Espaces vectoriels

QCOP EV.1

Soit E un espace vectoriel.

- Soit $F \subset E$. Donner la définition de « F est un sous-espace vectoriel de E ».
- Montrer que tout sous-espace vectoriel de E contient 0_E.
- L'ensemble

$$\left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x+y+z+t=1\right\}$$

  est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$?
- L'ensemble des fonctions bijectives de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$?

QCOP EV.2

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

- Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On considère $\mathscr{F} := (x_1, \dots, x_p)$.
  - **(a)** Donner la définition de « $\mathscr{F}$ est une famille libre de E ».
  - **(b)** En déduire la définition de « $\mathscr{F}$ est une famille liée dans E ».
- Soient $u, v \in E$ avec $u \neq 0_E$. Montrer que

$$(u,v) \text{ est liée} \iff \exists \lambda \in \mathbb{K} : \; u = \lambda v.$$

QCOP EV.3

Soit E un espace vectoriel. Soient $F, G \subset E$ deux sous-espaces vectoriels de E.

- Comment montrer qu'un ensemble A est un sous-espace vectoriel de E ?
- Montrer que $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.
- Montrer que, en général, $F \cup G$ n'est pas un sous-espace vectoriel de E.
- Montrer que $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E.

QCOP EV.4

Soit E un espace vectoriel.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $F_1, \dots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de E.
  Donner une caractérisation de « $F_1, \dots, F_n$ sont en somme directe ».
- Soient F et G deux sous-espaces vectoriels. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $F \cap G$ pour que F et G soient en somme directe.
- Cette condition nécessaire et suffisante est-elle toujours vraie dans le cas de trois sous-espaces vectoriels ?

QCOP EV.5

Soit E un espace vectoriel. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Soient $x_1, \dots, x_p \in E$.

- Définir l'ensemble $\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_p)$.
- On suppose que $(x_1, \cdots, x_p)$ est libre.
  Quel nom donne-t-on à $\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_p)$ lorsque $p = 1$? lorsque $p = 2$?
- Montrer que $\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_p)$ est un sous-espace vectoriel de E.