Continuité

Généralités et grands théorèmes

QCOP CONT.1

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Soit $a \in I$.

1. Donner la définition de « f est continue en a ».

2. Énoncer et démontrer le théorème de caractérisation séquentielle de la continuité.

3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in I^{\mathbb{N}}$. Soit $\ell \in I$. On suppose que f est continue sur I.

- **a)** Montrer que :
$$u_n \longrightarrow \ell \quad \Longrightarrow \quad f(u_n) \longrightarrow f(\ell).$$
- **b)** On suppose que $f[I] = I$ et que :
$$\begin{cases} u_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$$
Montrer que :
$$u_n \longrightarrow \ell \quad \Longrightarrow \quad f(\ell) = \ell.$$

QCOP CONT.2

1. Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires.

On admettra ses conséquences. Les applications suivantes sont indépendantes.

2. Soit $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ une fonction continue. Montrer que :
$$\exists x_0 \in [0,1] : \quad f(x_0) = x_0.$$
On dit que x_0 est un point fixe de f.

3. Soit P un polynôme à coefficients réels.

- **a)** Montrer que, si le degré de P est impair, alors P admet au moins une racine réelle.
- **b)** Est-ce vrai si le degré de P est pair ?

QCOP CONT.3 ★

Soient $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$.

1. Montrer que f est bornée sur $[a,b]$ et atteint ses bornes.

2. Montrer que :
$$\forall x \in [a,b], \quad f(x) < g(x)$$
$$\Downarrow$$
$$\sup_{x\in[a,b]} f(x) < \sup_{x\in[a,b]} g(x).$$

3. Les résultats précédents restent-ils vrais si l'on étudie f et g sur un intervalle quelconque et non sur $[a,b]$?

Fonctions lipschitziennes, continuité uniforme

QCOP CONT.4

Soient $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions lipschitziennes.

1. Donner la définition de « f est lipschitzienne ».

2. **a)** Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que $\lambda f + g$ est lipschitzienne.

b) Montrer que $g \circ f$ est lipschitzienne.

3. **a)** En général, le produit $f \times g$ est-il lipschitzien ? Justifier.

b) On suppose f et g bornées. Montrer que $f \times g$ est lipschitzienne.

4. **a)** En général, a-t-on l'équivalence :

$$f \text{ est lipschitzienne} \quad \Longleftrightarrow \quad \Big[\exists C \geqslant 0 : \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \big|f(x)\big| \leqslant C|x|\Big] \ ?$$

b) Quelle implication est vraie ?

c) Donner un ensemble de fonctions pour lesquelles la réciproque est vraie.

QCOP CONT.5

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

1. Donner la définition de « f est uniformément continue sur I ».

2. On considère les trois assertions suivantes :

(i) f est continue sur I ;
(ii) f est uniformément continue sur I ;
(iii) f est lipschitzienne sur I.

Énoncer et démontrer les implications les reliant.

3. Lesquelles des assertions précédentes sont vraies pour $f = \sqrt{\cdot}$ et $I = [0, 1]$?

QCOP CONT.6 ★

Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$.
Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$.

1. Que dire de f ? Quel théorème venez-vous d'énoncer ?

2. **a)** Écrire à l'aide de quantificateurs « f n'est pas uniformément continue sur $[a, b]$ ».

b) Aboutir à une contradiction à l'aide de la caractérisation séquentielle de la continuité.