

Colle 11

Polynômes

- ▶ Après votre colle, il vous est demandé de reprendre les exercices traités et de les rédiger sur feuille. Ce travail est à déposer dans la boîte en B013 avant mercredi prochain.
- ▶ Vous trouverez le sujet et des indications sur la page ci-contre.



Exercice 11.1

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme.

1. Soit $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ une racine complexe de P .

- (a) Que dire de \bar{a} ?
- (b) En déduire l'existence d'un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $Q \mid P$.

2. On suppose P non constant.

- (a) Le polynôme P possède-t-il nécessairement une racine réelle ?
- (b) Montrer que, si $\deg(P)$ est impair, alors P possède une racine réelle.

Exercice 11.2

Soit $n \geq 3$. On pose :

$$A := X^n \quad \text{et} \quad B := X^3 + X^2 - 2X.$$

Déterminer le reste dans la division euclidienne de A par B .

Exercice 11.3

Soit $P := X^3 + 3X^2 + 2X - 1$.

On note $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ses trois racines complexes.

Calculer $\sum_{\substack{1 \leq i, j \leq 3 \\ i \neq j}} \frac{\alpha_i}{\alpha_j}$.

Exercice 11.4

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Soit $a \in \mathbb{K}$. Montrer que :

$$\left[\exists Q \in \mathbb{K}[X] : \begin{cases} P = (X - a)^3 Q \\ Q(a) \neq 0 \end{cases} \right] \iff \begin{cases} P(a) = P'(a) = P''(a) = 0 \\ P^{(3)}(a) \neq 0. \end{cases}$$

Exercice 11.5

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \neq b$.

On suppose que :

- ♦ le reste de la division euclidienne de P par $X - a$ vaut 1 ;
- ♦ le reste de la division euclidienne de P par $X - b$ vaut -1 .

Que vaut le reste de la division euclidienne de P par $(X - a)(X - b)$?

Exercice 11.6

Montrer qu'il n'existe pas d'élément $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad P(t) = e^t.$$

Exercice 11.8

Soit $P := a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n \in \mathbb{C}[X]$.

1. Soit $r > 0$. Soit $k \in \mathbb{N}$. Calculer :

$$\int_0^{2\pi} P(re^{it}) e^{-ikt} dt.$$

2. On suppose qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad |P(z)| \leq M.$$

Montrer que P est constant.

Exercice 11.7

Déterminer le noyau du morphisme d'anneaux

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{Z}[X] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ P & \longmapsto P(1 + \sqrt{2}). \end{cases}$$

Exercice 11.9

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$.

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur P pour que l'application

$$\begin{cases} \mathbb{C} & \longrightarrow \mathbb{C} \\ z & \longmapsto P(z) \end{cases}$$

soit surjective.

Exercice 11.10

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts. Soient $y_1, \dots, y_n \in \mathbb{K}$.

Montrer qu'il existe un unique polynôme $L \in \mathbb{K}[X]$ tel que :

$$\begin{cases} \deg(L) = n - 1 \\ \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad L(x_k) = y_k. \end{cases}$$

Exercice 11.11

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient $P_0, \dots, P_n \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0_{\mathbb{K}[X]}\}$ tels que $0 \leq \deg(P_0) < \dots < \deg(P_n)$.

Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$. Montrer que :

$$\alpha_0 P_0 + \dots + \alpha_n P_n = 0_{\mathbb{K}[X]} \implies \alpha_0 = \dots = \alpha_n = 0.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $P \in \mathbb{K}_n[X]$. Montrer que $P = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(0)}{k!} X^k$.

Exercice 11.12

Définition. Idéal d'un anneau commutatif.

Soit $(A, +, \times)$ un anneau commutatif. Soit $\mathcal{I} \subset A$.

On dit que \mathcal{I} est un idéal de A lorsque :

- $(\mathcal{I}, +)$ est un sous-groupe de $(A, +)$;
- $\forall a \in A, \quad \forall x \in \mathcal{I}, \quad a \times x \in \mathcal{I}$.

Montrer que tout idéal de $\mathbb{K}[X]$ est de la forme

$$P_0 \mathbb{K}[X] := \{P_0 Q ; Q \in \mathbb{K}[X]\}$$

où $P_0 \in \mathbb{K}[X]$.