William GREGORY

Colle 5 • INDICATIONS
Nombres complexes

Exercice 5.1

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $t \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \neq 1$.
Calculer la somme :

$$\sum_{k=1}^{n} \sin\left(kt + \frac{\pi}{4}\right).$$

indication

Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(kt+\frac{\pi}{4}\right)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} \sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}$.

résultat

$$\sum_{k=1}^{n} \sin\left(kt + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left((n+1)\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \frac{\sin\left(n\frac{t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

Exercice 5.2

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$.
Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $|z|$ pour que

$$\frac{1+z}{1-z} \in \mathrm{i}\mathbb{R}.$$

indication

On a, pour $u \in \mathbb{C}$, $u \in \mathrm{i}\mathbb{R} \iff \overline{u} = -u$.

résultat

$$\frac{1+z}{1-z} \in \mathrm{i}\mathbb{R} \quad \iff \quad |z| = 1.$$

Exercice 5.3

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$.
Déterminer les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation :

$$(z+1)^n = (z-1)^n$$

et montrer que ces solutions sont des nombres imaginaires purs.

indication

Pour $z \neq 1$, l'équation se réécrit $\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^n = 1$ donc $\dfrac{z+1}{z-1} = \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}$ avec $k \in [\![0, n-1]\!]$. On termine le calcul en factorisant par l'angle moitié.

résultat

L'ensemble des solutions est $\left\{ -\mathrm{i}\dfrac{1}{\tan\left(\frac{k\pi}{n}\right)} \ ; \ k \in [\![1, n-1]\!] \right\}$.

Exercice 5.4

Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$. On définit :

$$a := \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}, \quad b := \mathrm{e}^{\mathrm{i}y} \quad \text{et} \quad c := \mathrm{e}^{\mathrm{i}z}.$$

Exprimer, en fonction de x, y et z le module et un argument du nombre complexe

$$\frac{c^2 + ab}{ab}.$$

indication

Commencer par montrer que :

$$\frac{c^2 + ab}{2} = 2\cos\left(z - \frac{x+y}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(z - \frac{x+y}{2}\right)}.$$

On distingue ensuite deux cas selon le signe de $\cos\left(z - \dfrac{x+y}{2}\right)$.

résultat

	module	un argument
$\exists k \in \mathbb{Z} : \ -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \leqslant z - \dfrac{x+y}{2} \leqslant \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$	$2\cos\left(z - \dfrac{x+y}{2}\right)$	$z - \dfrac{x+y}{2}$
$\exists k \in \mathbb{Z} : \ \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi < z - \dfrac{x+y}{2} < \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi$	$-2\cos\left(z - \dfrac{x+y}{2}\right)$	$\pi + z - \dfrac{x+y}{2}$

Exercice 5.5

Pour $z \in \mathbb{C} \setminus \{2\}$, on pose

$$h(z) := \frac{z+1}{z-2}.$$

Déterminer l'ensemble des nombres complexes $z \in \mathbb{C}$ pour lesquels :

1. $\left|h(z)\right| = 1$;

2. $\mathfrak{Re}\left(h(z)\right) = 0$.

résultat

1. Droite d'équation $x = \dfrac{1}{2}$.

2. Cercle de centre $\left(\dfrac{1}{2}, 0\right)$ et de rayon $\dfrac{3}{2}$, sans le point $(2, 0)$.

Exercice 5.6

Soient $a, b \in \mathbb{C}$.

1. Montrer que

$$|a-b|^2 \leqslant \left(1+|a|^2\right)\left(1+|b|^2\right).$$

2. Étudier le cas d'égalité.

indication

1. L'inégalité triangulaire donne $|a-b|^2 \leqslant |a|^2+|b|^2+2|ab|$ et on utilise l'inégalité arithmético-géométrique pour obtenir

$$2|ab| \leqslant 1+|ab|^2,$$

et conclure.

2. Il suffit d'avoir égalité dans les deux majorations faites ci-dessus.

résultat

$$|a-b|^2 \leqslant \left(1+|a|^2\right)\left(1+|b|^2\right) \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \theta \in \mathbb{R}, R \in \mathbb{R}_+^* : \quad a = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \text{ et } b = \frac{-1}{R}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}.$$

Exercice 5.7 Noyaux de Dirichlet et de Féjer.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose, pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{D}_n(t) := \sum_{k=-n}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt} \quad \text{et} \quad \mathrm{K}_n(t) := \frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1} \mathrm{D}_m(t).$$

1. Soit $t \in \mathbb{R}$ tel que $t \equiv 0 \ [2\pi]$. Calculer $\mathrm{D}_n(t)$ et $\mathrm{K}_n(t)$.

2. Soit $t \in \mathbb{R}$ tel que $t \not\equiv 0 \ [2\pi]$. Montrer que

$$\mathrm{D}_n(t) = \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

3. Soit $t \in \mathbb{R}$ tel que $t \not\equiv 0 \ [2\pi]$.

(a) Calculer $\displaystyle\sum_{m=0}^{n-1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(n+\frac{1}{2}\right)t}$.

(b) En déduire $\mathrm{K}_n(t)$.

résultat

Si $t \equiv 0 \ [2\pi]$,

$$\mathrm{D}_n(t) = 2n+1 \quad \text{et} \quad \mathrm{K}_n(t) = n.$$

Si $t \not\equiv 0 \ [2\pi]$,

$$\mathrm{D}_n(t) = \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)},$$

$$\sum_{m=0}^{n-1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(n+\frac{1}{2}\right)t} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{n}{2}t} \frac{\sin\left(\frac{nt}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \quad \text{et} \quad \mathrm{K}_n(t) = \frac{1}{n}\left(\frac{\sin\left(\frac{nt}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\right)^2.$$

Exercice 5.8

Soit $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. On définit

$$\Delta_\theta \coloneqq \left\{ z \in \mathbb{C} \ \middle| \ \begin{cases} |z| < 1 \\ \exists \rho \in \left]0, \cos(\theta)\right[, \ \exists \varphi \in \left]-\theta, \theta\right[: \ z = 1 - \rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \end{cases} \right\}.$$

1. Dessiner Δ_θ dans le plan complexe.

2. Montrer que

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad |z| < 1 \implies \frac{1}{1-|z|} \leqslant \frac{2}{1-|z|^2}.$$

3. Montrer que

$$\forall z \in \Delta_\theta, \quad \frac{|1-z|}{1-|z|} \leqslant \frac{2}{\cos(\theta)}.$$

indication

3. Si $z = 1 - \rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \in \Delta_\theta$, $|1-z| = \rho$ et appliquer la question précédente, en développant le dénominateur pour faire apparaître $\cos(\varphi)$, puis, par monotonie de cos, $\cos(\theta)$.