Techniques algébriques

QCOP TALG.1

1. Définir $\binom{n}{k}$ pour $(n, k) \in \mathbb{N}^2$.

2. Énoncer et démontrer la formule du binôme de Newton.

3. Soient E et F deux ensembles finis.

a) Calculer $\operatorname{Card}\big(\mathscr{P}(E)\big)$.

b) Calculer $\operatorname{Card}\big(\mathscr{P}(E \times F)\big)$.

QCOP TALG.2

1. Donner la relation de Pascal.

2. Démontrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall k \in [\![0, n]\!], \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$.

Calculer le quotient $\dfrac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k+1}}$.

QCOP TALG.3

1. Énoncer et démontrer de manière combinatoire la formule du triangle de Pascal pour les coefficients binomiaux.

2. Soient $n, p \in \mathbb{N}$. On considère

$$\mathrm{S}_n := \sum_{k=0}^{n} \binom{p+k}{p}.$$

a) Représenter les termes de S_n sur le triangle de Pascal.

b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Simplifier

$$\binom{p+k+1}{p+1} - \binom{p+k}{p+1}.$$

c) Calculer S_n.

QCOP TALG.4 ★

1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Compléter et démontrer : $a^n - b^n = \cdots \sum_{k=\ldots}^{\ldots} \cdots$.

2. Soient $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$. On définit la fonction $P : x \longmapsto a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$.
Soit $c \in \mathbb{R}$ tel que $P(c) = 0$.
Montrer que

$$\exists b_0, b_1, b_2 \in \mathbb{R} : \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = (x-c)(b_0 + b_1 x + b_2 x^2).$$