Trigonométrie

Généralités

QCOP TRG.1

- Définir la relation de congruence modulo 2π.
- Soient $x, x', y, y' \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{C}^*$
  (a) Montrer que
$$\left.\begin{aligned} x \equiv x' \ [2\pi] \\ y \equiv y' \ [2\pi] \end{aligned}\right\} \implies x + y \equiv x' + y' \ [2\pi].$$
  (b) Montrer que
$$x \equiv y \ [2\pi] \iff \frac{x}{\lambda} \equiv \frac{y}{\lambda} \left[\frac{2\pi}{\lambda}\right] \iff \lambda x \equiv \lambda y \ [2\pi].$$
- Trouver deux réels x et y tels que
$$\begin{cases} x \equiv x' \ [2\pi] \\ y \equiv y' \ [2\pi] \end{cases}$$
  mais $xy \not\equiv x'y' \ [2\pi]$.

QCOP TRG.2

- Définir le cercle trigonométrique, ainsi que $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$ pour $\theta \in \mathbb{R}$.
- Montrer que sin est une fonction impaire.
- Montrer que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \left|\sin(x)\right| \leqslant 1.$$
- **(a)** Montrer que
$$\forall x \in [1, +\infty[, \quad \sin(x) \leqslant x.$$
  (b) Montrer, à l'aide d'une étude de fonction, que
$$\forall x \in [0, 1], \quad \sin(x) \leqslant x.$$
  (c) Montrer que $x \mapsto \left|\sin(x)\right|$ est une fonction paire.
  (d) En déduire que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \left|\sin(x)\right| \leqslant |x|.$$

Formules de trigonométrie

QCOP TRG.3

- Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Écrire les formules donnant $\cos(a+b)$, $\sin(a+b)$ et $\cos(2a)$.
- Calculer, pour $a, b \in \mathbb{R}$, $\tan(a+b)$, puis $\tan(2a)$.
- Soit $a \in \mathbb{R}$. On pose $t := \tan\left(\frac{a}{2}\right)$. Montrer que

$$\cos(a) = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin(a) = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \tan(a) = \frac{2t}{1-t^2}.$$

QCOP TRG.4

- Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Écrire les formules donnant $\cos(a+b)$ et $\cos(a-b)$.
- Soient $p, q \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right).$$

- Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$.
  On pose $\mathrm{X} := \cos(\theta)$. On définit

$$\mathrm{T}_n\big(\cos(\theta)\big) := \cos(n\theta).$$

  Montrer que

$$\mathrm{T}_{n+2}(\mathrm{X}) + \mathrm{T}_n(\mathrm{X}) = 2X\mathrm{T}_{n+1}(\mathrm{X}).$$