Dimension finie

QCOP DIM.1

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie. Soit $f \in \mathrm{L}(E, F)$.

Donner la définition du rang de f.

(a) Justifier l'existence de S supplémentaire de $\mathrm{Ker}(f)$ dans E.

(b) Montrer que $f_{|S}^{|\mathrm{Im}(f)}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

(c) En déduire que

$$\dim(E) = \dim\Big(\mathrm{Ker}(f)\Big) + \mathrm{rg}(f).$$

On se place dans le cas où $E = F$. Montrer que

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2) \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2).$$

QCOP DIM.2

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

(a) Écrire la formule du rang pour

$$\varphi : \left| \begin{array}{ccc} F \times G & \longrightarrow & F + G \\ (u, v) & \longmapsto & u + v, \end{array} \right.$$

application dont on justifiera la linéarité et la surjectivité.

(b) Montrer que l'application

$$\psi : \left| \begin{array}{ccc} F \cap G & \longrightarrow & \mathrm{Ker}(\varphi) \\ u & \longmapsto & (u, -u) \end{array} \right.$$

est correctement définie et est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

(c) Conclure que

$$\dim(F + G) + \dim(F \cap G) = \dim(F) + \dim(G).$$

On considère les assertions suivantes :

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} & F \cap G = \{0_E\}\,; \\ \text{(ii)} & \dim(E) = \dim(F) + \dim(G)\,; \\ \text{(iii)} & E = F + G. \end{array}$$

Montrer que $E = F \oplus G$ si, et seulement si, deux des assertions sont vérifiées.

QCOP DIM.3

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

- Énoncer le théorème du rang.
- Donner un exemple de $f \in \mathrm{L}(E)$ tel que
$$E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f).$$
- Donner un exemple de $f \in \mathrm{L}\left(\mathbb{R}^2\right)$ tel que
$$\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f).$$
On pourra chercher f tel que
$$\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\left\{(1,0)\right\}.$$

QCOP DIM.4

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}$.

- Soit $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs de E.
Compléter :
$$\begin{array}{lcl} \mathcal{F} \text{ est libre} & \Longrightarrow & |\mathcal{F}| \ \ldots\ n\,; \\ \mathcal{F} \text{ est génératrice} & \Longrightarrow & |\mathcal{F}| \ \ldots\ n\,; \\ \mathcal{F} \text{ est une base} & \Longrightarrow & |\mathcal{F}| \ \ldots\ n. \end{array}$$
- Montrer que les implications réciproques ne sont pas vraies.
- Soit $f \in \mathrm{L}(E)$.
Montrer que $\left\{f^k\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ est liée.

QCOP DIM.5

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit φ une forme linéaire non nulle de E.

- Écrire la formule du rang pour φ.
- On suppose que $n = 2$.
Montrer que φ est surjective.
- Déterminer la dimension des espaces suivants :
$$\begin{array}{c} \left\{M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \ \middle|\ \mathrm{Tr}(M) = 0\right\}, \\ \left\{P \in \mathbb{R}_2[\mathrm{X}] \ \middle|\ P(0) = 0\right\}, \\ \left\{P \in \mathbb{R}_4[\mathrm{X}] \ \middle|\ \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t = 0\right\}, \\ \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ \middle|\ x+y+z = 0\right\}. \end{array}$$

QCOP DIM.6

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$.

- Donner une base et la dimension de $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
- Montrer que $\mathrm{M}_n(\mathbb{K}) = \mathrm{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathrm{A}_n(\mathbb{K})$.
On donnera une base et la dimension des espaces mis en jeu.
- Donner une base et la dimension des sous-espaces des matrices triangulaires supérieures et diagonales de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.
- Donner la dimension des espaces suivants :
$$\begin{array}{c} \left\{M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \ \middle|\ \mathrm{Tr}(M) = 0\right\}, \\ \left\{M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \ \middle|\ \mathrm{Tr}(M^\top M) = 0\right\}. \end{array}$$

QCOP DIM.7

- Soient E, F deux espaces vectoriels de même dimension finie.
Soit $u \in \mathrm{L}(E,F)$ injective. Que dire de u ?
- On considère $\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[\mathrm{X}] & \longrightarrow & \mathbb{K}[\mathrm{X}] \\ P & \longmapsto & P - P' \end{array} \right.$.
  - **(a)** Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_{|\mathbb{K}_n[\mathrm{X}]}$ est bijective.
  - **(b)** En déduire que φ est bijective.