

# Séries numériques

On désignera par  $\mathbb{K}$  l'ensemble  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

## Premiers résultats, deux séries de référence

### QCOP SER.1

Soit  $(u_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ .

☐ Donner la définition de « la série  $\sum_n u_n$  est convergente ».

✎ Montrer que

$$\sum_n u_n \text{ converge} \implies u_n \longrightarrow 0.$$

🔗 Étudier la nature des séries suivantes :

$$\sum_{n \geq 0} \arctan(12n!) \quad \text{et} \quad \sum_{n \geq 1} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right).$$

### QCOP SER.3

Soit  $a \in \mathbb{C}$ .

☐ Compléter :

$$a^n \longrightarrow 0 \iff \dots$$

☐ Soit  $N \in \mathbb{N}$ . Rappeler l'expression de  $\sum_{k=0}^N a^k$  pour  $a \neq 1$ .

✎ Montrer que

$$\sum_n a^n \text{ converge} \iff |a| < 1.$$

🔗 On suppose que  $|a| < 1$ . Déterminer

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a^n \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} a^n.$$

### QCOP SER.2

Soit  $(u_n)_n$  une suite de nombres réels positifs.

On pose, pour  $N \in \mathbb{N}$ ,  $U_N := \sum_{n=0}^N u_n$ .

☐ Quelle est la monotonie de  $(U_N)_N$  ?

✎ Montrer que

$$\sum_n u_n \text{ converge} \iff (U_N)_N \text{ est majorée.}$$

🔗 Ceci reste-il vrai si l'on ne suppose plus que  $(u_n)_n$  est à valeurs positives ?

### QCOP SER.4

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ .

✎ (a) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Calculer

$$\sum_{k=0}^n (u_{k+1} - u_k).$$

(b) En déduire que  $\sum_n (u_{n+1} - u_n)$  converge si, et seulement si,  $(u_n)_n$  converge.

🔗 On suppose que

$$u_{n+1} - u_n \longrightarrow 0.$$

Montrer que  $\sum_n (u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n)$  est convergente.

## Théorèmes de comparaison

### QCOP SER.5

Soit  $N_0 \in \mathbb{N}$ . Soient  $(a_n)_{n \geq N_0}, (b_n)_{n \geq N_0}$  deux suites de nombres réels positifs.  
On pose, pour  $N \geq N_0$ ,

$$A_N := \sum_{n=N_0}^N a_n \text{ et } B_N := \sum_{n=N_0}^N b_n.$$

☐ Compléter :

$$\sum_{n \geq N_0} a_n \text{ converge} \iff (A_N)_{N \geq N_0} \dots$$

✎ On suppose que

$$\left\{ \begin{array}{l} \exists N_1 \geq N_0 : \forall n \geq N_1, a_n \leq b_n \\ \sum_{n \geq N_0} b_n \text{ converge.} \end{array} \right.$$

(a) Montrer que  $(A_N)_{N \geq N_0}$  est majorée.

(b) En déduire que  $\sum_{n \geq N_0} a_n$  converge.

(c) Montrer que

$$\sum_{n=N_1}^{+\infty} a_n \leq \sum_{n=N_1}^{+\infty} b_n.$$

### QCOP SER.7

☐ Énoncer la règle de comparaison pour les séries à termes positifs.

✎ Soient  $(u_n)_n, (v_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ .

Montrer que

$$\left. \begin{array}{l} u_n = o(v_n) \\ \sum_n |v_n| \text{ converge} \end{array} \right\} \implies \sum_n |u_n| \text{ converge.}$$

✘ Soit  $\sum_n u_n$  une série numérique.

Montrer que

$$n^2 u_n \longrightarrow 0 \implies \sum_n u_n \text{ converge.}$$

### QCOP SER.6

Soient  $(a_n)_n, (b_n)_n$  deux suites de nombres réels positifs telles que

$$a_n \sim b_n.$$

☐ Rappeler la règle de comparaison pour les séries à termes positifs.

