

Colle 18

Applications linéaires

- Après votre colle, il vous est demandé de reprendre les exercices traités et de les rédiger sur feuille. Ce travail est à déposer dans la boîte en B013 avant mardi prochain.
- Vous trouverez le sujet et des indications sur la page ci-contre.



Exercice 18.1

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel.
Soit $u \in L(E)$ tel que

$$u^2 - 3u - 10 \operatorname{Id}_E = 0_{L(E)}.$$

1. Montrer que u est bijectif et exprimer u^{-1} en fonction de u .
2. Montrer que

$$E = \operatorname{Ker}(u + 2 \operatorname{Id}_E) \oplus \operatorname{Ker}(u - 5 \operatorname{Id}_E).$$

Exercice 18.2

Soit E un espace vectoriel. Soient $f, g \in L(E)$ tels que $f \circ g = \operatorname{Id}_E$.

1. Montrer que $\operatorname{Ker}(g \circ f) = \operatorname{Ker}(f)$.
2. Montrer que $\operatorname{Im}(g \circ f) = \operatorname{Im}(g)$.
3. Montrer que $E = \operatorname{Ker}(f) \oplus \operatorname{Im}(g)$.

Exercice 18.5

Soit E un espace vectoriel. Soit $f \in L(E)$.

1. Montrer que

$$\operatorname{Im}(f) \cap \operatorname{Ker}(f) = \{0_E\} \iff \operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Ker}(f^2).$$

2. Montrer que

$$\operatorname{Im}(f) + \operatorname{Ker}(f) = E \iff \operatorname{Im}(f) = \operatorname{Im}(f^2).$$

Exercice 18.3

On considère

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto P(X^2) + (1 + X^2)P(X). \end{cases}$$

1. Montrer que φ est une application linéaire.
2. Montrer que φ est injective.
3. L'application φ est-elle surjective ?

Exercice 18.4

On note \mathcal{P} l'ensemble des fonctions paires de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et \mathcal{I} l'ensemble des fonctions impaires de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

1. Montrer que \mathcal{P} et \mathcal{I} sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
2. Déterminer le projeté de $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ sur \mathcal{P} parallèlement à \mathcal{I} .

Exercice 18.6

Trouver un espace vectoriel E et deux endomorphismes $u, v \in L(E)$ tels que

$$u \circ v = \text{Id}_E \quad \text{et} \quad v \circ u \neq \text{Id}_E.$$

Exercice 18.7

Soit E un espace vectoriel. Soit $f \in L(E)$.

1. Montrer que $(\text{Im}(f^n))_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante pour l'inclusion.

2. Soit $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\text{Im}(f^{k_0}) = \text{Im}(f^{k_0+1})$. Montrer que

$$\forall k \geq k_0, \quad \text{Im}(f^k) = \text{Im}(f^{k_0}).$$

3. Donner un espace E et un endomorphisme f dont la suite $(\text{Im}(f^n))_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas stationnaire.

Exercice 18.8

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel. Soit $f \in L(E)$.

- On dit que f est une homothétie lorsque

$$\exists \lambda \in \mathbb{K} : \quad \forall x \in E, \quad f(x) = \lambda x.$$

- On dit que f est une pseudo-homothétie lorsque

$$\forall x \in E, \quad \exists \lambda_x \in \mathbb{K} : \quad f(x) = \lambda_x x.$$

1. Montrer que

$$f \text{ est une homothétie} \iff f \text{ est une pseudo-homothétie.}$$

2. Déterminer l'ensemble

$$C(E) := \left\{ u \in L(E) \mid \forall v \in L(E), \quad u \circ v = v \circ u \right\}.$$

On pourra admettre que tout sous-espace vectoriel de E admet un supplémentaire.