Nombres complexes et trigonométrie

Une transformation

QCOP TRGCPLX.1

- Soient $z, z' \in \mathbb{C}$. Montrer que

$$\begin{cases} \mathfrak{Re}(zz') = \mathfrak{Re}(z)\mathfrak{Re}(z') - \mathfrak{Im}(z)\mathfrak{Im}(z') \\ \mathfrak{Im}(zz') = \mathfrak{Re}(z)\mathfrak{Im}(z') + \mathfrak{Im}(z)\mathfrak{Re}(z'). \end{cases}$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$.
  (a) Calculer

$$\mathfrak{Re}\Big((1-\mathrm{i})\big(\cos(x) + \mathrm{i}\sin(x)\big)\Big).$$

  (b) En déduire que

$$\cos(x) + \sin(x) = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

Factorisation par l'angle moitié

QCOP TRGCPLX.2

- Définir l'ensemble $\mathbb{U}$.
- Montrer les formules d'Euler exprimant $\cos(t)$ et $\sin(t)$ pour $t \in \mathbb{R}$.
- Soient $t, a, b \in \mathbb{R}$. Factoriser

$$1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}, \quad 1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}, \quad \mathrm{e}^{\mathrm{i}a} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}b}, \quad \mathrm{e}^{\mathrm{i}a} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}b}.$$

QCOP TRGCPLX.3

- Définir, pour $t \in \mathbb{R}$, le nombre $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$.
- Soit $t \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \neq 1$. Soit $n \in \mathbb{N}$.
  (a) Factoriser $1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$.
  (b) Factoriser $1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)t}$.
  (c) Calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}$.
- En déduire, pour $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, les valeurs des sommes

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(kt) \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n} \sin(kt).$$

Délinéarisation

QCOP TRGCPLX.4

Énoncer et démontrer la formule de Moivre.

Soit $t \in \mathbb{R}$.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$\begin{cases} \cos(nt) = \displaystyle\sum_{p=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \binom{n}{2p} (-1)^p \sin^{2p}(t) \cos^{n-2p}(t) \\ \sin(nt) = \displaystyle\sum_{p=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} \binom{n}{2p+1} \sin^{2p+1}(t) \cos^{n-1-2p}(t). \end{cases}$$

(b) Calculer $\cos(5t)$ et $\sin(4t)$.

On n'appliquera pas directement les formules précédentes mais on s'inspirera de la méthode de leur démonstration.