

# ANCOVA

Walter Gruber

2019-03-26

## Contents

<b>Vorbemerkung</b>	<b>1</b>
<b>Motivation</b>	<b>2</b>
<b>Kovarianzanalyse</b>	<b>2</b>
Voraussetzungen . . . . .	3
Berechnung einer ANCOVA . . . . .	5
Nützliche Graphen . . . . .	13
Homogenität der Steigung . . . . .	16
Bericht der Ergebnisse . . . . .	16

## Vorbemerkung

Dieses Skriptum wurde mit dem Paket *bookdown* erstellt. Der verwendete R-Code wird als Teil des Skriptums angeführt und kann auch direkt von diesem Dokument in ein R-Skript übernommen und ausgeführt werden. Erläuterungen zum Code beschränken sich zum Teil auf wesentliche Code-Fragmente. Für detaillierte Angaben zu diversen Funktionen ist die R-Hilfe zu verwenden.

Der nachfolgende Code ist spezifisch für die Erstellung dieses Dokumentes, sowie der Bearbeitung der Beispiele im Kurs von Bedeutung. Es wird in diesem Code-Teil sichergestellt, dass die verwendeten Pakte vorhanden und geladen sind. Daher sollte dieser Code am Anfang jeder neuen R-Datei übernommen werden. Die Vorgehensweise ist:

1. Starten von R-Studio
2. Öffnen einer neuen R-Script Datei
3. Kopiere die nachfolgenden Zeilen in diese Datei
4. Speichere die Datei mit einem entsprechenden Namen
5. Führe diesen Code aus
6. Füge deinen Code nach diesen Zeilen ein

```
# Initialisierung
rm(list = ls())
if (!require("pacman")) install.packages("pacman")
pacman::p_load(corrplot, DAAG, dataMaid, devtools, doBy, DT,
               ggformula, ggplot2, gridExtra, htmlwidgets,
               imager, knitr, labelled, leaps, magick, MASS,
               NHANES, mosaic, mosaicCore, mosaicData, pander,
               pastecs, ppcor, reshape2,
               rockchalk, rpart, rpart.plot)
```

Des Weiteren ist es von Vorteil, zu Beginn einer Auswertung/Datenanalyse mit R eine entsprechende Verzeichnisstruktur im Window-Dateimanager festzulegen und für diese Struktur ein R-Projektfile anzulegen. Die Verzeichnisstruktur richtet sich im Allgemeinen nach der jeweiligen Analyse, folgende Vorgaben haben sich aber bereits schon mehrmals bewährt:

Die Root kann dabei entweder auf der lokalen Festplatte (C:/..) oder einem Server, bzw. Cloud ( ../NextCloud/R Modellbildung/Images) liegen.

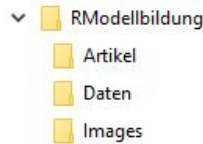


Figure 1: **Abbildung 1:** Dateistruktur für R-Projekt

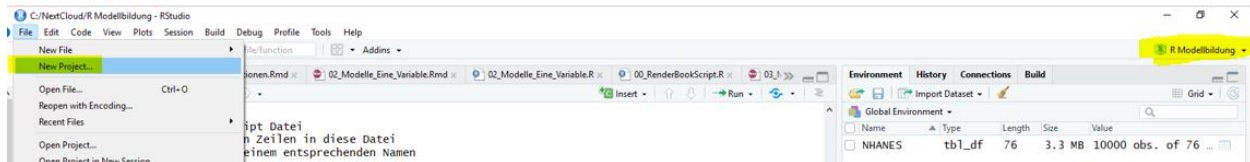


Figure 2: **Abbildung 2:** R-Projekt definieren

Das Anlegen eines R-Projektes wird im RStudio durchgeführt.

Nachdem bereits eine Verzeichnisstruktur definiert wurde, kann man das Projekt in das bereits definierte Verzeichnis legen (Folge den Schritten die von RStudio vorgegeben werden). Den Vorteil des projektbasierten Arbeitens werden wir im Verlauf des Kurses noch näher kennen lernen.

