

Colle 17

Espaces vectoriels

- ▶ Après votre colle, il vous est demandé de reprendre les exercices traités et de les rédiger sur feuille. Ce travail est à déposer dans la boîte en B013 avant lundi prochain.
- ▶ Vous trouverez le sujet et des indications sur la page ci-contre.



Exercice 17.1

La famille

$$(X^3 + X, X^2 + 2X + 1, X - 1, 4)$$

est-elle une base de $\mathbb{R}_3[X]$?

Exercice 17.2

La famille

$$\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

est-elle libre ou liée ?

Exercice 17.3

La famille

$$\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix} \right)$$

est-elle libre ou liée ?

Exercice 17.4

Soit $A \subset \mathbb{R}$ telle que :

- (i) $0 \in A$
- (ii) $\forall x, y \in A, \quad x + y \in A$
- (iii) $\forall \alpha \in \mathbb{Q}, \quad \forall x \in A, \quad \alpha x \in A.$

On définit :

$$\text{Adh}(A) := \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \exists (a_n)_n \in A^{\mathbb{N}} : a_n \longrightarrow x \right\}.$$

Montrer que $\text{Adh}(A)$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R} .

Exercice 17.5

Soit E un espace vectoriel.

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E .

1. L'ensemble $F \cup G$ est-il un sous-espace vectoriel de E ?

2. Montrer que :

$$F \cup G \text{ est un sous-espace vectoriel de } E \iff F \subset G \text{ ou } G \subset F.$$

Exercice 17.6

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère les sous-ensembles de $M_n(\mathbb{R})$:

- ♦ $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques ;
- ♦ $A_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques.

Montrer que $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $M_n(\mathbb{R})$.

Exercice 17.7

Soit E un espace vectoriel. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

Soit (x_1, \dots, x_{k+1}) une famille de E telle que la famille (x_1, \dots, x_k) est libre.

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur x_{k+1} pour que la famille (x_1, \dots, x_{k+1}) soit libre.

Exercice 17.8

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$\text{Vect}\left(x \mapsto \cos(nx)\right)_{n \in \llbracket 0, N \rrbracket} = \text{Vect}\left(x \mapsto \cos^n(x)\right)_{n \in \llbracket 0, N \rrbracket}.$$

Exercice 17.9

On note $E := \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ et

$$F := \left\{ f \in E \mid \int_0^1 f(t) dt = 0 \right\}.$$

1. Montrer que F est un espace vectoriel.
2. Déterminer un supplémentaire de F dans E .

Exercice 17.10

Soit E un espace vectoriel.

Soit (e_1, \dots, e_p) une famille libre de E .

Montrer que pour tout $a \in E \setminus \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$, la famille $(e_1 + a, \dots, e_p + a)$ est libre.

Exercice 17.11

On considère les fonctions de $\mathcal{C}^0([0, 2\pi], \mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} f_1 : x &\mapsto \cos(x), & f_2 : x &\mapsto x \cos(x), \\ f_3 : x &\mapsto \sin(x), & f_4 : x &\mapsto x \sin(x). \end{aligned}$$

Montrer que la famille (f_1, f_2, f_3, f_4) est libre dans $\mathcal{C}^0([0, 2\pi], \mathbb{R})$.

Exercice 17.12

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose $f_\lambda : x \mapsto |x - \lambda|$.

Montrer que la famille $(f_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ est libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 17.13

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_N \in \mathbb{R}$ deux à deux distincts.

Montrer que la famille $(t \mapsto e^{\lambda_k t})_{1 \leq k \leq N}$ est libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 17.14

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Soient $\theta_1, \dots, \theta_N \in \mathbb{R}_+^*$ deux à deux distincts.

Montrer que la famille $(t \mapsto \sin(\theta_k t))_{1 \leq k \leq N}$ est libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 17.15

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On note, pour $j \in \llbracket 0, N+1 \rrbracket$, $x_j^{(N)} := \frac{j}{N+1}$.

On note \mathcal{V}_N l'ensemble des fonctions continues sur $[0, 1]$, nulles en 0 et en 1, et affines sur les segments $[x_j^{(N)}, x_{j+1}^{(N)}]$ (pour $j \in \llbracket 0, N \rrbracket$).

1. Vérifier que \mathcal{V}_N est un espace vectoriel.
2. Soit $j \in \llbracket 1, N \rrbracket$. Exprimer explicitement l'unique fonction $f_j^{(N)}$ de \mathcal{V}_N telle que :

$$\forall \ell \in \llbracket 1, N \rrbracket, \quad f_j^{(N)}(x_\ell^{(N)}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ell \neq j \\ 1 & \text{si } \ell = j. \end{cases}$$

3. Montrer que $(f_1^{(N)}, \dots, f_N^{(N)})$ forme une base de \mathcal{V}_N .

Exercice 17.16

On considère $(p_n)_{n \geq 1}$ la suite strictement croissante des nombres premiers :

$$p_1 = 2, \quad p_2 = 3, \quad p_3 = 5, \quad p_4 = 7, \quad \dots$$

Montrer que $(\ln(p_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une famille libre dans \mathbb{R} muni de sa structure de \mathbb{Q} -espace vectoriel.