypadku opcji *estimate* oraz dodatkowo wykresy dla prognozy metodą ścieżek losowych dla czasu `--time`.

W przypadku uruchomienia bez opcji `--disableShow` program powinien zakończyć się pokazaniem wykresów dla zmiennych w kontekście odpalonego trybu (prognozy zmiennych obserwowanych lub prognozy parametrów).

3.2.1 Struktura repozytorium

Repozytorium podzielone jest na następujące katalogi:

- `/src` – katalog zawierający kod wykorzystywany w implementacji,
- `/samples` – folder z przykładowymi modelami, wśród modeli najbardziej istotnymi są:
 - `rbcModel.json` – plik z przykładowym modelem RBC,
 - `nekModel.json` – plik z modelem ekonomii nowokeynesowskiej dla szoku produktywności,
 - `nekModelMonetary.json` – plik z modelem ekonomii nowokeynesowskiej dla szoku polityki monetarnej,
 - `philipCurve.json` – plik z modelem przedstawiającym krzywą Philipa,
 - `ireland.json` – plik z modelem przedstawiającym gospodarkę Irlandii,
- `/dynare` – folder zawierający przykładowe modele do wykorzystania w Dynare w celu porównania wyników implementacji z repozytorium z implementacją Dynare,

- `/paper` – folder zawierający tekst pracy magisterskiej.

Katalog zawierający kod podzielony jest na następujące części:

- `/filter` – pakiet kodu z implementacją dla algorytmu filtru wykorzystywanego w funkcji wiarygodności,
- `/forecast` – zawiera implementację prognozowania szoku impulsowego dla kalibracji oraz prognozowania losowymi ścieżkami,
- `/format` – implementacja parsowania plików modelu oraz danych estymowania,
- `/helper` – dodatkowe pomocnicze funkcjonalności m.in. wyświetlania wykresów przy pomocy biblioteki *matplotlib*,
- `/likelihood` – pakiet zawierający implementację funkcji wiarygodności w oparciu o dostarczony algorytm filtrowania,
- `/metropolis_hastings` – katalog zawierający implementacje algorytmu Metropolisa-Hastingsa,
- `/model` – zbiór implementacji pozwalający na budowanie modelu w oparciu o sparowane dane oraz pomocnicze klasy służące do reprezentacji funkcji pomiaru oraz funkcji macierzy,
- `/solver` – zawiera implementację metody Blancharda Kahna oraz uogólnionej metody rozwiązywania modeli,
- `/util` – pomocniczy zestaw klas dla parametrów uruchomienia programu.

3.2.2 Wykorzystane biblioteki

- **NUMPY** – szeroko wykorzystywana biblioteka udostępniająca reprezentację wektorów i macierzy oraz szereg metod numerycznych.
- **SYMPY** – biblioteka wykorzystywana do:
 - parsowania równań – równania w plikach modeli są parsowane przy pomocy *Sympy* do postaci macierzy zmiennych, które następnie mogą być uzupełnione wartościami w celu wygenerowania macierzy liczb rzeczywistych, przykładowo udostępnia metody tworzenia macierzy równań liniowych postaci:

$$A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = 0, \quad (3.155)$$

- dodatkowe operacje na macierzach – implementacja macierzy w *Sympy* pozwala na zmianę na odpowiednią reprezentację w *Numpy*, dzięki czemu można wykorzystywać przemienne metody z obu bibliotek w celach obliczeń macierzowych,
- **SCIPY** – biblioteka udostępniająca implementację pewnych operacji macierzowych wykorzystywanych przy modelach, brakujących w pozostałych bibliotekach np. dekompozycję QZ,

- MATPLOTLIB – biblioteka udostępniająca metody generowania wykresów w Pythonie, wykorzystywana do wyświetlania wyników prognozowania dla modeli RBC i DSGE.

3.2.3 Plik modelu

W tej części zostanie omówiony plik modelu wykorzystywany przez solucję. Poniższa struktura przedstawia model zaprezentowany w sekcji 3.1.3. Plik składa się z następujących części:

- Nazwa modelu (*name*):

```
1 "name": "nek model simple monetary"
```

- Zmienne stanu (*variables*) – zmienne makroekonomiczne występujące w opisywanej gospodarce. Na tym etapie nie ma potrzeby rozdzielania na zmienne stanu i kontrolne, ten podział odbywa się na bazie równań modelu:

```
2 "variables": ["YV", "IV", "CV", "RK", "KV", "WV", "LV",
               "MC", "PI", "AV", "RQ"]
```

- Zmienne strukturalne (*structural*) – parametry występujące w równaniach modelu, które są analogicznie przedstawione w postaci listy zmiennych:

```
3 "structural": ["sigmaSt", "phiSt", "alphaSt", "betaSt",
                "deltaSt", "rhoASt", "psiSt", "thetaSt", "phiPSt", "
                rhoQSt"]
```

W przypadku wykorzystania estymacji, reprezentacja dla pojedynczej zmiennej może zostać rozszerzona do postaci:

```
2 {
3   "name": "rho_g",
4   "display": "\\rho_g"
5 },
```

Nazwa zmiennej *name* zostanie wykorzystana w równaniach oraz do nazwania pliku *.png* z wykresem, natomiast *display* zostanie wygenerowana na wykresie wykonanym przy wykorzystaniu rozszerzenia MATPLOTLIB przez L^AT_EX.

