Logique, raisonnements

QCOP LGQ.1

- Expliquer le principe du raisonnement par contraposée.
- Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \text{ est pair} \quad \Longleftrightarrow \quad n^2 \text{ est pair.}$$

- Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{n(n^2+1)}{2} \in \mathbb{N}.$$

QCOP LGQ.2

- Expliquer le principe du raisonnement par l'absurde.
- Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.
- **(a)** Montrer que

$$\forall a, b \in \mathbb{Q}, \quad a + b\sqrt{2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad a = b = 0.$$

  (b) Montrer que

$$\forall a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{Q}, \quad a_1 + b_1\sqrt{2} = a_2 + b_2\sqrt{2} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 = b_2. \end{cases}$$

QCOP LGQ.3

- Donner la définition de « la fonction f est strictement croissante sur le domaine D ».
- Montrer que la fonction racine carrée est strictement croissante sur son ensemble de définition.
- On admet que

$$\forall x \in \left]-1, +\infty\right[, \quad \ln(1+x) \leqslant x.$$

  Comparer les nombres

$$\frac{1}{\sqrt{\ln(2)}} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

QCOP LGQ.4

- Comment peut-on montrer une inégalité ?
- Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad x + \frac{1}{x} \geqslant 2.$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$. Minorer la somme

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{{x_i}^2 + 1}{x_i}.$$

QCOP LGQ.5

Énoncer le principe de récurrence simple.

Soit $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Soit $m \in \mathbb{N}$.
Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant m \implies \sum_{k=m}^{n} a^k = \frac{a^m - a^{n+1}}{1-a}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la somme

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^n}$$

et faire tendre n vers $+\infty$.

QCOP LGQ.6

Expliquer le principe du raisonnement par analyse-synthèse.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction.
Montrer qu'il existe $f_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ paire et $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ impaire telles que

$$f = f_p + f_i.$$

On considère

$$f : \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \exp(x). \end{array} \right.$$

Déterminer les fonctions f_p et f_i.

QCOP LGQ.7

Comment montrer l'unicité d'un objet dont on a établi l'existence ?

Montrer l'unicité dans le théorème de division euclidienne dans $\mathbb{Z}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $a, b \in \mathbb{Z}$.
Montrer que

$$a \equiv b \ [n]$$

$$\Updownarrow$$

a et b ont le même reste dans la division euclidienne par n.

QCOP LGQ.8

Comment montrer un « $\forall$ » ?
Comment utiliser un « $\forall$ » ?

Soit $a \in \mathbb{R}$. On note les assertions suivantes :

$$\begin{array}{ll} (M_a) & \forall \varepsilon > 0, \ |a| \leqslant \varepsilon \\ (Z_a) & a = 0. \end{array}$$

Montrer que

$$(M_a) \iff (Z_a).$$

On considère « $(M_a) \implies (Z_a)$ ».

(a) Écrire la négation de cette implication.

(b) Écrire cette implication comme un « OU ».

QCOP LGQ.9

Comment montrer l'existence d'un objet ?

Soient $x, y \in \mathbb{R}$.

(a) Montrer qu'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que

$$x < t < y.$$

(b) Montrer qu'il existe $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ tels que

$$x < t_1 < t_2 < y.$$