

## Espaces vectoriels

## QCOP EV.1



Soit  $E$  un espace vectoriel.

1. Soit  $F \subset E$ . Donner la définition de «  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  ».
2. Montrer que tout sous-espace vectoriel de  $E$  contient  $0_E$ .
3. L'ensemble  $\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = 1\}$  est-il un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^4$  ?
4. L'ensemble des fonctions bijectives de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  est-il un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  ?

## QCOP EV.2



Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel ( $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ).

1. Soit  $p \in \mathbb{N}^*$ .  
On considère  $\mathcal{F} := (x_1, \dots, x_p)$ .  
Donner la définition de «  $\mathcal{F}$  est une famille libre de  $E$  », et en déduire la définition de «  $\mathcal{F}$  est une famille liée dans  $E$  ».
2. Soient  $u, v \in E$  avec  $u, v \neq 0_E$ .  
Montrer que :  
 $(u, v)$  est liée  $\iff \exists \lambda \in \mathbb{K} : u = \lambda v$ .

## QCOP EV.3



Soit  $E$  un espace vectoriel. Soient  $F, G \subset E$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ .

1. Comment montrer qu'un ensemble  $A$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  ?
2. Montrer que  $F \cap G$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .
3. Montrer que, en général,  $F \cup G$  n'est pas un sous-espace vectoriel de  $E$ .
4. Montrer que  $F + G$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

## QCOP EV.4 ★



Soit  $E$  un espace vectoriel.

1. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Soient  $F_1, \dots, F_n$  des sous-espaces vectoriels de  $E$ .  
Donner une caractérisation de «  $F_1, \dots, F_n$  sont en somme directe ».
2. Soient  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur  $F \cap G$  pour que  $F$  et  $G$  soient en somme directe.
3. Cette condition nécessaire et suffisante est-elle toujours vraie dans le cas de trois sous-espaces vectoriels ?

## QCOP EV.5



Soit  $E$  un espace vectoriel. Soit  $p \in \mathbb{N}^*$ . Soient  $x_1, \dots, x_p \in E$ .

1. Définir l'ensemble  $\text{Vect}(x_1, \dots, x_p)$ .
2. On suppose que  $(x_1, \dots, x_p)$  est libre.  
Quel nom donne-t-on à  $\text{Vect}(x_1, \dots, x_p)$  lorsque  $p = 1$  ? lorsque  $p = 2$  ?
3. Montrer que  $\text{Vect}(x_1, \dots, x_p)$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .