

# Applications linéaires

On désignera par  $\mathbb{K}$  l'ensemble  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

## QCOP AL.1



Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels. Soit  $u \in L(E, F)$ .

1. Définir «  $u$  est une application linéaire de  $E$  dans  $F$  ».
2. Soient  $x, y \in E$  avec  $y \neq 0_E$ . Soit  $\lambda \in \mathbb{K}$ .

Entourer les égalités vraies et rayer celles n'ayant pas de sens.

$$u(0_E) = 0_F, \quad u^2(x) = u(x)^2, \quad u(\lambda y + x) = \lambda u(y) + u(x), \quad u(xy) = u(x)u(y).$$

3. Que dire d'une application linéaire constante ? Justifier.

## QCOP AL.2



Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels.  
Soit  $u \in L(E, F)$ .

1. Donner une condition nécessaire et suffisante d'injectivité de  $u$ .
2. On suppose  $u$  injective. Soit  $\mathcal{F}$  une famille libre  $E$ . Montrer que  $u[\mathcal{F}]$  est libre dans  $F$ .
3. Écrire la contraposée du résultat démontré.
4. Le résultat est-il toujours vrai si  $u$  n'est plus supposée injective ?

## QCOP AL.3



Soit  $E$  un espace vectoriel. Soient  $u, v \in L(E)$ .

1. Définir les ensembles  $\text{Ker}(u)$  et  $\text{Im}(u)$ .  
Quelle structure ont-ils par rapport à  $E$  ?
2. Soit  $k \in \mathbb{N}$ . Compléter par un symbole «  $\subset$  » ou «  $\supset$  » et démontrer les inclusions :  

$$\text{Ker}(u^k) \cdots \text{Ker}(u^{k+1})$$

$$\text{Im}(u^k) \cdots \text{Im}(u^{k+1}).$$
3. Compléter par un symbole «  $\subset$  » ou «  $\supset$  » et démontrer les inclusions :  

$$\text{Ker}(u) \cap \text{Ker}(v) \cdots \text{Ker}(u + v)$$

$$\text{Im}(u) + \text{Im}(v) \cdots \text{Im}(u + v).$$

## QCOP AL.4 ★



Soit  $E$  un espace vectoriel.  
Soit  $x \in E$ . Soit  $\lambda \in \mathbb{K}$ .

1. Compléter :

$$\lambda x = 0_E \iff \dots$$

2. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Soient  $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ .  
Soit  $u \in L(E)$ . On note :

$$P := \sum_{k=0}^n a_k X^k \text{ et } P(u) := \sum_{k=0}^n a_k u^k.$$

On suppose que  $u(x) = \lambda x$ .

- a) Justifier que  $P(u) \in L(E)$ .
- b) Montrer que :  

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad u^k(x) = \lambda^k x.$$
- c) En déduire que :  

$$(P(u))(x) = P(\lambda)x.$$
- d) On suppose  $x \neq 0_E$ .  
Que dire si  $P(u) = 0_{L(E)}$  ?

**QCOP AL.5**

Soit  $E$  un espace vectoriel. Soient  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$  tels que :

$$E = F \oplus G.$$

On note  $p$  le projecteur sur  $F$  parallèlement à  $G$ .

1. Définir l'application  $p$ .
2. Montrer que  $p \circ p = p$ .
3. Montrer que  $E = \text{Ker}(p) \oplus \text{Im}(p)$ .
4. **a)** L'application  $-p$  est-elle un projecteur de  $E$  ?  
**b)** L'ensemble des projecteurs de  $E$  est-il un sous-espace vectoriel de  $L(E)$  ?

**QCOP AL.6**

Soit  $E$  un espace vectoriel. Soient  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$  tels que :

$$E = F \oplus G.$$

On note  $s$  la symétrie par rapport à  $F$  parallèlement à  $G$ .

1. Définir l'application  $s$ .
2. Montrer que  $s \circ s = \text{Id}_E$ .
3. Montrer que :  
$$E = \text{Ker}(s - \text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(s + \text{Id}_E).$$
4. **a)** L'application  $0_{L(E)}$  est-elle une symétrie de  $E$  ?  
**b)** L'ensemble des symétries de  $E$  est-il un sous-espace vectoriel de  $L(E)$  ?

**QCOP AL.7**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Soit  $H \subset E$ .

1. Donner la définition de «  $H$  est un hyperplan de  $E$  ».
2. Soit  $\varphi \in L(E, \mathbb{K})$ . Montrer que  $\text{Ker}(\varphi)$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .
3. Soient  $H_1$  et  $H_2$  deux hyperplans de  $E$ . Quelle structure a l'ensemble  $H_1 \cap H_2$  par rapport à  $E$  ?
4. Montrer que les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels.

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0 \right\}, \quad \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 3x + 2y = 0 \end{cases} \right\},$$

$$\left\{ (u_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid u_n \rightarrow 0 \right\}, \quad \left\{ M \in M_n(\mathbb{K}) \mid \text{Tr}(M) = 0 \right\}.$$

**QCOP AL.8 ★**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Soit  $H$  un sous-espace vectoriel de  $E$ .

1. Soit  $\varphi$  une forme linéaire non nulle sur  $E$ . Montrer que  $\varphi$  est surjective.
2. Soit  $H$  un hyperplan de  $E$ .  
**a)** Donner la définition de «  $H$  est un hyperplan de  $E$  ».  
**b)** On se place dans le cas où  $E = \mathbb{K}^n$  avec  $n \in \mathbb{N}^*$ . Montrer que :  
$$\exists (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{(0, \dots, 0)\} : H = \{(x_1, \dots, x_n) \in E \mid a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0_E\}.$$
3. **a)** Montrer que, si  $H$  est un hyperplan, alors pour tout  $x_0 \in E \setminus H$ ,  $E = H \oplus \text{Vect}\{x_0\}$ .  
**b)** Sans justification, a-t-on une réciproque ?
4. Soient  $\varphi$  et  $\psi$  deux formes linéaires sur  $E$ . Montrer que :  
$$\text{Ker}(\varphi) = \text{Ker}(\psi) \iff [\exists \lambda \in \mathbb{K} : \varphi = \lambda \psi].$$