

Colle 11 • INDICATIONS Polynômes

Exercice 11.1

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme.

1. Soit $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ une racine complexe de P .
 - (a) Que dire de \bar{a} ?
 - (b) En déduire l'existence d'un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $Q | P$.
2. On suppose P non constant.
 - (a) Le polynôme P possède-t-il nécessairement une racine réelle ?
 - (b) Montrer que, si $\deg(P)$ est impair, alors P possède une racine réelle.

indication

1. (a) Le complexe \bar{a} est également racine de P . Écrire P sous forme développée.
(b) Le polynôme $(X - a)(X - \bar{a}) = X^2 - 2\Re(a)X + |a|^2$ est réel et divise P .
2. (a) Prendre $P = X^2 + 1$ n'admettant pas de racine réelle.
(b) Utiliser le théorème des valeurs intermédiaires.

Exercice 11.2

Soit $n \geq 3$. On pose :

$$A := X^n \quad \text{et} \quad B := X^3 + X^2 - 2X.$$

Déterminer le reste dans la division euclidienne de A par B .

indication

Commencer par écrire $B = X(X - 1)(X + 2)$ pour déterminer ses racines, puis évaluer la relation $A = BQ + R$ en 0, 1 et -2 , pour déterminer les coefficients de R (de degré 2 car B est de degré 3).

résultat

$$R = \frac{1 - (-2)^{n-1}}{3}X^2 + \frac{2 + (-2)^{n-1}}{3}X.$$

Exercice 11.3

Soit $P := X^3 + 3X^2 + 2X - 1$.

On note $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ses trois racines complexes.

Calculer $\sum_{\substack{1 \leq i, j \leq 3 \\ i \neq j}} \frac{\alpha_i}{\alpha_j}$.

indication

Justifier l'existence de la somme en remarquant que 0 n'est pas racine de P .

Multiplier la somme par $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ et exploiter les relations coefficients-racines.

résultat

$$\sum_{\substack{1 \leq i, j \leq 3 \\ i \neq j}} \frac{\alpha_i}{\alpha_j} = -9.$$

Exercice 11.4

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Soit $a \in \mathbb{K}$. Montrer que :

$$\left[\exists Q \in \mathbb{K}[X] : \begin{cases} P = (X - a)^3 Q \\ Q(a) \neq 0 \end{cases} \right] \iff \begin{cases} P(a) = P'(a) = P''(a) = 0 \\ P^{(3)}(a) \neq 0. \end{cases}$$

indication

⇒ Il s'agit de dériver trois fois $(X - a)^3 Q$ et d'évaluer chaque dérivée en a .

⇐ Écrire la division euclidienne par $(X - a)^3$ puis dériver.

Exercice 11.5

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \neq b$.

On suppose que :

- ♦ le reste de la division euclidienne de P par $X - a$ vaut 1;
- ♦ le reste de la division euclidienne de P par $X - b$ vaut -1.

Que vaut le reste de la division euclidienne de P par $(X - a)(X - b)$?

indication

On écrit $P = (X - a)Q_a + 1$, $P = (X - b)Q_b - 1$ et $P = (X - a)(X - b)Q + R$ en explicitant $R = \alpha X + \beta$ puis évaluer en a et b .

résultat

$$\text{Le reste vaut } \frac{2}{a - b}X - \frac{a + b}{a - b}.$$

Exercice 11.6

Montrer qu'il n'existe pas d'élément $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad P(t) = e^t.$$

indication

Raisonner par l'absurde et considérer un tel polynôme, puis distinguer deux cas :

- ◆ si $\deg(P)$ est impair, alors P admet une racine réelle (à comprendre et savoir démontrer), ce qui est impossible car l'exponentielle ne s'annule pas ;
- ◆ si $\deg(P)$ est pair, la contradiction vient de l'étude des limites en $+\infty$ et $-\infty$.

Exercice 11.7

Déterminer le noyau du morphisme d'anneaux

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P & \longmapsto & P(1 + \sqrt{2}) \end{array}$$

indication

- ◆ Déterminer un polynôme à coefficients entiers dont $1 + \sqrt{2}$ est racine (on peut éventuellement d'abord déterminer un polynôme dont $\sqrt{2}$ est racine).
- ◆ Utiliser le théorème de division euclidienne.

résultat

$$\text{Ker}(\varphi) = \{(X^2 - 2X - 1)Q ; Q \in \mathbb{Z}[X]\}.$$

Exercice 11.8

Soit $P := a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n \in \mathbb{C}[X]$.

