

Colle 2

Raisonnements, ensembles, nombres complexes

- Après votre colle, il vous est demandé de reprendre les exercices traités et de les rédiger sur feuille. Ce travail est à me rendre la semaine prochaine.
- Vous trouverez le sujet et des indications sur la page ci-contre.



Nombres complexes

Exercice 2.1

1. Calculer $\frac{\sqrt{2}+i}{\sqrt{2}-i} + \frac{\sqrt{2}-i}{\sqrt{2}+i}$.
2. Calculer $\frac{\sqrt{2}+i}{\sqrt{2}-i} - \frac{\sqrt{2}-i}{\sqrt{2}+i}$.

Exercice 2.2

On pose

$$j := -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

1. Calculer j^2 , $\frac{1}{j}$ et \bar{j} .
2. Calculer j^3 .
3. Calculer $1 + j + j^2$.

Exercice 2.3

Pour $z \in \mathbb{C}^*$, on définit $f(z) := \frac{\bar{z}}{z}$.

1. Déterminer $\{z \in \mathbb{C} \mid f(z) \in \mathbb{R}\}$ et $\{z \in \mathbb{C} \mid f(z) \in i\mathbb{R}\}$.
2. Soit $z \in \mathbb{C}$. Déterminer $f(\bar{z})$.

Exercice 2.4

À l'aide du nombre $z := \frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}$, déterminer

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{\pi}{12}\right).$$

Raisonnements

Exercice 2.5

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a + b \notin \mathbb{Q}$.
Les nombres a et b peuvent-ils être rationnels ?

Exercice 2.6

Soit $a \in [0, 1]$. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a^n \leq n! \leq n^n.$$

Exercice 2.7

On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ comme suit :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sqrt{\frac{1 + u_n}{2}}. \end{cases}$$

Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \leq u_n \leq 1.$$

Ensembles

Exercice 2.8

On note

$$\begin{aligned} A &:= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq e^{-x}\}, \\ B &:= \mathbb{R} \times \{0\}. \end{aligned}$$

Décrire l'ensemble

$$A + B := \{a + b \mid a \in A, b \in B\}.$$

Exercice 2.9

Soit E un ensemble. Soient $A, B \in \mathcal{P}(E)$.
Résoudre dans $\mathcal{P}(E)$ l'équation

$$A \cap X = B.$$

Exercice 2.10

Montrer que

$$B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

ne s'écrit pas comme un produit cartésien de deux ensembles.