Nombres complexes

Partie réelle, partie imaginaire

QCOP CPLX.1

1. Soit $z \in \mathbb{C}$.

   a) Définir $\mathfrak{Re}(z)$ et $\mathfrak{Im}(z)$.

   b) Exprimer ces quantités en fonction de z et $\overline{z}$.

2. Soit $z \in \mathbb{C}$. Compléter et démontrer les équivalences suivantes :
$$z + \overline{z} = 0 \iff z \in \dots \quad \text{et} \quad z - \overline{z} = 0 \iff z \in \dots .$$

3. On admet que
$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad e^{ia} + e^{ib} = 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right) e^{i\frac{a+b}{2}}.$$
Déterminer $\left\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; e^{ia} + e^{ib} \in \mathbb{R}\right\}$.

Inégalité triangulaire

QCOP CPLX.2

Soient $z, z' \in \mathbb{C}$.

1. Montrer que
$$\mathfrak{Re}(z) \leqslant |z| \quad \text{et} \quad \mathfrak{Im}(z) \leqslant |z|.$$
2. Montrer que
$$|z + z'|^2 = |z|^2 + 2\,\mathfrak{Re}\left(z\overline{z'}\right) + |z'|^2.$$
3. Montrer que
$$|z + z'| \leqslant |z| + |z'|.$$
4. Montrer que
$$\big||z| - |z'|\big| \leqslant |z - z'|.$$

QCOP CPLX.3 ★

1. Énoncer l'inégalité triangulaire complexe.
2. Soient $z, z' \in \mathbb{C}$.
Compléter et démontrer :
$$|z + z'| = |z| + |z'| \iff \dots .$$
3. Soient A, B et C trois points du plan.
Montrer que A, B et C sont alignés dans cet ordre si, et seulement si,
$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| + \left\|\overrightarrow{BC}\right\| = \left\|\overrightarrow{AC}\right\|.$$

Exponentielle complexe

QCOP CPLX.4

Soit $z \in \mathbb{C}$.

1. Exprimer le nombre e^z sous forme trigonométrique.
2. Déterminer le module et un argument de e^z.
3. Compléter et démontrer :
$$|e^z| = 1 \quad \iff \quad \dots .$$
4. Montrer que $\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$.

QCOP CPLX.5

1. Soit $Z \in \mathbb{C}^*$, de module $R > 0$ et d'argument principal $\theta \in \mathbb{R}$.
Écrire Z sous forme trigonométrique.
2. Soit $Z \in \mathbb{C}$. Déterminer
$$\left\{z \in \mathbb{C} \;\middle|\; e^z = Z\right\}.$$
3. Résoudre
$$e^z = 1 + i.$$

Racines de l'unité et équations polynomiales

QCOP CPLX.6

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$.

1. Définir l'ensemble $\mathbb{U}_n$.
2. Montrer que
$$\mathbb{U}_n = \left\{e^{\frac{2ik\pi}{n}} \;;\; k \in [\![0, n-1]\!]\right\}.$$
3. Calculer $\sum\limits_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega$ et $\prod\limits_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega$.

QCOP CPLX.7 ★

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$.

1. Définir et décrire l'ensemble $\mathbb{U}_n$.
2. Soit $Z \in \mathbb{C}^*$ que l'on écrit $Z = Re^{i\theta}$ avec $R > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
Décrire $A := \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = Z\}$.
3. Calculer $\sum\limits_{\omega \in A} \omega$ et $\prod\limits_{\omega \in A} \omega$.

QCOP CPLX.8

Soit $a \in \mathbb{C}$.

1. À l'aide de $\mathbb{U}_2$, justifier l'existence de $z \in \mathbb{C}$ tel que $z^2 = a$.
2. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $z^2 = a$.
On note $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $z = x + iy$.
   a) Compléter et démontrer :
$$z^2 = a \quad \iff \quad \begin{cases} x^2 - y^2 = \dots \\ x^2 + y^2 = \dots \\ \text{signe}(xy) = \dots . \end{cases}$$
   b) En déduire les expressions, sous forme algébrique, des valeurs possibles de z.

QCOP CPLX.9

Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$. On considère
$$az^2 + bz + c = 0. \qquad \text{(E)}$$

1. On note $\Delta := b^2 - 4ac$.
   a) Déterminer $\delta \in \mathbb{C}$ tel que $\delta^2 = \Delta$.
   b) Déterminer $u \in \mathbb{C}$ tel que
$$z \text{ vérifie (E)} \quad \iff \quad z^2 = u^2.$$
   c) En déduire les solutions de (E).
2. Soient $d_1, d_2 \in \mathbb{C}$. Comment peut-on calculer les solutions du système
$$\begin{cases} z_1 + z_2 = d_1 \\ z_1 \times z_2 = d_2 \end{cases} \quad ?$$