

## Colle 15

### Matrices

- Après votre colle, il vous est demandé de reprendre les exercices traités et de les rédiger sur feuille. Ce travail est à déposer dans la boîte en B013 avant mercredi prochain.
- Vous trouverez le sujet et des indications sur la page ci-contre.



Dans tous les exercices,  $\mathbb{K}$  désigne  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

#### Exercice 15.1

Calculer le noyau de la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 5 & -6 \\ -6 & 0 & 12 \\ 5 & 10 & -10 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$$

#### Exercice 15.2

Calculer le noyau de la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 8 & -3 & 2 \\ -7 & 5 & 21 & -14 \\ -3 & 4 & 9 & -6 \\ 6 & 1 & -18 & 12 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$$

#### Exercice 15.3

On définit trois suites  $(u_n)_n$ ,  $(v_n)_n$  et  $(w_n)_n$  par

$$\begin{cases} u_0, v_0, w_0 \in \mathbb{K} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = v_n - u_n \\ v_{n+1} = w_n - v_n \\ w_{n+1} = v_n - w_n \end{cases} \end{cases}$$

Déterminer, pour  $n \in \mathbb{N}$ , les expressions de  $u_n$ ,  $v_n$  et  $w_n$ , en fonction de  $n$ ,  $u_0$ ,  $v_0$  et  $w_0$ .

#### Exercice 15.4

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Soient  $a, b \in \mathbb{K}$ .

On pose

$$M := \begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{K}).$$

Déterminer, lorsqu'elle est inversible, l'inverse de  $M$ , en fonction de  $M$ ,  $I_n$ ,  $a$ ,  $b$  et  $n$ .

#### Exercice 15.5

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Soient  $A, B \in M_n(\mathbb{K})$  telles que  $AB = 0_n$ .

Montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \text{Tr}((A+B)^k) = \text{Tr}(A^k) + \text{Tr}(B^k).$$

### Exercice 15.6

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Soit  $A \in M_n(\mathbb{K})$ . Montrer que

$$\text{Ker}(A^\top A) = \text{Ker}(A).$$

### Exercice 15.7

On pose, pour  $\theta \in \mathbb{R}$ ,

$$R(\theta) := \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

1. Soient  $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$ .  
Montrer que  $R(\theta_1)$  et  $R(\theta_2)$  commutent.
2. Soit  $\theta \in \mathbb{R}$ . Soit  $n \in \mathbb{N}$ .  
Calculer la matrice  $R(\theta)^n$ .

### Exercice 15.10

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Soient  $A, B, C \in M_n(\mathbb{K})$ .  
Montrer que

$$\left. \begin{array}{l} AC = CA \\ AB - BA = C^\top \end{array} \right\} \implies AB = BA.$$

### Exercice 15.8

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Soient  $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ .  
Résoudre l'équation en  $X \in M_n(\mathbb{R})$

$$X = \text{Tr}(X)A + B.$$

### Exercice 15.9

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Soit  $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$  telle que

$$A + A^{-1} = I_n.$$

Calculer, pour  $k \in \mathbb{N}$ ,  $A^k + A^{-k}$ .