Trigonométrie

Généralités

QCOP TRG.1

1. Définir la relation de congruence modulo 2π.
2. Soient $x, x', y, y' \in \mathbb{R}$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

   a) Montrer que
   $$\left.\begin{array}{l} x \equiv x' \ [2\pi] \\ y \equiv y' \ [2\pi] \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad x + y \equiv x' + y' \ [2\pi] .$$

   b) Montrer que
   $$x \equiv y \ [2\pi] \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{x}{\lambda} \equiv \frac{y}{\lambda} \ \left[\frac{2\pi}{\lambda}\right] \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda x \equiv \lambda y \ [2\pi] .$$

3. Trouver quatre réels x, x', y, y' tels que
$$\begin{cases} x \equiv x' \ [2\pi] \\ y \equiv y' \ [2\pi] \end{cases} \quad \text{mais} \quad xy \not\equiv x'y' \ [2\pi].$$

QCOP TRG.2 ★

1. Définir le cercle trigonométrique, ainsi que $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$ pour $\theta \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que sin est une fonction impaire.
3. Montrer que
$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \left|\sin(\theta)\right| \leqslant 1.$$
4. a) Montrer que
   $$\forall \theta \in [1, +\infty[, \quad \sin(\theta) \leqslant \theta.$$

   b) Montrer, à l'aide d'une étude de fonction, que
   $$\forall \theta \in [0, 1], \quad \sin(\theta) \leqslant x.$$

   c) Montrer que $\theta \mapsto \left|\sin(\theta)\right|$ est une fonction paire.

   d) En déduire que
   $$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \left|\sin(\theta)\right| \leqslant |\theta|.$$

Formules de trigonométrie

QCOP TRG.3

1. Soient $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$. Écrire les formules donnant $\cos(\theta+\theta')$, $\sin(\theta+\theta')$ et $\cos(2\theta)$.

2. Calculer, pour $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$, $\tan(\theta+\theta')$, puis $\tan(2\theta)$.

3. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On pose $t := \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$. Montrer que

$$\cos(\theta) = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin(\theta) = \frac{2t}{1+t^2} \quad \text{et} \quad \tan(\theta) = \frac{2t}{1-t^2}.$$

QCOP TRG.4

1. Soient $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$. Écrire les formules donnant $\cos(\theta+\theta')$ et $\cos(\theta-\theta')$.

2. Soient $p, q \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right).$$

3. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$.
On pose $\mathrm{X} := \cos(\theta)$. On définit $\mathrm{T}_n\big(\cos(\theta)\big) := \cos(n\theta)$.
Montrer que $\mathrm{T}_{n+2}(\mathrm{X}) + \mathrm{T}_n(\mathrm{X}) = 2\mathrm{X}\,\mathrm{T}_{n+1}(\mathrm{X})$.

Fonctions trigonométriques

QCOP TRG.5

1. Donner l'allure des courbes représentatives des fonctions $\sin(\cdot)$ et $\cos(\cdot)$.

2. On admet que $\dfrac{\sin(\theta)}{\theta} \xrightarrow[\theta\to 0]{} 1$.

- **a)** Montrer que $\dfrac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\theta} \xrightarrow[\theta\to 0]{} \dfrac{1}{2}$.
- **b)** En déduire que $\dfrac{\cos(\theta)-1}{\theta} \xrightarrow[\theta\to 0]{} 0$.

3. Montrer que $\sin(\cdot)$ et $\cos(\cdot)$ sont deux fois dérivables et préciser leur dérivée, puis leur dérivée seconde.

QCOP TRG.6

1. Définir la fonction $\theta \longmapsto \tan(\theta)$ et préciser son domaine de définition $\mathscr{D}_{\tan}$.

2. Donner l'allure de la courbe représentative de $\tan(\cdot)$.

3. Étudier la parité et la périodicité de $\tan(\cdot)$.

4. Montrer que $\tan(\cdot)$ est dérivable sur $\mathscr{D}_{\tan}$ et exprimer $\tan'$ en fonction de $\cos^2$ puis en fonction de $\tan^2$.