FCONV. Fonctions convexes

QCOP FCONV.1

2. Résultat. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x \geqslant 1 + x$;
$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln(x) \leqslant x - 1$;
$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \frac{2}{\pi}x \leqslant \sin(x) \leqslant x$.

QCOP FCONV.3

1. Résultat. $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad \forall \lambda \in [0, 1], \quad f\big((1-\lambda)x + \lambda y\big) \leqslant (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$.

2. Résultat. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$. Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in [0, 1]$ tels que $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = 1$. Alors

$$f(\alpha_1 y_1 + \cdots + \alpha_n y_n) \leqslant \alpha_1 f(y_1) + \cdots + \alpha_n f(y_n).$$

3. **a)** Utiliser l'inégalité de Jensen avec les poids $\alpha_i = \frac{1}{n}$ pour $i \in [\![1, n]\!]$.

b) Utiliser l'inégalité de Jensen avec, pour $i \in [\![1, n]\!]$, $y_i = nx_i$ et $\alpha_i = \frac{1}{n}$.

QCOP FCONV.4

1. Résultat. $x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}$.

2. **a)** Utiliser la définition de la convexité avec la fonction exponentielle.

b) Utiliser la question précédente avec x et y judicieusement choisis.