- Zmienne egzogeniczne (*shocks*) – zmienne odpowiadające szokom przekazane w postaci listy nazw zmiennych:

```
4 "shocks": ["eA"]
```

- Równania modelu (*model*) – podzielone na poszczególne kategorie równań:

```
5 "model": {
6   "definitions": [...],
7   "equations": [...],
8   "observables": [...],
9 }
```

- Równania opisujące stan ustalony (*definitions*) – równania opisujące dodatkowe zmienne dla stanu ustalonego, w celu uproszczenia definicji dla modelu:

```

6  "definitions": [
7    "Rss = (1/betaSt)-(1-deltaSt)",
8    "MCss = (psiSt-1)/psiSt",
9    "Wss = (1-alphaSt)*(MCss*((alphaSt/Rss)^alphaSt))
10     ^((1/(1-alphaSt)))",
11    "Yss = ((Rss/(Rss-deltaSt*alphaSt*MCss))^(sigmaSt
12     /(sigmaSt+phiSt)))*((Wss)*(Wss/((1-alphaSt)*
13     MCss))^phiSt)^(1/(sigmaSt+phiSt))",
14    "Kss = alphaSt*MCss*(Yss/Rss)",
15    "Iss = deltaSt*Kss",
16    "Css = (Wss*(Wss/(Yss*(1-alphaSt)*MCss))^phiSt)^(
17     1/sigmaSt)",
18    "Lss = (1-alphaSt)*MCss*(Yss/Wss)"
19 ]

```

- Równania modelu (*equations*) – równania w postaci liniowej opisujące stan równowagi opisywanej gospodarki, zmienne występujące w modelu mogą mieć postać:

- * zmienne kontrolne z indeksem (+1) np. $C(+1)$,
- * zmienne obecnego okresu bez indeksu np. C ,
- * zmienne poprzedniego okresu z indeksem $(-k)$ np. $A(-1), A(-3)$.

```

16 "equations": [
17   "sigmaSt*CV + phiSt*LV = WV",
18   "(sigmaSt/betaSt)*(CV(+1)-CV)=Rss*RK(+1)",
19   "KV = (1-deltaSt)*KV(-1) + deltaSt * IV",
20   "sigmaSt*(CV(+1) - CV) = RQ - PI(+1)",
21   "KV(-1) = MC + YV - RK",
22   "LV = MC + YV - WV",
23   "YV = AV + alphaSt*KV(-1) + (1-alphaSt)*LV",
24   "PI = betaSt*PI(+1)+((1-thetaSt)*(1-betaSt*
25     thetaSt)/thetaSt)*MC",
26   "AV = rhoASt*AV(-1) + eA",
27   "Yss*YV = Css*CV + Iss*IV",
28   "RQ=(1-rhoQSt)*(1 + phiPSt * PI) + rhoQSt * RQ(-
29     1)"
30 ],

```

- Równania definiujące zmienne obserwowalne (*observables*) – równania w postaci:

$$Y_a = f(t) + h(s_t) + g, \quad (3.156)$$

gdzie funkcja f reprezentuje zależność zmiennej obserwowalnej od obecnego czasu t , a h służy mapowaniu wartości wektora s_t na wartość zmiennej obserwowalnej i jako ostatnia g jest stałą. W przykładowym modelu zostaną wykorzystane jedynie proste definicje w celu przygotowania wykresów dla wszystkich zmiennych:

```

29 "observables": [
30     "OL = LV",
31     "OC = CV",
32     "OPI = PI",
33     "OK = KV",
34     "OY = YV",
35     "OMC = MC",
36     "OIV = IV",
37     "OW = WV",
38     "ORQ = RQ",
39     "ORK = RK",
40     "OA = AV"
41 ]

```

- Rozkład a priori (*priors*) – rozkład prawdopodobieństwa dla parametrów modelu (w przypadku szoków rozkład opisuje postać szoków dla obecnego momentu):

```

43 "priors": {
44     "eA": {
45         "distribution": "normal",
46         "mean": 1,
47         "variance": 0.1
48     },
49     "sigmaSt": {
50         "distribution": "normal",
51         "mean": 2,
52         "variance": 0.01
53     },
54     ...
55 },

```

Poszczególne elementy są opisane w jeden z następujących sposobów:

- jako parametry kalibrowane:

```

43 "betaSt": {
44     "distribution": "calibration",
45     "value": 0.99
46 },

```

- jako parametry określone przez odpowiedni rozkład prawdopodobieństwa z dodatkową specyfikacją ograniczeń górnych i dolnych dla zmiennej:

```

43 "alpha_x": {
44     "distribution": "normal",
45     "mean": 0.2028,
46     "variance": 0.1,
47     "lowerBound": 0,
48     "upperBound": 1
49 },

```

- Dane do estymacji modelu (*estimations*) – opisane w osobnym pliku *.csv* lub w postaci tablicy danych. Każda pozycja dla estymowanych danych musi definiować tyle wartości ile zmiennych obserwowalnych zdefiniowanych w pliku w sekcji *observables*. Model z sekcji 3.1.3 został jedynie przygotowany pod prognozowanie, stąd poniższa reprezentacja pochodzi z innego modelu i nie odpowiada przykładowym wartością obserwowalnym:

```

1 "estimations": {
2   "data": [
3     ["1.0", "1.0"],
4     ["2.0", "1.5"],
5     ["1.0", "1.0"],
6     ["1.5", "1.25"]
7   ]
8 }

