Lycée Chateaubriand
MPSI 3 • 2024 – 2025

William GREGORY

Colle 18 • INDICATIONS

Applications linéaires

Exercice 18.1

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
Soit $u \in \mathrm{L}(E)$ tel que

$$u^2 - 3u - 10\,\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}.$$

1. Montrer que u est bijectif et exprimer u^{-1} en fonction de u.

2. Montrer que

$$E = \mathrm{Ker}(u + 2\,\mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(u - 5\,\mathrm{Id}_E).$$

indication

1. Déterminer v tel que $u \circ v = v \circ u = \mathrm{Id}_E$ à l'aide de la relation vérifiée par u.

2. Raisonner par analyse synthèse. En exprimant $x \in E$ comme $x = y + z$ (avec $y \in \mathrm{Ker}(u+2\,\mathrm{Id}_E)$ et $z \in \mathrm{Ker}(u - 5\,\mathrm{Id}_E)$), écrire $f(x)$ pour en déduire y et z en fonction de x et $f(x)$.

Exercice 18.2

Soit E un espace vectoriel. Soient $f, g \in \mathrm{L}(E)$ tels que $f \circ g = \mathrm{Id}_E$.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(g \circ f) = \mathrm{Ker}(f)$.

2. Montrer que $\mathrm{Im}(g \circ f) = \mathrm{Im}(g)$.

3. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(g)$.

indication

1. Raisonner par double inclusion. L'une se fait sans difficulté et sans l'hypothèse $f \circ g = \mathrm{Id}_E$.

2. Raisonner par double inclusion. L'une se fait sans difficulté et sans l'hypothèse $f \circ g = \mathrm{Id}_E$.

3. Raisonner par analyse-synthèse. Dans la phase d'analyse, lorsque l'on écrit $x = y + z$ ($x \in E$, $y \in \mathrm{Ker}(f)$ et $z \in \mathrm{Im}(g)$), appliquer f pour déterminer z.
Autre méthode. On peut montrer que $p := g \circ f$ est une projection, utiliser les résultats sur les projections et les questions précédentes.

Exercice 18.3

On considère

$$\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & P(X^2) + (1+X^2)P(X). \end{array} \right.$$

1. Montrer que φ est une application linéaire.

2. Montrer que φ est injective.

3. L'application φ est-elle surjective ?

indication

1. Sans difficulté.

2. Établir qu'un polynôme du noyau est nul ou de degré 2, puis regarder ce qu'il se passe pour un polynôme de degré 2.

3. Remarquer que $\deg(\varphi(P)) = -\infty$ ou 0 ou $\geqslant 2$.

Exercice 18.4

On note $\mathscr{P}$ l'ensemble des fonctions paires de $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\mathscr{I}$ l'ensemble des fonctions impaires de $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

1. Montrer que $\mathscr{P}$ et $\mathscr{I}$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

2. Déterminer le projeté de $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ sur $\mathscr{P}$ parallèlement à $\mathscr{I}$.

indication

1. Vérifier que $\mathscr{P}$ et $\mathscr{I}$ sont des sous-espaces vectoriels et $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
Pour montrer que $\mathscr{P}$ et $\mathscr{I}$ sont supplémentaires, on pourra raisonner par analyse-synthèse.

2. Il s'agit de la fonction paire intervenant dans la décomposition « paire impaire » déterminée précédemment.

Exercice 18.5

Soit E un espace vectoriel. Soit $f \in \mathrm{L}(E)$.

1. Montrer que

$$\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f) = \{0_E\} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2).$$

2. Montrer que

$$\mathrm{Im}(f) + \mathrm{Ker}(f) = E \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2).$$

indication

Sans contexte de dimension finie, tout montrer par double implication et les égalités ensemblistes par double inclusion.

Exercice 18.6

Trouver un espace vectoriel E et deux endomorphismes $u, v \in \mathrm{L}(E)$ tels que

$$u \circ v = \mathrm{Id}_E \quad \text{et} \quad v \circ u \neq \mathrm{Id}_E\,.$$

indication

On pourra par exemple regarder des espaces de fonctions, tels que $E = \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
Remarque. Ne pas prendre un espace de dimension finie.

résultat

$$E = \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \quad u : f \longmapsto f', \quad \text{et} \quad v : f \longmapsto \left(x \longmapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right).$$

Exercice 18.7

Soit E un espace vectoriel. Soit $f \in \mathrm{L}(E)$.

1. Montrer que $\left(\mathrm{Im}(f^n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante pour l'inclusion.

2. Montrer que

$$\exists k_0 \in \mathbb{N} : \ \mathrm{Im}(f^{k_0}) = \mathrm{Im}(f^{k_0+1}) \quad \Longrightarrow \quad \forall k \geqslant k_0, \ \mathrm{Im}(f^k) = \mathrm{Im}(f^{k_0}).$$

3. Donner un espace E et un endomorphisme f dont la suite $\left(\mathrm{Im}(f^n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas stationnaire.

indication

1. Sans difficulté.
2. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}, \ \mathrm{Im}(f^{k_0+k+1}) = \mathrm{Im}(f^{k_0+k})$.
3. On peut par exemple se placer dans $E = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

Exercice 18.8

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $f \in \mathrm{L}(E)$.

- *On dit que f est une* homothétie *lorsque*

$$\exists \lambda \in \mathbb{K} : \quad \forall x \in E, \quad f(x) = \lambda x.$$

- *On dit que f est une* pseudo-homothétie *lorsque*

$$\forall x \in E, \quad \exists \lambda_x \in \mathbb{K} : \quad f(x) = \lambda_x x.$$

1. Montrer que

$$f \text{ est une homothétie} \quad \Longleftrightarrow \quad f \text{ est une pseudo-homothétie.}$$

2. Déterminer l'ensemble

$$\mathrm{C}(E) := \Big\{ u \in \mathrm{L}(E) \ \Big| \ \forall v \in \mathrm{L}(E), \ u \circ v = v \circ u \Big\}.$$

On pourra admettre que tout sous-espace vectoriel de E admet un supplémentaire.

indication

1. $\boxed{\Rightarrow}$ Sans difficulté.

$\boxed{\Leftarrow}$ On pourra considérer $x, y \in E \setminus \{0_E\}$ pour montrer que $\lambda_x = \lambda_y$. La disjonction de cas (x, y) libre et (x, y) liée peut aider.

2. Raisonner par analyse-synthèse. En se donnant $u \in \mathrm{C}(E)$, on peut considérer $x \neq 0_E$ et $D := \mathrm{Vect}(x)$. En notant S un supplémentaire de D, on peut considérer la projection sur D parallèlement à S, dans l'objectif de montrer que u est une pseudo-homothétie.

résultat

2. $\mathrm{C}(E) = \{\lambda \,\mathrm{Id}_E \ \mid \ \lambda \in \mathbb{K}\}$.