Fonctions usuelles

QCOP FCT.1

Définir la fonction valeur absolue.

Soient $x \in \mathbb{R}$. Soit $a \geqslant 0$. Compléter et démontrer les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} |x| \leqslant a &\iff \cdots, \\ |x| \geqslant a &\iff \cdots. \end{aligned}$$

Soient $a, b \in \mathbb{R}$.

(a) Montrer que

$$\max(a, b) = \frac{a + b + |a - b|}{2}.$$

(b) Donner une expression analogue de $\min(a, b)$.

QCOP FCT.2

Définir les fonctions cosh et sinh, donner l'allure de leur courbe représentative et leur dérivée.

Soient $A, B, \lambda \in \mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On définit

$$y(x) := Ae^{\lambda x} + Be^{-\lambda x}.$$

(a) Calculer $y''(x) - \lambda^2 y(x)$.

(b) Déterminer $C, D \in \mathbb{R}$ tels que

$$y(x) = C\cosh(\lambda x) + D\sinh(\lambda x).$$

QCOP FCT.3

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

Définir « f est croissante sur I » et « f est strictement croissante sur I ».

On suppose f strictement croissante. Montrer que

$$\forall x, y \in I, \quad x < y \iff f(x) < f(y).$$

Montrer que le résultat précédemment établi est faux si l'on ne suppose f que croissante.

QCOP FCT.4

Soient $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions.
Définir « $f(x) = \underset{x \to +\infty}{o}\big(g(x)\big)$ ».

(a) Montrer que

$$\forall x \geqslant 1, \quad \ln(x) \leqslant 2\sqrt{x}.$$

(b) Montrer que $\dfrac{\ln(x)}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$.

(c) Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que

$$\ln(x)^b = \underset{x \to +\infty}{o}(x^a).$$

Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que

$$\frac{x^a}{(e^x)^b} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0, \quad x^a \ln(x)^b \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0 \quad \text{et} \quad (e^x)^a x^b \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0.$$