

## Colle 11

### Polynômes

- ▶ Après votre colle, il vous est demandé de reprendre les exercices traités et de les rédiger sur feuille. Ce travail est à déposer dans la boîte en B013 avant mercredi prochain.
- ▶ Vous trouverez le sujet et des indications sur la page ci-contre.



#### Exercice 11.1

Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$  un polynôme.

1. Soit  $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  une racine complexe de  $P$ .

- (a) Que dire de  $\bar{a}$  ?
- (b) Montrer que  $(X - a)(X - \bar{a}) \in \mathbb{R}[X]$  et qu'il existe  $Q \in \mathbb{R}[X]$  tel que :  
$$P = (X - a)(X - \bar{a})Q.$$

2. On suppose  $P$  non constant.

- (a) Le polynôme  $P$  possède-t-il nécessairement une racine réelle ?
- (b) Montrer que, si  $\deg(P)$  est impair, alors  $P$  possède une racine réelle.

#### Exercice 11.4

Soit  $P \in \mathbb{K}[X]$ . Soit  $a \in \mathbb{K}$ . Montrer que :

$$\left[ \exists Q \in \mathbb{K}[X] : \begin{cases} P = (X - a)^3 Q \\ Q(a) \neq 0 \end{cases} \right] \iff \begin{cases} P(a) = P'(a) = P''(a) = 0 \\ P^{(3)}(a) \neq 0. \end{cases}$$

#### Exercice 11.5

Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$ . Soient  $a, b \in \mathbb{R}$  tels que  $a \neq b$ .

On suppose que :

- ♦ le reste de la division euclidienne de  $P$  par  $X - a$  vaut 1 ;
- ♦ le reste de la division euclidienne de  $P$  par  $X - b$  vaut  $-1$ .

Que vaut le reste de la division euclidienne de  $P$  par  $(X - a)(X - b)$  ?

#### Exercice 11.2

Soit  $n \geq 3$ . On pose :

$$A := X^n \quad \text{et} \quad B := X^3 + X^2 - 2X.$$

Déterminer le reste dans la division euclidienne de  $A$  par  $B$ .

#### Exercice 11.3

Soit  $P := X^3 + 3X^2 + 2X - 1$ .

On note  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  ses trois racines complexes.

Calculer  $\sum_{\substack{1 \leq i, j \leq 3 \\ i \neq j}} \frac{\alpha_i}{\alpha_j}$ .

### Exercice 11.6

Montrer qu'il n'existe pas d'élément  $P \in \mathbb{R}[X]$  tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad P(t) = e^t.$$

### Exercice 11.8

Soit  $P := a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n \in \mathbb{C}[X]$ .

1. Soit  $r > 0$ . Soit  $k \in \mathbb{N}$ . Calculer :

$$\int_0^{2\pi} P(re^{it}) e^{-ikt} dt.$$

2. On suppose qu'il existe  $M \in \mathbb{R}_+$  tel que

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad |P(z)| \leq M.$$

Montrer que  $P$  est constant.

### Exercice 11.7

Déterminer le noyau du morphisme d'anneaux

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{Z}[X] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ P & \longmapsto P(1 + \sqrt{2}). \end{cases}$$

### Exercice 11.9

Soit  $P \in \mathbb{C}[X]$ .

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur  $P$  pour que l'application

$$\begin{cases} \mathbb{C} & \longrightarrow \mathbb{C} \\ z & \longmapsto P(z) \end{cases}$$

soit surjective.

### Exercice 11.10

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Soient  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$  deux à deux distincts. Soient  $y_1, \dots, y_n \in \mathbb{K}$ .

Montrer qu'il existe un unique polynôme  $L \in \mathbb{K}[X]$  tel que :

$$\begin{cases} \deg(L) = n - 1 \\ \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad L(x_k) = y_k. \end{cases}$$

### Exercice 11.11

1. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Soient  $P_0, \dots, P_n \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0_{\mathbb{K}[X]}\}$  tels que  $0 \leq \deg(P_0) < \dots < \deg(P_n)$ .

Soient  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ . Montrer que :

$$\alpha_0 P_0 + \dots + \alpha_n P_n = 0_{\mathbb{K}[X]} \implies \alpha_0 = \dots = \alpha_n = 0.$$

2. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Soit  $P \in \mathbb{K}_n[X]$ . Montrer que  $P = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(0)}{k!} X^k$ .

### Exercice 11.12

**Définition. Idéal d'un anneau commutatif.**

Soit  $(A, +, \times)$  un anneau commutatif. Soit  $\mathcal{I} \subset A$ .

On dit que  $\mathcal{I}$  est un idéal de  $A$  lorsque :

- $(\mathcal{I}, +)$  est un sous-groupe de  $(A, +)$  ;
- $\forall a \in A, \quad \forall x \in \mathcal{I}, \quad a \times x \in \mathcal{I}$ .

Montrer que tout idéal de  $\mathbb{K}[X]$  est de la forme

$$P_0 \mathbb{K}[X] := \{P_0 Q ; Q \in \mathbb{K}[X]\}$$

où  $P_0 \in \mathbb{K}[X]$ .