Lycée Chateaubriand
MPSI 3 • 2025 – 2026

William GREGORY

Colle 12

Calcul intégral, Nombres réels

- Après votre colle, il vous est demandé de reprendre les exercices traités et de les rédiger sur feuille. Ce travail est à déposer dans la boîte en B013 avant vendredi midi ou à m'envoyer par mail au début des vacances.
- Vous trouverez le sujet et des indications sur la page ci-contre.

Calcul intégral

Exercice 12.1

1. Soit f une fonction continue sur $[0, \pi]$ à valeurs réelles vérifiant

$$\forall x \in [0, \pi], \quad f(\pi - x) = f(x).$$

Montrer que :

$$\int_0^\pi x f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(x)\,\mathrm{d}x.$$

2. Calculer $\displaystyle\int_0^\pi \frac{x \sin(x)}{1 + \cos^2(x)}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 12.2

Calculer :

$$\int_0^1 \ln(1 + t^2)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 12.3

Déterminer une primitive de la fonction

$$t \longmapsto \frac{1}{1 + \tan(t)}.$$

Exercice 12.4

Pour $p, q \in \mathbb{N}$, on définit la fonction

$$\mathrm{f}_{p,q} : \left| \begin{array}{ccc}]0, 1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \varepsilon & \longmapsto & \displaystyle\int_\varepsilon^1 t^p \ln(t)^q\,\mathrm{d}t. \end{array} \right.$$

On note $\mathrm{I}_{p,q} := \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \mathrm{f}_{p,q}(\varepsilon)$.
Déterminer l'expression de $\mathrm{I}_{p,q}$ en fonction de p et de q.

Exercice 12.5

Déterminer la primitive qui s'annule en 0 de la fonction

$$x \longmapsto \frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} \cosh\left(\frac{x}{2}\right)}{\cosh(x)}.$$

Exercice 12.6

Déterminer la primitive de la fonction

$$x \longmapsto \frac{\arctan(x)}{x^2}$$

sur $]0, +\infty[$ qui s'annule en 1.

Nombres réels : borne supérieure

Exercice 12.7

1. Soit A une partie de $\mathbb{Z}$ non vide et majorée. Montrer que A admet un maximum.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. À l'aide de l'ensemble
$$\mathrm{A}_x := \{n \in \mathbb{Z} \ ; \ n \leqslant x\},$$
justifier l'existence de la partie entière de x.

Exercice 12.8

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction
$$f_n : \left| \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^n(1-x). \end{array} \right.$$
Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \sup\limits_{x \in [0,1]} \left|f_n(x)\right|$.

Exercice 12.9

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}_+$ majorée. Montrer que :
$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \sup_{x \in A} |\lambda x| = |\lambda| \sup(A).$$

Exercice 12.10

Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$ non vides telles que :
$$\forall (a,b) \in A \times B, \quad a < b.$$

1. Montrer que $\sup(A)$ et $\inf(B)$ existent.

2. Comparer $\sup(A)$ et $\inf(B)$.

3. Donner un exemple de telles parties A et B telles que $\sup(A) = \inf(B)$.

Exercice 12.11

Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$ non vides telles que :
$$\begin{cases} \forall (a,b) \in A \times B, \ \ a \leqslant b \\ \forall \varepsilon > 0, \ \ \exists (a,b) \in A \times B : \ \ b - a \leqslant \varepsilon. \end{cases}$$
Montrer que $\sup(A) = \inf(B)$.

Exercice 12.12

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

> *Pour $x \in \mathbb{R}$, on appelle la* distance de x à A *la quantité*
> $$\mathrm{d}(x,A) := \inf\left\{|x-a| \ ; \ a \in A\right\}.$$

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la quantité $\mathrm{d}(x,A)$ est correctement définie.

2. Montrer que :
$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad \left|\mathrm{d}(x,A) - \mathrm{d}(y,A)\right| \leqslant |x-y|.$$