

## Colle 6 • INDICATIONS

### Trigonométrie, Applications

#### Exercice 6.1

Résoudre sur  $[-\pi, \pi]$  l'inéquation :

$$\cos(3x) - \cos(2x) + \cos(x) > 0.$$

#### indication

À l'aide des formules de trigonométrie, montrer que l'inéquation est équivalente à  
 $\cos(2x)(2\cos(x) - 1) > 0$ ,  
puis faire un tableau de signes.

#### résultat

L'ensemble des solutions est  $\left] -\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{3} \right[ \cup \left] -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right[ \cup \left] \frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{4} \right[$ .

#### Exercice 6.2

Montrer que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad |\sin(x) - \sin(y)| \leq |x - y|.$$

#### indication

- ◆ On utilisera que  $|\sin(x)| \leq |x|$ .
- ◆  $\sin(p) - \sin(q) = \dots$

#### Exercice 6.3

Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |\sin(x)| \leq |x|.$$

#### indication

- ◆ Par étude de fonction, on montre que  $\sin(x) \leq x$ .
- ◆ On montre aussi que  $x \mapsto |\sin(x)|$  est paire.

## Exercice 6.4

1. (a) Montrer que :

$$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \quad \sin(x) \leqslant x \leqslant \tan(x).$$

(b) En déduire que  $\frac{\sin(x)}{x} \xrightarrow[x \rightarrow 0^+]{ } 1$ .

(c) Montrer que  $\frac{\sin(x)}{x} \xrightarrow[x \rightarrow 0^-]{ } 1$ .

2. Déterminer les limites en 0 des expressions :

$$\frac{1 - \cos(x)}{x^2} \quad \text{et} \quad \frac{1 - \cos(x)}{x \sin(x)}.$$

### indication

1. (a) On peut procéder par des études de fonctions.  
(b) Inverser l'inégalité puis diviser par  $\sin(x) \neq 0$ , puis appliquer le théorème d'encadrement.  
(c) Utiliser des arguments de parité pour montrer que ce qui précède fonctionne pour  $x \rightarrow 0^-$ .
2. Utiliser  $1 - \cos(x) = 2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$  et  $\sin(x) = 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right)$ .

### résultat

$$2. \quad \frac{1 - \cos(x)}{x^2} \xrightarrow[x \rightarrow 0]{ } \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \frac{1 - \cos(x)}{x \sin(x)} \xrightarrow[x \rightarrow 0]{ } \frac{1}{2}.$$

## Exercice 6.5

Justifier l'existence et déterminer, sur un domaine à préciser, la réciproque de

$$x \mapsto 8\sqrt[4]{2 \ln(x) + 1}.$$

## Exercice 6.6

On considère l'application

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2}\right). \end{cases}$$

L'application est-elle injective ? surjective ? Si oui, déterminer sa réciproque.

### résultat

L'application  $\varphi$  est bijective, de réciproque  $\varphi^{-1} : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (u, v) & \longmapsto \frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}. \end{cases}$

## Exercice 6.7

Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles.

Soit  $f : E \rightarrow F$ .

1. Montrer que :

$$\forall A, A' \in \mathcal{P}(E), \quad f[A \cup A'] = f[A] \cup f[A'].$$

2. (a) Montrer que :

$$\forall A, A' \in \mathcal{P}(E), \quad f[A \cap A'] \subset f[A] \cap f[A'].$$

(b) Montrer que l'inclusion réciproque est fausse en général.

(c) Montrer que l'inclusion réciproque est vraie si, et seulement si,  $f$  est injective.

## Exercice 6.8

Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles.

Soit  $f : E \rightarrow F$ .

1. Montrer que :

$$\forall A \in \mathcal{P}(E), \quad A \subset f^{(-1)}[f[A]].$$

2. Montrer que l'inclusion réciproque est fausse en général.

3. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur  $f$  pour qu'il y ait égalité.

indication

3. Appliquer l'égalité à  $A = \{x\}$  et  $A = \{y\}$  en supposant que  $f(x) = f(y)$ .

résultat

2.  $f : x \mapsto x^2$ ,  $A$  un singleton.

3.  $\left( \forall A \in \mathcal{P}(E), \quad A \subset f^{(-1)}[f[A]] \right) \iff f \text{ est injective.}$

## Exercice 6.9

On définit  $h : z \mapsto \frac{z - i}{z + i}$ .

1. Déterminer le domaine de définition de  $h$  que l'on notera  $\mathcal{D}_h$ .
2. Montrer que  $h : \mathcal{D}_h \rightarrow \mathcal{D}_{h^{-1}}$  est une bijection dont on explicitera la réciproque.  
*L'ensemble  $\mathcal{D}_{h^{-1}}$  désigne le domaine de définition de  $h^{-1}$ , qui est aussi à déterminer.*
3. Montrer que :

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}, \quad 1 - |h(z)|^2 = \frac{4 \operatorname{Im}(z)}{|z + i|^2}.$$

Que dire lorsque  $\operatorname{Im}(z) > 0$  ?

4. Montrer que :

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}, \quad \operatorname{Im}(h^{-1}(z)) = \frac{1 - |z|^2}{|1 - z|^2}.$$

Que dire lorsque  $|z| < 1$  ?

On définit les ensembles :

- $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 0\}$  le demi-plan de Poincaré ;
- $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$  le disque unité ouvert.

5. Que dire de  $h[\mathbb{H}]$  et de  $\mathbb{D}$  ?

*résultat*

On a  $h[\mathbb{H}] = \mathbb{D}$ .