Développements limités

QCOP DL.1

- Donner le développement limité à l'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ en 0 de $\varepsilon \longmapsto \dfrac{1}{1-\varepsilon}$.
- Déterminer un développement limité à l'ordre 5 en 0 de $x \longmapsto \dfrac{1}{4+x^2}$.
- **(a)** Rappeler les développements limités à l'ordre 3 en 0 de cos et sin.
  (b) Déterminer un développement limite à l'ordre 3 de tan.

QCOP DL.2

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

- Rappeler la formule de Taylor-Young pour une fonction $f \in \mathscr{C}^n(I, \mathbb{C})$.
- Soit $z \in \mathbb{C}$. Déterminer un développement limité à l'ordre n en 0 de $x \longmapsto \exp(zx)$.
- En déduire les développements à l'ordre n en 0 de cosh, sinh, cos et sin.

QCOP DL.3

- Expliquer comment « primitiver » un développement limité.
- Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant 0. Soient $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continues sur I.
  On note F et G leur primitive s'annulant en 0.
  Montrer que
  $$f(t) \underset{t \to 0}{=} o\big(g(t)\big) \qquad \Longrightarrow \qquad F(t) \underset{t \to 0}{=} o\big(G(t)\big).$$
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer un développement limité à l'ordre n en 0 de
  $$x \longmapsto \ln(1+x) \quad \text{et} \quad x \longmapsto \arctan(x).$$

QCOP DL.4

- Énoncer et démontrer la formule de Taylor-Young.
- Soit $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Soit $a \in \mathbb{R}$. Déterminer
  $$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2}.$$