

Colle 5

Nombres complexes

- Après votre colle, il vous est demandé de reprendre les exercices traités et de les rédiger sur feuille. Ce travail est à déposer dans la boîte en B013 avant vendredi midi.
- Vous trouverez le sujet et des indications sur la page ci-contre.



Exercice 5.1

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $t \in \mathbb{R}$ tel que $e^{it} \neq 1$.

Calculer la somme :

$$\sum_{k=1}^n \sin\left(kt + \frac{\pi}{4}\right).$$

Exercice 5.3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Déterminer les solutions dans \mathbb{C} de l'équation

$$(z+1)^n = (z-1)^n.$$

Exercice 5.5

Pour $z \in \mathbb{C} \setminus \{2\}$, on pose

$$h(z) := \frac{z+1}{z-2}.$$

Déterminer l'ensemble des nombres complexes

$z \in \mathbb{C}$ pour lesquels :

1. $|h(z)| = 1$;
2. $\Re(h(z)) = 0$.

Exercice 5.2

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$.

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $|z|$ pour que

$$\frac{1+z}{1-z} \in i\mathbb{R}.$$

Exercice 5.4

Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$. On définit :

$$a := e^{ix}, \quad b := e^{iy} \quad \text{et} \quad c := e^{iz}.$$

Exprimer, en fonction de x, y et z le module et un argument du nombre complexe

$$\frac{c^2 + ab}{ab}.$$

Exercice 5.6

Soient $a, b \in \mathbb{C}$.

1. Montrer que
$$|a-b|^2 \leq (1+|a|^2)(1+|b|^2).$$
2. Étudier le cas d'égalité.

Exercice 5.7 Noyaux de Dirichlet et de Féjer.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose, pour $t \in \mathbb{R}$,

$$D_n(t) := \sum_{k=-n}^n e^{ikt} \quad \text{et} \quad K_n(t) := \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} D_m(t).$$

1. Soit $t \in \mathbb{R}$ tel que $t \equiv 0 \pmod{2\pi}$. Calculer $D_n(t)$ et $K_n(t)$.
2. Soit $t \in \mathbb{R}$ tel que $t \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$. Montrer que

$$D_n(t) = \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

3. Soit $t \in \mathbb{R}$ tel que $t \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$.

- (a) Calculer $\sum_{m=0}^{n-1} e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)t}$.
- (b) En déduire $K_n(t)$.

Exercice 5.8

Soit $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. On définit

$$\Delta_\theta := \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \begin{cases} |z| < 1 \\ \exists \rho \in]0, \cos(\theta)[, \exists \varphi \in]-\theta, \theta[: z = 1 - \rho e^{i\varphi} \end{cases} \right\}.$$

1. Dessiner Δ_θ dans le plan complexe.
2. Montrer que

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad |z| < 1 \implies \frac{1}{1 - |z|} \leq \frac{2}{1 - |z|^2}.$$

3. Montrer que

$$\forall z \in \Delta_\theta, \quad \frac{|1 - z|}{1 - |z|} \leq \frac{2}{\cos(\theta)}.$$