✎ Montrer qu'il existe  $N_1 \in \mathbb{N}$  tel que

$$\exists N_1 \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_1, \frac{1}{2} b_n \leq a_n \leq \frac{3}{2} b_n.$$

✎ Montrer que  $\sum_n a_n$  et  $\sum_n b_n$  sont de même nature.

✘ Ce résultat reste-il valable si l'on ne suppose plus  $(a_n)_n$  et  $(b_n)_n$  à valeurs positives ?

### QCOP SER.8

☐ Énoncer la règle de comparaison pour les séries à termes positifs.

✎ Soient  $(u_n)_n, (v_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ .

Montrer que

$$\left. \begin{array}{l} u_n = O(v_n) \\ \sum_n |v_n| \text{ converge} \end{array} \right\} \implies \sum_n |u_n| \text{ converge.}$$

✘ Soit  $\sum_n u_n$  une série numérique telle que  $(n^2 u_n)_n$  est bornée.

Montrer que  $\sum_n u_n$  converge.

## Comparaison série-intégrale

### QCOP SER.9

✎ Soit  $f : [1, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue et décroissante.

Soient  $m, n \in \mathbb{N}^*$  tels que  $m \geq n$ .

Montrer que

$$\int_n^m f(t) dt + f(m) \leq \sum_{k=n}^m f(k) \leq f(n) + \int_n^m f(t) dt.$$

✂ On note, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $H_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ .

(a) Montrer que  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$  diverge.

(b) Montrer que  $H_n \sim \ln(n)$ .

### QCOP SER.10

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

✎ On suppose que  $\alpha \leq 0$ . Montrer que  $\sum_n \frac{1}{n^\alpha}$  diverge.

✎ On suppose que  $\alpha > 0$ .

(a) Soit  $N \in \mathbb{N}^*$ . Montrer que

$$I_N + \frac{1}{N^\alpha} \leq \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^\alpha} \leq 1 + I_N,$$

$$\text{où } I_N := \int_1^N \frac{1}{t^\alpha} dt.$$

*On n'utilisera pas une « formule toute faite » de comparaison série-intégrale mais on l'établira dans ce cas particulier.*

(b) En déduire la nature de  $\sum_n \frac{1}{n^\alpha}$  en distinguant les cas

$$\alpha \in ]0, 1[, \quad \alpha = 1, \quad \alpha > 1.$$

## Convergence absolue

### QCOP SER.11

Soit  $\sum_n u_n$  une série numérique.

☐ Définir «  $\sum_n u_n$  est absolument convergente ».

✎ Montrer que, si  $\sum_n u_n$  est absolument convergente, alors  $\sum_n u_n$  est convergente.

*On fera d'abord la preuve dans le cas où  $(u_n)_n$  est à valeurs réelles, puis on utilisera le résultat établi pour en déduire le cas où  $(u_n)_n$  est à valeurs complexes.*

✎ Montrer que la réciproque est fausse.

✎ Écrire la contraposée du résultat démontré.

## Séries alternées

### QCOP SER.12

Soit  $(a_n)_n$  une suite de nombres réels positifs, décroissante et de limite nulle.

On pose, pour  $N \in \mathbb{N}$ ,  $S_N := \sum_{n=0}^N (-1)^n a_n$ .

✎ (a) Montrer que  $(S_{2N})_N$  et  $(S_{2N+1})_N$  sont adjacentes.

(b) Compléter :

$$\begin{cases} \sum_n (-1)^n a_n \dots \\ \forall N \in \mathbb{N}, \quad \dots \leq \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n \leq \dots \end{cases}$$

(c) En déduire que  $\left| \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n \right| \leq a_0$ .

✎ On suppose que  $\sum_n (-1)^n a_n$  est convergente. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k a_k \right| \leq a_{n+1}.$$