

# Matrices et applications linéaires

## Similitude matricielle, rang d'une matrice

### QCOP MATAL.1

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Soient  $A, B \in M_n(\mathbb{K})$  deux matrices semblables dans  $M_n(\mathbb{K})$ .

☐ Donner la définition de «  $A$  et  $B$  sont semblables dans  $M_n(\mathbb{K})$  ».

✎ Soit  $k \in \mathbb{N}$ . Montrer que  $A^k$  et  $B^k$  sont semblables dans  $M_n(\mathbb{K})$ .

✎ Soit  $p \in \mathbb{N}$ . Soient  $a_0, \dots, a_p \in \mathbb{K}$ . On pose, pour  $M \in M_n(\mathbb{K})$ ,  $P(M) := \sum_{k=0}^p a_k M^k$ .

(a) Montrer que  $P(A)$  et  $P(B)$  sont semblables.

(b) Que dire dans le cas où  $B$  est diagonale ou triangulaire ?

### QCOP MATAL.2

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Soient  $A, B \in M_n(\mathbb{K})$  deux matrices semblables dans  $M_n(\mathbb{K})$ .

☐ Donner la définition de «  $A$  et  $B$  sont semblables dans  $M_n(\mathbb{K})$  ».

✎ Montrer que

$$B = I_n \iff A = I_n.$$

✎ Montrer que deux matrices de même rang ne sont pas nécessairement semblables.

### QCOP MATAL.3

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Soient  $A, B \in M_n(\mathbb{K})$  deux matrices semblables dans  $M_n(\mathbb{K})$ .

☐ Soit  $k \in \mathbb{N}$ . Que dire de  $A^k$  et  $B^k$  ?

✎ Montrer que

$$\left. \begin{array}{l} \exists k_A \in \mathbb{N}^* : A^{k_A} = 0_n \\ B \text{ est diagonale} \end{array} \right\} \implies B = 0_n.$$

✎ On se place dans le cas  $n = 2$ . On suppose que  $A \neq 0_2$  et  $A^2 = 0_2$ .

(a) Soit  $X \in M_{2,1}(\mathbb{K}) \setminus \text{Ker}(A)$ .

Montrer que la famille  $(AX, X)$  est libre dans  $M_{2,1}(\mathbb{K})$ .

(b) En déduire que  $A$  est semblable à la matrice  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

### QCOP MATAL.4

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Soit  $A \in M_n(\mathbb{K})$ .

☐ Définir le rang de  $A$ .

✎ On suppose que  $\text{rg}(A) = 1$ .

(a) Montrer qu'il existe  $C \in M_{n,1}(\mathbb{K})$  et  $L \in M_{1,n}(\mathbb{K})$  tels que  $A = CL$ .

(b) Montrer que  $A^2 = \text{Tr}(A)A$ .

(c) En déduire, pour  $p \in \mathbb{N}$ ,  $A^p$ .

# Représentation matricielle

## QCOP MATAL.5

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie.

Soit  $p$  un projecteur de  $E$ .

- ✎ Montrer que  $E = \text{Ker}(p) \oplus \text{Ker}(p - \text{Id}_E)$ .
- ✎ Déterminer une base dans laquelle la matrice de  $p$  est diagonale.
- ✎ Montrer que  $\text{Tr}(p) = \text{rg}(p)$ .

## QCOP MATAL.6

- ✎ (a) Montrer que deux matrices semblables ont même trace.
- (b) Comment définir la trace d'un endomorphisme ?
- ✎ Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On considère l'endomorphisme

$$D : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}_n[X] \\ P & \longmapsto & P'. \end{array} \right.$$

- (a) Écrire la matrice de  $D$  dans la base canonique de  $\mathbb{K}_n[X]$ .
- (b) Déterminer la trace de  $D$ .

## QCOP MATAL.7

- ☰ Définir la matrice d'une application linéaire.
- ✎ Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

- (a) Écrire la matrice de l'endomorphisme

$$\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}_n[X] \\ P & \longmapsto & P(X+1) \end{array} \right.$$

dans la base canonique de  $\mathbb{K}_n[X]$ .

- (b) Déterminer l'inverse de  $\varphi$ .
- (c) En déduire l'inverse de la matrice

$$M := \left( \binom{i}{j} \right)_{0 \leq i, j \leq n}.$$