

Fractions rationnelles

QCOP FRAC.1

On considère $F := \frac{X^4 + 1}{X^3 - 1} \in \mathbb{R}(X)$.

- 👁 Calculer la partie entière de F , que l'on notera E .
- 👁 (a) Factoriser $X^3 - 1$ dans $\mathbb{C}[X]$.
- (b) En déduire la forme de la décomposition en éléments simples de $F - E$ dans $\mathbb{C}(X)$, puis de F .
- 👁 (a) Factoriser $X^3 - 1$ dans $\mathbb{R}[X]$.
- (b) On fixe $A_1, A_2 \in \mathbb{R}[X]$ tels que

$$F = E + \frac{A_1}{X - 1} + \frac{A_2}{X^2 + X + 1}.$$

Déterminer $\deg(A_1)$ et $\deg(A_2)$.

QCOP FRAC.2

👁 On considère $F := \frac{1}{(X^2 - 1)^2} \in \mathbb{R}(X)$.

- (a) Déterminer les racines de $(X^2 - 1)^2$ et leur multiplicité.
- (b) Quelle est la forme de la décomposition en éléments simples de F ?
- (c) Par des arguments de parité, montrer qu'il reste à déterminer deux coefficients pour obtenir la décomposition de F .
- 👁 Donner la forme de la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle

$$\frac{X + 1}{(X - 1)^3(X - 2)}.$$

QCOP FRAC.3

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Soient $a_1, \dots, a_p \in \mathbb{C}$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{N}^*$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$. On pose

$$P := \lambda(X - a_1)^{\alpha_1} \dots (X - a_p)^{\alpha_p}.$$

✂ (a) Donner l'expression de P' .

(b) Déterminer $\beta_1, \dots, \beta_p \in \mathbb{R}$ tels que $\frac{P'}{P} = \sum_{k=1}^p \frac{\beta_k}{X - a_k}$.

✂ On suppose que $\alpha_1 = \dots = \alpha_p = 1$.

Calculer $\sum_{k=1}^p \frac{1}{a_k}$.