Fonctions de deux variables

QCOP F2V.1

Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Soit $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$.
On considère les assertions suivantes :

(i) f est continue sur $\mathcal{U}$;
(ii) f admet des dérivées partielles sur $\mathcal{U}$;
(iii) f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathcal{U}$.

- Définir (i), (ii) et (iii).
- Quelles implications a-t-on entre (i), (ii) et (iii) ?
- Quelles implications sont fausses ? Justifier à l'aide d'un contre-exemple.

QCOP F2V.2

Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Soit $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathcal{U}$.

- Soit $(x_0, y_0) \in \mathcal{U}$.
  Définir le gradient de f en (x_0, y_0).
- Soit $(x_0, y_0) \in \mathcal{U}$. Écrire le développement limité de f à l'ordre 1 au voisinage de (x_0, y_0) avec un gradient.
- Soit $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{U}$ un arc $\mathscr{C}^1$.
  Écrire, pour $t \in \mathbb{R}$, $(f \circ \gamma)'(t)$ à l'aide d'un gradient et retrouver la « règle de la chaîne ».

QCOP F2V.3

Pour $A := (x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose :

$$\|A\|_1 := |x| + |y|, \quad \|A\|_2 := \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \|A\|_\infty := \max\big(|x|, |y|\big).$$

On admet que les applications $A \longmapsto \|A\|_p$ pour $p \in \{1, 2, \infty\}$ définissent des normes *au sens qui sera étudié en deuxième année.*

- Dessiner, pour $p \in \{1, 2, \infty\}$, les boules unités fermées de $\mathbb{R}^2$ pour les normes $\|\cdot\|_p$, *i.e.* les ensembles $\left\{A \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \|A\|_p \leqslant 1\right\}$.
- Rappeler l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^2$ muni de sa structure euclidienne canonique.
- Établir l'inégalité triangulaire pour les trois normes considérées.
- Soit $A \in \mathbb{R}^2$. Montrer que

$$\begin{cases} \|A\|_\infty \leqslant \|A\|_1 \leqslant 2\|A\|_\infty \\ \|A\|_\infty \leqslant \|A\|_2 \leqslant \sqrt{2}\|A\|_\infty. \end{cases}$$

- Soit $(A_n)_n \in (\mathbb{R}^2)^{\mathbb{N}}$. Soit $\ell \in \mathbb{R}^2$. Montrer que

$$\|A_n - \ell\|_1 \longrightarrow 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \|A_n - \ell\|_2 \longrightarrow 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \|A_n - \ell\|_\infty \longrightarrow 0.$$