Inhalte, Beispiele und Daten stammen teilweise aus dem Internet, u.a. (Coursera 2018), (DataCamp 2018) und den Büchern (Field 2017), (Bühner 2009) und (Bühner 2017).

## Motivation

Die Kovarianzanalyse (ANCOVA) ist ein Spezialfall der ANOVA. Beide werden verwendet, um die Auswirkungen kategorischer Variablen (Faktoren) auf eine intervall- oder ratio-level abhängige Variable zu testen.

Die ANCOVA gibt uns jedoch die zusätzliche Möglichkeit, gleichzeitig die Wirkung anderer kontinuierlicher Variablen auf die abhängige Variable zu beurteilen oder zu kontrollieren. Kontinuierliche Variablen, die als Unabhängige in einem ANOVA-Design enthalten sind und die mit einer abhängigen Variablen kovariabel sind, nennt man *Kovariablen*.

Bei der ANCOVA geht es im Wesentlichen darum, die Fehlervarianz bei randomisierten Gruppenexperimenten weiter zu verringern.

ANCOVA wird jedoch häufiger eingesetzt, wenn eine Randomisierung nicht möglich ist. In diesen Fällen müssen wir uns oft mit so genannten “nicht-äquivalenten” (nicht zufällig zugeordneten) Gruppen zufrieden geben. Per Definition können sich solche Gruppen in erheblicher Weise unterscheiden, auch bei Merkmalen, die die Ergebnisvariable beeinflussen können. Solange sie nicht berücksichtigt werden, kann das Vorhandensein dieser Hintergrund- oder Fremdvariablen die Fehlervarianz erhöhen, unseren “Signal-Rausch-Abstand” verringern und es letztendlich schwieriger machen, einen echten Unterschied zwischen den Gruppen zu erkennen.

## Kovarianzanalyse

Im folgenden betrachten wir ein Beispiel, welches die Auswirkungen von Viagra auf den Libido untersucht.

Es ist naheliegend anzunehmen, dass auch andere Faktoren (wie andere Medikamente, Müdigkeit, etc.) den Libido beeinflussen. Wenn diese Variablen (die Kovariablen) gemessen werden, ist es möglich, den Einfluss, den sie auf die abhängige Variable haben, durch Einbeziehung in das Regressionsmodell zu steuern/kontrollieren.

Ziel ist es, den Effekt der Kovariaten auf die Zielvariable zu *entfernen*. Durch diese Maßnahme sollte sich die Wirkungsweise der unabhängigen Variablen (Viagra) auf den Libido *besser* zeigen. Es gibt im Wesentlichen

zwei Gründe<sup>1</sup> für die Aufnahme von Kovariablen in die ANOVA:

- **Reduzierung der Fehlervarianz:** in der ANOVA und beim t-Tests wird die Wirkung eines Experiments anhand der erklärbaren Variabilität in den Daten, mit der nicht erklärbaren Variabilität verglichen. Wenn ein Teil dieser *unerklärten* Varianz (*SSR*) einer anderen Variablen (*Kovariablen*) zugeordnet werden kann, reduziert sich die Fehlervarianz. Damit kann die Wirkung der unabhängigen Variable (*SSM*) genauer beurteilt werden.
- **Eliminierung von Confounds:** in jedem Experiment kann/wird es Variablen geben, welche nicht gemessen/erhoben wurden, die aber die Ergebnisse der Zielvariablen durchaus beeinflussen können. Sind diese bekannt, kann mit Hilfe der ANCOVA dieser Einfluss beseitigt werden.

