

Colle 21

Dérivation

- ▶ Après votre colle, il vous est demandé de reprendre les exercices traités et de les rédiger sur feuille. Ce travail est à déposer dans la boîte en B013 avant mardi prochain.
- ▶ Vous trouverez le sujet et des indications sur la page ci-contre.



Exercice 21.1

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$.
Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ dérivable.
Montrer que

$$\exists x \in]a, b[: \frac{f(b)}{f(a)} = e^{(b-a)\frac{f'(c)}{f(c)}}.$$

Exercice 21.2

Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ dérivable. Soit $\ell \in \mathbb{R}$.
Montrer que

$$\frac{f'(x)}{f(x)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell \implies \frac{f(x+1)}{f(x)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} e^\ell.$$

Exercice 21.3

Soient $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$.
On suppose que

$$\forall x \in [a, b], \quad g'(x) \neq 0.$$

1. Soit $x > x_0$. Montrer que

$$\exists c \in]x, x_0[: \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

2. Soit $\ell \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \ell \implies \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \ell.$$

Exercice 21.4

Soit $h > 0$. Soit $f : [-h, h] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^5 . Montrer que

$$\exists c \in]-h, h[: f(h) - f(-h) = \frac{h}{3} (f'(-h) + 4f'(0) + f'(h)) - \frac{h^5}{90} f^{(5)}(c).$$

Exercice 21.5

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{3}(4 - u_n^2). \end{cases}$$

Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 21.6

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{1 + u_n}. \end{cases}$$

Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 21.7

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$.

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 telle que

$$\forall x \in [a, b], \quad f'(x) > 0.$$

Montrer que

$$\exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} : \quad \forall x \in [a, b], \quad f(x) \geq \alpha x + \beta.$$

Exercice 21.8

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable.

Soit $\ell \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} \ell \\ f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell. \end{cases}$$

Montrer que

$$\exists c \in \mathbb{R} : \quad f'(c) = 0.$$

Exercice 21.9

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$.

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^2 telle que

$$\begin{cases} f(a) = f(b) = 0 \\ f'(a) = f'(b) = 0. \end{cases}$$

Montrer que

$$\exists c \in]a, b[: \quad f(c) = f''(c).$$