Nombres complexes

Partie réelle, partie imaginaire

QCOP CPLX.1

- Soit $z \in \mathbb{C}$.
  - **(a)** Définir $\mathfrak{Re}(z)$ et $\mathfrak{Im}(z)$.
  - **(b)** Exprimer ces quantités en fonction de z et $\overline{z}$.
- Soit $z \in \mathbb{C}$. Compléter et démontrer les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} z + \overline{z} = 0 &\iff z \in \cdots, \\ z - \overline{z} = 0 &\iff z \in \cdots. \end{aligned}$$

- On admet que

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} e^{ia} + e^{ib} = 2\cos\left(\dfrac{a-b}{2}\right) e^{i\frac{a+b}{2}} \\ e^{ia} - e^{ib} = 2i\sin\left(\dfrac{a-b}{2}\right) e^{i\frac{a+b}{2}}. \end{cases}$$

  - **(a)** Déterminer $\left\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; e^{ia} + e^{ib} \in \mathbb{R}\right\}$.
  - **(b)** Déterminer $\left\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; e^{ia} - e^{ib} \in i\mathbb{R}\right\}$.

Racines n-ièmes

QCOP CPLX.2

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$.

- Définir l'ensemble $\mathbb{U}_n$.
- Montrer que

$$\mathbb{U}_n = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}} \quad ; \quad k \in [\![0, n-1]\!] \right\}.$$

- Calculer

$$\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega \quad \text{et} \quad \prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega.$$

QCOP CPLX.3

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$.

- Définir l'ensemble $\mathbb{U}_n$ et en donner une description.
- Soit $Z \in \mathbb{C}$ que l'on écrit $Z = Re^{i\theta}$ avec $R > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Décrire

$$A := \{z \in \mathbb{C} \quad | \quad z^n = Z\}.$$

- Calculer

$$\sum_{\omega \in A} \omega \quad \text{et} \quad \prod_{\omega \in A} \omega.$$

Inégalité triangulaire

QCOP CPLX.4

Soient $z, z' \in \mathbb{C}$.

- Montrer que

$$\begin{cases} \mathfrak{Re}(z) \leqslant |z| \\ \mathfrak{Im}(z) \leqslant |z|. \end{cases}$$

- Montrer que

$$|z+z'|^2 = |z|^2 + 2\mathfrak{Re}(z\overline{z'}) + |z'|^2.$$

- Montrer que

$$|z+z'| \leqslant |z| + |z'|.$$

- Montrer que

$$\Big||z| - |z'|\Big| \leqslant |z - z'|.$$

Exponentielle complexe

QCOP CPLX.5

- Définir, pour $z \in \mathbb{C}$, le nombre e^z.
- Soit $z \in \mathbb{C}$. Déterminer le module et un argument de e^z.
- Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que $\overline{\mathrm{e}^z} = \mathrm{e}^{\overline{z}}$.

QCOP CPLX.6

- Soit $Z \in \mathbb{C}$, de module $R \in \mathbb{R}_+$ et d'argument principal $\theta \in \mathbb{R}$. Écrire Z sous forme trigonométrique.
- Soit $Z \in \mathbb{C}$. Déterminer

$$\left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \mathrm{e}^z = Z \right\}.$$

- Résoudre

$$\mathrm{e}^z = 1 + \mathrm{i}.$$