William GREGORY

Colle 11 • INDICATIONS
Polynômes

Exercice 11.1

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme.

1. Soit $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ une racine complexe de P.

(a) Que dire de $\overline{a}$?

(b) Montrer que $(X-a)(X-\overline{a}) \in \mathbb{R}[X]$ et qu'il existe $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que :
$$P = (X-a)(X-\overline{a})Q.$$

2. On suppose P non constant.

(a) Le polynôme P possède-t-il nécessairement une racine réelle ?

(b) Montrer que, si $\deg(P)$ est impair, alors P possède une racine réelle.

indication

1. (a) Le complexe $\overline{a}$ est également racine de P. Écrire P sous forme développée.

(b) On a $(\mathrm{X}-a)(\mathrm{X}-\overline{a}) = \mathrm{X}^2 - 2\mathfrak{Re}(a)\mathrm{X} + |a|^2$. Utiliser ensuite successivement (d'abord pour $X-a$ puis $X-\overline{a}$ le résultat
$$\text{« } \alpha \text{ est racine de } P \iff \exists Q \in \mathbb{C}[\mathrm{X}] : P = (X-\alpha)Q \text{ ».}$$

2. (a) Prendre $P = \mathrm{X}^2+1$ n'admettant pas de racine réelle.

(b) Utiliser le théorème des valeurs intermédiaires.

Exercice 11.2

Soit $n \geqslant 3$. On pose :
$$A := \mathrm{X}^n \quad \text{et} \quad B := \mathrm{X}^3 + \mathrm{X}^2 - 2\mathrm{X}.$$
Déterminer le reste dans la division euclidienne de A par B.

indication

Commencer par écrire $B = \mathrm{X}(\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}+2)$ pour déterminer ses racines, puis évaluer la relation $A = BQ + R$ en 0, 1 et -2, pour déterminer les coefficients de R (de degré 2 car B est de degré 3).

résultat

$$R = \frac{1-(-2)^{n-1}}{3}\mathrm{X}^2 + \frac{2+(-2)^{n-1}}{3}\mathrm{X}.$$

Exercice 11.3

Soit $P \coloneqq \mathrm{X}^3 + 3\mathrm{X}^2 + 2\mathrm{X} - 1$.
On note $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ses trois racines complexes.
Calculer $\displaystyle\sum_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant 3\\ i\neq j}} \frac{\alpha_i}{\alpha_j}$.

indication

Justifier l'existence de la somme en remarquant que 0 n'est pas racine de P.
Multiplier la somme par $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ et exploiter les relations coefficients-racines.

résultat

$$\sum_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant 3\\ i\neq j}} \frac{\alpha_i}{\alpha_j} = -9.$$

Exercice 11.4

Soit $P \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$. Soit $a \in \mathbb{K}$. Montrer que :

$$\left[\exists Q \in \mathbb{K}[\mathrm{X}] : \begin{cases} P = (\mathrm{X}-a)^3 Q \\ Q(a) \neq 0 \end{cases}\right] \iff \begin{cases} P(a) = P'(a) = P''(a) = 0 \\ P^{(3)}(a) \neq 0. \end{cases}$$

indication

$\boxed{\Rightarrow}$ Il s'agit de dériver trois fois $(\mathrm{X}-a)^3 Q$ et d'évaluer chaque dérivée en a.
$\boxed{\Leftarrow}$ Écrire la division euclidienne par $(\mathrm{X}-a)^3$ puis dériver.

Exercice 11.5

Soit $P \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \neq b$.
On suppose que :

- le reste de la division euclidienne de P par $\mathrm{X} - a$ vaut 1 ;
- le reste de la division euclidienne de P par $\mathrm{X} - b$ vaut -1.

Que vaut le reste de la division euclidienne de P par $(\mathrm{X}-a)(\mathrm{X}-b)$?

indication

On écrit $P = (\mathrm{X}-a)Q_a + 1$, $P = (\mathrm{X}-b)Q_b - 1$ et $P = (\mathrm{X}-a)(\mathrm{X}-b)Q + R$ en explicitant $R = \alpha\mathrm{X} + \beta$ puis évaluer en a et b.

résultat

Le reste vaut $\dfrac{2}{a-b}\mathrm{X} - \dfrac{a+b}{a-b}$.

Exercice 11.6

Montrer qu'il n'existe pas d'élément $P \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ tel que :
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad P(t) = \mathrm{e}^t.$$

indication

Raisonner par l'absurde et considérer un tel polynôme, puis distinguer deux cas :

- si $\deg(P)$ est impair, alors P admet une racine réelle (à comprendre et savoir démontrer), ce qui est impossible car l'exponentielle ne s'annule pas ;
- si $\deg(P)$ est pair, la contradiction vient de l'étude des limites en $+\infty$ et $-\infty$.

