

Colle 15 • INDICATIONS

Matrices

Dans tous les exercices, \mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

Exercice 15.1

Calculer le noyau de la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 5 & -6 \\ -6 & 0 & 12 \\ 5 & 10 & -10 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$$

résultat

$$\text{Ker}(A) = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Exercice 15.2

Calculer le noyau de la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 8 & -3 & 2 \\ -7 & 5 & 21 & -14 \\ -3 & 4 & 9 & -6 \\ 6 & 1 & -18 & 12 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$$

résultat

$$\text{Ker}(A) = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

Exercice 15.3

On définit trois suites $(u_n)_n$, $(v_n)_n$ et $(w_n)_n$ par

$$\begin{cases} u_0, v_0, w_0 \in \mathbb{K} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = v_n - u_n \\ v_{n+1} = w_n - v_n \\ w_{n+1} = v_n - w_n. \end{cases} \end{cases}$$

Déterminer, pour $n \in \mathbb{N}$, les expressions de u_n , v_n et w_n , en fonction de n , u_0 , v_0 et w_0 .

indication

On pose

$$X_n := \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$$

et on montre par récurrence que $X_n = A^n X_0$, où $A \in M_3(\mathbb{K})$ indépendante de n .

résultat

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \begin{cases} u_n = (-2)^{n-1}(v_0 - w_0) + (-1)^n(u_0 - w_0) \\ v_n = (-2)^{n-1}(w_0 - v_0) \\ w_n = (-2)^{n-1}(v_0 - w_0). \end{cases}$$

Exercice 15.4

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient $a, b \in \mathbb{K}$.

On pose

$$M := \begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{K}).$$

Déterminer, lorsqu'elle est inversible, l'inverse de M , en fonction de M , I_n , a , b et n .

indication

Écrire $M = (a - b)I_n + bJ$ où $J := \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$, puis écrire M^2 selon M et I_n .

résultat

$$\begin{aligned} a = b \text{ ou } a + (n-1)b = 0 &\implies M \notin \text{GL}_n(\mathbb{K}) \\ a \neq b \text{ et } a + (n-1)b \neq 0 &\implies M^{-1} = \frac{(2a + (n-2)b)I_n - M}{(a-b)(a + (n-1)b)}. \end{aligned}$$

Exercice 15.5

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ telles que $AB = 0_n$.

Montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \text{Tr}((A+B)^k) = \text{Tr}(A^k) + \text{Tr}(B^k).$$

indication

On pourra montrer par récurrence que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \text{Tr}((A+B)^k) = \text{Tr}(A^k + B^k),$$

en utilisant que $\text{Tr}(MN) = \text{Tr}(NM)$.

Exercice 15.6

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Montrer que

$$\text{Ker}(A^\top A) = \text{Ker}(A).$$

indication

♦ L'inclusion \supseteq se fait sans difficulté.

♦ Pour \subseteq , on pourra d'abord établir que

$$\text{Tr}(B^\top B) = 0 \implies B = 0_n.$$

Exercice 15.7

On pose, pour $\theta \in \mathbb{R}$,

$$R(\theta) := \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

1. Soient $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$.
Montrer que $R(\theta_1)$ et $R(\theta_2)$ commutent.
2. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$.
Calculer la matrice $R(\theta)^n$.

indication

On utilisera les relations donnant $\cos(a+b)$ et $\sin(a+b)$.

résultat

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad R^n = \begin{pmatrix} \cos(n\theta) & -\sin(n\theta) \\ \sin(n\theta) & \cos(n\theta) \end{pmatrix}.$$

Exercice 15.8

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient $A, B \in M_n(\mathbb{R})$.
Résoudre l'équation en $X \in M_n(\mathbb{R})$

$$X = \text{Tr}(X)A + B.$$

indication

On raisonnera par analyse-synthèse, en passant d'abord l'équation à la trace pour distinguer différents cas.

résultat

En notant \mathcal{S} l'ensemble des solutions de l'équation,

$$\begin{cases} \text{Tr}(A) = 1, \text{Tr}(B) \neq 0 & \implies \mathcal{S} = \emptyset \\ \text{Tr}(A) = 1, \text{Tr}(B) = 0 & \implies \mathcal{S} = \{\lambda A + B ; \lambda \in \mathbb{R}\} \\ \text{Tr}(A) \neq 1 & \implies \mathcal{S} = \left\{ \frac{\text{Tr}(B)}{1 - \text{Tr}(A)} A + B \right\}. \end{cases}$$

Exercice 15.9

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$A + A^{-1} = I_n.$$

Calculer, pour $k \in \mathbb{N}$, $A^k + A^{-k}$.

indication

On commence par calculer $A^k + A^{-k} = (A^k + A^{-k})I_n$ et, en posant $B_k = A^k + A^{-k}$, on détermine une relation de récurrence vérifiée par $(B_k)_k$.
On montre ensuite que $B_k = \lambda_k I_n$ et on détermine λ_k à l'aide des techniques habituelles sur les suites.

résultat

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad A^k + A^{-k} = 2 \cos\left(\frac{k\pi}{3}\right) I_n.$$

Exercice 15.10

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient $A, B, C \in M_n(\mathbb{K})$.
Montrer que

$$\left. \begin{array}{l} AC = CA \\ AB - BA = C^T \end{array} \right\} \implies AB = BA.$$

indication

On multipliera la relation par C et on utilisera que $\text{Tr}(MN) = \text{Tr}(NM)$.