SUIT. Suites numériques

QCOP SUIT.1

1. Résultat. $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant N_\varepsilon \quad \Longrightarrow \quad |a_n - \ell| \leqslant \varepsilon.$

2. Écrire les définitions de $a_n \longrightarrow \ell$ et $c_n \longrightarrow \ell$.

3. Résultat. $\exists N \in \mathbb{N} : \quad \forall n \geqslant N, \quad a_n > 0.$

On peut le montrer en utilisant la définition de la convergence avec $\varepsilon = \dfrac{\ell}{2} > 0$.

4. Résultat. $a_n b_n \longrightarrow 0$.

QCOP SUIT.2

2. Prendre $\varepsilon = \dfrac{\ell}{2} > 0$ dans la définition de convergence de a_n vers ℓ.

3. Résultat. $\ell \geqslant 0$.

On peut raisonner par l'absurde et prendre $\varepsilon = \dfrac{-3\ell}{2} > 0$.

4. Appliquer ce qui précède à $a_n \leftarrow b_n - a_n$, suite qui tend vers $\ell' - \ell$.

QCOP SUIT.3

1. Résultat. La suite $(u_{n+1})_n$ converge et a la même limite que $(u_n)_n$.

2. Résultat. $u_{n+1} - u_n \longrightarrow 0$.
On peut utiliser la linéarité de la limite.

3. On peut considérer $u_n \coloneqq \sqrt{n}$ et $u_n \coloneqq \ln(n)$.

QCOP SUIT.4

1. **a)** Utiliser la propriété fondamentale de $\mathbb{R}$.

b) Il s'agit d'une conséquence de la définition de la borne supérieure (« adhérence de la borne supérieure ») ; un dessin peut éclairer.

c) Utiliser la définition de la limite et :

$$\ell = \sup_n a_n, \quad \forall n \geqslant N_\varepsilon, \ a_n \geqslant a_{N_\varepsilon}, \quad \text{et} \quad \ell + \varepsilon \geqslant \ell.$$

2. Qu'a-t-on montré pour les suites croissantes ? Et que peut-on montrer pour une suite décroissante ?

QCOP SUIT.5

1. Résultat. $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant N_\varepsilon \quad \Longrightarrow \quad |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon.$
2. Utiliser la définition de $u_n \longrightarrow \ell$ et la deuxième inégalité triangulaire : $\big||u_n| - |\ell|\big| \leqslant |u_n - \ell|$.
3. $\boxed{\Rightarrow}$ Utiliser que $\left|\mathfrak{Re}(u_n - \ell)\right| \leqslant |u_n - \ell|$, idem pour $\mathfrak{Im}(\cdot)$.
   $\boxed{\Leftarrow}$ $u_n = \mathfrak{Re}(u_n) + \mathrm{i}\mathfrak{Im}(u_n)$.
4. On a $\cos(n\theta) = \mathfrak{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}\right)$ et $\sin(n\theta) = \mathfrak{Im}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}\right)$.
   La démonstration de la convergence admise peut être établie avec la sommation d'Abel. Il s'agit d'un exercice classique du chapitre sur les séries numériques.

QCOP SUIT.6

2. a) Raisonner par récurrence.
   b) Utiliser la définition de la limite et le résultat précédent.
3. Utiliser la contraposée du résultat précédent en exhibant deux suites extraites ayant une limite différente.
4. Utiliser ce qui précède avec $\varphi(n) = n + 1$.

QCOP SUIT.7

2. $\boxed{\Rightarrow}$ Avec la définition de la limite, écrire que, à partir d'un certain rang, $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$.
   $\boxed{\Leftarrow}$ Les suites considérées sont des suites extraites de $(u_n)_n$.
3. a) Utiliser la définition et les propriétés de $(a_n)_n$.
   b) Le résultat de convergence des suites adjacentes assurent que $(\mathrm{S}_{2p})_p$ et $(\mathrm{S}_{2p+1})_p$ convergent et ont la même limite. Utiliser ensuite le résultat de la question précédente.

QCOP SUIT.8

1. De toute suite réelle bornée on peut extraire une sous-suite convergente.
2. On utilisera à chaque étape le milieu du segment $[a_n, b_n]$: $m_n = \dfrac{a_n + b_n}{2}$. L'un des deux intervalles $[a_n, c_n]$ et $[c_n, b_n]$ contient une infinité de termes de $(x_n)_n$ et $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n}$.
3. Ce type de suite admet une sous-suite convergente.
   En deuxième année, ce fait permettra de montrer que tout segment est un compact de $\mathbb{R}$.

QCOP SUIT.9

1. **a)** Le taux d'accroissement de $\ln(\cdot)$ en 1 donne $\dfrac{\ln(1+at)-\ln(1)}{at} \xrightarrow[t\to 0]{} 1$.

   Résultat. $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+at)}{t} = \frac{1}{a}$.

   b) Prendre $t = \dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ dans la question précédente.

   c) Utiliser la continuité de l'exponentielle et la définition du nombre « a^b ($a \in \mathbb{R}_+^*$, $b \in \mathbb{R}$) ».

2. Résultat. On ne peut rien dire, « 1^∞ » est une forme indéterminée.

   En effet, $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \longrightarrow \mathrm{e}$, mais $1^n = 1 \longrightarrow 1$.

QCOP SUIT.10

1. Résultat. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists a_{x,\varepsilon} \in A : \quad |x - a_{x,\varepsilon}| \leqslant \varepsilon$.
2. Les deux sens de l'équivalence sont importants et utile :
   - la donnée d'une partie dense A nous permet d'approcher tout élément de $\mathbb{R}$ par une suite de A ;
   - montrer qu'une partie A est dense revient à chercher à approcher tout $x \in \mathbb{R}$ par une suite d'éléments de A convergeant vers x, ce qui est dans beaucoup de cas plus simple qu'utiliser la définition.

   La démonstration est une réécriture du résultat en voyant ε comme $\dfrac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
3. **a)** Résultat. $10^n x - 1 < \lfloor 10^n x \rfloor \leqslant 10^n x$.

   b) Pour $x \in \mathbb{R}$, utiliser la suite de terme général $x_n := \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$ et la caractérisation séquentielle de la densité.

QCOP SUIT.11

2. - Les éléments de A sont compris entre -1 et 2.
   - Le plus grand élément de A est 2 donc $\sup(A) = 2$.
   - On a $(-1)^{2n+1} + \dfrac{1}{2n+2} \longrightarrow -1$ donc $\inf(A) = -1$.