

Colle 9

Fonctions

- Après votre colle, il vous est demandé de reprendre les exercices traités et de les rédiger sur feuille. Ce travail est à déposer dans la boîte en B013 avant mercredi prochain.
- Vous trouverez le sujet et des indications sur la page ci-contre.



Exercice 9.1

1. Montrer que :

$$\forall x > -1, \quad \ln(1+x) \leq x.$$

2. Montrer que :

$$\forall n \geq 2, \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}.$$

Exercice 9.4

Soient $\alpha, \beta > 0$. Soient $C_1, C_2 > 0$.

On considère :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow \mathbb{R} \\ R & \longmapsto \frac{C_1}{R^\alpha} + C_2 R^\beta. \end{cases}$$

1. Montrer que f admet un minimum atteint en un réel $R_0 > 0$ et calculer $f(R_0)$.

2. (a) Déterminer $R_1 > 0$ tel que :

$$\frac{C_1}{R_1^\alpha} = C_2 R_1^\beta.$$

(b) Que dire de R_0 et R_1 ? de $f(R_0)$ et $f(R_1)$?

Exercice 9.2

Montrer que :

$$\forall x \geq 0, \quad \sinh(x) \geq x.$$

Exercice 9.3

Montrer que :

$$\forall t > -1, \quad \frac{t}{1+t} \leq \ln(1+t) \leq t.$$

Exercice 9.5

Soient $p, q \in]1, +\infty[$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Soient $a, b > 0$.

1. Montrer que :

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

2. On considère

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow \mathbb{R} \\ \varepsilon & \longmapsto \frac{\varepsilon^p a^p}{p} + \frac{b^q}{\varepsilon^q q} \end{cases}$$

(a) Montrer que :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad ab \leq f(\varepsilon)$$

(b) Montrer que f admet un minimum et le déterminer.

3. Montrer que :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists C_{\varepsilon,p} > 0 : ab \leq \varepsilon a^p + C_{\varepsilon,p} b^q.$$

Exercice 9.6

Soit $x \in \mathbb{R}$.

Calculer les limites lorsque $n \rightarrow +\infty$ de :

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \quad \text{et} \quad \left(1 + \frac{x}{n^2}\right)^n.$$

Exercice 9.7

Résoudre sur \mathbb{R}^2 le système d'équations

$$\begin{cases} e^y + ye^x = 0 \\ xe^y + e^x = 0. \end{cases}$$

Exercice 9.8

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $x_1, \dots, x_n > 0$.

Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_n > 0$. On pose $\alpha := \alpha_1 + \dots + \alpha_n$.

Montrer que :

$$\frac{1}{\frac{1}{\alpha} \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k}{x_k}} \leq \sqrt[\alpha]{\prod_{k=1}^n x_k^{\alpha_k}} \leq \frac{1}{\alpha} \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k.$$

Exercice 9.9

Soit $p \geq 2$.

1. À l'aide de la fonction $t \mapsto (t^2 + 1)^{\frac{p}{2}} - t^p - 1$, montrer que :

$$\forall x, y \geq 0, \quad x^p + y^p \leq (x^2 + y^2)^{\frac{p}{2}}.$$

2. Montrer que :

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad (a^2 + b^2)^{\frac{p}{2}} \leq 2^{\frac{p}{2}-1} (|a|^p + |b|^p).$$

3. Conclure que :

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad \left| \frac{a+b}{2} \right|^p + \left| \frac{a-b}{2} \right|^p \leq \frac{|a|^p + |b|^p}{2}.$$

Exercice 9.10

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $B_n(f) := \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) B_n^k$ où

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \forall x \in [0, 1], \quad B_n^k(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

1. Montrer que $B_1(f)$ et $B_2(f)$ sont convexes.

2. Soit $n \geq 3$.

(a) Montrer que :

$$\forall x \in [0, 1], \quad B_n(f)''(x) = n(n-1) \sum_{k=0}^{n-2} \left[f\left(\frac{k+2}{n}\right) - 2f\left(\frac{k+1}{n}\right) + f\left(\frac{k}{n}\right) \right] B_{n-2}^k(x).$$

(b) En déduire que $B_n(f)$ est convexe.