

Espaces vectoriels

QCOP EV.1



Soit E un espace vectoriel.

1. Soit $F \subset E$. Donner la définition de « F est un sous-espace vectoriel de E ».
2. Montrer que tout sous-espace vectoriel de E contient 0_E .
3. L'ensemble $\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = 1\}$ est-il un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 ?
4. L'ensemble des fonctions bijectives de \mathbb{R} dans \mathbb{R} est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?

QCOP EV.2



Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}).

1. Soit $p \in \mathbb{N}^*$.
On considère $\mathcal{F} := (x_1, \dots, x_p)$.
Donner la définition de « \mathcal{F} est une famille libre de E », et en déduire la définition de « \mathcal{F} est une famille liée dans E ».
2. Soient $u, v \in E$ avec $u, v \neq 0_E$.
Montrer que :
 (u, v) est liée $\iff \exists \lambda \in \mathbb{K} : u = \lambda v$.

QCOP EV.5



Soit E un espace vectoriel. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Soient $x_1, \dots, x_p \in E$.

1. Définir l'ensemble $\text{Vect}(x_1, \dots, x_p)$.
2. On suppose que (x_1, \dots, x_p) est libre.
Quel nom donne-t-on à $\text{Vect}(x_1, \dots, x_p)$ lorsque $p = 1$? lorsque $p = 2$?
3. Montrer que $\text{Vect}(x_1, \dots, x_p)$ est un sous-espace vectoriel de E .