

Matrices

On désignera par \mathbb{K} l'ensemble \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

Trace

QCOP MAT.1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $A, B, C \in M_n(\mathbb{K})$.

☐ Définir $\text{Tr}(A)$.

✍ Montrer que $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$.

✂ (a) Montrer que

$$\text{Tr}(ABC) = \text{Tr}(BCA) = \text{Tr}(CAB).$$

(b) A-t-on $\text{Tr}(ABC) = \text{Tr}(CBA)$?

(c) Soit $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$B = P^{-1}AP.$$

Déterminer $\text{Tr}(B)$.

QCOP MAT.2

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$.

✍ (a) Soit $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Donner l'expression du coefficient d'indice (i, j) de $M^T M$.

(b) Montrer que

$$\text{Tr}(M^T M) = 0 \iff M = 0_n.$$

✂ Le résultat est-il vrai si $A \in M_n(\mathbb{C})$?

✂ Quel résultat pourrait-on énoncer et démontrer si $A \in M_n(\mathbb{C})$?

Matrices symétriques et antisymétriques

QCOP MAT.3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

☐ Définir les espaces $S_n(\mathbb{K})$ et $A_n(\mathbb{K})$.

✂ Soit $M \in M_n(\mathbb{K})$. Calculer

$$(M + M^T)^T \text{ et } (M - M^T)^T.$$

✂ (a) Montrer que toute matrice est somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

(b) Montrer que

$$S_n(\mathbb{K}) \cap A_n(\mathbb{K}) = \{0_n\}.$$

QCOP MAT.4

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $A, B \in M_n(\mathbb{K})$.

☐ Soit $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$. Donner l'expression du coefficient d'indice (i, j) de la matrice AB .

✍ Montrer que

$$(AB)^T = B^T A^T.$$

✂ On suppose que $A, B \in S_n(\mathbb{K})$.

(a) A-t-on $AB \in S_n(\mathbb{K})$?

(b) Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que $AB \in S_n(\mathbb{K})$.

Inversibilité, opérations élémentaires

QCOP MAT.5

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$.

☰ Définir « $A \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ ».

✍ Montrer que

$$A^T \in \text{GL}_n(\mathbb{K}) \text{ et } (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.$$

✍ Montrer que

$$A \in \text{S}_n(\mathbb{K}) \iff A^{-1} \in \text{S}_n(\mathbb{K}).$$

QCOP MAT.6

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in \text{M}_n(\mathbb{K})$.

☰ Soit $X \in \text{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Calculer AX .

✍ Montrer que

$$A \in \text{GL}_n(\mathbb{K}) \implies \text{Ker}(A) = \{0_{n,1}\}.$$

On admettra la réciproque.

✍ On suppose que A est diagonale.

(a) Montrer que $A \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ si, et seulement si, tous ses coefficients sont non nuls.

(b) Donner, dans ce cas, A^{-1} .

QCOP MAT.8

☰ Définir les matrices d'opérations élémentaires : matrice de transvection, de dilatation et d'échange.

☰ (a) Compléter :

multiplier à ... par une matrice d'opération élémentaire	opération sur les ...
droite	
gauche	

(b) Décrire les opérations réalisables sur une matrice par produit de la matrice par une matrice d'opération élémentaire.

✍ Quels liens peut-on faire entre opérations élémentaires et inversibilité d'une matrice ?

QCOP MAT.7

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in \text{M}_n(\mathbb{K})$.

☰ Donner la définition de « A est inversible dans $\text{M}_n(\mathbb{K})$ ».

✍ Soit $p \in \mathbb{N}$. Soient $a_0, \dots, a_p \in \mathbb{K}$.

On pose

$$P := \sum_{k=0}^p a_k X^k \text{ et } P(A) := \sum_{k=0}^p a_k A^k.$$

On suppose que 0 n'est pas racine de P .

(a) Que dire du coefficient a_0 ?

(b) On suppose que $P(A) = 0_n$.

Montrer que $A \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ et déterminer A^{-1} .