Fonctions trigonométriques réciproques

Autour de arccos, arcsin et arctan

QCOP TRGREC.1

- Définir les fonctions arccos et arcsin.
- Soient $A, B, \omega \in \mathbb{R}$. On définit

$$y : t \longmapsto A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t).$$

(a) Calculer, pour $t \in \mathbb{R}$, $y''(t) + \omega^2 y(t)$.

(b) Déterminer $K, \varphi \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y(t) = K\cos(\omega t + \varphi).$$

QCOP TRGREC.2

- Donner les graphes des fonctions arcsin et arccos.
- Montrer que

$$\forall x \in [-1, 1], \quad \arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2},$$

sans utiliser la dérivation.

- Montrer que arcsin est impaire.
- Montrer que

$$\forall x \in [-1, 1], \quad \arccos(x) + \arccos(-x) = \pi.$$

QCOP TRGREC.3

- Définir les fonctions tan et arctan et donner leur courbe représentative.
- Soit $z \in \mathbb{C}$ que l'on écrit $z = a + ib$, avec $a, b \in \mathbb{R}$.
  On note θ l'argument principal de z.

(a) Déterminer θ lorsque $a = 0$.

(b) Montrer que, si $a > 0$,

$$\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right).$$

(c) Montrer que, si $a < 0$,

$$\theta = \begin{cases} \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \pi & \text{si} \quad b > 0 \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) - \pi & \text{si} \quad b \leqslant 0 \end{cases}$$

QCOP TRGREC.4

- Soient $x, \theta \in \mathbb{R}$. Compléter :

$$\theta = \arctan(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \theta \in \cdots \\ x = \cdots . \end{cases}$$

- Donner le domaine de définition de la fonction tan.
- Rappeler l'expression de $\tan(a + b)$ pour $a, b \in \mathbb{R}$.
- Soit $x \in \mathbb{R}^*$.

(a) Montrer que $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ n'admet pas de tangente.

(b) En déduire que

$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \text{signe}(x)\frac{\pi}{2}.$$

Utilisation de la dérivée de la réciproque

QCOP TRGREC.5

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \longrightarrow J$ une bijection dérivable. Soit $y \in J$.

(a) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f^{-1} soit dérivable en y.

(b) Donner, dans ce cas, l'expression de $\left(f^{-1}\right)'(y)$.

Montrer que

$$\forall x \in [-1, 1], \quad \cos\Big(\arcsin(x)\Big) = \sqrt{1 - x^2}.$$

Montrer que arcsin est dérivable sur $]-1, 1[$ et que

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

à l'aide de la formule de la dérivée de la bijection réciproque.

QCOP TRGREC.6

Définir la fonction arctan.

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \longrightarrow J$ une bijection dérivable. Soit $y \in J$. Montrer que

$$f^{-1} \text{ est dérivable en } y \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} f'\Big(f^{-1}(y)\Big) \neq 0 \\ \left(f^{-1}\right)'(y) = \dfrac{1}{f'\Big(f^{-1}(y)\Big)}. \end{cases}$$

Montrer que arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \arctan'(x) = \frac{1}{1 + x^2}.$$