

# Arithmétique des polynômes

On désignera par  $\mathbb{K}$  l'ensemble  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

## QCOP ARIPOL.1



Soit  $P \in \mathbb{K}[X]$  de degré 3, dont on note  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{C}$  ses racines complexes.

1. Énoncer et démontrer les relations coefficients racines pour  $P$ .

2. On prend  $P = X^3 + X + 1$ . Calculer  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$  et  $\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\alpha_3}$ .

## QCOP ARIPOL.2



1. Énoncer les relations coefficients racines pour un polynôme  $P \in \mathbb{K}[X]$  de degré  $n \in \mathbb{N}^*$ .

2. Les écrire explicitement pour un polynôme de degré 2, 3 et 4.

3. Soit  $P$  un polynôme de degré 2 tel que  $P(1) = 0$ .

Le polynôme  $P$  admet-il une autre racine réelle? Si oui, l'exprimer en fonction des coefficients de  $P$ .

## QCOP ARIPOL.3



1. Énoncer la formule de Taylor pour les polynômes.

2. Énoncer et démontrer la caractérisation de la multiplicité des racines d'un polynôme par les dérivées successives.

3. Soit  $P \in \mathbb{K}[X]$  tel que 0 est racine de  $P'$  d'ordre 3.

a) Le nombre 0 est-il nécessairement racine de  $P$ ?

b) Si 0 est racine de  $P$ , que dire de la multiplicité de 0 en tant que racine de  $P$ ?

## QCOP ARIPOL.4



1. Énoncer le théorème de Bézout dans  $\mathbb{K}[X]$ .

2. Soient  $P, Q, R \in \mathbb{K}[X]$ . Montrer que :

$$\left. \begin{array}{l} P \wedge R = 1 \\ Q \wedge R = 1 \end{array} \right\} \implies (PQ) \wedge R = 1.$$

3. Soient  $P, Q \in \mathbb{K}[X]$  tels que  $P \wedge Q = 1$ .

Montrer que :

$$\begin{cases} \forall k \in \mathbb{N}, & P^k \wedge Q = 1 \\ \forall k, \ell \in \mathbb{N}, & P^k \wedge Q^\ell = 1. \end{cases}$$

### QCOP ARIPOL.5



Soit  $P \in \mathbb{K}[X]$ .

1. Donner la définition de «  $P$  est irréductible dans  $\mathbb{K}[X]$  ».
2. On suppose que  $P$  est irréductible dans  $\mathbb{K}[X]$ . Montrer que
$$P \text{ possède une racine dans } \mathbb{K} \iff \deg(P) = 1.$$
3. On suppose que  $\deg(P) \leq 3$ . Montrer que
$$P \text{ n'a pas de racine dans } \mathbb{K} \implies P \text{ est irréductible dans } \mathbb{K}[X].$$

*On pourra raisonner par contraposée.*
4. Le résultat précédent reste-t-il vrai si  $\deg(P) > 3$ ?

### QCOP ARIPOL.6



Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Soient  $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{K}$  deux à deux distincts.

1. Soient  $y_0, \dots, y_n \in \mathbb{K}$  quelconques.  
Montrer qu'il existe un unique  $L \in \mathbb{K}_n[X]$  tel que :
$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad L(x_i) = y_i.$$

*On pourra utiliser des arguments d'algèbre linéaire.*
2. **a)** Soit  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . Expliciter ce polynôme  $L$ , que l'on notera  $L_k$ , lorsque :
$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad y_i = \delta_i^k.$$

**b)** Montrer que la famille  $(L_0, \dots, L_n)$  ainsi obtenue est une base de  $\mathbb{K}_n[X]$ .
3. Soit  $P \in \mathbb{K}_n[X]$ . Montrer que :

$$P = \sum_{k=0}^n P(x_k) L_k.$$