TALG. Techniques algébriques

QCOP TALG.1

1. Résultat. $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.

2. Résultat. $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$.

QCOP TALG.2

3. a) Résultat. $\text{Card}\big(\mathscr{P}(E)\big) = 2^{\text{Card}(E)}$.

Il s'agit de la somme des coefficients binomiaux :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^k 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n.$$

b) Résultat. $\text{Card}\big(\mathscr{P}(E \times F)\big) = 2^{\text{Card}(E)\times\text{Card}(F)}$ car $\text{Card}(E \times F) = \text{Card}(E) \times \text{Card}(F)$.

Remarquons que, en général, $\text{Card}\big(\mathscr{P}(E \times F)\big) \neq \text{Card}\big(\mathscr{P}(E)\big) \times \text{Card}\big(\mathscr{P}(F)\big)$.

QCOP TALG.3

3. On utilise la formule $\binom{n}{k} = \dfrac{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k+1)}{k!}$, *i.e.* on simplifie $(n-k)!$ avant de débuter le calcul.

QCOP TALG.4

2. Résultat. $\mathrm{S}_n = \binom{p+n+1}{p+1}$.

Cet exercice est fait dans le Cahier de calcul en Terminale, fiche Term-DENO-01.

QCOP TALG.5

1. Résultat. $\begin{cases} u_0 = a \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + r \end{cases}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = a + nr.$

2. Résultat. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = (n+1)\frac{a+u_n}{2}$ et $\displaystyle\sum_{k=N_0}^{N_1} u_k = (N_1 - N_0 + 1)\frac{a+u_{N_1}}{2}.$

3. Résultat. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$

QCOP TALG.6

1. Résultat. $\displaystyle\sum_{k=N_0}^{N_1} a^k = \sum_{k=m}^{n} a^k = \frac{a^{N_0} - a^{N_1+1}}{1-a} = a^{N_0}\frac{1 - a^{N_1-N_0+1}}{1-a}..$

2. Résultat.

	$a \in [0,1[$	$a = 1$	$a > 1$
$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} a^k$	$\dfrac{1}{1-a}$	$+\infty$	$+\infty$
$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} a^k$	$\dfrac{a}{1-a}$	$+\infty$	$+\infty.$

QCOP TALG.7

1. Résultat. $a^n - b^n = (a-b)\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}.$

On pourra procéder par télescopage.

2. Remarquer que $P(x) = P(x) - \underbrace{P(c)}_{=0}$ et utiliser la formule précédente.

Exercice : écrire et démontrer un résultat analogue pour $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque (ici, c'est le cas $n = 3$).