

# Équations différentielles linéaires

On désignera par  $\mathbb{K}$  l'ensemble  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

## QCOP EDL.1

Soient  $a$  et  $b$  deux fonctions continues sur  $\mathbb{R}$ .

On considère l'équation différentielle suivante :

$$y' + a(t)y = b(t) \quad (*)$$

✎ On note  $A$  une primitive sur  $\mathbb{R}$  de  $a$ .

On définit  $y_p : t \mapsto \lambda(t)e^{-A(t)}$  où  $\lambda$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  à déterminer.

On suppose que  $y_p$  est une solution particulière de  $(*)$ .

- (a) Calculer  $y_p' + ay_p$  et en déduire  $\lambda'$ .
- (b) Soit  $t_0 \in \mathbb{R}$ . Exprimer, pour  $t \geq t_0$ ,  $\lambda(t) - \lambda(t_0)$  puis  $\lambda(t)$ .
- (c) En déduire, pour  $t \geq t_0$ ,  $y_p(t)$ .

✎ Expliquer le principe de la méthode de variation de la constante.

## QCOP EDL.2

Soient  $a, b, c \in \mathbb{K}$ . Soit  $m \in \mathbb{K}$ . Soit  $Q \in \mathbb{K}[X]$ .

On considère l'équation différentielle suivante :

$$ay'' + by' + cy = Q(t)e^{mt}, \quad (*)$$

et on note  $P := aX^2 + bX + c$ .

✎ Soit  $R \in \mathbb{K}[X]$ . On considère  $y_p : t \mapsto R(t)e^{mt}$ .

- (a) Calculer  $P'(m)$  et  $P''(m)$ .
- (b) Calculer  $ay_p'' + by_p' + cy_p$ .  
On donnera le résultat sous la forme  $\alpha R'' + \beta R' + \gamma R$ .
- (c) On suppose que  $y_p$  est une solution particulière de  $(*)$ .  
Donner, suivant la multiplicité de  $m$  comme racine de  $P$ , le degré de  $R$ .

✎ Dédurre de ce qui précède une méthode pour déterminer une solution particulière de  $(*)$  lorsque  $m = 0$  (i.e. le second membre est polynomial).

✎ Dédurre de même une méthode pour déterminer une solution particulière de  $(*)$  lorsque  $Q$  est constant (i.e. le second membre est exponentiel).