```

W celu specyfikacji pliku z danymi estymacji stosujemy poniższą reprezentację:

```

1 "estimations": {
2   "name": "samples/ireland_data.csv"
3 }

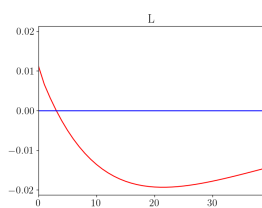
```

3.3 Wyniki prognozowania i estymacji

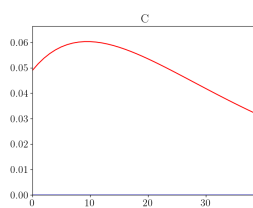
W tej części pracy zostaną przedstawione wyniki dla zaprezentowanego modelu oraz pozostałych wykorzystanych w trakcie implementacji. Rozdział 3.3.1 opisuje wyniki modelu nowokeynesowskiego dla impulsowego szoku produktywności. Kolejna sekcja 3.3.2 poświęcona jest wynikom tego samego modelu w reakcji na impulsowy szok monetarny. W rozdziale 3.3.3 przedstawione jest porównanie wyników szoku impulsowego z prostym modelem RBC w celu opisanie różnic obu teorii.

3.3.1 Wyniki prognozowania dla szoku produktywności w modelu NEK

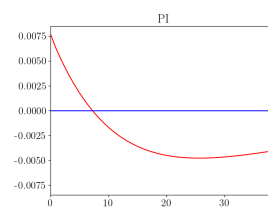
Wykonano symulację prognoz modelu dla szoku impulsowego dla wartości wskazanej w kalibracji sekcji 3.1.3. Poniżej zaprezentowane zostały wykresy dla prognozowanych zmiennych:



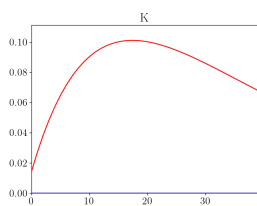
Rys. 1: Czas pracy



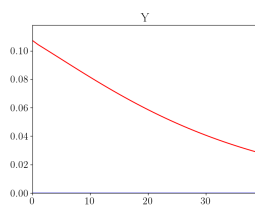
Rys. 2: Konsumpcja



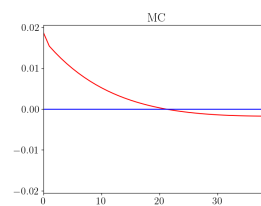
Rys. 3: Inflacja



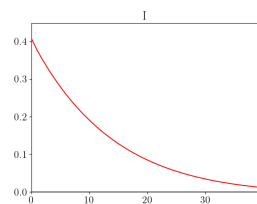
Rys. 4: Kapitał



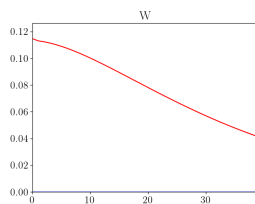
Rys. 5: Produkcja



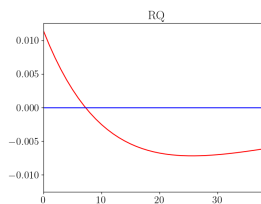
Rys. 6: Koszt krańcowy



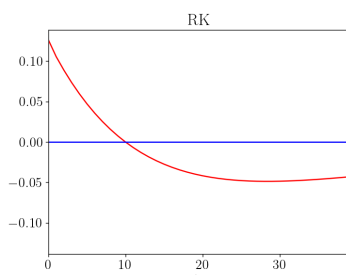
Rys. 7: Inwestycje



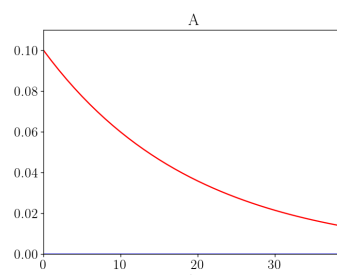
Rys. 8: Realna płaca



Rys. 9: Stopa procentowa



Rys. 10: Zwrot z kapitału



Rys. 11: Produktywność

Skutkiem szoku produktywności jest wzrost konsumpcji, produkcji, inwestycji oraz płac realnych w czasie zwiększonej produktywności. Gospodarstwa domowe reagują zwiększając konsumpcję oraz inwestycję w celu zbudowania kapitału. Chwilowo czas pracy jest zwiększony przez nagły wzrost zmiennych, jednak z czasem pasywny wpływ z większego kapitału prowadzi do większej użyteczności, stąd zmniejszenie czasu pracy poniżej oryginalnego poziomu. Krańcowa użyteczność konsumpcji względem czasu wolnego spada, ze względu na zwiększone zarobki, a gospodarstwa zarabiając tyle samu w mniejszym czasie pracy. Inflacja gospodarki początkowo wzrasta zgodnie ze wzrostem ilości dóbr na rynku, jednak z czasem spadku pracy oraz dużej ilości towarów na rynku odnotowujemy spadek cen w kolejnych okresach. Zmiana inflacji odpowiada korekcji na stopę procentową zgodnie z przyjętą regułą polityki monetarnej. Wraz ze wzrostem kapitału początkowy zwrot z kapitału spada do wartości poniżej stanu ustalonego, a co za tym idzie spadek zysku z inwestycji gospodarstw domowych. Ostatecznie szok produktywności prowadzi do wzrostu dla produkcji i użyteczności.

