Polynômes II

On désignera par $\mathbb{K}$ l'ensemble $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

QCOP POL02.1

Soient $a, b, c, d \in \mathbb{K}$ avec $a \neq 0$.
Soit $P \in \mathbb{K}_3[X]$ dont on note $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{C}$ les racines complexes.

- Énoncer et démontrer les relations coefficients racines pour P.
- On prend $P = X^3 + X + 1$. Calculer

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \quad \text{et} \quad \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\alpha_3}.$$

QCOP POL02.2

- Énoncer les relations coefficients racines pour un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré $n \in \mathbb{N}^*$.
- Les écrire explicitement pour un polynôme de degré 2, 3 et 4.
- Soit P un polynôme de degré 2 tel que $P(1) = 0$.
  Le polynôme P admet-il une autre racine réelle ? Si oui, l'exprimer en fonction des coefficients de P.

QCOP POL02.3

- Énoncer la formule de Taylor pour les polynômes.
- Énoncer et démontrer la caractérisation de la multiplicité des racines d'un polynôme par les dérivées successives.
- Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que 0 est racine de P' d'ordre 3.
  (a) Le nombre 0 est-il nécessairement racine de P ?
  (b) Si 0 est racine de P, que dire de la multiplicité de 0 en tant que racine de P ?

QCOP POL02.4

- Énoncer le théorème de Bézout dans $\mathbb{K}[X]$.
- Soient $P, Q, R \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que

$$\left.\begin{aligned} P \wedge R = 1 \\ Q \wedge R = 1 \end{aligned}\right\} \quad \Longrightarrow \quad (PQ) \wedge R = 1.$$

- Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P \wedge Q = 1$.
  Montrer que

$$\begin{cases} \forall k \in \mathbb{N}, \quad P^k \wedge Q = 1 \\ \forall k, \ell \in \mathbb{N}, \quad P^k \wedge Q^\ell = 1. \end{cases}$$

QCOP POL02.5

Soit $P \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$.

- Donner la définition de « P est irréductible dans $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ ».
- On suppose que P est irréductible dans $\mathbb{K}[X]$.
  Le polynôme P admet-il des racines dans $\mathbb{K}$?
- On suppose que $\deg(P) \leqslant 3$.
  Montrer que, si P n'a pas de racine dans $\mathbb{K}$, alors P est irréductible dans $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$.
  On pourra raisonner par contraposée.
- Le résultat précédent reste-t-il vrai si $\deg(P) > 3$?

QCOP POL02.6

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts.

- Soient $y_0, \dots, y_n \in \mathbb{K}$ quelconques.
  Montrer qu'il existe un unique $L \in \mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$ tel que

$$\forall i \in [\![0, n]\!], \quad L(x_i) = y_i.$$

  On pourra utiliser des arguments d'algèbre linéaire.
- **(a)** Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Expliciter ce polynôme L, que l'on notera L_k, lorsque

$$\forall i \in [\![0, n]\!], \quad y_i = \delta_i^k.$$

  (b) Montrer que la famille $(\mathrm{L}_0, \dots, \mathrm{L}_n)$ ainsi obtenue est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.
- Soit $P \in \mathbb{K}_n[X]$. Montrer que

$$P = \sum_{k=0}^{n} P(x_k)\mathrm{L}_k.$$