Matrices et applications linéaires

Similitude matricielle, rang d'une matrice

QCOP MATAL.1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices semblables dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

- Donner la définition de « A et B sont semblables dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ ».
- Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que A^k et B^k sont semblables dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.
- Soit $k \in \mathbb{N}$. Soient $a_0, \dots, a_k \in \mathbb{K}$.

  On pose $Q := \sum_{j=0}^{k} a_j X^j \in \mathbb{K}[X]$, et, pour $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, on pose $Q(M) := \sum_{j=0}^{p} a_j M^j$.

  Montrer que $Q(A)$ et $Q(B)$ sont semblables.

QCOP MATAL.2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices semblables dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

- Donner la définition de « A et B sont semblables dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ ».
- Montrer que

$$B = \mathrm{I}_n \iff A = \mathrm{I}_n.$$

- Montrer que deux matrices de même rang ne sont pas nécessairement semblables.

QCOP MATAL.3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices semblables dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

- Soit $k \in \mathbb{N}$. Que dire de A^k et B^k ?
- Montrer que

$$\left.\begin{array}{l} \exists k_A \in \mathbb{N}^* : A^{k_A} = 0_n \\ B \text{ est diagonale} \end{array}\right\} \implies B = 0_n.$$

- On se place dans le cas $n = 2$. On suppose que $A \neq 0_2$ et $A^2 = 0_2$.
  - **(a)** Soit $X \in \mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{K}) \setminus \mathrm{Ker}(A)$.
    Montrer que la famille (AX, X) est libre dans $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{K})$.
  - **(b)** En déduire que A est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

QCOP MATAL.4

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

- Définir le rang de A.
- On suppose que $\mathrm{rg}(A) = 1$.
  - **(a)** Montrer qu'il existe $C \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $L \in \mathrm{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ tels que $A = CL$.
  - **(b)** Montrer que $A^2 = \mathrm{Tr}(A)A$.
  - **(c)** En déduire, pour $p \in \mathbb{N}$, A^p.

Représentation matricielle

QCOP MATAL.5

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.
Soit p un projecteur de E.

- Montrer que $E = \mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id}_E)$.
- Déterminer une base dans laquelle la matrice de p est diagonale.
- Montrer que $\mathrm{Tr}(p) = \mathrm{rg}(p)$.

QCOP MATAL.6

- **(a)** Montrer que deux matrices semblables ont même trace.
  (b) Comment définir la trace d'un endomorphisme ?
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'endomorphisme

$$D : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_n[\mathrm{X}] & \longrightarrow & \mathbb{K}_n[\mathrm{X}] \\ P & \longmapsto & P'. \end{array} \right.$$

  (a) Écrire la matrice de D dans la base canonique de $\mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$.
  (b) Déterminer la trace de D.

QCOP MATAL.7

- Définir la matrice d'une application linéaire.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

  (a) Écrire la matrice de l'endomorphisme

$$\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_n[\mathrm{X}] & \longrightarrow & \mathbb{K}_n[\mathrm{X}] \\ P & \longmapsto & P(\mathrm{X}+1) \end{array} \right.$$

  dans la base canonique de $\mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$.
  (b) Déterminer l'inverse de φ.
  (c) En déduire l'inverse de la matrice

$$M := \left(\binom{i}{j} \right)_{0 \leqslant i,j \leqslant n}.$$