3.3.2 Wyniki prognozowania dla szoku monetarnego w modelu NEK

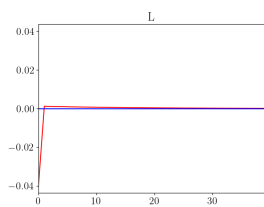
Dla wybranego modelu przeanalizowano również szok monetarny. Wprowadzenie go do modelu odbyło się poprzez zmianę równania polityki monetarnej (3.152):

$$r_t^q = (1 - \rho_Q)r_t^{q*} + \rho_Q r_{t-1}^q + \epsilon_{M,t}, \quad (3.157)$$

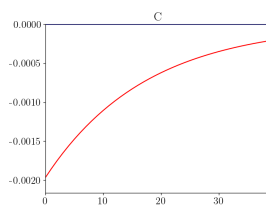
gdzie zmienna $\epsilon_{M,t}$ opisuje szok polityki monetarnej z kalibracją:

$$\epsilon_{M,t} = \begin{cases} 0.01 & \text{dla } t = 1, \\ 0 & \text{dla } t > 1. \end{cases} \quad (3.158)$$

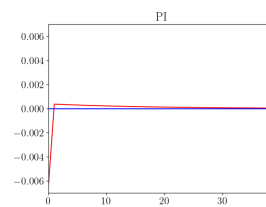
Poniższe wykresy prezentują rezultat prognozowania:



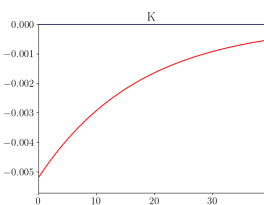
Rys. 12: Czas pracy



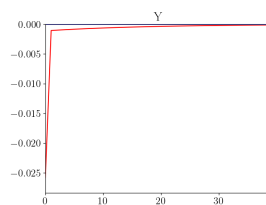
Rys. 13: Konsumpcja



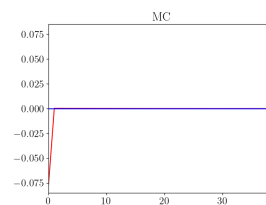
Rys. 14: Inflacja



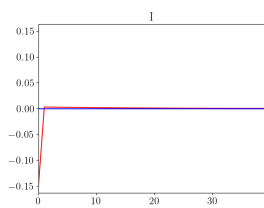
Rys. 15: Kapitał



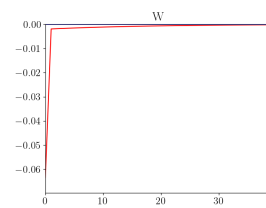
Rys. 16: Produkcja



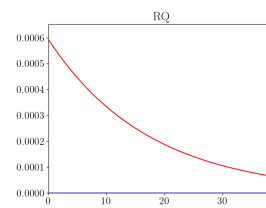
Rys. 17: Koszt krańcowy



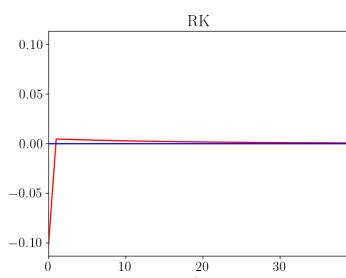
Rys. 18: Inwestycje



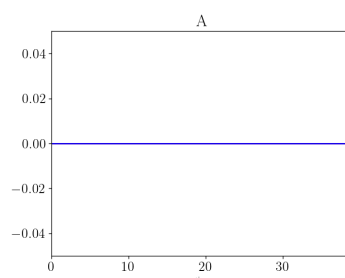
Rys. 19: Realna płaca



Rys. 20: Stopa procentowa



Rys. 21: Zwrot z kapitału



Rys. 22: Produktywność

Pierwszym z wniosków jaki nasuwają wyniki wpływu szoku monetarnego jest spadek wielu zmiennych w pierwszym okresie ze względu na nagłą zmianę stopy procentowej. Możemy zauważyć, że w reakcji na zdarzenie gospodarstwa domowe obniżają czas pracy, konsumpcję oraz inwestycje. W przypadku konsumpcji negatywna zmiana utrzymuje się długofalowo w odpowiedzi do podwyższonej stopy procentowej. Jedną z interpretacji tego faktu może być nagły spadek cen obligacji skarbowych, które okazują się dobrym źródłem lokowania zarobków i pozytywnego zysku, jako że model przedstawia wartość kosztu obligacji jako $\frac{1}{R_t^Q}$. Ta zmiana nie utrzymuje się w przypadku inwestycji, gdzie zwrot z kapitału powraca do normy po początkowym impulsowym spadku. Niestety

deprecjacja kapitału sprawia, że powraca on do stanu równowagi w podobnym tempie jak konsumpcja oraz stopa procentowa. W przypadku firm szok monetarny nie wpływa na produktywność, stąd po impulsowym spadku produkcji sytuacja powraca do równowagi w kolejnych okresach, wszelkie długofalowe zmiany są ograniczone w problemie użyteczności gospodarstw domowych.

3.3.3 Wyniki prognozowania dla szoku produktywności w modelu RBC

W rozdziale 1.9.1 przedstawiono model RBC. W tej części zostanie przytoczona pełna postać tego modelu po przeprowadzeniu linearyzacji. Skalibrowane wartości parametrów odpowiadają modelowi nowokeynesowskiemu 3.1.3.

