Espaces préhilbertiens réels

Produit scalaire, inégalité de Cauchy-Schwarz

QCOP EPR.1

Soit $\big(E, \langle \cdot \mid \cdot \rangle\big)$ un espace préhilbertien réel.
Soient $x, y \in E$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

(a) Exprimer, à l'aide des propriétés de $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$, la quantité

$$\|\lambda x + y\|^2.$$

(b) Déterminer, lorsque $x \neq 0_E$, le discriminant de la fonction polynomiale

$$t \longmapsto \|tx + y\|^2.$$

Montrer l'*inégalité de Cauchy-Schwarz* :

$$\big|\langle x \mid y \rangle\big| \leqslant \|x\|\|y\|.$$

Montrer que

$$\big|\langle x \mid y \rangle\big| = \|x\|\|y\| \quad \Longleftrightarrow \quad x \text{ et } y \text{ sont liés.}$$

QCOP EPR.2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Quel est le produit scalaire usuel (canonique) $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ sur $\mathbb{R}^n$?
- Écrire l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\big(\mathbb{R}^n, \langle \cdot \mid \cdot \rangle\big)$.
- Montrer que

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 \leqslant n \sum_{k=1}^{n} {x_k}^2,$$

et préciser les cas d'égalité.

QCOP EPR.3

Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère

$$\langle \cdot \mid \cdot \rangle : \left| \begin{array}{ccc} \mathrm{M}_n(\mathbb{R})^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (A, B) & \longmapsto & \mathrm{Tr}(A^\top B). \end{array} \right.$$

- Montrer que $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.
- Écrire l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans cet espace préhilbertien.
- Montrer que

$$\forall M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}), \quad \mathrm{Tr}(M^2) \leqslant \mathrm{Tr}(M^\top M).$$

QCOP EPR.4

Soit $\left(E, \langle\cdot\mid\cdot\rangle\right)$ un espace préhilbertien réel.

- Donner la définition de « $\langle\cdot\mid\cdot\rangle$ est un produit scalaire sur E ».
- Soient $x, y \in E$. Montrer la *formule de polarisation* :

$$\langle x \mid y\rangle = \frac{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2}{4}.$$

- Soit $u \in \mathrm{L}(E)$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall x \in E, \quad \left\|u(x)\right\| = \lambda\|x\|.$$

  Montrer que

$$\forall x, y \in E, \quad \left\langle u(x) \,\middle|\, u(y)\right\rangle = \lambda \left\langle x \mid y\right\rangle.$$

Orthogonalité, projection orthogonale

QCOP EPR.5

Soit $\left(E, \langle\cdot\mid\cdot\rangle\right)$ un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E.
Soient $x, y \in E$.

- **(a)** Exprimer les coordonnées de x dans $\mathscr{B}$.
  (b) Même question si $\mathscr{B}$ est supposée seulement orthogonale.
- Exprimer $\langle x \mid y\rangle$ et $\|x\|$ en fonction des $\langle x \mid e_i\rangle$ et $\langle y \mid e_i\rangle$ pour $i \in [\![1, n]\!]$.

QCOP EPR.6

Soit $\left(E, \langle\cdot\mid\cdot\rangle\right)$ un espace préhilbertien réel.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Soit $\mathscr{F} = (v_1, \dots, v_k) \in E^k$.

- Montrer que

$$\mathscr{F} \text{ est orthogonale} \implies \mathscr{F} \text{ est libre.}$$

- Montrer que la réciproque est fausse.
- On suppose que

$$\begin{cases} k > \dim(E) \\ \forall i \in [\![1, k]\!], \quad v_i \neq 0_E. \end{cases}$$

  La famille $\mathscr{F}$ peut-elle être orthogonale ?

QCOP EPR.7

Soit $\left(E, \langle\cdot\mid\cdot\rangle\right)$ un espace préhilbertien réel.

- Énoncer et démontrer le théorème de Pythagore.
- Dans le cas d'une famille de deux vecteurs, le théorème admet-il une réciproque ?
- Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie. On note p_F la projection orthogonale sur F.
  Soit $x \in E$.
  (a) Exprimer, en fonction de $\|x\|$ et de $\left\|\mathrm{p}_F(x)\right\|$, la distance de x à F.
  (b) Montrer que $\left\|\mathrm{p}_F(x)\right\| \leqslant \|x\|$.

QCOP EPR.8

Soit $\left(E, \langle \cdot \mid \cdot \rangle\right)$ un espace préhilbertien réel.
Soit $x \in E$. Soit $a \in E \setminus \{0_E\}$.
On note p la projection orthogonale sur le sous-espace $\mathrm{Vect}(a)$.

Compléter :

$$\mathrm{p}(x) \in \dots \quad \text{et} \quad x - \mathrm{p}(x) \in \dots .$$

À l'aide des caractérisations précédentes, et sans l'aide d'une formule générale, établir que

$$\mathrm{p}(x) = \frac{\langle x \mid a \rangle}{\|a\|^2} a.$$

Déterminer $\mathrm{d}\left(x, \mathrm{Vect}(a)^{\perp}\right)$.

QCOP EPR.9

Soit $\left(E, \langle \cdot \mid \cdot \rangle\right)$ un espace préhilbertien réel.
Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ de E.
On note p_F la projection orthogonale sur F.

Définir l'application p_F.

Soit $x \in E$. Soit $(f_1, \dots, f_n)$ une base orthogonale de F.

(a) Exprimer $\mathrm{p}_F(x)$ dans cette base.
(b) Même question lorsque la base est supposée orthonormée.

Soit $x \in E$.

(a) Définir la distance de x à F, notée $\mathrm{d}(x, F)$.
(b) Montrer que $\mathrm{d}(x, F) = \left\| x - \mathrm{p}_F(x) \right\|$.

Expliquer le principe de l'algorithme de Gram-Schmidt.
On donnera en particulier la formule à retenir, que l'on expliquera à l'aide de la notion de projection orthogonale.