Continuité

Généralités et grands théorèmes

QCOP CONT.1

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Soit $a \in I$.

- Donner la définition de « f est continue en a ».
- Énoncer et démontrer le théorème de caractérisation séquentielle de la continuité.
- Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in I^{\mathbb{N}}$. Soit $\ell \in I$. On suppose que f est continue sur I.

  (a) Montrer que
  $$u_n \longrightarrow \ell \quad \Longrightarrow \quad f(u_n) \longrightarrow f(\ell).$$

  (b) On suppose que $f[I] = I$ et que
  $$\begin{cases} u_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$$
  Montrer que
  $$u_n \longrightarrow \ell \quad \Longrightarrow \quad f(\ell) = \ell.$$

QCOP CONT.2

- Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Que dire de l'image par f d'un intervalle de $\mathbb{R}$?
- **(a)** Montrer que tout polynôme réel de degré impair admet au moins une racine réelle.

  (b) Est-ce vrai pour un polynôme de degré pair ?

QCOP CONT.3

Soient $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions.
Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$.

- On suppose que f continue sur $[a, b]$.
  Montrer que f est bornée sur $[a, b]$ et atteint ses bornes.
- Montrer que
  $$\forall x \in [a,b], \quad f(x) < g(x)$$
  $$\Downarrow$$
  $$\sup_{x\in[a,b]} f(x) < \sup_{x\in[a,b]} g(x).$$
- Les résultats précédents restent-ils vrais si l'on étudie f sur $\mathbb{R}$ et non sur $[a, b]$?

Continuité uniforme

QCOP CONT.4

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

- Donner la définition de « f est uniformément continue sur I ».
- On considère les trois assertions suivantes :

  (i) f est continue sur I ;
  (ii) f est uniformément continue sur I ;
  (iii) f est lipschitzienne sur I.

  Énoncer et démontrer les implications les reliant.
- Lesquelles des assertions précédentes sont vraies pour $f = \sqrt{\cdot}$ et $I = [0, 1]$?

QCOP CONT.5

Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$.
Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$.

- Que dire de f ? Quel théorème venez-vous d'énoncer ?
- **(a)** Écrire à l'aide de quantificateurs « f n'est pas uniformément continue sur $[a, b]$ ».

  (b) Aboutir à une contradiction à l'aide de la caractérisation séquentielle de la continuité.