Model prezentuje się następująco:

1. Stan ustalony modelu:

$$\bar{A}_s = 1, \quad (3.159)$$

$$\bar{R}_s^K = \frac{1}{\beta} - (1 - \delta), \quad (3.160)$$

$$\bar{W}_s = (1 - \alpha) \left(\bar{A}_s \left(\frac{\alpha}{\bar{R}_s^K} \right)^\alpha \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad (3.161)$$

$$\bar{Y}_s = \left(\bar{W}_s \left(\frac{\bar{W}_s}{1 - \alpha} \right)^\phi \right)^{\frac{1}{\sigma+\phi}} \frac{\bar{R}_s}{\bar{R}_s - \delta\alpha}^{\frac{\sigma}{\sigma+\phi}}, \quad (3.162)$$

$$\bar{L}_s = (1 - \alpha) \frac{\bar{Y}_s}{\bar{W}_s}, \quad (3.163)$$

$$\bar{K}_s = \alpha \frac{\bar{Y}_s}{\bar{R}_s^K}, \quad (3.164)$$

$$\bar{I}_s = \delta \bar{K}_s, \quad (3.165)$$

$$\bar{C}_s = \bar{Y}_s - \bar{I}_s. \quad (3.166)$$

2. Równania modelu:

$$\sigma c_t + \phi l_t = w \quad (3.167)$$

$$\frac{\sigma}{\beta} (\mathbb{E}_t c_{t+1} - c_t) = \bar{R}_s^K \mathbb{E}_t r_{t+1}^K \quad (3.168)$$

$$k_t = (1 - \delta) k_{t-1} + \delta i_t \quad (3.169)$$

$$y_t = a_t + (1 - \alpha) l_t + \alpha k_{t-1} \quad (3.170)$$

$$r_t^K = y_t - k_{t-1} \quad (3.171)$$

$$w_t = y_t - l_t \quad (3.172)$$

$$\bar{Y}_s y_t = \bar{C}_s c_t + \bar{I}_s i_t \quad (3.173)$$

$$a_t = \rho a_{t-1} + \epsilon_{A,t} \quad (3.174)$$

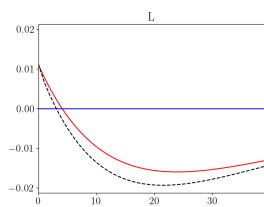
3. Kalibracja parametrów:

Parametr	Wartość
σ	2
ϕ	1.5
α	0.35
β	0.985
δ	0.035
ρ_A	0.95

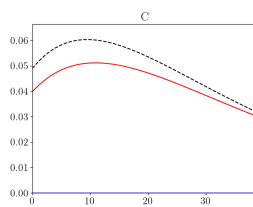
4. Kalibracja szoków (szok impulsowy):

$$\epsilon_{A,t} = \begin{cases} 0.1 & \text{dla } t = 1, \\ 0 & \text{dla } t > 1. \end{cases} \quad (3.175)$$

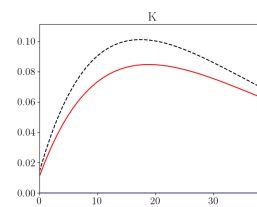
Rezultaty prognozowania zostały wykonane ponownie dla 40 okresów. Na wykresach czerwoną linią zostały przedstawione wyniki modelu RBC, natomiast przerywaną linią zostały naniesione dla porównania wyniki modelu nowokeynesowskiego 3.1.3.



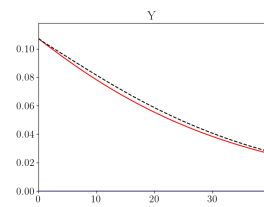
Rys. 23: Czas pracy



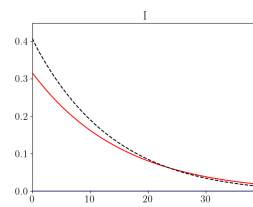
Rys. 24: Konsumpcja



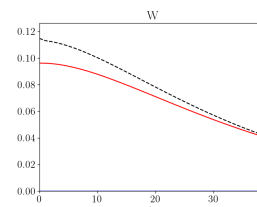
Rys. 25: Kapitał



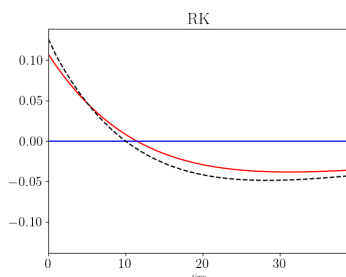
Rys. 26: Produkcja



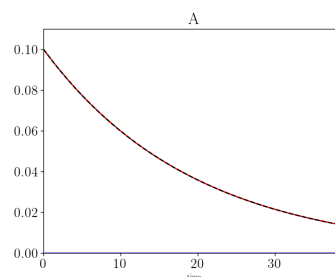
Rys. 27: Inwestycje



Rys. 28: Realna płaca



Rys. 29: Zwrot z kapitału



Rys. 30: Produktywność

Możemy zauważyć podobną reakcję zmiennych modelu na wystąpienie szoku produktywności co w modelu NEK, jednak w przypadku modelu z konkurencją doskonałą odchylenia wartości zmiennych od stanu ustalonego są mniejsze. Z czasem zjawiska sztywności modelu nowokeynesowskiego wygasają i wartości obu modeli zbiegają do podobnego poziomu przed powrotem do stanu ustalonego. Produkcja w obu gospodarkach jest niemalże identyczna z ograniczeniem do potencjalnie innej wartości stanu ustalonego w zależności od wartości parametrów modelu.

