CONT. Continuité

QCOP CONT.1

3. **a)** C'est une conséquence directe de la caractérisation séquentielle de la continuité appliquée à la fonction f et la suite $(u_n)_n$.

b) On a $u_{n+1} \longrightarrow \ell$ et $f(u_n) \longrightarrow f(\ell)$, d'où le résultat par unicité de la limite.

QCOP CONT.2

2. Appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction $x \longmapsto f(x) - x$.

3. **a)** On peut appliquer le théorème des valeurs intermédiaires généralisé à la fonction $x \longmapsto P(x)$, admettant des limites infinies opposées en $\pm\infty$.

b) Prendre $P = \mathrm{X}^2 + 1$.

QCOP CONT.3

2. D'après le théorème des bornes atteintes, il existe $x_{f,\max}, x_{g,\min} \in [a, b]$ tels que :

$$\sup_{x \in [a,b]} f(x) = f(x_{f,\max}) \quad \text{et} \quad \inf_{x \in [a,b]} g(x) = g(x_{g,\min}).$$

3.
- ♦ Le théorème des bornes atteintes n'est plus valide : une fonction non bornée fournit un contre-exemple.
- ♦ On peut prendre $f : x \longmapsto 1 - \dfrac{1}{x}$ et $g : x \longmapsto 1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

QCOP CONT.4

3. **a)** Prendre $f(x) = g(x) = x$.

b) Soient $x, y \in \mathbb{R}$. On a $(fg)(x) - (fg)(y) = f(x)\big[g(x) - g(y)\big] + g(y)\big[f(x) - f(y)\big]$.

4. **a)** Non, prendre une fonction constante non nulle.

b) L'implication $\boxed{\Rightarrow}$ est toujours vraie : on peut prendre en particulier $y = 0$ dans la définition de fonction lipschitzienne.

c) L'implication $\boxed{\Leftarrow}$ est vraie pour les fonctions linéaires.

QCOP CONT.5

2. Résultat. (iii) $\implies$ (ii) $\implies$ (i).

3. La fonction f n'est pas lipschitzienne sur I car, avec $x = \dfrac{1}{n}$ et $y = 0$, $\dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{x - y} = \sqrt{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$. En revanche, f est continue et uniformément continue par le théorème de Heine.
Pour la continuité uniforme, on peut aussi montrer que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+, \quad \left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| \leqslant \sqrt{|x - y|}.$$

QCOP CONT.6

1. Résultat. Théorème de Heine : f est uniformément continue sur $[a, b]$.