# Colle 11
## Polynômes

- ▶ Après votre colle, il vous est demandé de reprendre les exercices traités et de les rédiger sur feuille. Ce travail est à déposer dans la boîte en B013 avant mercredi prochain.
- ▶ Vous trouverez le sujet et des indications sur la page ci-contre.

### Exercice 11.1

Soit $P \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ un polynôme.

**1.** Soit $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ une racine complexe de $P$.

**(a)** Que dire de $\overline{a}$ ?

**(b)** Montrer que $(X-a)(X-\overline{a}) \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ et qu'il existe $Q \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ tel que :
$$P = (X-a)(X-\overline{a})Q.$$

**2.** On suppose $P$ non constant.

**(a)** Le polynôme $P$ possède-t-il nécessairement une racine réelle ?

**(b)** Montrer que, si $\deg(P)$ est impair, alors $P$ possède une racine réelle.

### Exercice 11.2

Soit $n \geqslant 3$. On pose :
$$A := \mathrm{X}^n \quad \text{et} \quad B := \mathrm{X}^3 + \mathrm{X}^2 - 2\mathrm{X}.$$
Déterminer le reste dans la division euclidienne de $A$ par $B$.

### Exercice 11.3

Soit $P := \mathrm{X}^3 + 3\mathrm{X}^2 + 2\mathrm{X} - 1$.
On note $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ses trois racines complexes.
Calculer $\displaystyle\sum_{\substack{1 \leqslant i,j \leqslant 3 \\ i \neq j}} \frac{\alpha_i}{\alpha_j}$.

### Exercice 11.4

Soit $P \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$. Soit $a \in \mathbb{K}$. Montrer que :
$$\left[ \exists Q \in \mathbb{K}[\mathrm{X}] : \begin{cases} P = (\mathrm{X}-a)^3 Q \\ Q(a) \neq 0 \end{cases} \right] \iff \begin{cases} P(a) = P'(a) = P''(a) = 0 \\ P^{(3)}(a) \neq 0. \end{cases}$$

### Exercice 11.5

Soit $P \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \neq b$.
On suppose que :

- ◆ le reste de la division euclidienne de $P$ par $\mathrm{X} - a$ vaut $1$ ;
- ◆ le reste de la division euclidienne de $P$ par $\mathrm{X} - b$ vaut $-1$.

Que vaut le reste de la division euclidienne de P par $(\mathrm{X}-a)(\mathrm{X}-b)$ ?

## Exercice 11.6

Montrer qu'il n'existe pas d'élément $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad P(t) = \mathrm{e}^t.$$

## Exercice 11.7

Déterminer le noyau du morphisme d'anneaux

$$\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P & \longmapsto & P\left(1+\sqrt{2}\right). \end{array} \right.$$

## Exercice 11.8

Soit $P := a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n \in \mathbb{C}[X]$.

**1.** Soit $r > 0$. Soit $k \in \mathbb{N}$. Calculer :

$$\int_0^{2\pi} P(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}\,\mathrm{d}t.$$

**2.** On suppose qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \left|P(z)\right| \leqslant M.$$

Montrer que $P$ est constant.

## Exercice 11.9

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$.

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $P$ pour que l'application

$$\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & P(z) \end{array} \right.$$

soit surjective.

## Exercice 11.10

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts. Soient $y_1, \dots, y_n \in \mathbb{K}$.

Montrer qu'il existe un unique polynôme $\mathrm{L} \in \mathbb{K}[X]$ tel que :

$$\begin{cases} \deg(\mathrm{L}) = n-1 \\ \forall k \in [\![1, n]\!], \quad \mathrm{L}(x_k) = y_k. \end{cases}$$

## Exercice 11.11

**1.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient $P_0, \dots, P_n \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0_{\mathbb{K}[X]}\}$ tels que $0 \leqslant \deg(P_0) < \cdots < \deg(P_n)$.

Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$. Montrer que :

$$\alpha_0 P_0 + \cdots + \alpha_n P_n = 0_{\mathbb{K}[X]} \quad \Longrightarrow \quad \alpha_0 = \cdots = \alpha_n = 0.$$

**2.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $P \in \mathbb{K}_n[X]$. Montrer que $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(0)}{k!} X^k$.

## Exercice 11.12

> **Définition. Idéal d'un anneau commutatif.**
> *Soit $(A, +, \times)$ un anneau commutatif. Soit $\mathscr{I} \subset A$.*
> *On dit que $\mathscr{I}$ est un idéal de $A$ lorsque :*
> - *$(\mathscr{I}, +)$ est un sous-groupe de $(A, +)$ ;*
> - *$\forall a \in A, \quad \forall x \in \mathscr{I}, \quad a \times x \in \mathscr{I}$.*

Montrer que tout idéal de $\mathbb{K}[X]$ est de la forme

$$P_0\mathbb{K}[X] := \left\{P_0 Q \ ; \ Q \in \mathbb{K}[X]\right\}$$

où $P_0 \in \mathbb{K}[X]$.