

# Nombres complexes

## Partie réelle, partie imaginaire

### QCOP CPLX.1



1. Soit  $z \in \mathbb{C}$ .

- a) Définir  $\Re(z)$  et  $\Im(z)$ .
- b) Exprimer ces quantités en fonction de  $z$  et  $\bar{z}$ .

2. Soit  $z \in \mathbb{C}$ . Compléter et démontrer les équivalences suivantes :

$$z + \bar{z} = 0 \iff z \in \dots \quad \text{et} \quad z - \bar{z} = 0 \iff z \in \dots$$

3. On admet que

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad e^{ia} + e^{ib} = 2 \cos\left(\frac{a-b}{2}\right) e^{i\frac{a+b}{2}}.$$

Déterminer  $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid e^{ia} + e^{ib} \in \mathbb{R}\}$ .

## Inégalité triangulaire

### QCOP CPLX.2



Soient  $z, z' \in \mathbb{C}$ .

1. Montrer que

$$\Re(z) \leq |z| \quad \text{et} \quad \Im(z) \leq |z|.$$

2. Montrer que

$$|z + z'|^2 = |z|^2 + 2\Re(z\bar{z}') + |z'|^2.$$

3. Montrer que

$$|z + z'| \leq |z| + |z'|.$$

4. Montrer que

$$||z| - |z'||| \leq |z - z'|.$$

### QCOP CPLX.3 ★



1. Énoncer l'inégalité triangulaire complexe.

2. Soient  $z, z' \in \mathbb{C}$ .

Compléter et démontrer :

$$|z + z'| = |z| + |z'| \iff \dots$$

3. Soient A, B et C trois points du plan.

Montrer que A, B et C sont alignés dans cet ordre si, et seulement si,

$$\|\vec{AB}\| + \|\vec{BC}\| = \|\vec{AC}\|.$$

## Exponentielle complexe

### QCOP CPLX.4



Soit  $z \in \mathbb{C}$ .

1. Exprimer le nombre  $e^z$  sous forme trigonométrique.
2. Déterminer le module et un argument de  $e^z$ .
3. Compléter et démontrer :  
 $|e^z| = 1 \iff \dots$
4. Montrer que  $\overline{e^z} = e^{\bar{z}}$ .

### QCOP CPLX.5



1. Soit  $Z \in \mathbb{C}^*$ , de module  $R > 0$  et d'argument principal  $\theta \in \mathbb{R}$ .  
Écrire  $Z$  sous forme trigonométrique.
2. Soit  $Z \in \mathbb{C}$ . Déterminer  
 $\{z \in \mathbb{C} \mid e^z = Z\}$ .
3. Résoudre  
 $e^z = 1 + i$ .

## Racines de l'unité et équations polynomiales

### QCOP CPLX.6



Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $n \geq 2$ .

1. Définir l'ensemble  $\mathbb{U}_n$ .
2. Montrer que  

$$\mathbb{U}_n = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}} ; k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \right\}.$$
3. Calculer  $\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega$  et  $\prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega$ .

### QCOP CPLX.7 ★



Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $n \geq 2$ .

1. Définir et décrire l'ensemble  $\mathbb{U}_n$ .
2. Soit  $Z \in \mathbb{C}^*$  que l'on écrit  $Z = Re^{i\theta}$  avec  $R > 0$  et  $\theta \in \mathbb{R}$ .  
Décrire  $A := \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = Z\}$ .
3. Calculer  $\sum_{\omega \in A} \omega$  et  $\prod_{\omega \in A} \omega$ .

### QCOP CPLX.8



Soit  $a \in \mathbb{C}$ .

1. À l'aide de  $\mathbb{U}_2$ , justifier l'existence de  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $z^2 = a$ .
2. Soit  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $z^2 = a$ .  
On note  $x, y \in \mathbb{R}$  tels que  $z = x + iy$ .
  - a) Compléter et démontrer :  

$$z^2 = a \iff \begin{cases} x^2 - y^2 = \dots \\ x^2 + y^2 = \dots \\ \text{signe}(xy) = \dots \end{cases}$$
  - b) En déduire les expressions, sous forme algébrique, des valeurs possibles de  $z$ .

### QCOP CPLX.9



Soient  $a, b, c \in \mathbb{C}$  avec  $a \neq 0$ . On considère  
 $az^2 + bz + c = 0. \quad (E)$

1. On note  $\Delta := b^2 - 4ac$ .
  - a) Déterminer  $\delta \in \mathbb{C}$  tel que  $\delta^2 = \Delta$ .
  - b) Déterminer  $u, v \in \mathbb{C}$  tel que  $z$  vérifie (E)  $\iff (z - u)^2 = v^2$ .
  - c) En déduire les solutions de (E).
2. Soient  $d_1, d_2 \in \mathbb{C}$ . Comment peut-on calculer les solutions du système  

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = d_1 \\ z_1 \times z_2 = d_2 \end{cases} ?$$