

CPLX. Nombres complexes

QCOP CPLX.1

3. Résultat. $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid e^{ia} + e^{ib} \in \mathbb{R}\} = \left\{ (a, b) \in \mathbb{R} \mid \begin{cases} a - b \equiv \pi \ [2\pi] \\ a + b \equiv 0 \ [2\pi] \end{cases} \right\}.$

Il y a deux conditions car :

♦ il faut traiter le cas où $\cos\left(\frac{a-b}{2}\right) = 0$;

♦ ensuite, lorsque $\cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \neq 0$, on étudie les cas où $e^{i\frac{a+b}{2}} = e^{-i\frac{a+b}{2}}$.

QCOP CPLX.2

3. Utiliser l'inégalité triangulaire (question précédente) avec $z = (z - z') + z'$ et $z' = (z' - z) + z$.

QCOP CPLX.3

2. Résultat. $|z + z'| = |z| + |z'| \iff \exists \lambda \geq 0 : z' = \lambda \cdot z.$

3. On note a l'abscisse de A, b l'abscisse de B et c l'abscisse de C.

Il s'agit alors de montrer que

$$|b - a| + |c - b| = |c - a| \iff \exists \lambda \geq 0 : b - a = \lambda(c - b).$$

En effet, dire que A, B et C sont alignés dans le même sens revient à dire que \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{BC} sont positivement colinéaires (colinéaires et de coefficient de colinéarité positif).

QCOP CPLX.4

1. Résultat. $e^z = e^{\Re(z)} \left(\cos(\Im(z)) + i \sin(\Im(z)) \right).$

2. Résultat. $|e^z| = e^{\Re(z)}$ et $\arg(z) \equiv \Im(z) \ [2\pi]$

3. Résultat. $|e^z| = 1 \iff z \in i\mathbb{R}.$

4. Utiliser la première question.

QCOP CPLX.5

1. Résultat. $Z = Re^{i\theta}$.

2. Résultat. $\{z \in \mathbb{C} \mid e^z = Z\} = \{\ln(R) + i(\theta + 2k\pi) ; k \in \mathbb{Z}\}$.

On peut raisonner par analyse-synthèse.

◆ ANALYSE.

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $e^z = Z$.

Notons $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $z = a + ib$, de sorte que $e^z = e^a e^{ib}$.

Alors on a les équivalences suivantes :

$$e^z = Z \iff \begin{cases} e^a = R \\ b \equiv \theta [2\pi] \end{cases}$$

... (poursuivre et compléter la rédaction).

◆ SYNTHÈSE. ...

3. Résultat. $\{z \in \mathbb{C} \mid e^z = 1 + i\} = \left\{ \frac{\ln(2)}{2} + i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) ; k \in \mathbb{Z} \right\}$.

QCOP CPLX.6

3. Résultat. $\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega = 0$ et $\prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega = (-1)^{n-1}$.

QCOP CPLX.7

1. Résultat. $\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\} = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}} ; k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \right\}$.

2. Résultat. $A = \left\{ R^{\frac{1}{n}} e^{\frac{i}{n}(\theta + 2k\pi)} ; k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \right\}$.

On utilise que le nombre $\frac{z}{R^{\frac{1}{n}} e^{\frac{i}{n}\theta}}$ est une racine n -ième de l'unité (un élément de \mathbb{U}_n).

3. Résultat. $\sum_{\omega \in A} \omega = 0$ et $\prod_{\omega \in A} \omega = Re^{i\theta} (-1)^{n-1}$.

QCOP CPLX.8

2. Résultat. $z^2 = a \iff \begin{cases} x^2 - y^2 = \Re(a) \\ x^2 + y^2 = |a| \\ \text{signe}(xy) = \text{signe}(\Im(a)). \end{cases}$

QCOP CPLX.9

2. Résultat. Les nombres z_1 et z_2 sont solutions de l'équation polynomiale $z^2 - d_1 z + d_2$.

On utilise les relations entre coefficients et racines d'un polynôme de degré 2.