

## Colle 2

### Raisonnements, ensembles

- Après votre colle, il vous est demandé de reprendre les exercices traités et de les rédiger sur feuille. Ce travail est à déposer dans la boîte en B013 avant mercredi prochain.
- Vous trouverez le sujet et des indications sur la page ci-contre.



## Raisonnements

### Exercice 2.1

Une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est dite polynomiale de degré  $n \in \mathbb{N}$  lorsque :

$$\exists a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R} : \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n.$$

Déterminer l'ensemble des fonctions polynomiales de degré 4 paires.

### Exercice 2.2

1. Déterminer les solutions  $r_1, r_2$  de l'équation

$$x^2 - \frac{1}{6}x - \frac{35}{6} = 0.$$

2. Soit  $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = \frac{1}{6}u_{n+1} + \frac{35}{6}u_n.$$

Montrer que :

$$\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} : \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n.$$

### Exercice 2.3

Soient  $p, q \in [1, +\infty[$  tels que  $p \leq q$ .

Soit  $r \in [p, q]$ .

Montrer que :

$$\exists \theta \in [0, 1] : \quad \frac{1}{r} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{q}.$$

### Exercice 2.4

Déterminer les solutions sur  $\mathbb{R}$  de l'équation  $\sqrt{21 - 4x} = x$ .

### Exercice 2.5

Soit  $a \in \mathbb{R}$ . On pose, pour  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) := ax$ . On suppose que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(f(x)) + f(x) = 2x.$$

1. Déterminer les valeurs possibles de  $a$ .
2. Montrer que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , il existe un unique couple  $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$  tels que :

$$f(x_1) = x_1, \quad f(x_2) = -2x_2 \quad \text{et} \quad x = x_1 + x_2.$$

## Ensembles

### Exercice 2.6

Soit  $E$  un ensemble.

Soient  $A, B, C$  trois parties de  $E$ .

Montrer que :

$$\left. \begin{array}{l} A \cup B = A \cup C \\ A \cap B = A \cap C \end{array} \right\} \iff B = C.$$

### Exercice 2.7

Soit  $E$  un ensemble.

Soient  $A, B, C$  trois parties de  $E$ .

Montrer que :

$$\left. \begin{array}{l} B \cup C \subset A \cap C \\ A \subset B \cap C \end{array} \right\} \iff A = B = C.$$

## Coefficients binomiaux

### Exercice 2.8

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $u_n := \frac{\sqrt{n+1}}{2^{2n}} \binom{2n}{n}$ .

Montrer que la suite  $(u_n^2)_n$  est monotone.

### Exercice 2.9

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{4^n}{2n} \leq \binom{2n}{n} \leq \frac{4^n}{2}.$$

### Exercice 2.10

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Déterminer  $u_n \in \mathbb{R}$  tel que :

$$\frac{\frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} - 1 \right) \cdots \left( \frac{1}{2} - (n-1) \right)}{n!} = u_n \binom{2n}{n}.$$