3.3.4 Wyniki estymacji bayesowskiej dla modelu gospodarki Irlandii

W celu zaprezentowania wyników estymacji zostanie wykorzystany model Irlandii z pracy [27] opracowany w repozytorium [38] razem z danymi estymacji oraz rozkładem a priori dla przedziału od 1940 do 2004 roku.

Model prezentuje się następująco:

1. Równania modelu:

$$a_t = \rho_A a_{t-1} + \epsilon_{A,t}, \quad (3.176)$$

$$e_t = \rho_E e_{t-1} + \epsilon_{E,t}, \quad (3.177)$$

$$z_t = \epsilon_{Z,t}, \quad (3.178)$$

$$x_t = \alpha_X x_{t-1} + (1 - \alpha_X) \mathbb{E}_t x_{t+1} - (\hat{r} - \mathbb{E}_t \hat{\pi}_{t+1}) + (1 - \omega)(1 - \rho_A) a_t, \quad (3.179)$$

$$\hat{\pi}_t = \beta(\alpha_\pi \hat{\pi}_{t-1} + (1 - \alpha_\pi) \mathbb{E}_t \hat{\pi}_{t+1} + \psi x_t - e_t), \quad (3.180)$$

$$x_t = \hat{y}_t - \omega a_t, \quad (3.181)$$

$$\hat{g}_t = \hat{y}_t - \hat{y}_{t-1} + z_t, \quad (3.182)$$

$$\hat{r}_t - \hat{r}_{t-1} = \rho_\pi \hat{\pi}_t + \rho_g \hat{g}_t + \rho_X x_t + \epsilon_{R,t}. \quad (3.183)$$

2. Zmienne obserwowalne:

$$g_{obs} = \hat{g}_t, \quad (3.184)$$

$$r_{obs} = \hat{r}_t, \quad (3.185)$$

$$\pi_{obs} = \hat{\pi}_t. \quad (3.186)$$

3. Kalibracja parametrów:

Parametr	Wartość
β	0.99
ψ	0.99

4. Rozkład parametrów:

Parametr	A priori	Ograniczenia
ω	0.00001	brak
α_X	0.2028	[0, 1]
α_π	0.00001	[0, 1]
ρ_g	0.2365	[0, 1]
ρ_π	0.3053	[0, 1]
ρ_X	0.00001	[0, 1]
ρ_A	0.9910	[0, 1]
ρ_E	0.5439	[0, 1]

5. Rozkład szoków:

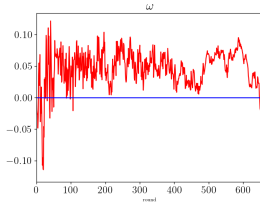
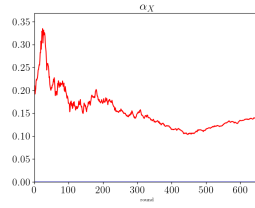
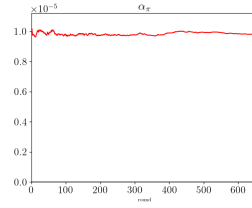
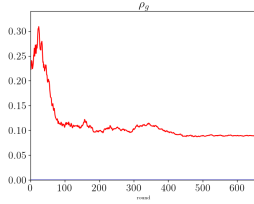
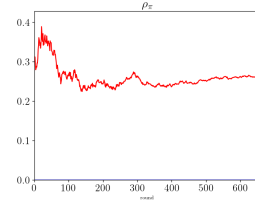
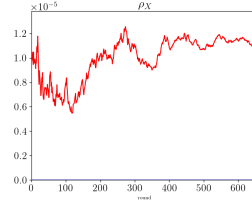
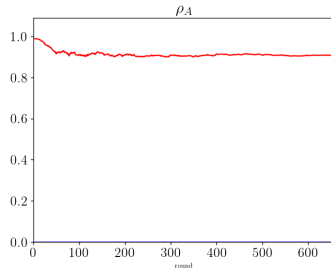
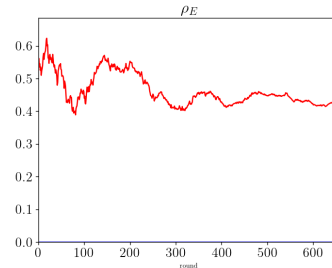
$$\epsilon_{A,t} \sim \mathcal{N}(0, 0.000912), \quad (3.187)$$

$$\epsilon_{E,t} \sim \mathcal{N}(0, 0.000009), \quad (3.188)$$

$$\epsilon_{Z,t} \sim \mathcal{N}(0, 0.000079), \quad (3.189)$$

$$\epsilon_{R,t} \sim \mathcal{N}(0, 0.000008) \quad (3.190)$$

Przebieg zaakceptowanej przez algorytm próbki prezentuje się następująco:

Rys. 31: ω Rys. 32: α_X Rys. 33: α_π Rys. 34: ρ_g Rys. 35: ρ_π Rys. 36: ρ_X Rys. 37: ρ_A Rys. 38: ρ_E

