

Colle 12

Nombres réels, Calcul intégral

- ▶ Après votre colle, il vous est demandé de reprendre les exercices traités et de les rédiger sur feuille. Ce travail est à déposer dans la boîte en B013 avant vendredi midi.
- ▶ Vous trouverez le sujet et des indications sur la page ci-contre.



Calcul intégral

Exercice 12.1

1. Soit f une fonction continue sur $[0, \pi]$ à valeurs réelles vérifiant

$$\forall x \in [0, \pi], \quad f(\pi - x) = f(x).$$

Montrer que

$$\int_0^\pi xf(x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(x) dx.$$

2. Calculer $\int_0^\pi \frac{x \sin(x)}{1 + \cos^2(x)} dx$.

Exercice 12.4

Déterminer deux réels a et b tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_0^\pi (at + bt^2) \cos(nt) dt = \frac{1}{n^2}.$$

Exercice 12.2

Déterminer la primitive de

$$x \mapsto \frac{\arctan(x)}{x^2}$$

sur $]0, +\infty[$ qui s'annule en 1.

Exercice 12.3

Déterminer la primitive qui s'annule en 0 de la fonction

$$x \mapsto \frac{e^{\frac{x}{2}} \cosh\left(\frac{x}{2}\right)}{\cosh(x)}.$$

Nombres réels

Exercice 12.5

Soient $x, y \in \mathbb{R}$.

Exprimer $\max(x, y)$ et $\min(x, y)$ en fonction de x, y et $|x - y|$.

Exercice 12.6

Soit A une partie non vide de \mathbb{R} bornée.
Montrer que

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \sup_{x \in A} |\lambda x| = |\lambda| \sup(A).$$

Exercice 12.7

On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $E_n := \left\{ \frac{n}{k} + k ; k \in \mathbb{N}^* \right\}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- (a) Justifier l'existence de $m_n := \inf E_n$.
- (b) Justifier que $m_n \geq 2\sqrt{n}$.
- (c) Préciser m_1 .

2. Étudier l'existence et déterminer le cas échéant les valeurs de $\sup_{k \in \mathbb{N}^*} m_k$ et $\inf_{k \in \mathbb{N}^*} m_k$.

Exercice 12.8

Soient $A, B \subset \mathbb{R}$ deux parties non vides et bornées de \mathbb{R} .

- 1. Déterminer $\sup(-A)$ où $-A := \{-x ; x \in A\}$.
- 2. Déterminer $\sup(A + B)$ où $A + B := \{x + y ; x \in A, y \in B\}$.