

CONT. Continuité

QCOP CONT.1

3. a) C'est une conséquence directe de la caractérisation séquentielle de la continuité appliquée à la fonction f et la suite $(u_n)_n$.
 b) On a $u_{n+1} \rightarrow \ell$ et $f(u_n) \rightarrow f(\ell)$, d'où le résultat par unicité de la limite.

QCOP CONT.2

2. Appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction $x \mapsto f(x) - x$.
 3. a) On peut appliquer le théorème des valeurs intermédiaires généralisé à la fonction $x \mapsto P(x)$, admettant des limites infinies opposées en $\pm\infty$.
 b) Prendre $P = X^2 + 1$.

QCOP CONT.3

2. D'après le théorème des bornes atteintes, il existe $x_{f,\max}, x_{g,\min} \in [a, b]$ tels que :

$$\sup_{x \in [a, b]} f(x) = f(x_{f,\max}) \quad \text{et} \quad \inf_{x \in [a, b]} g(x) = g(x_{g,\min}).$$

 3. ♦ Le théorème des bornes atteintes n'est plus valide : une fonction non bornée fournit un contre-exemple.
 ♦ On peut prendre $f : x \mapsto 1 - \frac{1}{x}$ et $g : x \mapsto 1$ sur \mathbb{R}_+^* .

QCOP CONT.4

3. a) Prendre $f(x) = g(x) = x$.
 b) Soient $x, y \in \mathbb{R}$. On a $(fg)(x) - (fg)(y) = f(x)[g(x) - g(y)] + g(y)[f(x) - f(y)]$.
 4. a) Non, prendre une fonction constante non nulle.
 b) L'implication \Rightarrow est vraie pour des fonctions f telles que $f(0) = 0$, en prenant $y = 0$ dans la définition de « f est lipschitzienne ».
 c) L'implication \Leftarrow est vraie pour les fonctions linéaires.

QCOP CONT.5

2. Résultat. (iii) \implies (ii) \implies (i).

3. La fonction f n'est pas lipschitzienne sur I car, avec $x = \frac{1}{n}$ et $y = 0$,

$$\frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{x - y} = \sqrt{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty.$$

En revanche, f est continue et uniformément continue par le théorème de Heine.

Pour la continuité uniforme, on peut aussi montrer que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+, \quad |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x - y|}.$$

QCOP CONT.6

1. Résultat. Théorème de Heine : f est uniformément continue sur $[a, b]$.