# Applications linéaires

On désignera par $\mathbb{K}$ l'ensemble $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

## QCOP AL.1

Soient $E$ et $F$ deux espaces vectoriels. Soit $u \in \mathrm{L}(E, F)$.

- Donner une condition nécessaire et suffisante d'injectivité de $u$.
- On suppose $u$ injective. Soit $\mathscr{F}$ une famille libre $E$. Montrer que $u[\mathscr{F}]$ est libre dans $F$.
- Écrire la contraposée du résultat démontré.
- Le résultat est-il toujours vrai si $u$ n'est plus supposée injective ?

## QCOP AL.2

Soit $E$ un espace vectoriel. Soient $u, v \in \mathrm{L}(E)$.

- **(a)** Définir les ensembles $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$.
  **(b)** Quelle structure ont-ils par rapport à $E$ ?
- Soit $k \in \mathbb{N}$. Compléter par un symbole « $\subset$ » ou « $\supset$ » et démontrer les inclusions :

$$\begin{array}{c} \mathrm{Ker}(u^k) \cdots \mathrm{Ker}(u^{k+1}) \\ \mathrm{Im}(u^k) \cdots \mathrm{Im}(u^{k+1}). \end{array}$$

- Compléter par un symbole « $\subset$ » ou « $\supset$ » et démontrer les inclusions :

$$\begin{array}{c} \mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Ker}(v) \cdots \mathrm{Ker}(u+v) \\ \mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v) \cdots \mathrm{Im}(u+v). \end{array}$$

## QCOP AL.3

Soit $E$ un espace vectoriel. Soit $x \in E$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

- Compléter :

$$\lambda x = 0_E \iff \cdots.$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K}$. Soit $u \in \mathrm{L}(E)$. On note

$$P := \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \quad \text{et} \quad P(u) := \sum_{k=0}^{n} a_k u^k.$$

On suppose que $u(x) = \lambda x$.

**(a)** Justifier que $P(u) \in \mathrm{L}(E)$.

**(b)** Montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad u^k(x) = \lambda^k x.$$

**(c)** En déduire que

$$\big(P(u)\big)(x) = P(\lambda)x.$$

**(d)** On suppose $x \neq 0_E$. Que dire si $P(u) = 0_{\mathrm{L}(E)}$ ?

## QCOP AL.4

Soient $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Soit $u \in \mathrm{L}(E, F)$.

- Définir « $u$ est une application linéaire de $E$ dans $F$ ».
- Soient $x, y \in E$ avec $y \neq 0_E$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.
  Entourer les égalités vraies et rayer celles n'ayant pas de sens.

$$u(0_E) = 0_F \quad u^2(x) = u(x)^2 \quad u(\lambda y + x) = \lambda u(y) + u(x) \quad u(xy) = u(x)u(y).$$

- Que dire d'une application linéaire constante ?

## QCOP AL.5

Soit $E$ un espace vectoriel. Soient $F$ et $G$ deux sous-espaces vectoriels de $E$ tels que

$$E = F \oplus G.$$

On note $\mathrm{p}$ le projecteur sur $F$ parallèlement à $G$.

- Définir l'application $\mathrm{p}$.
- Montrer que $\mathrm{p} \circ \mathrm{p} = \mathrm{p}$.
- Montrer que $E = \mathrm{Ker}(\mathrm{p}) \oplus \mathrm{Im}(\mathrm{p})$.
- **(a)** L'application $-\mathrm{p}$ est-elle un projecteur de $E$ ?

  **(b)** L'ensemble des projecteurs de $E$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathrm{L}(E)$ ?

## QCOP AL.6

Soit $E$ un espace vectoriel. Soient $F$ et $G$ deux sous-espaces vectoriels de $E$ tels que

$$E = F \oplus G.$$

On note $\mathrm{s}$ la symétrie par rapport à $F$ parallèlement à $G$.

- Définir l'application $\mathrm{s}$.
- Montrer que $\mathrm{s} \circ \mathrm{s} = \mathrm{Id}_E$.
- Montrer que $E = \mathrm{Ker}(\mathrm{s} - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(\mathrm{s} + \mathrm{Id}_E)$.
- **(a)** L'application $0_{\mathrm{L}(E)}$ est-elle une symétrie de $E$ ?

  **(b)** L'ensemble des symétries de $E$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathrm{L}(E)$ ?

## QCOP AL.7

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $H \subset E$.

- Donner la définition de « $H$ est un hyperplan de $E$ ».
- Soit $\varphi \in \mathrm{L}(E, \mathbb{K})$. Montrer que $\mathrm{Ker}(\varphi)$ est un sous-espace vectoriel de $E$.
- Soient $H_1$ et $H_2$ deux hyperplans de $E$. Quelle structure a l'ensemble $H_1 \cap H_2$ par rapport à $E$ ?
- Montrer que les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels d'espaces vectoriels que l'on précisera.

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x + y = 0\right\}, \quad \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 3x + 2y = 0 \end{cases}\right\},$$
$$\left\{(u_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \;\middle|\; u_n \longrightarrow 0\right\}, \quad \left\{M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \;\middle|\; \mathrm{Tr}(M) = 0\right\}.$$