

Suites numériques

On désignera par \mathbb{K} l'ensemble \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

Convergence

QCOP SUIT.1



Soient $(a_n)_n, (b_n)_n, (c_n)_n$ trois suites réelles.
Soit $\ell \in \mathbb{R}$.

1. Définir « $(a_n)_n$ converge vers ℓ ».
2. On suppose que :

$$\exists N_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_0, a_n \leq b_n \leq c_n.$$
 Montrer que :

$$\left. \begin{array}{l} a_n \rightarrow \ell \\ c_n \rightarrow \ell \end{array} \right\} \implies b_n \rightarrow \ell.$$
3. On suppose que $a_n \rightarrow \ell$ et $\ell > 0$. Que dire de $(a_n)_n$?
4. On suppose que $(a_n)_n$ est bornée et que $b_n \rightarrow 0$. Que dire de la suite $(a_n b_n)_n$?

QCOP SUIT.2



Soient $(a_n)_n, (b_n)_n$ deux suites réelles.
Soient $\ell, \ell' \in \mathbb{R}$.

1. Rappeler le théorème d'encadrement pour les suites réelles.
2. On suppose que $a_n \rightarrow \ell$ et $\ell > 0$.
Montrer que :

$$\exists N_1 \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_1, a_n > 0.$$
3. On suppose que $a_n \rightarrow \ell$ et, à partir d'un certain rang, $a_n \geq 0$. Que dire de ℓ ?
4. On suppose que :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_n \rightarrow \ell \\ b_n \rightarrow \ell' \\ \exists N_1 \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_1, a_n \leq b_n. \end{array} \right.$$
 Comparer ℓ et ℓ' .

QCOP SUIT.3



Soit $(u_n)_n$ une suite convergente.

1. Que dire de la suite $(u_{n+1})_n$?
2. Montrer que $(u_{n+1} - u_n)_n$ converge et déterminer sa limite.
3. Donner deux exemples de suites $(u_n)_n$ non convergentes, telles que $u_{n+1} - u_n \rightarrow 0$. Justifier.

QCOP SUIT.4 ★



1. Soit $(a_n)_n$ une suite réelle croissante et bornée.
 - a) Justifier l'existence de $\ell := \sup_n a_n$.
 - b) Montrer que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : \ell - \varepsilon < a_{N_\varepsilon} \leq \ell.$$
 - c) Montrer que $a_n \rightarrow \ell$.
2. Décrire les alternatives pour la convergence d'une suite monotone.

QCOP SUIT.5

Soit $(u_n)_n$ une suite numérique. Soit $\ell \in \mathbb{C}$.

1. Donner la définition de « la suite $(u_n)_n$ converge vers ℓ ».

2. Montrer que :

$$u_n \longrightarrow \ell \implies |u_n| \longrightarrow |\ell|.$$

3. Montrer que :

$$u_n \longrightarrow \ell \iff \left[\Re(u_n) \longrightarrow \Re(\ell) \text{ et } \Im(u_n) \longrightarrow \Im(\ell) \right].$$

4. Soit $\alpha > 0$. Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$. On admet que $\left(\sum_{n=1}^N \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha} \right)_{N \geq 1}$ converge.

Montrer que $\left(\sum_{n=1}^N \frac{\cos(n\theta)}{n^\alpha} \right)_{N \geq 1}$ et $\left(\sum_{n=1}^N \frac{\sin(n\theta)}{n^\alpha} \right)_{N \geq 1}$ convergent.

Suites extraites**QCOP SUIT.6**

Soit $(u_n)_n$ une suite numérique. Soit $\ell \in \mathbb{K}$.

1. Qu'est-ce qu'une suite extraite de $(u_n)_n$?

2. Soit $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ une extractrice.

a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \varphi(n) \geq n.$$

b) Montrer que :

$$u_n \longrightarrow \ell \implies u_{\varphi(n)} \longrightarrow \ell.$$

3. Montrer que $((-1)^n)_n$ diverge.

4. Montrer que :

$$u_{n+1} \longrightarrow \ell \implies u_n \longrightarrow \ell.$$

QCOP SUIT.7 ★

1. Soient $(a_n)_n, (b_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Définir « $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ sont adjacentes ».

2. Soient $(u_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{K}$. Montrer que :

$$\left. \begin{array}{l} u_{2p} \longrightarrow \ell \\ u_{2p+1} \longrightarrow \ell \end{array} \right\} \iff u_n \longrightarrow \ell.$$

3. Soit $(a_n)_n$ une suite positive, décroissante et convergeant vers 0.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n := \sum_{k=0}^n (-1)^k a_k$.

a) Montrer que $(S_{2p})_p$ et $(S_{2p+1})_p$ sont adjacentes.

b) En déduire que $(S_n)_n$ converge.

QCOP SUIT.8 ★

1. Énoncer le théorème de Bolzano-Weierstrass pour les suites numériques.

2. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Soit $(x_n)_n \in [a, b]^{\mathbb{N}}$.

a) Par récurrence, construire deux suites réelles $(a_n)_n$ croissante et $(b_n)_n$ décroissante telles que $b_n - a_n \longrightarrow 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $[a_n, b_n]$ contient une infinité de termes de $(u_k)_k$.

b) En déduire le théorème de Bolzano-Weierstrass pour les suites réelles.

3. Que dire d'une suite réelle à valeurs dans un segment ?

Formes indéterminées

QCOP SUIT.9



1. Soit $a > 0$.

- a) Justifier l'existence et calculer, à l'aide d'un taux d'accroissement, la limite

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + at)}{t}.$$

- b) En déduire que :

$$n \ln\left(1 + \frac{a}{n}\right) \longrightarrow a.$$

- c) En déduire que

$$\left(1 + \frac{a}{n}\right)^n \longrightarrow e^a.$$

2. Soit $(u_n)_n$ une suite telle que $u_n \longrightarrow 1$.
Que peut-on dire de la nature de $(u_n^n)_n$?

Densité, borne supérieure

QCOP SUIT.10



1. Soit $A \subset \mathbb{R}$. Rappeler la définition de « A est dense dans \mathbb{R} ».
2. Énoncer et démontrer le théorème de caractérisation séquentielle de la densité.
3. a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$.
Encadrer $\lfloor 10^n x \rfloor$.
b) Montrer que \mathbb{D} est dense dans \mathbb{R} .

QCOP SUIT.11 ★



1. Soit A une partie de \mathbb{R} non vide et majorée.
 - a) Montrer que :
$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists x_\varepsilon \in A : \sup(A) - \varepsilon < x_\varepsilon \leq \sup(A).$$
 - b) En déduire qu'il existe une suite $(x_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$ convergeant vers $\sup(A)$.

2. On définit la partie

$$A := \left\{ (-1)^n + \frac{1}{n+1} ; n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Montrer que A est bornée et déterminer $\sup(A)$ et $\inf(A)$.