Nombres réels

Partie entière

QCOP REEL.1

Soit $x \in \mathbb{R}$.

- **(a)** Définir le nombre $\lfloor x \rfloor$.
  (b) Donner un encadrement de x par $\lfloor x \rfloor$.
  (c) En déduire que

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x.$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\lfloor 3^n x \rfloor - 3 \left\lfloor 3^{n-1} x \right\rfloor \in \{0, 1, 2\}.$$

QCOP REEL.2

Soient $x, y \in \mathbb{R}$.

- Donner un encadrement de x par $\lfloor x \rfloor$.
- **(a)** On suppose que $\lfloor x \rfloor > \lfloor y \rfloor$.
  Montrer que

$$x \geqslant \lfloor x \rfloor \geqslant \lfloor y \rfloor + 1 > y.$$

  (b) En raisonnant par contraposée, en déduire que $\lfloor \cdot \rfloor$ est croissante sur $\mathbb{R}$.
- Montrer que $\lfloor \cdot \rfloor$ n'est pas strictement croissante.
- On suppose que $y \in \mathbb{Z}$ et $x < y$.
  Comparer $\lfloor x \rfloor$ et $\lfloor y \rfloor$.

Densité

QCOP REEL.3

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Qu'est-ce qu'une approximation décimale de x à 10^{-n} près ?
- Soit $A \subset \mathbb{R}$. Définir « A est dense dans $\mathbb{R}$ ».
- **(a)** Montrer que

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : \ 10^{-N_\varepsilon} \leqslant \varepsilon.$$

  (b) Montrer que $\mathbb{D}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
- Montrer que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

QCOP REEL.4

- Soit $A \subset \mathbb{R}$. Définir « A est dense dans $\mathbb{R}$ ».
- Soit $A \subset \mathbb{R}$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

  (i) A est dense dans $\mathbb{R}$;

  (ii) $\forall x, y \in \mathbb{R}, \ x < y \implies \exists a \in A : x \leqslant a \leqslant y$;

  (iii) $\forall x, y \in \mathbb{R}, \ x < y \implies \exists a \in A : x < a < y$.

- **(a)** Soit $a \in \mathbb{Q}$. Soit $b \notin \mathbb{Q}$.
  Que dire de $a + b$?
  (b) Montrer que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.