

Fonctions usuelles

QCOP FCT.1



- Définir les fonctions $\cosh(\cdot)$ et $\sinh(\cdot)$, donner l'allure de leur courbe représentative et leur dérivée.
- Soient $A, B, \lambda \in \mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$.
On définit $y(x) := Ae^{\lambda x} + Be^{-\lambda x}$.
 - Calculer $y''(x) - \lambda^2 y(x)$.
 - Déterminer $C, D \in \mathbb{R}$ tels que $y(x) = C \cosh(\lambda x) + D \sinh(\lambda x)$.

QCOP FCT.2



- Définir la fonction valeur absolue.
- Soient $x \in \mathbb{R}$. Soit $a \geq 0$. Compléter et démontrer les équivalences suivantes :
$$|x| \leq a \iff \dots,$$

$$|x| \geq a \iff \dots.$$
- Soient $a, b \in \mathbb{R}$.
 - Montrer que
$$\max(a, b) = \frac{a + b + |a - b|}{2}.$$
 - Donner une expression analogue de $\min(a, b)$.

QCOP FCT.3



Soit I un intervalle de \mathbb{R} .
Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

- Définir « f est croissante sur I » et « f est strictement croissante sur I ».
- On suppose f strictement croissante.
Montrer que
$$\forall x, y \in I, x < y \iff f(x) < f(y).$$
- Montrer que le résultat précédemment établi est faux si l'on ne suppose f que croissante.

QCOP FCT.4 ★



- Montrer que
$$\forall x \geq 1, \ln(x) \leq 2\sqrt{x}.$$
 - Montrer que $\frac{\ln(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.
 - Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que
$$\frac{\ln(x)^b}{x^a} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$
- Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que
$$\frac{x^a}{(e^x)^b} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0, \quad x^a \ln(x)^b \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$$
et
$$(e^x)^a x^b \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0.$$