Lycée Chateaubriand
MPSI 3 • 2024 – 2025

William GREGORY

Colle 19
Algèbre linéaire générale

- Après votre colle, il vous est demandé de reprendre les exercices traités et de les rédiger sur feuille. Ce travail est à déposer dans la boîte en B013 avant mardi prochain.
- Vous trouverez le sujet et des indications sur la page ci-contre.

Exercice 19.1

Soit E un espace vectoriel. Soit $f \in \mathrm{L}(E)$.

1. Montrer que $\left(\mathrm{Ker}(f^n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante pour l'inclusion.

2. Montrer que

$$\exists k_0 \in \mathbb{N} : \quad \mathrm{Ker}(f^{k_0}) = \mathrm{Ker}(f^{k_0+1}) \quad \Longrightarrow \quad \forall k \geqslant k_0, \ \ \mathrm{Ker}(f^k) = \mathrm{Ker}(f^{k_0}).$$

3. Donner un espace E et un endomorphisme f dont la suite $\left(\mathrm{Ker}(f^n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante mais non stationnaire.

Exercice 19.2

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.
Montrer que

$$A^2 = AA^\top \quad \Longrightarrow \quad A \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R}).$$

Exercice 19.3

Soit E un espace vectoriel. Soient $f \in \mathrm{L}(E)$. Soit $p \geqslant 2$. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts tels que, pour $i \in [\![1, p]\!]$, on a $\mathrm{E}_i := \mathrm{Ker}(f - \lambda_i \,\mathrm{Id}_E) \neq \{0_E\}$. Montrer que les E_i sont en somme directe.

Exercice 19.4

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
Soit $u \in \mathrm{L}(E)$ tel que

$$u^2 - 6u - 7\,\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}.$$

1. Montrer que u est bijectif et exprimer u^{-1} en fonction de u.

2. Montrer que

$$E = \mathrm{Ker}(u + \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(u - 7\,\mathrm{Id}_E).$$

Exercice 19.5

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $N \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ *nilpotente*, *i.e.* telle qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $N^p = 0_n$.
Montrer que $N - \mathrm{I}_n$ est inversible et déterminer son inverse.

Exercice 19.6

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\operatorname{Vect}\Big(x \longmapsto \cos(nx)\Big)_{n\in[\![0,N]\!]} = \operatorname{Vect}\Big(x \longmapsto \cos^n(x)\Big)_{n\in[\![0,N]\!]}.$$

Exercice 19.7

Soit $n \geqslant 2$. On considère

$$\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & (X+2)P(X) - XP(X+1). \end{array} \right.$$

1. Montrer que φ est un endomorphisme.

2. Déterminer le noyau de φ.

Exercice 19.8

On note $E := \mathscr{C}^0\big([0,1],\mathbb{R}\big)$ et

$$F := \left\{ f \in E \;\middle|\; \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \right\}.$$

1. Montrer que F est un espace vectoriel.

2. Déterminer un supplémentaire de F dans E.

Exercice 19.9

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Déterminer l'ensemble

$$\mathrm{C}(E) := \Big\{ u \in \mathrm{L}(E) \;\Big|\; \forall v \in \mathrm{L}(E),\;\; u\circ v = v \circ u \Big\}.$$

On pourra admettre que tout sous-espace vectoriel de E admet un supplémentaire.

Exercice 19.10

- *Soient $a, b \in \mathbb{R}$.*
- *On note $F := \Big\{ \varphi \in \mathscr{C}^\infty\big([a,b],\mathbb{R}\big) \;\Big|\; \varphi(a) = \varphi(b) = 0 \Big\}$.*
- *On pose, pour $f \in \mathscr{C}^0\big([a,b],\mathbb{R}\big)$ et $\varphi \in F$, $\langle f \mid \varphi \rangle := \displaystyle\int_a^b f(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t$.*

Soit $u \in \mathscr{C}^0\big([a,b],\mathbb{R}\big)$ telle que

$$\forall \varphi \in F, \quad \int_a^b u'(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

1. Montrer que $\operatorname{Ker}\Big(\langle \mathbb{1}_{[a,b]} \mid \cdot \rangle\Big) \subset \operatorname{Ker}\Big(\langle u \mid \cdot \rangle\Big)$.

2. En déduire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall \varphi \in F, \quad \int_a^b u(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t.$$