Dérivation

Les intervalles I considérés ne sont pas vides ni réduits à un point.

QCOP DER.1

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Soit $a \in I$.
Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(i) f est dérivable en a ;
(ii) $\exists \varphi \in \mathscr{C}^0(I, \mathbb{R}) : \quad \forall x \in I, \ \ f(x) = f(a) + (x-a)\varphi(x)$.

Énoncer et démontrer un théorème de composition des dérivées.

QCOP DER.2

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $c \in I$.
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.
On considère les assertions suivantes :

(i) c est intérieur à I ;
(ii) f est dérivable en c ;
(iii) f admet un extremum local en c ;
(iv) $f'(c) = 0$.

Donner la définition de (iii).

Montrer que

$$\text{(i), (ii), (iii)} \quad \Longrightarrow \quad \text{(iv)}.$$

Donner, pour chaque situation, un exemple de I, f et c tels que :

(a) (ii) et (iv) sont vraies, mais (iii) est fausse ;
(b) (iii) est vraie, mais (ii) est fausse ;
(c) (ii) et (iii) sont vraies, mais (i) et (iv) sont fausses.

QCOP DER.3

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Soit $[a, b]$ un segment de I.

Soit $c \in \mathring{I}$ tel que f est dérivable en c. Donner une condition nécessaire pour que f admette un extremum local en c.

Énoncer et démontrer le théorème de Rolle.

Le théorème de Rolle est-il vrai si f est à valeurs complexes ?

QCOP DER.4

Énoncer le théorème de Rolle.

Énoncer et démontrer le théorème des accroissements finis.

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) \neq 0.$$

Monter que f est injective.

QCOP DER.5

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur I.

- Énoncer le théorème des accroissements finis.
- **(a)** Montrer que

$$f \text{ est constante sur } I \quad \Longleftrightarrow \quad \forall x \in \mathring{I},\ f'(x) = 0.$$

  (b) Montrer que le résultat reste vrai si f est à valeurs dans $\mathbb{C}$.
- Montrer que cette caractérisation est fausse si I n'est pas un intervalle.

QCOP DER.6

- Énoncer le théorème des accroissements finis.
- Énoncer et démontrer l'inégalité des accroissements finis.
- Établir les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned}
&\forall x \in \mathbb{R}, \quad \left|\sin(x)\right| \leqslant |x|\,; \\
&\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad \left|\arctan(x) - \arctan(y)\right| \leqslant |x - y|\,; \\
&\forall x > 0, \quad \frac{1}{x+1} < \ln(1+x) - \ln(x) < \frac{1}{x}.
\end{aligned}$$

QCOP DER.7

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

- Définir les espaces $\mathscr{C}^0(I, \mathbb{R})$, $\mathscr{C}^1(I, \mathbb{R})$, $\mathscr{C}^k(\mathbb{R})$ (pour $k \in \mathbb{N}^*$) et $\mathscr{C}^\infty(I, \mathbb{R})$.
- Montrer que la dérivabilité en un point implique la continuité en ce point.
- Donner un exemple de fonction continue non dérivable.
- Donner un exemple de fonction dérivable mais pas de classe $\mathscr{C}^1$.

QCOP DER.8

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

- Énoncer le théorème des accroissements finis.
- Soit $a \in I$. Soit $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. On suppose que

$$\begin{cases} f \text{ est continue sur } I\,; \\ f \text{ est dérivable sur } I \smallsetminus \{a\}\,; \\ (f_{|I \smallsetminus \{a\}})' \text{ admet pour limite } \ell \text{ en } a. \end{cases}$$

  (a) Que dire si $\ell \in \mathbb{R}$? Le démontrer.

  (b) Que dire si $\ell = \pm\infty$?
- Montrer que $x \longmapsto \cos\left(\sqrt{x}\right)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.