Arithmétique dans $\mathbb{Z}$

QCOP ARI.1

Soient $n, k \in \mathbb{N}^*$. Compléter :

$$\cdots \binom{n}{k} = \cdots \binom{n-1}{k-1}.$$

Soient $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Montrer que

$$\left.\begin{array}{l} a \mid bc \\ a \wedge b = 1 \end{array}\right\} \implies a \mid c\,.$$

Soit p un nombre premier. En déduire que

$$\forall k \in [\![1, p-1]\!], \quad p \,\Big|\, \binom{p}{k}\,.$$

QCOP ARI.2

Soit p un nombre premier. Soient $a, b \in \mathbb{Z}$.

Rappeler l'expression de $(a+b)^p$.

Montrer que

$$\forall k \in [\![1, p-1]\!], \quad p \,\Big|\, \binom{p}{k}\,.$$

Montrer que

$$(a+b)^p \equiv a^p + b^p \ \ [p]\,.$$

QCOP ARI.3

Énoncer le lemme de Gauss.

Soit p un nombre premier. Montrer que

$$\forall k \in [\![1, p-1]\!], \quad p \,\Big|\, \binom{p}{k}\,.$$

(a) Montrer, par récurrence, que

$$\forall a \in \mathbb{N}, \quad a^p \equiv a \ \ [p]\,.$$

(b) Soit $a \in \mathbb{N}$ tel que a n'est pas multiple de p. Montrer que

$$a^{p-1} \equiv 1 \ \ [p]\,.$$

QCOP ARI.4

Énoncer le théorème de Bézout dans $\mathbb{Z}$.

Soient $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Montrer que

$$\left.\begin{array}{l} a \wedge c = 1 \\ b \wedge c = 1 \end{array}\right\} \implies (ab) \wedge c = 1.$$

Soient $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $a \wedge b = 1$. Montrer que

$$\begin{cases} \forall k \in \mathbb{N}, & a^k \wedge b = 1 \\ \forall k, \ell \in \mathbb{N}, & a^k \wedge b^\ell = 1. \end{cases}$$