Formules de Taylor

QCOP TAYL.1

- Énoncer la formule de Taylor avec reste intégral.
- Énoncer et démontrer l'inégalité de Taylor-Lagrange.
- Soit $x \in \mathbb{R}$.

  (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$\left| \mathrm{e}^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \leqslant \max(\mathrm{e}^x, 1) \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

  (b) En déduire que

$$\mathrm{e}^x = \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!}.$$

QCOP TAYL.2

- Énoncer et démontrer la formule de Taylor avec reste intégral.
- Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

  (a) Montrer que

$$\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \mathrm{e}^t \frac{(x-t)^n}{n!} \,\mathrm{d}t.$$

  (b) En déduire que

$$\mathrm{e}^x \geqslant 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!}.$$

QCOP TAYL.3

- Énoncer et démontrer la formule de Taylor avec reste intégral.
- Soit $g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$.
  Montrer que

$$\forall x \geqslant 0, \quad g(x) = g(1) + g'(1)(x-1) + (x-1)^2 \int_0^1 g''\big(1 + (x-1)u\big)(1-u) \,\mathrm{d}u.$$

QCOP TAYL.4

- Énoncer et démontrer la formule de Taylor pour les polynômes.
- Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. Soit $P \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.
  Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\left(\exists Q \in \mathbb{R}_{n-2}[\mathrm{X}] : \quad \begin{cases} Q(a) \neq 0 \\ P = (\mathrm{X}-a)^2 Q \end{cases} \right) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} P(a) = P'(a) = 0 \\ P''(a) \neq 0. \end{cases}$$