1. Soit $r > 0$. Soit $k \in \mathbb{N}$. Calculer :

$$\int_0^{2\pi} P(re^{it}) e^{-ikt} dt.$$

2. On suppose qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad |P(z)| \leq M.$$

Montrer que P est constant.

indication

1. Calculer, pour $\ell \in \mathbb{Z}$, $\int_0^{2\pi} e^{i\ell t} dt$.

2. Utiliser l'inégalité triangulaire intégrale ($\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt$) et passer à la limite pour montrer que les a_k pour $k \geq 1$ sont nuls.

résultat

$$1. \int_0^{2\pi} P(re^{it}) e^{-ikt} dt = \begin{cases} 2\pi a_k r^k & \text{si } k \in \llbracket 0, n \rrbracket \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 11.9

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$.

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur P pour que l'application

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & P(z) \end{array}$$

soit surjective.

indication

- ◆ Si P est constant, l'application ne sera pas surjective.
- ◆ Si P est non constant, utiliser le théorème de D'Alembert-Gauss.

résultat

$$z \longmapsto P(z) \text{ est surjective} \iff P \text{ est non constant.}$$

Exercice 11.10

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts. Soient $y_1, \dots, y_n \in \mathbb{K}$.

Montrer qu'il existe un unique polynôme $L \in \mathbb{K}[X]$ tel que :

$$\begin{cases} \deg(L) = n - 1 \\ \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad L(x_k) = y_k. \end{cases}$$

indication

- ◆ Existence.
 - ◊ Commencer par considérer les polynômes $L_k := \prod_{j \neq k} \frac{X - x_k}{x_j - x_k}$ vérifiant :

$$\forall k, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad L_k(x_j) = \delta_j^k.$$
 - ◊ On peut ensuite poser $L := \sum_{k=1}^n y_k L_k$ et vérifier les conditions requises.
- ◆ Unicité. Prendre deux tels polynômes et vérifier qu'ils coïncident en n points.

Exercice 11.11

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient $P_0, \dots, P_n \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0_{\mathbb{K}[X]}\}$ tels que $0 \leq \deg(P_0) < \dots < \deg(P_n)$.

Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$. Montrer que :

$$\alpha_0 P_0 + \dots + \alpha_n P_n = 0_{\mathbb{K}[X]} \implies \alpha_0 = \dots = \alpha_n = 0.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $P \in \mathbb{K}_n[X]$. Montrer que $P = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(0)}{k!} X^k$.

indication

1. Pour montrer que $\alpha_n = 0$, prendre le degré de « $\alpha_1 P_1 + \cdots + \alpha_n P_n$ » et aboutir à une contradiction si $\alpha_n \neq 0$. Puis, raisonner par récurrence descendante.
2. La question précédente appliquée à $P_k = X^k$ justifie que l'on peut « identifier » les polynômes par leurs coefficients.

Écrire $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ et calculer les dérivées puis les évaluer en 0. L'identification (justifiée précédemment) permet de dire que :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad a_k = \frac{P^{(k)}(0)}{k!}.$$

Exercice 11.12

Définition. Idéal d'un anneau commutatif.

Soit $(A, +, \times)$ un anneau commutatif. Soit $\mathcal{I} \subset A$.

On dit que \mathcal{I} est un idéal de A lorsque :

- $(\mathcal{I}, +)$ est un sous-groupe de $(A, +)$;
- $\forall a \in A, \quad \forall x \in \mathcal{I}, \quad a \times x \in \mathcal{I}$.

Montrer que tout idéal de $\mathbb{K}[X]$ est de la forme

$$P_0 \mathbb{K}[X] := \{P_0 Q ; \quad Q \in \mathbb{K}[X]\}$$

où $P_0 \in \mathbb{K}[X]$.

indication

- ◆ Raisonner par double inclusion.
- ◆ On exploitera le théorème de division euclidienne.