

AL. Applications linéaires

QCOP AL.1

1. **Résultat.** $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \forall x, y \in E, \quad u(\lambda x + y) = \lambda u(x) + u(y)$.
2. Les égalités « $u^2(x) = u(x)^2$ » et « $u(xy) = u(x)u(y)$ » n'ont aucun sens car un espace vectoriel n'a pas de loi de multiplication interne.
3. **Résultat.** Une application linéaire constante est nulle.
Utiliser que $u(0_E) = 0_F$.

QCOP AL.2

1. **Résultat.** u est injective $\iff \text{Ker}(u) = \{0_E\}$.
2. a) Écrire $\mathcal{F} = (e_1, \dots, e_n)$, de sorte que $u[\mathcal{F}] = (u(e_1), \dots, u(e_n))$.
En se donnant $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que $\sum_{i=1}^n \lambda_i u(e_i) = 0_F$, utiliser la linéarité de u pour montrer que $\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \in \text{Ker}(f)$, puis conclure en utilisant la liberté de \mathcal{F} .
b) **Résultat.** Soit \mathcal{F} une famille libre de E . Si $u[\mathcal{F}]$ n'est pas libre, alors u n'est pas injective.
3. Contre-exemple économique : $u = 0_{L(E)}$.
Autre contre-exemple : $u : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto x \end{cases} \text{ et } \mathcal{F} = \{(1, 0), (0, 1)\}$.

QCOP AL.3

1. Les ensembles $\text{Ker}(u)$ et $\text{Im}(u)$ sont des sous-espaces vectoriels de E (exercice : le démontrer).
2. **Résultat.** $\text{Ker}(u^k) \subset \text{Ker}(u^{k+1})$ et $\text{Im}(u^k) \supset \text{Im}(u^{k+1})$.
Résultat. $\text{Ker}(u) \cap \text{Ker}(v) \subset \text{Ker}(u+v)$ et $\text{Im}(u) + \text{Im}(v) \supset \text{Im}(u+v)$.

QCOP AL.4

1. **Résultat.** $\lambda x = 0_E \iff [\lambda = 0_{\mathbb{K}} \text{ ou } x = 0_E]$.
2. a) Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $u^k \in L(E)$ (puissance d'un endomorphisme). Comme combinaison linéaire de puissances d'un endomorphisme, $P(u) \in L(E)$.
b) Procéder par récurrence.
c) Évaluer l'endomorphisme $P(u)$ en x et utiliser la question précédente.
d) Utiliser la question précédente et la première question.

QCOP AL.5

1. Résultat. $p : \begin{cases} E = F \oplus G & \longrightarrow E \\ x = x_F + x_G & \longmapsto x_F. \end{cases}$

2. Utiliser la définition.
3. ♦ Pour montrer que $E = \text{Ker}(p) \oplus \text{Im}(p)$, raisonner par analyse synthèse, en utilisant la question précédente.
 - ♦ Montrer que $E = \text{Ker}(p) \cap \text{Im}(p) = \{0_E\}$.
4. a) L'endomorphisme $-p$ vérifie-t-il $f \circ f = f$?
b) Un sous-espace vectoriel de $L(E)$ contenant f doit contenir $-f$ (comme combinaison linéaire de f).

QCOP AL.6

1. Résultat. $s : \begin{cases} E = F \oplus G & \longrightarrow E \\ x = x_F + x_G & \longmapsto x_F - x_G. \end{cases}$

2. Utiliser la définition.
3. ♦ Pour montrer que $E = \text{Ker}(s - \text{Id}_E) + \text{Ker}(s + \text{Id}_E)$, raisonner par analyse synthèse, en utilisant la question précédente.
 - ♦ Montrer que $\text{Ker}(s - \text{Id}_E) \cap \text{Ker}(s + \text{Id}_E) = \{0_E\}$.
4. a) L'endomorphisme nul vérifie-t-il $f \circ f = \text{Id}_E$?
b) Un sous-espace vectoriel de $L(E)$ doit contenir l'endomorphisme nul.