

## AL. Applications linéaires

### **QCOP AL.1**

1. **Résultat.**  $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \forall x, y \in E, \quad u(\lambda x + y) = \lambda u(x) + u(y)$ .
2. Les égalités «  $u^2(x) = u(x)^2$  » et «  $u(xy) = u(x)u(y)$  » n'ont aucun sens car un espace vectoriel n'a pas de loi de multiplication interne.
3. **Résultat.** Une application linéaire constante est nulle.  
Utiliser que  $u(0_E) = 0_F$ .

### **QCOP AL.2**

1. **Résultat.**  $u$  est injective  $\iff \text{Ker}(u) = \{0_E\}$ .
2. a) Écrire  $\mathcal{F} = (e_1, \dots, e_n)$ , de sorte que  $u[\mathcal{F}] = (u(e_1), \dots, u(e_n))$ .  
En se donnant  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$  tels que  $\sum_{i=1}^n \lambda_i u(e_i) = 0_F$ , utiliser la linéarité de  $u$  pour montrer que  $\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \in \text{Ker}(f)$ , puis conclure en utilisant la liberté de  $\mathcal{F}$ .  
b) **Résultat.** Soit  $\mathcal{F}$  une famille libre de  $E$ . Si  $u[\mathcal{F}]$  n'est pas libre, alors  $u$  n'est pas injective.
3. Contre-exemple économique :  $u = 0_{L(E)}$ .  
Autre contre-exemple :  $u : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto x + y \end{cases}$  et  $\mathcal{F} = \{(1, 0), (0, 1)\}$ .

### **QCOP AL.3**

1. Les ensembles  $\text{Ker}(u)$  et  $\text{Im}(u)$  sont des sous-espaces vectoriels de  $E$  (exercice : le démontrer).
2. **Résultat.**  $\text{Ker}(u^k) \subset \text{Ker}(u^{k+1})$  et  $\text{Im}(u^k) \supset \text{Im}(u^{k+1})$ .  
**Résultat.**  $\text{Ker}(u) \cap \text{Ker}(v) \subset \text{Ker}(u + v)$  et  $\text{Im}(u) + \text{Im}(v) \supset \text{Im}(u + v)$ .

### **QCOP AL.4**

1. **Résultat.**  $\lambda x = 0_E \iff [\lambda = 0_{\mathbb{K}} \text{ ou } x = 0_E]$ .
2. a) Pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $u^k \in L(E)$  (puissance d'un endomorphisme). Comme combinaison linéaire de puissances d'un endomorphisme,  $P(u) \in L(E)$ .  
b) Procéder par récurrence.  
c) Évaluer l'endomorphisme  $P(u)$  en  $x$  et utiliser la question précédente.  
d) Utiliser la question précédente et la première question.

## **QCOP AL.5**

1. Résultat.  $p : \begin{cases} E = F \oplus G & \longrightarrow E \\ x = x_F + x_G & \longmapsto x_F. \end{cases}$

2. Utiliser la définition.
3. ♦ Pour montrer que  $E = \text{Ker}(p) \oplus \text{Im}(p)$ , raisonner par analyse synthèse, en utilisant la question précédente.
  - ♦ Montrer que  $E = \text{Ker}(p) \cap \text{Im}(p) = \{0_E\}$ .
4. a) L'endomorphisme  $-p$  vérifie-t-il  $f \circ f = f$  ?  
b) Un sous-espace vectoriel de  $L(E)$  contenant  $f$  doit contenir  $-f$  (comme combinaison linéaire de  $f$ ).

## **QCOP AL.6**

1. Résultat.  $s : \begin{cases} E = F \oplus G & \longrightarrow E \\ x = x_F + x_G & \longmapsto x_F - x_G. \end{cases}$

2. Utiliser la définition.
3. ♦ Pour montrer que  $E = \text{Ker}(s - \text{Id}_E) + \text{Ker}(s + \text{Id}_E)$ , raisonner par analyse synthèse, en utilisant la question précédente.
  - ♦ Montrer que  $\text{Ker}(s - \text{Id}_E) \cap \text{Ker}(s + \text{Id}_E) = \{0_E\}$ .
4. a) L'endomorphisme nul vérifie-t-il  $f \circ f = \text{Id}_E$  ?  
b) Un sous-espace vectoriel de  $L(E)$  doit contenir l'endomorphisme nul.