

FCONV. Fonctions convexes

QCOP FCONV.1

2. Résultat. $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geqslant 1 + x$;
 $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln(x) \leqslant x - 1$;
 $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \frac{2}{\pi}x \leqslant \sin(x) \leqslant x$.

QCOP FCONV.3

1. Résultat. $\forall x, y \in \mathbb{R}, \forall \lambda \in [0, 1], f((1 - \lambda)x + \lambda y) \leqslant (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y)$.
2. Résultat. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$. Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in [0, 1]$ tels que $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 1$.
Alors

$$f(\alpha_1 y_1 + \dots + \alpha_n y_n) \leqslant \alpha_1 f(y_1) + \dots + \alpha_n f(y_n).$$

3. a) Utiliser l'inégalité de Jensen avec les poids $\alpha_i = \frac{1}{n}$ pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.
b) Utiliser l'inégalité de Jensen avec, pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $y_i = nx_i$ et $\alpha_i = \frac{1}{n}$.

QCOP FCONV.4

1. Résultat. $x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}$.
2. a) Utiliser la définition de la convexité avec la fonction exponentielle.
b) Utiliser la question précédente avec x et y judicieusement choisis.