Techniques algébriques

QCOP TALG.1

- Définir $\binom{n}{k}$ pour $(n,k) \in \mathbb{N}^2$.
- Énoncer et démontrer la formule du binôme de Newton.
- Soient E et F deux ensembles finis.
  (a) Calculer $\mathrm{Card}\big(\mathscr{P}(E)\big)$.
  (b) Calculer $\mathrm{Card}\big(\mathscr{P}(E \times F)\big)$.

QCOP TALG.2

- Donner la relation de Pascal.
- Démontrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall k \in [\![0,n]\!], \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $k \in [\![0,n-1]\!]$. Calculer

$$\frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k+1}}.$$

QCOP TALG.3

- Énoncer et démontrer la formule de Pascal pour les coefficients binomiaux.
- Soient $n, p \in \mathbb{N}$. On considère

$$S := \sum_{k=0}^{n} \binom{p+k}{p}.$$

  (a) Représenter les termes de S sur le triangle de Pascal.
  (b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Simplifier

$$\binom{p+k+1}{p+1} - \binom{p+k}{p+1}.$$

  (c) Calculer S.

QCOP TALG.4

- Énoncer et démontrer la formule de Bernoulli.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$.

  On définit la fonction $P : x \longmapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$. Soit $c \in \mathbb{R}$ tel que $P(c) = 0$.

  Montrer que

$$\exists b_0, b_1, \dots, b_{n-1} \in \mathbb{R} : \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = (x-c)\sum_{k=0}^{n-1} b_k x^k.$$