William GREGORY

Colle 12 • INDICATIONS
Calcul intégral, Nombres réels

Exercice 12.1

1. Soit f une fonction continue sur $[0,\pi]$ à valeurs réelles vérifiant
$$\forall x \in [0,\pi], \quad f(\pi - x) = f(x).$$
Montrer que :
$$\int_0^\pi x f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(x)\,\mathrm{d}x.$$

2. Calculer $\displaystyle\int_0^\pi \frac{x\sin(x)}{1+\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x$.

indication

1. Changement de variable $x = \pi - u$.
2. Utiliser la question précédente, reconnaître une dérivée en cherchant du côté de $\arctan(\cdots)$.

résultat

$$\int_0^\pi \frac{x\sin(x)}{1+\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{4}.$$

Exercice 12.2

Calculer :
$$\int_0^1 \ln(1+t^2)\,\mathrm{d}t.$$

indication

Procéder par intégration par parties, en utilisant que $\dfrac{2t^2}{1+t^2} = 2 - \dfrac{2}{1+t^2}$.

résultat

$$\int_0^1 \ln(1+t^2)\,\mathrm{d}t = \ln(2) - 2 + \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 12.3

Déterminer une primitive de la fonction
$$t \longmapsto \frac{1}{1+\tan(t)}.$$

indication

Deux méthodes possibles (au moins).

- Effectuer le changement de variable $u = \tan(t)$ et effectuer une décomposition en éléments simples :

$$\frac{1}{1+u}\frac{1}{1+u^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+u} + \frac{-u+1}{1+u^2}\right).$$

- Remarquer que $\dfrac{1}{1+\tan(t)} = \dfrac{\cos(t)}{\cos(t)+\sin(t)} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\cos(t)-\sin(t)}{\cos(t)+\sin(t)} + 1\right)$ et effectuer le changement de variable $u = \cos(t) + \sin(t)$.

résultat

$$x \longmapsto \frac{1}{2}\ln\left|\sin(x)+\cos(x)\right| + \frac{x}{2}.$$

Exercice 12.4

Pour $p, q \in \mathbb{N}$, on définit la fonction

$$\mathrm{f}_{p,q} : \left| \begin{array}{ccc}]0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \varepsilon & \longmapsto & \displaystyle\int_\varepsilon^1 t^p \ln(t)^q \,\mathrm{d}t. \end{array} \right.$$

On note $\mathrm{I}_{p,q} := \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \mathrm{f}_{p,q}(\varepsilon)$.
Déterminer l'expression de $\mathrm{I}_{p,q}$ en fonction de p et de q.

indication

- Calculer $I_{p,0}$.
- Pour $q \geqslant 1$, exprimer $\mathrm{I}_{p,q}$ en fonction de p, de q et de $\mathrm{I}_{p,q-1}$, par intégration par parties.
- En déduire l'expression par récurrence sur q.

résultat

- $\mathrm{I}_{p,0} = \dfrac{1}{p+1}$.
- $\mathrm{I}_{p,q} = \dfrac{-q}{p+1}\mathrm{I}_{p,q-1}$.
- $\mathrm{I}_{p,q} = (-1)^q \dfrac{q!}{(p+1)^{q+1}}$.

Exercice 12.5

Déterminer la primitive qui s'annule en 0 de la fonction

$$x \longmapsto \frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} \cosh\left(\frac{x}{2}\right)}{\cosh(x)}.$$

indication

Exprimer cosh avec les exponentielles et effectuer le changement de variable $x = \ln(t)$.

résultat

$$x \longmapsto \frac{1}{2}\ln(e^{2x}+1) + \arctan(e^x) - \frac{1}{2}\ln(2) - \frac{\pi}{4}.$$

Exercice 12.6

Déterminer la primitive de la fonction

$$x \longmapsto \frac{\arctan(x)}{x^2}$$

sur $]0, +\infty[$ qui s'annule en 1.

indication

- Intégrer par parties.
- Déterminer $a, b, c \in \mathbb{C}$ tels que $\dfrac{1}{x(x-\mathrm{i})(x+\mathrm{i})} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x-\mathrm{i}} + \dfrac{c}{x+\mathrm{i}}$.

résultat

$$x \longmapsto \frac{\pi}{4} - \frac{\arctan(x)}{x} + \ln(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \frac{1}{2}\ln(2).$$

Exercice 12.7

1. Soit A une partie de $\mathbb{Z}$ non vide et majorée.
Montrer que A admet un maximum.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. À l'aide de l'ensemble

$$\mathrm{A}_x := \{n \in \mathbb{Z} \ ; \ n \leqslant x\},$$

justifier l'existence de la partie entière de x.

