

# Déterminants

## QCOP DET.1

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

☐ Soient  $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ . Que vaut  $\det(AB)$  ?

*Les questions qui suivent sont indépendantes.*

✂ Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$ . Montrer que

$$\det(AA^\top) \geq 0.$$

✂ Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$ . Montrer que

$$(\exists k \in \mathbb{N}^* : A^k = 0_n) \implies \det(A) = 0.$$

✂ Montrer que

$$SL_n(\mathbb{R}) := \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\}$$

est un sous-groupe de  $GL_n(\mathbb{R})$ .

## QCOP DET.4

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Soient  $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ .

✂ Montrer que

$$A \text{ et } B \text{ sont semblables} \implies \det(A) = \det(B).$$

🔗 L'implication réciproque est-elle vraie en général ?

🔗 Le résultat subsiste-t-il pour  $A$  et  $B$  supposées seulement équivalentes ?

✂ Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie. Soit  $u \in L(E)$ . Définir  $\det(u)$ .

## QCOP DET.2

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Soit  $A \in M_n(\mathbb{C})$ .

☐ Définir la comatrice de  $A$ , notée  $\text{Com}(A)$ .

☐ Énoncer la formule reliant  $A$  à  $\text{Com}(A)$  et l'écrire dans le cas où  $A$  est inversible.

✂ On se place dans le cas  $n = 2$  et  $A$  inversible. Déterminer  $A^{-1}$  en fonction des coefficients de  $A$ .

## QCOP DET.3

Soient  $n, p \in \mathbb{N}$ . Soient  $A \in M_n(\mathbb{C})$ ,  $B \in M_{n,p}(\mathbb{C})$  et  $C \in M_p(\mathbb{C})$ .

✂ (a) Calculer

$$\det \begin{pmatrix} I_n & B \\ 0_{p,n} & C \end{pmatrix} \text{ et } \det \begin{pmatrix} A & 0_{n,p} \\ 0_{p,n} & I_p \end{pmatrix}.$$

(b) En déduire  $\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0_{p,n} & C \end{pmatrix}$ .

✂ Généraliser : calculer le déterminant d'une matrice triangulaire par blocs.

### QCOP DET.5

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Soient  $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ .

On note, pour  $M \in M_n(\mathbb{C})$ ,  $\chi_M : x \mapsto \det(xI_n - M)$ .

☐ Énoncer la formule donnant  $\det(A)$  en fonction des coefficients de  $A$ .

✂ (a) Justifier que  $\chi_A$  est une fonction polynomiale de degré  $n$ .

*Ceci étant justifié, on note désormais  $\chi_A$  le polynôme de  $\mathbb{R}[X]$  dont  $\chi_A$  est la fonction polynomiale associée.*

(b) Montrer que

$$\chi_A = X^n - \text{Tr}(A)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(A).$$

✂ Montrer que

$$A \text{ et } B \text{ sont semblables} \implies \chi_A = \chi_B.$$

✂ On se place dans le cas  $n = 2$ .

(a) Exprimer  $\chi_A$  en fonction de  $\text{Tr}(A)$  et  $\det(A)$ .

(b) Montrer que  $\chi_A(A) = 0_2$ .

*On fera particulièrement attention au « type » des objets écrits et manipulés.*