

# Nombres réels

## Partie entière

### QCOP REEL.1

Soit  $x \in \mathbb{R}$ .

- ☐ (a) Définir le nombre  $\lfloor x \rfloor$ .
- (b) Donner un encadrement de  $x$  par  $\lfloor x \rfloor$ .
- (c) En déduire que

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x.$$

👁 Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Montrer que

$$\lfloor 3^n x \rfloor - 3 \lfloor 3^{n-1} x \rfloor \in \{0, 1, 2\}.$$

### QCOP REEL.2

Soient  $x, y \in \mathbb{R}$ .

- ☐ Donner un encadrement de  $x$  par  $\lfloor x \rfloor$ .
- ✎ (a) On suppose que  $\lfloor x \rfloor > \lfloor y \rfloor$ .  
Montrer que

$$x \geq \lfloor x \rfloor \geq \lfloor y \rfloor + 1 > y.$$

- (b) En raisonnant par contraposée, en déduire que  $\lfloor \cdot \rfloor$  est croissante sur  $\mathbb{R}$ .
- 🔗 Montrer que  $\lfloor \cdot \rfloor$  n'est pas strictement croissante.
- ✂ On suppose que  $y \in \mathbb{Z}$  et  $x < y$ .  
Comparer  $\lfloor x \rfloor$  et  $\lfloor y \rfloor$ .

## Densité

### QCOP REEL.3

- ☐ Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Qu'est-ce qu'une approximation décimale de  $x$  à  $10^{-n}$  près ?
- ☐ Soit  $A \subset \mathbb{R}$ . Définir «  $A$  est dense dans  $\mathbb{R}$  ».
- ✎ (a) Montrer que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : 10^{-N_\varepsilon} \leq \varepsilon.$$

(b) Montrer que  $\mathbb{D}$  est dense dans  $\mathbb{R}$ .

✂ Montrer que  $\mathbb{Q}$  est dense dans  $\mathbb{R}$ .

✂ (a) Soit  $a \in \mathbb{Q}$ . Soit  $b \notin \mathbb{Q}$ .  
Que dire de  $a + b$  ?

(b) Montrer que  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  est dense dans  $\mathbb{R}$ .