MAT. Matrices

QCOP MAT.1

3. b) Prendre A, B, C des matrices élémentaires de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$.

c) Résultat. $\mathrm{Tr}(B) = \mathrm{Tr}(A)$.

QCOP MAT.2

1. a) Résultat. $(M^\top M)_{i,j} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} M_{k,i} M_{k,j}$.

b) Montrer que $\mathrm{Tr}(M^\top M)$ est une somme de termes positifs.

2. La matrice $\begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ fournit un contre-exemple.

3. En notant $\overline{M} := (\overline{M_{i,j}})_{i,j}$, on pourrait montrer que

$$\mathrm{Tr}(M^\top \overline{M}) = 0 \iff M = 0_n.$$

QCOP MAT.3

3. a) Résultat. $M = \dfrac{M + M^\top}{2} + \dfrac{M - M^\top}{2}$.

b) Une matrice symétrique et antisymétrique vérifie $M^\top = M = -M$ donc $2M = 0_n$.

Lorsque le formalisme des espaces vectoriels aura été vu, on pourra dire que l'on a montré que $\mathrm{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathrm{A}_n(\mathbb{K})$ sont en somme directe dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

QCOP MAT.4

3. a) Prendre deux matrices qui ne commutent pas.

b) Résultat. $AB \in \mathrm{S}_n(\mathbb{K}) \iff AB = BA$.

QCOP MAT.5

2. On a $A^{-1}A = AA^{-1} = \mathrm{I}_n$, $\mathrm{I}_n{}^\top = \mathrm{I}_n$ et $MN^\top = N^\top M^\top$.

3. Conséquence directe de la question précédente. Il s'agit de montrer que $\left(A^{-1}\right)^\top = A^{-1}$.

QCOP MAT.7

2. **a)** Résultat. $a_0 \neq 0$.

   b) Résultat. $A^{-1} = -\dfrac{1}{a_0}\left(a_1 \mathrm{I}_n + a_2 A + \cdots + a_p A^{p-1}\right)$.