Calcul intégral

QCOP CINT.1

- Énoncer le théorème fondamental de l'analyse. Que nous apprend-il sur les fonctions continues ?
- Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soient $a, b \in I$. Soient $u, v \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{R})$. Montrer que

$$\int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t = \Big[u(t)v(t)\Big]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t.$$

- Déterminer les primitives de la fonction ln sur $\mathbb{R}_+^*$.

QCOP CINT.2

- Énoncer le théorème fondamental de l'analyse.
- Énoncer la formule donnant la dérivée d'une composée.
- Soient I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$. Soit $\varphi \in \mathscr{C}^1(J, I)$. Soit $f \in \mathscr{C}^0(I, \mathbb{R})$. Montrer que

$$\forall a, b \in J, \quad \int_a^b f\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

QCOP CINT.3

- Donner la dérivée de la fonction arctan.
- Soit $a > 0$. À l'aide d'un changement de variable, déterminer une primitive de

$$x \longmapsto \frac{1}{x^2 + a^2}.$$

- En déduire une méthode pour calculer une primitive d'une fonction

$$x \longmapsto \frac{1}{ax^2 + bx + c},$$

où $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

QCOP CINT.4

- Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit $a \in \mathbb{R}$. Donner l'expression de la dérivée de la fonction u^a sur I.
- Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer une primitive de $t \longmapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ sur $[1, +\infty[$.
- Soit $\beta \in \mathbb{R}$. Soit $x \in [\mathrm{e}, +\infty[$. Calculer

$$\int_{\mathrm{e}}^x \frac{1}{t\ln(t)^\beta}\,\mathrm{d}t.$$