Estymacja została wykonana przy pomocy algorytmu *RMWH* dla 1000 rund, ze zmiennym parametrem c w czasie, tj. co 100 iteracji parametr c zmniejszany jest o 75%. Pozwala to na zastrzeżenie wyników oraz poprawę parametrów, których duży skok prowadziłby do znaczącego spadku funkcji wiarygodności. Wynikowa kalibracja zmiennych (najlepszy wynik uzyskany w przebiegu) sugeruje spadek znaczenia zmiennych ρ_g oraz ρ_π odpowiadających za informację zwrotną z luki PKB oraz inflacji, dodatkowo możemy zauważyć znaczny wzrost wartości w pierwszych iteracjach. Parametr ω opisujący w modelu ocenę spadku użyteczności pracy był jednym z najbardziej niestabilnych, jego wartość pomiędzy rundami algorytmu znacznie się różniła. Parametr ρ_A opisujący zwrot produktywności z poprzedniego przedziału zachowywał stałą wartość po wstępnym spadku.

Jednym z problemów napotkanych przy przygotowaniu estymacji było wskazanie wejściowej macierzy kowariancji $\hat{\Sigma}$ dla algorytmu *Random Walk MH*. Zastosowane parametry powstały na bazie rozkładu a priori wskazanego w pracy. Drugim z problemów był mały wpływ niektórych zmiennych na wartość funkcji wiarygodności, co połączone z dużą wartością macierzy kowariancji $\hat{\Sigma}$ prowadziło do dużej zmienności w wartości zaakceptowanej próbki. Ten efekt był najbardziej zauważalny dla wartości zmiennej ω , która zmieniała się drastycznie w czasie działania estymacji nawet na etapie wygaszania aproksymacji, kiedy zmienna c była już znacząco obniżona zgodnie ze zastosowaną wersją opisaną w 2.4.6.2.

Kolejnym z problemów był brak możliwości interpretacji wartości parametrów, które opisują własności agentów oraz komponentów modelu i nie są wartościami obserwowalnymi gospodarki. Dodatkowo model opierał się o rozbudowaną teorię ekonomiczną i realne dane gospodarcze, co znacznie utrudniało zrozumienie otrzymanych wyników.

Ostatnim z napotkanych problemów było wskazanie macierzy kowariancji szoku. W przypadku wykonania estymacji przy użyciu programu *Dynare*, na wyjściu analizy modelu wskazana została przeskalowana macierz kowariancji, stąd pojawiło się pytanie, czy nie jest wymagany dodatkowy algorytm pozwalający na konstrukcję i poprawę szoków wprowadzanych do filtru z informacji uzyskanych w pracy.

Bibliografia

- [1] Borağan Aruoba, Jesús Fernández-Villaverde, and Juan Rubio-Ramírez. Comparing Solution Methods for Dynamic Equilibrium Economies. *SSRN Electronic Journal*, 2003.
- [2] Charles Ballard and Don Fullerton. Distortionary Taxes and the Provision of Public Goods. *Journal of Economic Perspectives*, 1992.
- [3] Olivier Blanchard. *Macroeconomics Seventh Edition*. Pearson, 2017.
- [4] Olivier Blanchard and Charles Kahn. The Solution of Linear Difference Models under Rational Expectations. *Econometrica*, 48(5):1305–1311, 1980.
- [5] Olivier Blanchard and Nobuhiro Kiyotaki. Monopolistic Competition and the Effects of Aggregate Demand. *The American Economic Review*, 1987.
- [6] Guillermo Calvo. Staggered prices in a utility-maximizing framework. *Journal of Monetary Economics*, 12(3):383–398, 1983.
- [7] Edward Chamberlin. *The Theory of Monopolistic Competition*. Oxford University Press, 1933.
- [8] Lawrence Christiano, Martin Eichenbaum, and Charles Evans. Nominal Rigidities and the Dynamic Effects of a Shock to Monetary Policy. *Journal of Political Economy*, 113(1):1–45, 2005.
- [9] Charles Cobb and Paul Douglas. A Theory of Production. *The American Economic Review*, 18(1):139–165, 1928.
- [10] Thomas Cooley and Gary Hansen. The Inflation Tax in a Real Business Cycle Model. *The American Economic Review*, 79(4):733–748, 1989.
- [11] Vesna Corbo and Ingvar Strid. MAJA: A two-region DSGE model for Sweden and its main trading partners. Technical report, Sveriges Riksbank, July 2020.
- [12] Celso Costa Junior. *Understanding DSGE*. Vernon Press, 2016.
- [13] Celso Costa Junior and Alejandro Garcia-Cintado. Teaching DSGE models to undergraduates. *EconomiA*, 19(3):424–444, 2018.
- [14] Vasco Cúrdia and Ricardo Reis. Correlated Disturbances and U.S. Business Cycles. Working Paper 15774, National Bureau of Economic Research, February 2010.
- [15] Michel De Vroey. *A History of Macroeconomics from Keynes to Lucas and Beyond*. Cambridge University Press, 2016.

