

## Colle 17

### Espaces vectoriels

- ▶ Après votre colle, il vous est demandé de reprendre les exercices traités et de les rédiger sur feuille. Ce travail est à déposer dans la boîte en B013 avant lundi prochain.
- ▶ Vous trouverez le sujet et des indications sur la page ci-contre.



#### Exercice 17.1

La famille  $(X^3 + X, X^2 + 2X + 1, X - 1, 4)$  est-elle une base de  $\mathbb{R}_3[X]$  ?

#### Exercice 17.2

La famille  $\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$  est-elle libre ou liée ?

#### Exercice 17.3

La famille  $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix}\right)$  est-elle libre ou liée ?

#### Exercice 17.4

Soit  $A \subset \mathbb{R}$  telle que :

- (i)  $0 \in A$
- (ii)  $\forall x, y \in A, \quad x + y \in A$
- (iii)  $\forall \alpha \in \mathbb{Q}, \quad \forall x \in A, \quad \alpha x \in A$ .

On définit :

$$\text{Adh}(A) := \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \exists (a_n)_n \in A^{\mathbb{N}} : a_n \longrightarrow x \right\}.$$

Montrer que  $\text{Adh}(A)$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}$ .

#### Exercice 17.5

Soit  $E$  un espace vectoriel.

Soient  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ .

1. L'ensemble  $F \cup G$  est-il un sous-espace vectoriel de  $E$  ?

2. Montrer que :

$$F \cup G \text{ est un sous-espace vectoriel de } E \iff F \subset G \text{ ou } G \subset F.$$

## Exercice 17.6

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On considère les sous-ensembles de  $M_n(\mathbb{R})$  :

- ◆  $S_n(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices symétriques ;
- ◆  $A_n(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices antisymétriques.

Montrer que  $S_n(\mathbb{R})$  et  $A_n(\mathbb{R})$  sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de  $M_n(\mathbb{R})$ .

## Exercice 17.7

Soit  $E$  un espace vectoriel. Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ .

Soit  $(x_1, \dots, x_{k+1})$  une famille de  $E$  telle que la famille  $(x_1, \dots, x_k)$  est libre.

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur  $x_{k+1}$  pour que la famille  $(x_1, \dots, x_{k+1})$  soit libre.

## Exercice 17.8

Soit  $N \in \mathbb{N}^*$ . Montrer que :

$$\text{Vect}\left(x \mapsto \cos(nx)\right)_{n \in \llbracket 0, N \rrbracket} = \text{Vect}\left(x \mapsto \cos^n(x)\right)_{n \in \llbracket 0, N \rrbracket}.$$

## Exercice 17.9

On note  $E := \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$  et

$$F := \left\{ f \in E \mid \int_0^1 f(t) dt = 0 \right\}.$$

1. Montrer que  $F$  est un espace vectoriel.
2. Déterminer un supplémentaire de  $F$  dans  $E$ .

## Exercice 17.10

Soit  $E$  un espace vectoriel.

Soit  $(e_1, \dots, e_p)$  une famille libre de  $E$ .

Montrer que pour tout  $a \in E \setminus \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$ , la famille  $(e_1 + a, \dots, e_p + a)$  est libre.

## Exercice 17.11

On considère les fonctions de  $\mathcal{C}^0([0, 2\pi], \mathbb{R})$  :

$$\begin{aligned} f_1 : x &\mapsto \cos(x), & f_2 : x &\mapsto x \cos(x), \\ f_3 : x &\mapsto \sin(x), & f_4 : x &\mapsto x \sin(x). \end{aligned}$$

Montrer que la famille  $(f_1, f_2, f_3, f_4)$  est libre dans  $\mathcal{C}^0([0, 2\pi], \mathbb{R})$ .

## Exercice 17.12

Pour  $\lambda \in \mathbb{R}$ , on pose  $f_\lambda : x \mapsto |x - \lambda|$ .

Montrer que la famille  $(f_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$  est libre dans  $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .

## Exercice 17.13

Soit  $N \in \mathbb{N}^*$ . Soient  $\lambda_1, \dots, \lambda_N \in \mathbb{R}$  deux à deux distincts.

Montrer que la famille  $(t \mapsto e^{\lambda_k t})_{1 \leq k \leq N}$  est libre dans  $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .

## Exercice 17.14

Soit  $N \in \mathbb{N}^*$ . Soient  $\theta_1, \dots, \theta_N \in \mathbb{R}_+^*$  deux à deux distincts.

Montrer que la famille  $(t \mapsto \sin(\theta_k t))_{1 \leq k \leq N}$  est libre dans  $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .

## Exercice 17.15

Soit  $N \in \mathbb{N}^*$ . On note, pour  $j \in \llbracket 0, N+1 \rrbracket$ ,  $x_j^{(N)} := \frac{j}{N+1}$ .

On note  $\mathcal{V}_N$  l'ensemble des fonctions continues sur  $[0, 1]$ , nulles en 0 et en 1, et affines sur les segments  $[x_j^{(N)}, x_{j+1}^{(N)}]$  (pour  $j \in \llbracket 0, N \rrbracket$ ).

1. Vérifier que  $\mathcal{V}_N$  est un espace vectoriel.

2. Soit  $j \in \llbracket 1, N \rrbracket$ . Exprimer explicitement l'unique fonction  $f_j^{(N)}$  de  $\mathcal{V}_N$  telle que :

$$\forall \ell \in \llbracket 1, N \rrbracket, \quad f_j^{(N)}(x_\ell^{(N)}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ell \neq j \\ 1 & \text{si } \ell = j. \end{cases}$$

3. Montrer que  $(f_1^{(N)}, \dots, f_N^{(N)})$  forme une base de  $\mathcal{V}_N$ .

## Exercice 17.16

On considère  $(p_n)_{n \geq 1}$  la suite strictement croissante des nombres premiers :

$$p_1 = 2, \quad p_2 = 3, \quad p_3 = 5, \quad p_4 = 7, \quad \dots$$

Montrer que  $(\ln(p_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une famille libre dans  $\mathbb{R}$  muni de sa structure de  $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel.