Variables aléatoires

Dans toute la fiche, $\big(\Omega, \mathbb{P}(\cdot)\big)$ désigne un espace probabilisé fini.

Lois usuelles

QCOP VA.1

Compléter le tableau suivant.

	support $X[\Omega]$	$\mathbb{P}(X = k)$, $k \in X[\Omega]$	espérance $\mathbb{E}[X]$	variance $\mathbb{V}[X]$
$X \sim \mathscr{U}\big([\![a, b]\!]\big)$ $a, b \in \mathbb{N}$				
$X \sim \mathscr{B}(p)$ $p \in [0, 1]$				
$X \sim \mathscr{B}(n, p)$ $n \in \mathbb{N}$, $p \in [0, 1]$				

On détaillera les calculs des espérances et des variances.

Espérance, variance, covariance

QCOP VA.2

Soit X une variable aléatoire réelle.

- Définir l'espérance de X, notée $\mathbb{E}[X]$.

Les questions qui suivent sont indépendantes.

- **(a)** Énoncer le théorème de transfert et la formule de transfert.
  (b) En déduire une formule de calcul de $\mathbb{E}[X^2]$.
- Soit Y une variable aléatoire indépendante de X. Que vaut $\mathbb{E}[XY]$?
- Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $X[\Omega] \subset [\![0, N]\!]$.

  (a) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X \geqslant k) - \mathbb{P}(X \geqslant k + 1)$.

  (b) En déduire que $\mathbb{E}[X] = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} \mathbb{P}(X \geqslant k)$.

QCOP VA.3

Soit X une variable aléatoire réelle.

- Définir la variance de X, notée $\mathbb{V}[X]$, à l'aide d'une espérance.
- Montrer que

$$\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2.$$

- On suppose que $X[\Omega] = \{0, 1\}$.
  Déterminer $\mathbb{V}[X]$.

QCOP VA.4

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles.

- Définir la covariance de X et Y, notée $\mathrm{Cov}(X, Y)$.
- À l'aide de $\lambda \mapsto \mathbb{V}[\lambda X + Y]$, montrer que

$$\left|\mathrm{Cov}(X, Y)\right| \leqslant \sqrt{\mathbb{V}[X]\mathbb{V}[Y]}.$$

- Montrer que, si X et Y suivent chacune une loi de Bernoulli,

$$\left|\mathrm{Cov}(X, Y)\right| \leqslant \frac{1}{4}.$$

QCOP VA.5

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles.

- Donner la définition de « X et Y sont corrélées » et de « X et Y sont décorrélées ».
- Exprimer la covariance de X et de Y, notée $\mathrm{Cov}(X, Y)$ en fonction de $\mathbb{E}[X]$, $\mathbb{E}[Y]$ et $\mathbb{E}[XY]$.
- Compléter et démontrer :

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = 0 \quad \ldots \quad X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes.}$$

- Justifier que l'implication réciproque est fausse.

Inégalités probabilistes

QCOP VA.6

- Énoncer et démontrer l'inégalité de Markov.
- Soit X une variable aléatoire réelle.
  Soit $t > 0$. Soit $a > 0$.

  (a) Montrer que

$$(X \geqslant a) = \left(e^{tX} \geqslant e^{ta}\right).$$

  (b) En déduire que

$$\mathbb{P}(X \geqslant a) \leqslant \frac{\mathbb{E}[e^{tX}]}{e^{ta}}.$$

QCOP VA.7

- Énoncer et démontrer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
- Soit X une variable aléatoire réelle d'espérance μ et de variance σ^2. Soit $\alpha > 0$.

  (a) Montrer que

$$\mathbb{P}\left(|X - \mu| \geqslant \alpha\sigma\right) \leqslant \frac{1}{\alpha^2}.$$

  (b) En déduire que

$$\mathbb{P}\left(\mu - \alpha\sigma < X < \mu + \alpha\sigma\right) \geqslant 1 - \frac{1}{\alpha^2}.$$