- [16] Marco Del Negro, Stefano Eusepi, Marc Giannoni, Argia Sbordone, Andrea Tambalotti, Matthew Cocci, Raiden Hasegawa, and M. Henry Linder. The FRBNY DSGE model. *FRB of New York Staff Report*, 2013.
- [17] Avinash Dixit and Joseph Stiglitz. Monopolistic Competition and Optimum Product Diversity. *The American Economic Review*, 67(3):297–308, 1977.
- [18] Huw Dixon. *Surfing Economics: Essays for the Enquiring Economist*. Springer, 2001.
- [19] James Duesenberry. *Income, Saving, and the Theory of Consumer Behavior*. Cambridge: Harvard University Press, 1949.
- [20] Jesús Fernández-Villaverde, Juan Rubio-Ramírez, and Frank Schorfheide. Chapter 9 - Solution and Estimation Methods for DSGE Models. In John Taylor and Harald Uhlig, editors, *Handbook of Macroeconomics*, volume 2 of *Handbook of Macroeconomics*, pages 527–724. Elsevier, 2016.
- [21] Jordi Galí. *Monetary Policy, Inflation, and the Business Cycle: An Introduction to the New Keynesian Framework*. Princeton University Press, 2008.
- [22] Jordi Galí and Mark Gertler. Macroeconomic Modeling for Monetary Policy Evaluation. *Journal of Economic Perspectives*, 2007.
- [23] Jordi Galí, Javier Vallés, and David López-Salido. Understanding the Effects of Government Spending on Consumption. *Journal of the European Economic Association*, 2007.
- [24] Grzegorz Grabek, Bohdan Kłos, and Grażyna Utzig-Lenarczyk. *SOE-PL - model DSGE malej otwartej gospodarki estymowany na danych polskich: metodologia, specyfikacja, wyniki estymacji i pierwsze zastosowania*. Materiały i Studia - Narodowy Bank Polski. Narodowy Bank Polski. Departament Komunikacji Społecznej, 2007.
- [25] Edward Herbst and Frank Schorfheide. Sequential Monte Carlo Sampling for DSGE Models. *Journal of Applied Econometrics*, 29(7):1073–1098, 2014.
- [26] Edward Herbst and Frank Schorfheide. *Bayesian Inference for DSGE Models*. Princeton University Press, 2015.
- [27] Peter Ireland. Technology Shocks in the New Keynesian Model. Working Paper 10309, National Bureau of Economic Research, February 2004.
- [28] Barry Jones and Livio Stracca. Are money and consumption additively separable in the euro area? A non-parametric approach. Working Paper Series 704, European Central Bank, December 2006.
- [29] Robert King and Mark Watson. The Solution of Singular Linear Difference Systems under Rational Expectations. *International Economic Review*, 39:1015–1026, 1998.
- [30] Paul Klein. Using the generalized Schur form to solve a multivariate linear rational expectations model. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 24(10):1405–1423, 2000.

- [31] Grzegorz Koloch. Stylizowany model DSGE małej gospodarki otwartej w niesymetrycznej unii walutowej - wnioski dla Polski. Technical report, Narodowy Bank Polski, 16 września 2008.
- [32] Dmitriy Kreptsev and Sergei Seleznev. DSGE Model of the Russian Economy with the Banking Sector. Technical report, Bank of Russia, December 2017.
- [33] Finn Kydland and Edward Prescott. Time to Build and Aggregate Fluctuations. *Econometrica*, 50(6):1345–1370, 1982.
- [34] Mohamed Laaraiedh. Implementation of Kalman Filter with Python Language, 2012.
- [35] Robert Lucas. Econometric policy evaluation: A critique. *Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy*, 1:19–46, 1976.
- [36] George McCandless. *The ABCs of RBCs: An introduction to Dynamic Macroeconomic Models*. Harvard University Press, 2008.
- [37] Daniel McFadden. Constant Elasticity of Substitution Production Functions. *The Review of Economic Studies*, 30(2):73–83, 06 1963.
- [38] Johannes Pfeifer. DSGE: A collection of Dynare models.
- [39] Julio Rotemberg and Michael Woodford. An Optimization-Based Econometric Framework for the Evaluation of Monetary Policy. *NBER Macroeconomics Annual*, 1997.
- [40] Christopher Sims. Solving Linear Rational Expectations Models. *Computational Economics*, 20, 2002.
- [41] Frank Smets and Rafael Wouters. An Estimated Dynamic Stochastic General Equilibrium Model of the Euro Area. *Journal of the European Economic Association*, 1(5):1123–1175, 09 2003.
- [42] Frank Smets and Rafael Wouters. Shocks and Frictions in US Business Cycles: A Bayesian DSGE Approach. *American Economic Review*, 97(3):586–606, June 2007.
- [43] Brian Snowdon and Howard Vane. *Modern Macroeconomics: Its Origins, Development and Current State*. Edward Elgar Publishing, 2005.
- [44] John Taylor. Discretion versus policy rules in practice. *Carnegie Rochester Conference Series on Public Policy*, 1993.
- [45] Harald Uhlig. A Toolkit for Analyzing Nonlinear Dynamic Stochastic Models Easily. *Computational Methods for the Study of Dynamic Economies*, 02 1995.
- [46] Joel Vanden. General Properties of Isoelastic Utility Economies. *Mathematical Finance*, 25(1):187–219, 2015.
- [47] Sébastien Villemot. Solving rational expectations models at first order: what Dynare does. Dynare Working Papers 2, CEPREMAP, April 2011.
- [48] Michael Woodford. Interest and Prices: Foundations of a Theory of Monetary Policy. *Macroeconomic Dynamics*, 9(3):462–468, 2005.

-
- [49] Joachim Zietz. Log-Linearizing Around the Steady State: A Guide with Examples. *SSRN Electronic Journal*, 12 2006.