Anneaux et corps

QCOP ANN.1

Soit $(A, +_A, \times_A)$ un anneau.

- Définir l'ensemble des inversibles de A, que l'on notera $A^\times$.
- Montrer que $\left(A^\times, \times_A\right)$ est un groupe.
- **(a)** Établir, à l'aide d'inégalités, que $\mathbb{Z}^\times = \{-1, 1\}$.
  (b) En déduire que $\left(\{-1, 1\}, \times\right)$ est un groupe.

QCOP ANN.2

Soit A un anneau.

- Soient $a, b \in A$ tels que $ab = ba$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}.$$

- Soit $u \in A$ tel qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^n = 0_A$.
  Montrer que $1 - u$ est inversible dans A.

QCOP ANN.3

Soient $(A, +_A, \times_A, 0_A, 1_A)$ et $(B, +_B, \times_B, 0_B, 1_B)$ deux anneaux. On note $P := A \times B$.

- Définir le groupe produit $(P, +_P, 0_P)$ où $+_B$ et 0_P sont à préciser.

On note

$$\times_P : \left| \begin{array}{rcl} P^2 & \longrightarrow & P \\ \big((x, y), (x', y')\big) & \longmapsto & (xx', yy'). \end{array} \right.$$

- **(a)** Justifier que $\times_P$ permet à $(P, +_P, \times_P, 0_P, 1_P)$ d'être un anneau. Préciser 1_P.
  (b) Montrer que $P^\times = A^\times \times B^\times$.
- Déterminer $\left(\mathbb{Z}^2\right)^\times$, en admettant que $\mathbb{Z}^\times = \{-1, 1\}$.