Matrices

On désignera par $\mathbb{K}$ l'ensemble $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Trace

QCOP MAT.1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $A, B, C \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

- Définir $\mathrm{Tr}(A)$.
- Montrer que $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.
- **(a)** Montrer que

$$\mathrm{Tr}(ABC) = \mathrm{Tr}(BCA) = \mathrm{Tr}(CAB).$$

  (b) A-t-on $\mathrm{Tr}(ABC) = \mathrm{Tr}(CBA)$?

  (c) Soit $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$B = P^{-1}AP.$$

  Déterminer $\mathrm{Tr}(B)$.

QCOP MAT.2

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

- **(a)** Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]$.
  Donner l'expression du coefficient d'indice (i, j) de $M^\top M$.

  (b) Montrer que

$$\mathrm{Tr}(M^\top M) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad M = 0_n.$$

- Le résultat est-il vrai si $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$?
- Quel résultat pourrait-on énoncer et démontrer si $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$?

Matrices symétriques et antisymétriques

QCOP MAT.3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Définir les espaces $\mathrm{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathrm{A}_n(\mathbb{K})$.
- Soit $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. Calculer

$$\left(M + M^\top\right)^\top \text{ et } \left(M - M^\top\right)^\top.$$

- **(a)** Montrer que toute matrice est somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

  (b) Montrer que

$$\mathrm{S}_n(\mathbb{K}) \cap \mathrm{A}_n(\mathbb{K}) = \{0_n\}.$$

QCOP MAT.4

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

- Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$. Donner l'expression du coefficient d'indice (i, j) de la matrice AB.
- Montrer que

$$(AB)^\top = B^\top A^\top.$$

- On suppose que $A, B \in \mathrm{S}_n(\mathbb{K})$.

  (a) A-t-on $AB \in \mathrm{S}_n(\mathbb{K})$?

  (b) Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que $AB \in \mathrm{S}_n(\mathbb{K})$.

Inversibilité, opérations élémentaires

QCOP MAT.5

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

- Définir « $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ ».
- Montrer que

$$A^\top \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \text{ et } \left(A^\top\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^\top.$$

- Montrer que

$$A \in \mathrm{S}_n(\mathbb{K}) \iff A^{-1} \in \mathrm{S}_n(\mathbb{K}).$$

QCOP MAT.6

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

- Soit $X \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Calculer AX.
- Montrer que

$$A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \implies \mathrm{Ker}(A) = \left\{0_{n,1}\right\}.$$

On admettra la réciproque.

- On suppose que A est diagonale.
  (a) Montrer que $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ si, et seulement si, tous ses coefficients sont non nuls.
  (b) Donner, dans ce cas, A^{-1}.

QCOP MAT.7

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

- Donner la définition de « A est inversible dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ ».
- Soit $p \in \mathbb{N}$. Soient $a_0, \dots, a_p \in \mathbb{K}$.
  On pose

$$P := \sum_{k=0}^{p} a_k X^k \text{ et } P(A) := \sum_{k=0}^{p} a_k A^k.$$

On suppose que 0 n'est pas racine de P.

(a) Que dire du coefficient a_0 ?
(b) On suppose que $P(A) = 0_n$.
Montrer que $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et déterminer A^{-1}.

QCOP MAT.8

- Définir les matrices d'opérations élémentaires : matrice de transvection, de dilatation et d'échange.
- **(a)** Compléter :

multiplier à … par une matrice d'opération élémentaire	opération sur les …
droite	
gauche	

(b) Décrire les opérations réalisables sur une matrice par produit de la matrice par une matrice d'opération élémentaire.

- Quels liens peut-on faire entre opérations élémentaires et inversibilité d'une matrice ?