Espaces vectoriels

QCOP EV.1

Soit E un espace vectoriel.

1. Soit $F \subset E$. Donner la définition de « F est un sous-espace vectoriel de E ».
2. Montrer que tout sous-espace vectoriel de E contient 0_E.
3. L'ensemble
$$\left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x+y+z+t=1\right\}$$
est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$?
4. L'ensemble des fonctions bijectives de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?

QCOP EV.2

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

1. Soit $p \in \mathbb{N}^*$.
On considère $\mathcal{F} := (x_1, \dots, x_p)$.
Donner la définition de « $\mathcal{F}$ est une famille libre de E », et en déduire la définition de « $\mathcal{F}$ est une famille liée dans E ».
2. Soient $u, v \in E$ avec $u, v \neq 0_E$.
Montrer que :
$$(u, v) \text{ est liée} \iff \exists \lambda \in \mathbb{K} : u = \lambda v.$$

QCOP EV.3

Soit E un espace vectoriel. Soient $F, G \subset E$ deux sous-espaces vectoriels de E.

1. Comment montrer qu'un ensemble A est un sous-espace vectoriel de E ?
2. Montrer que $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.
3. Montrer que, en général, $F \cup G$ n'est pas un sous-espace vectoriel de E.
4. Montrer que $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E.

QCOP EV.4 ★

Soit E un espace vectoriel.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $F_1, \dots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de E.
Donner une caractérisation de « $F_1, \dots, F_n$ sont en somme directe ».
2. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels.
Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $F \cap G$ pour que F et G soient en somme directe.
3. Cette condition nécessaire et suffisante est-elle toujours vraie dans le cas de trois sous-espaces vectoriels ?

QCOP EV.5

Soit E un espace vectoriel. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Soient $x_1, \dots, x_p \in E$.

1. Définir l'ensemble $\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_p)$.
2. On suppose que $(x_1, \cdots, x_p)$ est libre.
Quel nom donne-t-on à $\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_p)$ lorsque $p = 1$? lorsque $p = 2$?
3. Montrer que $\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_p)$ est un sous-espace vectoriel de E.