Applications linéaires

On désignera par $\mathbb{K}$ l'ensemble $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

QCOP AL.1

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Soit $u \in \mathrm{L}(E, F)$.

1. Définir « u est une application linéaire de E dans F ».
2. Soient $x, y \in E$ avec $y \neq 0_E$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.
   Entourer les égalités vraies et rayer celles n'ayant pas de sens.
   $$u(0_E) = 0_F, \quad u^2(x) = u(x)^2, \quad u(\lambda y + x) = \lambda u(y) + u(x), \quad u(xy) = u(x)u(y).$$
3. Que dire d'une application linéaire constante ? Justifier.

QCOP AL.2

Soient E et F deux espaces vectoriels.
Soit $u \in \mathrm{L}(E, F)$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante d'injectivité de u.
2. a) Soit $\mathscr{F}$ une famille finie libre de E. Montrer que, si u est injective, $u[\mathscr{F}]$ est libre dans F.
   b) Écrire la contraposée de ce résultat.
3. Le résultat est-il toujours vrai si u n'est plus supposée injective ?

QCOP AL.3

Soit E un espace vectoriel. Soient $u, v \in \mathrm{L}(E)$.

1. Définir les ensembles $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$.
   Quelle structure ont-ils par rapport à E ?
2. Compléter par un symbole « $\subset$ » ou « $\supset$ » et démontrer les inclusions :
   $$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} \mathrm{Ker}(u^k) \cdots \mathrm{Ker}(u^{k+1}) \\ \mathrm{Im}(u^k) \cdots \mathrm{Im}(u^{k+1}). \end{cases}$$
   $$\begin{cases} \mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Ker}(v) \cdots \mathrm{Ker}(u+v) \\ \mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v) \cdots \mathrm{Im}(u+v). \end{cases}$$

QCOP AL.4 ★

Soit E un espace vectoriel.
Soit $x \in E$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

1. Compléter :
   $$\lambda x = 0_E \iff \cdots.$$
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K}$.
   Soit $u \in \mathrm{L}(E)$. On note :
   $$P := \sum_{k=0}^{n} a_k \mathrm{X}^k \quad \text{et} \quad P(u) := \sum_{k=0}^{n} a_k u^k.$$
   On suppose que $u(x) = \lambda x$.
   a) Justifier que $P(u) \in \mathrm{L}(E)$.
   b) Montrer que :
   $$\forall k \in \mathbb{N}, \quad u^k(x) = \lambda^k x.$$
   c) En déduire que :
   $$\big(P(u)\big)(x) = P(\lambda)x.$$
   d) On suppose que $x \neq 0_E$.
   Que dire si $P(u) = 0_{\mathrm{L}(E)}$?

QCOP AL.5

Soit E un espace vectoriel. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que :

$$E = F \oplus G.$$

On note p le projecteur sur F parallèlement à G.

1. Définir l'application p.

2. Montrer que $\mathrm{p} \circ \mathrm{p} = \mathrm{p}$.

3. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(\mathrm{p}) \oplus \mathrm{Im}(\mathrm{p})$.

4. **a)** L'application $-\mathrm{p}$ est-elle un projecteur de E ?

b) L'ensemble des projecteurs de E est-il un sous-espace vectoriel de $\mathrm{L}(E)$?

QCOP AL.6

Soit E un espace vectoriel. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que :

$$E = F \oplus G.$$

On note s la symétrie par rapport à F parallèlement à G.

1. Définir l'application s.

2. Montrer que $\mathrm{s} \circ \mathrm{s} = \mathrm{Id}_E$.

3. Montrer que :

$$E = \mathrm{Ker}(\mathrm{s} - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(\mathrm{s} + \mathrm{Id}_E).$$

4. **a)** L'application $0_{\mathrm{L}(E)}$ est-elle une symétrie de E ?

b) L'ensemble des symétries de E est-il un sous-espace vectoriel de $\mathrm{L}(E)$?

QCOP AL.7

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $H \subset E$.

1. Donner la définition de « H est un hyperplan de E ».

2. Soit $\varphi \in \mathrm{L}(E, \mathbb{K})$. Montrer que $\mathrm{Ker}(\varphi)$ est un sous-espace vectoriel de E.

3. Soient H_1 et H_2 deux hyperplans de E. Quelle structure a l'ensemble $H_1 \cap H_2$ par rapport à E ?

4. Montrer que les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels.

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x+y=0\right\}, \quad \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{cases} x+y-z=0 \\ 3x+2y=0 \end{cases}\right\},$$

$$\left\{(u_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \;\middle|\; u_n \longrightarrow 0\right\}, \quad \left\{M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \;\middle|\; \mathrm{Tr}(M) = 0\right\}.$$

QCOP AL.8 ★

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit H un sous-espace vectoriel de E.

1. Soit φ une forme linéaire non nulle sur E. Montrer que φ est surjective.

2. Supposons que H est un hyperplan de E.

a) Donner la définition de « H est un hyperplan de E ».

b) On se place dans le cas où $E = \mathbb{K}^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$\exists (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \left\{(0, \ldots, 0)\right\} : \quad H = \left\{(x_1, \ldots, x_n) \in E \;\middle|\; a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0_E\right\}.$$

3. **a)** Montrer que, si H est un hyperplan, alors pour tout $x_0 \in E \setminus H$, $E = H \oplus \mathrm{Vect}\{x_0\}$.

b) Sans justification, a-t-on une réciproque ?

4. Soient φ et ψ deux formes linéaires sur E. Montrer que :

$$\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Ker}(\psi) \iff \left[\exists \lambda \in \mathbb{K} : \quad \varphi = \lambda\psi\right].$$