

# Espaces préhilbertiens réels

## Produit scalaire, inégalité de Cauchy-Schwarz

### QCOP EPR.1

Soit  $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$  un espace préhilbertien réel.  
Soient  $x, y \in E$ . Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

✍ (a) Exprimer, à l'aide des propriétés de  $\langle \cdot | \cdot \rangle$ , la quantité

$$\|\lambda x + y\|^2.$$

(b) Déterminer, lorsque  $x \neq 0_E$ , le discriminant de la fonction polynomiale

$$t \mapsto \|tx + y\|^2.$$

✂ Montrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|\langle x | y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$

✂ Montrer que

$$|\langle x | y \rangle| = \|x\| \|y\| \iff x \text{ et } y \text{ sont liés.}$$

### QCOP EPR.2

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

☐ Quel est le produit scalaire usuel (canonique)  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  sur  $\mathbb{R}^n$  ?

☐ Écrire l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans  $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ .

✂ Montrer que

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \left( \sum_{k=1}^n x_k \right) \leq n \sum_{k=1}^n x_k^2,$$

et préciser les cas d'égalité.

### QCOP EPR.3

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On considère

$$\langle \cdot | \cdot \rangle : \begin{cases} M_n(\mathbb{R})^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (A, B) & \longmapsto \text{Tr}(A^T B). \end{cases}$$

✍ Montrer que  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  définit un produit scalaire sur  $M_n(\mathbb{R})$ .

☐ Écrire l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans cet espace préhilbertien.

✂ Montrer que

$$\forall M \in M_n(\mathbb{R}), \text{Tr}(M^2) \leq \text{Tr}(M^T M).$$

### QCOP EPR.4

Soit  $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$  un espace préhilbertien réel.

☐ Donner la définition de «  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  est un produit scalaire sur  $E$  ».

✍ Soient  $x, y \in E$ . Montrer la *formule de polarisation* :

$$\langle x | y \rangle = \frac{\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2}{4}.$$

✂ Soit  $u \in L(E)$ . Soit  $\lambda \in \mathbb{R}_+$  tel que

$$\forall x \in E, \quad \|u(x)\| = \lambda \|x\|.$$

Montrer que

$$\forall x, y \in E, \quad \langle u(x) | u(y) \rangle = \lambda \langle x | y \rangle.$$

## Orthogonalité, projection orthogonale

### QCOP EPR.5

Soit  $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$  un espace euclidien de dimension  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base orthonormale de  $E$ .

Soient  $x, y \in E$ .

✍ (a) Exprimer les coordonnées de  $x$  dans  $\mathcal{B}$ .

(b) Même question si  $\mathcal{B}$  est supposée seulement orthogonale.

✂ Exprimer  $\langle x | y \rangle$  et  $\|x\|$  en fonction des  $\langle x | e_i \rangle$  et  $\langle y | e_i \rangle$  pour  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .

### QCOP EPR.6

Soit  $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$  un espace préhilbertien réel.

Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . Soit  $\mathcal{F} = (v_1, \dots, v_k) \in E^k$ .

✍ Montrer que

$$\mathcal{F} \text{ est orthogonale} \implies \mathcal{F} \text{ est libre.}$$

✎ Montrer que la réciproque est fausse.

✂ On suppose que

$$\begin{cases} k > \dim(E) \\ \forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket, \quad v_i \neq 0_E. \end{cases}$$

La famille  $\mathcal{F}$  peut-elle être orthogonale ?

### QCOP EPR.7

Soit  $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$  un espace préhilbertien réel.

✍ Énoncer et démontrer le théorème de Pythagore.

✂ Dans le cas d'une famille de deux vecteurs, le théorème admet-il une réciproque ?

✂ Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$  de dimension finie. On note  $p_F$  la projection orthogonale sur  $F$ .

Soit  $x \in E$ .

(a) Exprimer, en fonction de  $\|x\|$  et de  $\|p_F(x)\|$ , la distance de  $x$  à  $F$ .

(b) Montrer que  $\|p_F(x)\| \leq \|x\|$ .

### QCOP EPR.8

Soit  $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$  un espace préhilbertien réel.

Soit  $x \in E$ . Soit  $a \in E \setminus \{0_E\}$ .

On note  $p$  la projection orthogonale sur le sous-espace  $\text{Vect}(a)$ .

☰ Compléter :

$$p(x) \in \dots \quad \text{et} \quad x - p(x) \in \dots$$

✍ À l'aide des caractérisations précédentes, et sans l'aide d'une formule générale, établir que

$$p(x) = \frac{\langle x | a \rangle}{\|a\|^2} a.$$

✂ Déterminer  $d(x, \text{Vect}(a)^\perp)$ .

### QCOP EPR.9

Soit  $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$  un espace préhilbertien réel.

Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de dimension finie  $n \in \mathbb{N}^*$  de  $E$ .

On note  $p_F$  la projection orthogonale sur  $F$ .

☰ Définir l'application  $p_F$ .

✍ Soit  $x \in E$ . Soit  $(f_1, \dots, f_n)$  une base orthogonale de  $F$ .

(a) Exprimer  $p_F(x)$  dans cette base.

(b) Même question lorsque la base est supposée orthonormée.

✍ Soit  $x \in E$ .

(a) Définir la distance de  $x$  à  $F$ , notée  $d(x, F)$ .

(b) Montrer que  $d(x, F) = \|x - p_F(x)\|$ .

✂ Expliquer le principe de l'algorithme de Gram-Schmidt.

*On donnera en particulier la formule à retenir, que l'on expliquera à l'aide de la notion de projection orthogonale.*