

Colle 6 • INDICATIONS

Trigonométrie, Applications

Exercice 6.1

Résoudre sur $[-\pi, \pi]$ l'inéquation :

$$\cos(3x) - \cos(2x) + \cos(x) > 0.$$

indication

À l'aide des formules de trigonométrie, montrer que l'inéquation est équivalente à
 $\cos(2x)(2\cos(x) - 1) > 0$,
puis faire un tableau de signes.

résultat

L'ensemble des solutions est $\left] -\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{3} \right[\cup \left] -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right[\cup \left] \frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{4} \right[$.

Exercice 6.2

Montrer que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad |\sin(x) - \sin(y)| \leq |x - y|.$$

indication

- ♦ On utilisera que $|\sin(x)| \leq |x|$.
- ♦ $\sin(p) - \sin(q) = \dots$.

Exercice 6.3

Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |\sin(x)| \leq |x|.$$

indication

- ♦ Par étude de fonction, on montre que $\sin(x) \leq x$.
- ♦ On montre aussi que $x \mapsto |\sin(x)|$ est paire.

Exercice 6.4

1. (a) Montrer que :

$$\forall x \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[, \quad \sin(x) \leq x \leq \tan(x).$$

(b) En déduire que $\frac{\sin(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 1$.

(c) Montrer que $\frac{\sin(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$.

2. Déterminer les limites en 0 des expressions :

$$\frac{1 - \cos(x)}{x^2} \quad \text{et} \quad \frac{1 - \cos(x)}{x \sin(x)}.$$

indication

1. (a) On peut procéder par des études de fonctions.

(b) Inverser l'inégalité puis diviser par $\sin(x) \neq 0$, puis appliquer le théorème d'encadrement.

(c) Utiliser des arguments de parité pour montrer que ce qui précède fonctionne pour $x \rightarrow 0^-$.

2. Utiliser $1 - \cos(x) = 2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$ et $\sin(x) = 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right)$.

résultat

$$2. \quad \frac{1 - \cos(x)}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \frac{1 - \cos(x)}{x \sin(x)} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{2}.$$

Exercice 6.5

Justifier l'existence et déterminer, sur un domaine à préciser, la réciproque de

$$x \mapsto 8\sqrt[4]{2 \ln(x) + 1}.$$

Exercice 6.6

On considère l'application

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \longmapsto \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2} \right). \end{cases}$$

L'application est-elle injective ? surjective ? Si oui, déterminer sa réciproque.

résultat

$$\text{L'application } \varphi \text{ est bijective, de réciproque } \varphi^{-1} : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (u, v) \longmapsto \frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}. \end{cases}$$

Exercice 6.7

Soient E et F deux ensembles.

Soit $f : E \longrightarrow F$.

1. Montrer que :

$$\forall A, A' \in \mathcal{P}(E), \quad f[A \cup A'] = f[A] \cup f[A'].$$

2. (a) Montrer que :

$$\forall A, A' \in \mathcal{P}(E), \quad f[A \cap A'] \subset f[A] \cap f[A'].$$

(b) Montrer que l'inclusion réciproque est fausse en général.

(c) Montrer que l'inclusion réciproque est vraie si, et seulement si, f est injective.

Exercice 6.8

Soient E et F deux ensembles.

Soit $f : E \longrightarrow F$.

1. Montrer que :

$$\forall A \in \mathcal{P}(E), \quad A \subset f^{(-1)}[f[A]].$$

2. Montrer que l'inclusion réciproque est fausse en général.

3. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur f pour qu'il y ait égalité.

indication

3. Appliquer l'égalité à $A = \{x\}$ et $A = \{y\}$ en supposant que $f(x) = f(y)$.

résultat

2. $f : x \mapsto x^2$, A un singleton.

3. $\left(\forall A \in \mathcal{P}(E), \quad A \subset f^{(-1)}[f[A]] \right) \iff f \text{ est injective.}$

Exercice 6.9

On définit $h : z \mapsto \frac{z - i}{z + i}$.

1. Déterminer le domaine de définition de h que l'on notera \mathcal{D}_h .
2. Montrer que $h : \mathcal{D}_h \longrightarrow \mathcal{D}_{h^{-1}}$ est une bijection dont on explicitera la réciproque.
L'ensemble $\mathcal{D}_{h^{-1}}$ désigne le domaine de définition de h^{-1} , qui est aussi à déterminer.
3. Montrer que :

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}, \quad 1 - |h(z)|^2 = \frac{4 \Im(z)}{|z + i|^2}.$$

Que dire lorsque $\Im(z) > 0$?

4. Montrer que :

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}, \quad \Im(h^{-1}(z)) = \frac{1 - |z|^2}{|1 - z|^2}.$$

Que dire lorsque $|z| < 1$?

On définit les ensembles :

- $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) > 0\}$ le demi-plan de Poincaré ;
- $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ le disque unité ouvert.

5. Que dire de $h[\mathbb{H}]$ et de \mathbb{D} ?

résultat

On a $h[\mathbb{H}] = \mathbb{D}$.