Séries numériques

On désignera par $\mathbb{K}$ l'ensemble $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Premiers résultats, deux séries de référence

QCOP SER.1

Soit $(u_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

- Donner la définition de « la série $\sum_n u_n$ est convergente ».
- Montrer que

$$\sum_n u_n \text{ converge} \quad \Longrightarrow \quad u_n \longrightarrow 0.$$

- Étudier la nature des séries suivantes :

$$\sum_n \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \quad \text{et} \quad \sum_n \arctan(12n!).$$

QCOP SER.2

Soit $N_0 \in \mathbb{N}$. Soient $(u_n)_{n \geqslant N_0}$ une suite de nombres réels positifs.

On pose, pour $N \geqslant N_0$, $U_N := \sum_{n=N_0}^{N} u_n$.

- Quelle est la monotonie de $(U_N)_N$?
- Montrer que

$$\sum_n u_n \text{ converge} \quad \Longleftrightarrow \quad (U_N)_N \text{ est majorée.}$$

- Ceci reste-il vrai si l'on ne suppose plus que $(u_n)_n$ est à valeurs positives ?

QCOP SER.3

Soit $a \in \mathbb{C}$.

- Compléter :

$$a^n \longrightarrow 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \cdots.$$

- Soit $N \in \mathbb{N}$. Rappeler l'expression de $\sum_{k=0}^{N} a^k$ pour $a \neq 1$.
- Montrer que

$$\sum_n a^n \text{ converge} \quad \Longleftrightarrow \quad |a| < 1.$$

- On suppose que $|a| < 1$. Déterminer

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a^n \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} a^n.$$

QCOP SER.4

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

- **(a)** Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer

$$\sum_{k=0}^{n} (u_{k+1} - u_k).$$

  (b) En déduire que $\sum_n (u_{n+1} - u_n)$ converge si, et seulement si, $(u_n)_n$ converge.
- On suppose que

$$u_{n+1} - u_n \longrightarrow 0.$$

  Montrer que $\sum_n (u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n)$ est convergente.

Théorèmes de comparaison

QCOP SER.5

Soit $N_0 \in \mathbb{N}$. Soient $(a_n)_{n \geqslant N_0}, (b_n)_{n \geqslant N_0}$ deux suites de nombres réels positifs.
On pose, pour $N \geqslant N_0$,

$$A_N := \sum_{n=N_0}^{N} a_n \quad \text{et} \quad B_N := \sum_{n=N_0}^{N} b_n.$$

Compléter :

$$\sum_n a_n \text{ converge} \iff (A_N)_N \ \ldots.$$

On suppose que

$$\begin{cases} \exists N_1 \geqslant N_0 : \quad \forall n \geqslant N_1, \quad a_n \leqslant b_n \\ \sum_n b_n \text{ est convergente.} \end{cases}$$

(a) Montrer que $(A_N)_N$ est majorée.
(b) En déduire que $\sum_n a_n$ converge.
(c) Montrer que

$$\sum_{n=N_1}^{+\infty} a_n \leqslant \sum_{n=N_1}^{+\infty} b_n.$$

QCOP SER.6

Soient $(a_n)_n, (b_n)_n$ deux suites de nombres réels positifs telles que

$$a_n \sim b_n.$$

Rappeler la règle de comparaison pour les séries à termes positifs.

Montrer qu'il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\exists N_1 \in \mathbb{N} : \quad \forall n \geqslant N_1, \quad \frac{1}{2} b_n \leqslant a_n \leqslant \frac{3}{2} b_n.$$

Montrer que $\sum_n a_n$ et $\sum_n b_n$ sont de même nature.

Ce résultat reste-il valable si l'on ne suppose plus $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ à valeurs positives ?

QCOP SER.7

Énoncer la règle de comparaison pour les séries à termes positifs.

Soient $(u_n)_n, (v_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.
Montrer que

$$\left.\begin{matrix} u_n = o(v_n) \\ \sum_n |v_n| \text{ converge} \end{matrix}\right\} \implies \sum_n |u_n| \text{ converge.}$$

Soit $\sum_n u_n$ une série numérique.
Montrer que

$$n^2 u_n \longrightarrow 0 \implies \sum_n u_n \text{ converge.}$$

QCOP SER.8

Énoncer la règle de comparaison pour les séries à termes positifs.

Soient $(u_n)_n, (v_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.
Montrer que

$$\left.\begin{matrix} u_n = O(v_n) \\ \sum_n |v_n| \text{ converge} \end{matrix}\right\} \implies \sum_n |u_n| \text{ converge.}$$

Soit $\sum_n u_n$ une série numérique telle que $(n^2 u_n)_n$ est bornée.
Montrer que $\sum_n u_n$ converge.

Comparaison série-intégrale

QCOP SER.9

Soit $f : [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et décroissante.
Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$ tels que $m \geqslant n$.
Montrer que

$$\int_n^m f(t)\,\mathrm{d}t + f(m) \leqslant \sum_{k=n}^{m} f(k) \leqslant f(n) + \int_n^m f(t)\,\mathrm{d}t.$$

On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{H}_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

(a) Montrer que $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n}$ diverge.

(b) Montrer que $\mathrm{H}_n \sim \ln(n)$.

QCOP SER.10

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

On suppose que $\alpha \leqslant 0$. Montrer que $\sum_n \frac{1}{n^\alpha}$ diverge.

On suppose que $\alpha > 0$.

(a) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\mathrm{I}_N + \frac{1}{N} \leqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^\alpha} \leqslant 1 + \mathrm{I}_N,$$

où $\mathrm{I}_N := \int_1^N \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$.
On n'utilisera pas une « formule toute faite » de comparaison série-intégrale mais on l'établira dans ce cas particulier.

(b) En déduire la nature de $\sum_n \frac{1}{n^\alpha}$ en distinguant les cas

$$\alpha \in \,]0, 1[, \quad \alpha = 1, \quad \alpha > 1.$$

Convergence absolue

QCOP SER.11

Soit $\sum_n u_n$ une série numérique.

- Définir « $\sum_n u_n$ est absolument convergente ».
- Montrer que, si $\sum_n u_n$ est absolument convergente, alors $\sum_n u_n$ est convergente.
  On fera d'abord la preuve dans le cas où $(u_n)_n$ est à valeurs réelles, puis on utilisera le résultat établi pour en déduire le cas où $(u_n)_n$ est à valeurs complexes.
- Montrer que la réciproque est fausse.
- Écrire la contraposée du résultat démontré.

Séries alternées

QCOP SER.12

Soit $(a_n)_n$ une suite de nombres réels positifs, décroissante et de limite nulle.

On pose, pour $N \in \mathbb{N}$, $S_N := \sum_{n=0}^{N} (-1)^n a_n$.

- **(a)** Montrer que $(S_{2N})_N$ et $(S_{2N+1})_N$ sont adjacentes.
  (b) Compléter :
  $$\begin{cases} \sum_n (-1)^n a_n \ \ldots \\ \forall N \in \mathbb{N}, \quad \cdots \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n \leqslant \cdots . \end{cases}$$
  (c) En déduire que $\left| \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n \right| \leqslant a_0$.
- On suppose que $\sum_n (-1)^n a_n$ est convergente. Montrer que
  $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k a_k \right| \leqslant a_{n+1}.$$