

Continuité

Généralités et grands théorèmes

QCOP CONT.1

Soit I un intervalle de \mathbb{R} . Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $a \in I$.

1. Donner la définition de « f est continue en a ».
2. Énoncer et démontrer le théorème de caractérisation séquentielle de la continuité.
3. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in I^{\mathbb{N}}$. Soit $\ell \in I$. On suppose que f est continue sur I .

a) Montrer que :

$$u_n \rightarrow \ell \implies f(u_n) \rightarrow f(\ell).$$

b) On suppose que $f[I] = I$ et que :

$$\begin{cases} u_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$$

Montrer que :

$$u_n \rightarrow \ell \implies f(\ell) = \ell.$$

QCOP CONT.2



1. Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires.

On admettra ses conséquences. Les applications suivantes sont indépendantes.

2. Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ une fonction continue. Montrer que :

$$\exists x_0 \in [0, 1] : f(x_0) = x_0.$$

On dit que x_0 est un point fixe de f .

3. Soit P un polynôme à coefficients réels.

- a) Montrer que, si le degré de P est impair, alors P admet au moins une racine réelle.
- b) Est-ce vrai si le degré de P est pair ?

QCOP CONT.3 ★

Soient $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$.

1. Montrer que f est bornée sur $[a, b]$ et atteint ses bornes.

2. Montrer que :

$$\begin{aligned} \forall x \in [a, b], \quad &f(x) < g(x) \\ &\Downarrow \\ &\sup_{x \in [a, b]} f(x) < \sup_{x \in [a, b]} g(x). \end{aligned}$$

3. Les résultats précédents restent-ils vrais si l'on étudie f et g sur un intervalle quelconque et non sur $[a, b]$?

Fonctions lipschitziennes, continuité uniforme

QCOP CONT.4



Soient $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions lipschitziennes.

1. Donner la définition de « f est lipschitzienne ».
2. a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que $\lambda f + g$ est lipschitzienne.
b) Montrer que $g \circ f$ est lipschitzienne.
3. a) En général, le produit $f \times g$ est-il lipschitzien ? Justifier.
b) On suppose f et g bornées. Montrer que $f \times g$ est lipschitzienne.
4. a) En général, a-t-on l'équivalence :

$$f \text{ est lipschitzienne} \iff [\exists C \geqslant 0 : \forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leqslant C|x|] ?$$

- b) Donner un ensemble de fonctions pour lesquelles l'implication directe est vraie.
c) Donner un ensemble de fonctions pour lesquelles l'implication réciproque est vraie.

QCOP CONT.5



Soit I un intervalle de \mathbb{R} .

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

1. Donner la définition de « f est uniformément continue sur I ».
2. On considère les trois assertions suivantes :
 - (i) f est continue sur I ;
 - (ii) f est uniformément continue sur I ;
 - (iii) f est lipschitzienne sur I .Énoncer et démontrer les implications les reliant.
3. Lesquelles des assertions précédentes sont vraies pour $f = \sqrt{\cdot}$ et $I = [0, 1]$?

QCOP CONT.6 *



Soit $[a, b]$ un segment de \mathbb{R} .

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$.

1. Que dire de f ? Quel théorème venez-vous d'énoncer ?
2. a) Écrire à l'aide de quantificateurs « f n'est pas uniformément continue sur $[a, b]$ ».
b) Aboutir à une contradiction à l'aide de la caractérisation séquentielle de la continuité.