Comparaisons des suites

Équivalents et composition

QCOP CSUIT.1

Soient $(u_n)_n, (v_n)_n \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$.

Définir « $u_n \sim v_n$ ».

Montrer que, en général,

$$u_n \sim v_n \quad \not\Rightarrow \quad \ln(u_n) \sim \ln(v_n).$$

On suppose que

$$\begin{cases} u_n \sim v_n \\ v_n \longrightarrow \ell \in [0, +\infty] \setminus \{1\}. \end{cases}$$

(a) Vérifier que $\left(\dfrac{1}{\ln(v_n)}\right)_n$ est bornée.

(b) Montrer que

$$\frac{\ln(u_n)}{\ln(v_n)} - 1 \longrightarrow 0.$$

(c) En déduire que

$$\ln(u_n) \sim \ln(v_n).$$

QCOP CSUIT.2

Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\left(1 + \frac{a}{n}\right)^n \longrightarrow e^a.$$

Soient $(u_n)_n, (v_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
Montrer que, en général,

$$u_n \sim v_n \quad \not\Rightarrow \quad {u_n}^n \sim {v_n}^n.$$

QCOP CSUIT.3

Soient $(u_n)_n, (v_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Définir « $u_n \sim v_n$ ».

Montrer que, en général,

$$u_n \sim v_n \quad \not\Rightarrow \quad e^{u_n} \sim e^{v_n}.$$

On suppose que $u_n \sim v_n$. Montrer que

$$e^{u_n} \sim e^{v_n} \quad \Longleftrightarrow \quad u_n - v_n \longrightarrow 0.$$

QCOP CSUIT.4

Soient $(u_n)_n, (v_n)_n$ deux suites réelles strictement positives à partir d'un certain rang.
Soit $C > 0$.

Définir « $u_n \sim v_n$ » à l'aide d'une limite égale à 0.

Montrer que, en général,

$$u_n \sim v_n \quad \not\Rightarrow \quad u_n + C \sim v_n + C.$$

Montrer que

$$\left.\begin{array}{l} u_n \sim v_n \\ v_n \longrightarrow +\infty \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad u_n + C \sim v_n + C.$$

Autres considérations

QCOP CSUIT.5

Soient $(u_n)_n, (v_n)_n, (w_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

(a) Définir « $w_n = o(v_n)$ ».

(b) Caractériser « $u_n \sim v_n$ » à l'aide d'un $o(\cdot)$.

On admet que

$$\exists \gamma \in \mathbb{R} : \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1).$$

Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln(n).$$

QCOP CSUIT.6

Soient $(u_n)_n, (v_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

Donner les définitions avec quantificateurs de « $u_n = o(v_n)$ » et « $u_n = O(v_n)$ ».

Montrer que

$$u_n = o(v_n) \implies u_n = O(v_n).$$

Donner une suite qui est un $O(n)$ mais pas un $o(n)$.