William GREGORY

Colle 18

Applications linéaires

- Après votre colle, il vous est demandé de reprendre les exercices traités et de les rédiger sur feuille. Ce travail est à déposer dans la boîte en B013 avant mardi prochain.
- Vous trouverez le sujet et des indications sur la page ci-contre.

Exercice 18.1

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
Soit $u \in \mathrm{L}(E)$ tel que

$$u^2 - 3u - 10\,\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}.$$

1. Montrer que u est bijectif et exprimer u^{-1} en fonction de u.

2. Montrer que

$$E = \mathrm{Ker}(u + 2\,\mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(u - 5\,\mathrm{Id}_E).$$

Exercice 18.2

Soit E un espace vectoriel. Soient $f, g \in \mathrm{L}(E)$ tels que $f \circ g = \mathrm{Id}_E$.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(g \circ f) = \mathrm{Ker}(f)$.

2. Montrer que $\mathrm{Im}(g \circ f) = \mathrm{Im}(g)$.

3. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(g)$.

Exercice 18.3

On considère

$$\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[\mathrm{X}] & \longrightarrow & \mathbb{R}[\mathrm{X}] \\ P & \longmapsto & P(\mathrm{X}^2) + (1 + \mathrm{X}^2)P(\mathrm{X}). \end{array} \right.$$

1. Montrer que φ est une application linéaire.

2. Montrer que φ est injective.

3. L'application φ est-elle surjective ?

Exercice 18.4

On note $\mathscr{P}$ l'ensemble des fonctions paires de $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\mathscr{I}$ l'ensemble des fonctions impaires de $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

1. Montrer que $\mathscr{P}$ et $\mathscr{I}$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

2. Déterminer le projeté de $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ sur $\mathscr{P}$ parallèlement à $\mathscr{I}$.

Exercice 18.5

Soit E un espace vectoriel. Soit $f \in \mathrm{L}(E)$.

1. Montrer que

$$\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f) = \{0_E\} \iff \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2).$$

2. Montrer que

$$\mathrm{Im}(f) + \mathrm{Ker}(f) = E \iff \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2).$$

Exercice 18.6

Trouver un espace vectoriel E et deux endomorphismes $u, v \in \mathrm{L}(E)$ tels que

$$u \circ v = \mathrm{Id}_E \quad \text{et} \quad v \circ u \neq \mathrm{Id}_E\,.$$

Exercice 18.7

Soit E un espace vectoriel. Soit $f \in \mathrm{L}(E)$.

1. Montrer que $\left(\mathrm{Im}(f^n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante pour l'inclusion.

2. Montrer que

$$\exists k_0 \in \mathbb{N} : \quad \mathrm{Im}(f^{k_0}) = \mathrm{Im}(f^{k_0+1}) \qquad \Longrightarrow \qquad \forall k \geqslant k_0,\ \ \mathrm{Im}(f^k) = \mathrm{Im}(f^{k_0}).$$

3. Donner un espace E et un endomorphisme f dont la suite $\left(\mathrm{Im}(f^n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas stationnaire.

Exercice 18.8

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $f \in \mathrm{L}(E)$.

> - *On dit que f est une* homothétie *lorsque*
>
> $$\exists \lambda \in \mathbb{K} : \quad \forall x \in E, \quad f(x) = \lambda x.$$
>
> - *On dit que f est une* pseudo-homothétie *lorsque*
>
> $$\forall x \in E, \quad \exists \lambda_x \in \mathbb{K} : \quad f(x) = \lambda_x x.$$

1. Montrer que

$$f \text{ est une homothétie} \qquad \Longleftrightarrow \qquad f \text{ est une pseudo-homothétie.}$$

2. Déterminer l'ensemble

$$\mathrm{C}(E) := \left\{ u \in \mathrm{L}(E) \ \middle|\ \forall v \in \mathrm{L}(E),\ \ u \circ v = v \circ u \right\}.$$

On pourra admettre que tout sous-espace vectoriel de E admet un supplémentaire.