

Continuité

Généralités et grands théorèmes

QCOP CONT.1

Soit I un intervalle de \mathbb{R} . Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $a \in I$.

☐ Donner la définition de « f est continue en a ».

✍ Énoncer et démontrer le théorème de caractérisation séquentielle de la continuité.

✂ Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in I^{\mathbb{N}}$. Soit $\ell \in I$. On suppose que f est continue sur I .

(a) Montrer que

$$u_n \rightarrow \ell \implies f(u_n) \rightarrow f(\ell).$$

(b) On suppose que $f[I] = I$ et que

$$\begin{cases} u_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$$

Montrer que

$$u_n \rightarrow \ell \implies f(\ell) = \ell.$$

QCOP CONT.2

☐ Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Que dire de l'image par f d'un intervalle de \mathbb{R} ?

✂ (a) Montrer que tout polynôme réel de degré impair admet au moins une racine réelle.

(b) Est-ce vrai pour un polynôme de degré pair ?

QCOP CONT.3

Soient $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues.

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$.

✍ Montrer que f est bornée sur $[a, b]$ et atteint ses bornes.

✂ Montrer que

$$\begin{aligned} \forall x \in [a, b], \quad f(x) &< g(x) \\ \Downarrow \\ \sup_{x \in [a, b]} f(x) &< \sup_{x \in [a, b]} g(x). \end{aligned}$$

✂ Les résultats précédents restent-ils vrais si l'on étudie f sur \mathbb{R} et non sur $[a, b]$?

Continuité uniforme

QCOP CONT.4

Soit I un intervalle de \mathbb{R} .

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

☰ Donner la définition de « f est uniformément continue sur I ».

✎ On considère les trois assertions suivantes :

- (i) f est continue sur I ;
- (ii) f est uniformément continue sur I ;
- (iii) f est lipschitzienne sur I .

Énoncer et démontrer les implications les reliant.

🔗 Lesquelles des assertions précédentes sont vraies pour $f = \sqrt{\cdot}$ et $I = [0, 1]$?

QCOP CONT.5

Soit $[a, b]$ un segment de \mathbb{R} .

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$.

☰ Que dire de f ? Quel théorème venez-vous d'énoncer ?

- ✎ (a) Écrire à l'aide de quantificateurs « f n'est pas uniformément continue sur $[a, b]$ ».
- (b) Aboutir à une contradiction à l'aide de la caractérisation séquentielle de la continuité.