

Logique, raisonnements

QCOP LGQ.1



1. Expliquer le principe du raisonnement par contraposée.
2. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \text{ est pair} \iff n^2 \text{ est pair.}$$

3. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{n(n^2 + 1)}{2} \in \mathbb{N}.$$

QCOP LGQ.2



1. Expliquer le principe du raisonnement par l'absurde.
2. Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.
3. a) Montrer que

$$\forall a, b \in \mathbb{Q}, \quad a + b\sqrt{2} = 0 \implies a = b = 0.$$

- b) Montrer que

$$\forall a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{Q}, \quad a_1 + b_1\sqrt{2} = a_2 + b_2\sqrt{2} \implies \begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 = b_2. \end{cases}$$

QCOP LGQ.3



1. Soit $D \subset \mathbb{R}$. Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$.
Donner la définition de « la fonction f est strictement croissante sur le domaine D ».
2. Montrer que la fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.
3. On admet que

$$\forall x \in]-1, +\infty[, \quad \ln(1+x) \leq x.$$

Comparer les nombres

$$\frac{1}{\sqrt{\ln(2)}} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

QCOP LGQ.4



1. Comment peut-on montrer une inégalité ?
2. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad x + \frac{1}{x} \geq 2.$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$.

Minorer la somme

$$\sum_{i=1}^n \frac{x_i^2 + 1}{x_i}.$$

QCOP LGQ.5

1. Énoncer le principe de récurrence simple.
2. Soit $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Soit $m \in \mathbb{N}$.
Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq m \implies \sum_{k=m}^n a^k = \frac{a^m - a^{n+1}}{1 - a}.$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la somme

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^n}$$

et faire tendre n vers $+\infty$.

QCOP LGQ.6

1. Expliquer le principe du raisonnement par analyse-synthèse.
2. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.
Montrer qu'il existe $f_p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ paire et $f_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ impaire telles que
$$f = f_p + f_i.$$

3. On considère

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \exp(x). \end{cases}$$

Déterminer les fonctions f_p et f_i .

QCOP LGQ.7 ★

1. Comment montrer l'unicité d'un objet dont on a établi l'existence ?
2. Montrer l'unicité dans le théorème de division euclidienne dans \mathbb{Z} .
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $a, b \in \mathbb{Z}$.
Montrer que

$$a \equiv b [n] \\ \iff$$

a et b ont le même reste dans la division euclidienne par n .

QCOP LGQ.8

1. Comment montrer et comment utiliser une assertion débutant par un « \forall » ?

Soit $a \in \mathbb{R}$. On note les assertions suivantes :

$$(M_a) \quad \forall \varepsilon > 0, \quad |a| \leq \varepsilon;$$

$$(Z_a) \quad a = 0.$$

2. Montrer que

$$(M_a) \iff (Z_a).$$

3. On considère « $(M_a) \implies (Z_a)$ ».

- a) Écrire la négation de cette implication.
- b) Écrire cette implication comme un « OU ».

QCOP LGQ.9

1. Comment montrer l'existence d'un objet ?
2. Soient $x, y \in \mathbb{R}$.
 - a) Montrer qu'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que
$$x < t < y.$$
 - b) Montrer qu'il existe $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ tels que
$$x < t_1 < t_2 < y.$$