Intégration sur un segment

Propriétés de l'intégrale

QCOP INT.1

Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$.
Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux.

- Rappeler les propriétés de « croissance » et de « linéarité » de l'intégrale.
- Montrer que

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b \left|f(t)\right|\mathrm{d}t.$$

- On suppose f continue. Montrer que

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant |b-a| \sup_{t\in[a,b]} \left|f(t)\right|.$$

QCOP INT.2

Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$.

- Rappeler l'inégalité triangulaire intégrale pour une fonction réelle.
- Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ continue par morceaux, à valeurs complexes.
  - **(a)** Justifier l'existence de $\theta \in \mathbb{R}$ tel que

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \in \mathbb{R}.$$

  - **(b)** Montrer que l'inégalité triangulaire intégrale est vraie pour des fonctions à valeurs complexes.
- Montrer que $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to 0]{} 0$.

Théorème fondamental de l'analyse

QCOP INT.3

Soit I un intervalle (non vide et non réduit à un point) de $\mathbb{R}$.
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Soit $x_0 \in I$. On note $F_{x_0} : x \longmapsto \displaystyle\int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t$ lorsque cela a un sens.

- Si f est continue par morceaux sur I, que dire de la régularité de F_{x_0} ?
- Soit $a \in I$. On suppose f continue en a.
  Montrer que F_{x_0} est dérivable en a et que ${F_{x_0}}'(a) = f(a)$.
- Montrer que

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ continue sur } I \\ \forall (a,b)\in I^2,\ \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \end{array}\right\} \implies f = 0 \text{ sur } I.$$

QCOP INT.4

- Énoncer le théorème fondamental de l'analyse.
- Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction 2π-périodique.
  À l'aide de $x \longmapsto \displaystyle\int_x^{x+2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t$, montrer que

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad \int_a^{a+2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

QCOP INT.5

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$.

- Énoncer le théorème fondamental de l'analyse.
- Compléter et démontrer :

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ est ... sur } [a,b] \\ f \text{ est de signe ... sur } [a,b] \\ \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad f = 0 \text{ sur } [a,b],$$

  en étudiant la monotonie d'une fonction bien choisie.
- On suppose f de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$. Montrer que

$$\left|f(a)\right| + \sup_{t\in[a,b]} \left|f'(t)\right| = 0 \quad \Longrightarrow \quad f = 0 \text{ sur } [a,b].$$

Sommes de Riemann

QCOP INT.6

- Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$.
  Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ lipschitzienne.
  On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathrm{I}_n(f) := \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right).$$

  Montrer que

$$\mathrm{I}_n(f) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right).$$

- Montrer que $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \longrightarrow \frac{2}{\pi}$.

QCOP INT.7

- Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$.
  Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue.
  Montrer que

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \longrightarrow \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

- Montrer que $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \longrightarrow \ln(2)$.
- Déterminer $\lim \dfrac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n-1}}{n^{\frac{3}{2}}}$.