Fonctions convexes

QCOP FCONV.1

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe.

- Définir « f est convexe ».
- Démontrer l'inégalité de Jensen.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$.

  (a) Montrer que
  $$f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right) \leqslant \frac{f(x_1) + \cdots + f(x_n)}{n}.$$

  (b) Montrer que
  $$n \times f(x_1 + \cdots + x_n) \leqslant f(nx_1) + \cdots + f(nx_n).$$

QCOP FCONV.2

- Soit I un intervalle. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe sur I. On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f.

  (a) Que dire de $\mathscr{C}_f$ par rapport à ses cordes ?

  (b) On suppose f dérivable sur I. Que dire de $\mathscr{C}_f$ par rapport à ses tangentes ?

- Compléter et établir, par convexité, les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned}
&\forall x \in \mathbb{R}, && \mathrm{e}^x \geqslant \cdots, \\
&\forall x \in \mathbb{R}_+^*, && \ln(x) \leqslant \cdots, \\
&\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], && \cdots \leqslant \sin(x) \leqslant \cdots.
\end{aligned}$$

QCOP FCONV.3

- Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Commet montrer qu'une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable sur I est convexe ?
- Soient $p, q \in]1, +\infty[$ tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

  (a) Justifier que
  $$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{e}^{\frac{x}{p} + \frac{y}{q}} \leqslant \frac{\mathrm{e}^x}{p} + \frac{\mathrm{e}^y}{q}.$$

  (b) Montrer *l'inégalité de Young* :
  $$\forall a, b \in \mathbb{R}_+^*, \quad ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$