Exercice 12.8

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction

$$f_n : \left| \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^n(1-x). \end{array} \right.$$

Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in[0,1]} \left|f_n(x)\right|$.

indication

Étudier les variations de f_n pour en déduire la valeur de $M_n = \displaystyle\sup_{x\in[0,1]} \left|f_n(x)\right|$.

résultat

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in[0,1]} \left|f_n(x)\right| = 0.$$

Exercice 12.9

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}_+$ majorée.
Montrer que :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \sup_{x \in A} |\lambda x| = |\lambda| \sup(A).$$

indication

- Établir que $\sup_{x \in A} |\lambda x| \leqslant |\lambda| \sup(A)$.
- Appliquer cette inégalité à $x \leftarrow \lambda x$ et $\lambda \leftarrow \dfrac{1}{\lambda}$ (pour $\lambda \neq 0$).

Exercice 12.10

Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$ non vides telles que :

$$\forall (a, b) \in A \times B, \quad a < b.$$

1. Montrer que $\sup(A)$ et $\inf(B)$ existent.

2. Comparer $\sup(A)$ et $\inf(B)$.

3. Donner un exemple de telles parties A et B telles que $\sup(A) = \inf(B)$.

indication

1.
- La partie B étant non vide, en se donnant $b_0 \in B$, on a : $\forall a \in A, a \leqslant b_0$ donc A est majorée.
- Raisonnement analogue pour montrer que B est minorée.

2. Montrer que $\sup(A) \leqslant \inf(B)$ avec un raisonnement analogue.

3. $A =]-\infty, 0[$ et $B =]0, +\infty[$.

Exercice 12.11

Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$ non vides telles que :

$$\begin{cases} \forall (a, b) \in A \times B, \quad a \leqslant b \\ \forall \varepsilon > 0, \quad \exists (a, b) \in A \times B : \quad b - a \leqslant \varepsilon. \end{cases}$$

Montrer que $\sup(A) = \inf(B)$.

indication

- Commencer par montrer que $\sup(A) \leqslant \inf(B)$ en justifiant l'existence des quantités.
- Montrer l'autre inégalité en raisonnant par l'absurde.
  - ◊ Définir $\varepsilon := \inf(B) - \sup(A)$ et en déduire l'existence de $(a_0, b_0) \in A \times B$ tel que $b_0 - a_0 \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$.
  - ◊ Réutiliser la première inégalité pour montrer que :
  $$\forall (a, b) \in A \times B, \quad a \leqslant \sup(A) \leqslant \inf(B) \leqslant b,$$
  puis établir que $b_0 - a_0 \geqslant \varepsilon$.

Exercice 12.12

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

> *Pour $x \in \mathbb{R}$, on appelle la* distance de x à A *la quantité*
> $$d(x, A) := \inf\left\{|x-a| \;\; ; \;\; a \in A\right\}.$$

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la quantité $d(x, A)$ est correctement définie.

2. Montrer que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad \left|d(x, A) - d(y, A)\right| \leqslant |x-y|.$$

indication

1. Utiliser la propriété fondamentale de $\mathbb{R}$.

2. Écrire que :

$$\forall a \in A, \quad |x-a| \leqslant |x-y| + |y-a|,$$

puis en déduire que :

$$\forall a \in A, \quad d(x, A) - |x-y| \leqslant |y-a|,$$

pour conclure que $d(x, A) - d(y, A) \leqslant |x-y|$.
Montrer l'autre inégalité en appliquant à $x \leftarrow y$ et $y \leftarrow x$.