Exercice 11.7

Déterminer le noyau du morphisme d'anneaux
$$\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P & \longmapsto & P\big(1+\sqrt{2}\big). \end{array} \right.$$

indication

- Déterminer un polynôme à coefficients entiers dont $1+\sqrt{2}$ est racine (on peut éventuellement d'abord déterminer un polynôme dont $\sqrt{2}$ est racine).
- Utiliser le théorème de division euclidienne.

résultat

$$\mathrm{Ker}(\varphi) = \Big\{(X^2-2X-1)Q \;\; ; \;\; Q \in \mathbb{Z}[X]\Big\}.$$

Exercice 11.8

Soit $P := a_0 + a_1\mathrm{X} + \cdots + a_n\mathrm{X}^n \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$.

1. Soit $r > 0$. Soit $k \in \mathbb{N}$. Calculer :
$$\int_0^{2\pi} P(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}\,\mathrm{d}t.$$

2. On suppose qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que
$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \big|P(z)\big| \leqslant M.$$
Montrer que P est constant.

indication

1. Calculer, pour $\ell \in \mathbb{Z}$, $\displaystyle\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\ell t}\,\mathrm{d}t$.

2. Utiliser l'inégalité triangulaire intégrale ($\displaystyle\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$) et passer à la limite pour montrer que les a_k pour $k \geqslant 1$ sont nuls.

résultat

1. $\displaystyle\int_0^{2\pi} P\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}\,\mathrm{d}t = \begin{cases} 2\pi a_k r^k & \text{si } k \in [\![0,n]\!] \\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$

Exercice 11.9

Soit $P \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$.

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur P pour que l'application

$$\left|\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & P(z) \end{array}\right.$$

soit surjective.

indication

- Si P est constant, l'application ne sera pas surjective.
- Si P est non constant, utiliser le théorème de D'Alembert-Gauss.

résultat

$$z \longmapsto P(z) \text{ est surjective} \quad \Longleftrightarrow \quad P \text{ est non constant.}$$

Exercice 11.10

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts. Soient $y_1, \dots, y_n \in \mathbb{K}$.

Montrer qu'il existe un unique polynôme $\mathrm{L} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ tel que :

$$\begin{cases} \deg(\mathrm{L}) = n-1 \\ \forall k \in [\![1,n]\!], \quad \mathrm{L}(x_k) = y_k. \end{cases}$$

indication

- Existence.
  - ◊ Commencer par considérer les polynômes $\mathrm{L}_k := \displaystyle\prod_{j \neq k} \frac{\mathrm{X} - x_k}{x_j - x_k}$ vérifiant :
  $$\forall k, j \in [\![1,n]\!], \quad \mathrm{L}_k(x_j) = \delta_j^k.$$
  - ◊ On peut ensuite poser $\mathrm{L} := \displaystyle\sum_{k=1}^{n} y_k \mathrm{L}_k$ et vérifier les conditions requises.
- Unicité. Prendre deux tels polynômes et vérifier qu'ils coïncident en n points.

Exercice 11.11

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient $P_0, \dots, P_n \in \mathbb{K}[\mathrm{X}] \setminus \{0_{\mathbb{K}[\mathrm{X}]}\}$ tels que $0 \leqslant \deg(P_0) < \cdots < \deg(P_n)$.
Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$. Montrer que :

$$\alpha_0 P_0 + \cdots + \alpha_n P_n = 0_{\mathbb{K}[\mathrm{X}]} \quad \Longrightarrow \quad \alpha_0 = \cdots = \alpha_n = 0.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $P \in \mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$. Montrer que $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(0)}{k!}\mathrm{X}^k$.

indication

1. Pour montrer que $\alpha_n = 0$, prendre le degré de « $\alpha_1 P_1 + \cdots + \alpha_n P_n$ » et aboutir à une contradiction si $\alpha_n \neq 0$. Puis, raisonner par récurrence descendante.

2. La question précédente appliquée à $P_k = \mathrm{X}^k$ justifie que l'on peut « identifier » les polynômes par leurs coefficients.

Écrire $P = \sum_{k=0}^{n} a_k \mathrm{X}^k$ et calculer les dérivées puis les évaluer en 0. L'identification (justifiée précédemment) permet de dire que :

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad a_k = \frac{P^{(k)}(0)}{k!}.$$

Exercice 11.12

Définition. Idéal d'un anneau commutatif.
Soit $(A, +, \times)$ *un anneau commutatif. Soit* $\mathscr{I} \subset A$.
On dit que $\mathscr{I}$ *est un* idéal *de* A *lorsque :*

- $(\mathscr{I}, +)$ *est un sous-groupe de* $(A, +)$ *;*
- $\forall a \in A, \quad \forall x \in \mathscr{I}, \quad a \times x \in \mathscr{I}$.

Montrer que tout idéal de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ est de la forme

$$P_0\mathbb{K}[\mathrm{X}] := \left\{ P_0 Q \ ; \ Q \in \mathbb{K}[\mathrm{X}] \right\}$$

où $P_0 \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$.

indication

- ⧫ Raisonner par double inclusion.
- ⧫ On exploitera le théorème de division euclidienne.