

## TALG. Techniques algébriques

### QCOP TALG.1

1. Résultat.  $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$ .
2. Résultat.  $\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}$ .

### QCOP TALG.2

3. a) Résultat.  $\text{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^{\text{Card}(E)}$ .

Il s'agit de la somme des coefficients binomiaux :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n.$$

- b) Résultat.  $\text{Card}(\mathcal{P}(E \times F)) = 2^{\text{Card}(E) \times \text{Card}(F)}$  car  $\text{Card}(E \times F) = \text{Card}(E) \times \text{Card}(F)$ .

Remarquons que, en général,  $\text{Card}(\mathcal{P}(E \times F)) \neq \text{Card}(\mathcal{P}(E)) \times \text{Card}(\mathcal{P}(F))$ .

### QCOP TALG.3

3. On utilise la formule  $\binom{n}{k} = \frac{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k+1)}{k!}$ , i.e. on simplifie  $(n-k)!$  avant de débiter le calcul.

### QCOP TALG.4

2. Résultat.  $S_p(n) = \binom{p+n+1}{p+1}$ .

Cet exercice est fait dans le Cahier de calcul en Terminale, fiche Term-DENO-01.

## QCOP TALG.5

- Résultat.  $\begin{cases} u_0 = a \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r \end{cases} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_n = a + nr.$
- Résultat.  $\sum_{k=0}^n u_k = (n+1) \frac{a + u_n}{2}$  et  $\sum_{k=N_0}^{N_1} u_k = (N_1 - N_0 + 1) \frac{a + u_{N_1}}{2}.$
- Résultat.  $\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2}$  et  $\sum_{k=0}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$

## QCOP TALG.6

- Résultat.  $\sum_{k=N_0}^{N_1} a^k = \sum_{k=m}^n a^k = \frac{a^{N_0} - a^{N_1+1}}{1-a} = a^{N_0} \frac{1 - a^{N_1-N_0+1}}{1-a}.$
- Résultat.

	$a \in [0, 1[$	$a = 1$	$a > 1$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n a^k$	$\frac{1}{1-a}$	$+\infty$	$+\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n a^k$	$\frac{a}{1-a}$	$+\infty$	$+\infty.$

## QCOP TALG.7

- Résultat.  $a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}.$

On pourra procéder par télescopage.

- Remarquer que  $P(x) = P(x) - \underbrace{P(c)}_{=0}$  et utiliser la formule précédente.

Exercice : écrire et démontrer un résultat analogue pour  $n \in \mathbb{N}^*$  quelconque (ici, c'est le cas  $n = 3$ ).