

# Trigonométrie

## Généralités

### QCOP TRG.1



- Définir la relation de congruence modulo  $2\pi$ .
- Soient  $x, x', y, y' \in \mathbb{R}$ . Soit  $\lambda \in \mathbb{R}^*$ .

a) Montrer que

$$\left. \begin{array}{l} x \equiv x' [2\pi] \\ y \equiv y' [2\pi] \end{array} \right\} \implies x + y \equiv x' + y' [2\pi].$$

b) Montrer que

$$x \equiv y [2\pi] \iff \frac{x}{\lambda} \equiv \frac{y}{\lambda} \left[ \frac{2\pi}{\lambda} \right] \iff \lambda x \equiv \lambda y [2\pi].$$

- Trouver quatre réels  $x, x', y, y'$  tels que

$$\begin{cases} x \equiv x' [2\pi] \\ y \equiv y' [2\pi] \end{cases} \quad \text{mais} \quad xy \not\equiv x'y' [2\pi].$$

### QCOP TRG.2 ★



- Définir le cercle trigonométrique, ainsi que  $\cos(\theta)$  et  $\sin(\theta)$  pour  $\theta \in \mathbb{R}$ .
- Montrer que  $\sin(\cdot)$  est une fonction impaire.
- Montrer que :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad |\sin(\theta)| \leq 1.$$

- a) Montrer que :

$$\forall \theta \in [1, +\infty[, \quad \sin(\theta) \leq \theta.$$

b) Montrer, à l'aide d'une étude de fonction, que :

$$\forall \theta \in [0, 1], \quad \sin(\theta) \leq \theta.$$

c) Montrer que  $\theta \mapsto |\sin(\theta)|$  est une fonction paire.

d) En déduire que :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad |\sin(\theta)| \leq |\theta|.$$

## Formules de trigonométrie

### QCOP TRG.3



1. Soient  $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$ . Écrire les formules donnant  $\cos(\theta + \theta')$ ,  $\sin(\theta + \theta')$  et  $\cos(2\theta)$ .
2. Calculer, pour  $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$ ,  $\tan(\theta + \theta')$ , puis  $\tan(2\theta)$ .
3. Soit  $\theta \in \mathbb{R}$ . On pose  $t := \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$ . Montrer que

$$\cos(\theta) = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad \sin(\theta) = \frac{2t}{1 + t^2} \quad \text{et} \quad \tan(\theta) = \frac{2t}{1 - t^2}.$$

### QCOP TRG.4



1. Soient  $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$ . Écrire les formules donnant  $\cos(\theta + \theta')$  et  $\cos(\theta - \theta')$ .
2. Soient  $p, q \in \mathbb{R}$ . Montrer que
$$\cos(p) + \cos(q) = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right).$$
3. Soit  $\theta \in \mathbb{R}$ . Soit  $n \in \mathbb{N}$ .  
On pose  $X := \cos(\theta)$ . On définit  $T_n(\cos(\theta)) := \cos(n\theta)$ .  
Montrer que  $T_{n+2}(X) + T_n(X) = 2X T_{n+1}(X)$ .

## Fonctions trigonométriques

### QCOP TRG.5



1. Donner l'allure des courbes représentatives des fonctions  $\sin(\cdot)$  et  $\cos(\cdot)$ .
2. On admet que  $\frac{\sin(\theta)}{\theta} \xrightarrow{\theta \rightarrow 0} 1$ .
  - a) Montrer que  $\frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\frac{\theta}{2}} \xrightarrow{\theta \rightarrow 0} \frac{1}{2}$ .
  - b) En déduire que  $\frac{\cos(\theta) - 1}{\theta} \xrightarrow{\theta \rightarrow 0} 0$ .
3. Montrer que  $\sin(\cdot)$  et  $\cos(\cdot)$  sont deux fois dérivables et préciser leur dérivée, puis leur dérivée seconde.

### QCOP TRG.6



1. Définir la fonction  $\theta \mapsto \tan(\theta)$  et préciser son domaine de définition  $\mathcal{D}_{\tan}$ .
2. Donner l'allure de la courbe représentative de  $\tan(\cdot)$ .
3. Étudier la parité et la périodicité de  $\tan(\cdot)$ .
4. Montrer que  $\tan(\cdot)$  est dérivable sur  $\mathcal{D}_{\tan}$  et exprimer  $\tan'$  en fonction de  $\cos^2$  puis en fonction de  $\tan^2$ .