Im vorliegenden Beispiel gehen wir davon aus, dass der Libido der Sexualpartner den eigenen Libido beeinflusst<sup>2</sup>. Das entsprechende Regressionsmodell erweitert sich demnach zu:

$$libido_i = b_0 + b_3 \cdot covariate_i + b_2 \cdot high_i + b_1 \cdot low_i + \varepsilon_i$$

## Voraussetzungen

Die ANCOVA hat die gleichen Annahmen wie ANOVA, zu welchen es jedoch noch zwei wichtige zusätzliche Überlegungen gibt:

1. **Unabhängigkeit von der Kovariablen- und dem Treatmenteffekt.** Abbildung 4-A zeigt die bereits aus der ANOVA bekannte Zerlegung der Varianzen in eine Fehlervarianz und einer Treatmentvarianz. Abbildung 4-B stellt eine ideale Voraussetzung für die Verwendung einer Kovariaten dar. Hierbei wird durch die Kovariate ein Teil der Fehlervarianz erklärt, ohne den Effekt des Treatment zu beeinflussen. Abbildung 4-C hingegen zeigt das Problem bei einer fälschlicherweise verwendeten Kovariaten. Die Kovariate verringert zwar nach wie vor die Fehlervarianz, aber gleichzeitig wird auch der Treatmenteffekt beeinflusst. Statistisch gesehen können wir nur festhalten, dass die Kovariate und das Treatment Varianz gemeinsam erklären. Eine Trennung dieser gemeinsamen Varianz in Anteile Viagra und Kovariate ist nicht möglich! Eine einfache Möglichkeit die Kovariate auf ihre Eigenschaft zu prüfen, ist ein einfacher Mittelwertsvergleich (t-Test, ANOVA) der nach Viagragruppen aufgeteilten Kovariaten. Wenn die Gruppen sich nicht unterscheiden, kann von einer Unabhängigkeit ausgegangen werden und sofern die anderen Voraussetzungen erfüllt sind, die Kovariate verwendet werden. Auch durch eine Randomisierung der Gruppenzuordnung kann man unerwünschte Effekte (in Bezug auf die Wirkung der Kovariaten) zwischen den Gruppen evtl. vermeiden.

Zum besseren Verständnis der mit den ANOVA-Verfahren verbundenen Varianzaufteilung betrachten wir nochmals im Detail die Eigenschaften der verschiedenen Varianzanteile.

Die Gesamtvarianz (im vorigen Graphen die Varianz von Werten im Libido) wird folgendermaßen ermittelt:

Die Treatmentvarianz (im vorigen Graphen die Varianz die durch das Treatment erklärt wird) entspricht der Variabilität der Mittelwerte der jeweiligen Gruppen (in unserem Fall der Dosierungsstufen):

Die Fehlervarianz wird aus den durchschnittlichen Abweichungen der beobachteten Werte zu den jeweiligen Gruppenmittelwerten bestimmt (geschätzt). Anhand dieser Darstellung wird auch klar, warum die Varianzgleichheit über die Gruppen hinweg gleich sein sollte. Wäre das nämlich nicht gegeben, würde die Additivität ( $QS_1 + \dots + QS_k$  nicht gegeben sein).

2. **Homogenität der Regressionssteigungen.** Bei einer ANCOVA wird die Gesamtbeziehung zwischen dem Ergebnis (abhängige Variable) und der Kovariablen analysiert. D.h., es wird eine *Regressionslinie an den gesamten Datensatz angepasst* und man *ignoriert, zu welcher Gruppe eine Person gehört*. Bei der Anpassung dieses Gesamtmodells gehen wir daher davon aus, dass diese Gesamtbeziehung für alle Teilnehmergruppen gilt. Diese Annahme ist für die ANCOVA sehr wichtig. Der beste Weg diese Annahme zu kontrollieren, ist eine Darstellung der Kovariablen (*Partner's Libido*) auf der einen und dem

<sup>1</sup>Es gibt noch andere Gründe für die Aufnahme von Kovariablen in die ANOVA, welche in der Berechnung der ANCOVA detailliert beschrieben werden. Siehe (Stevens 2002), (Wildt 2009).

<sup>2</sup>wie oft sie versuchten, sexuellen Kontakt aufzunehmen.

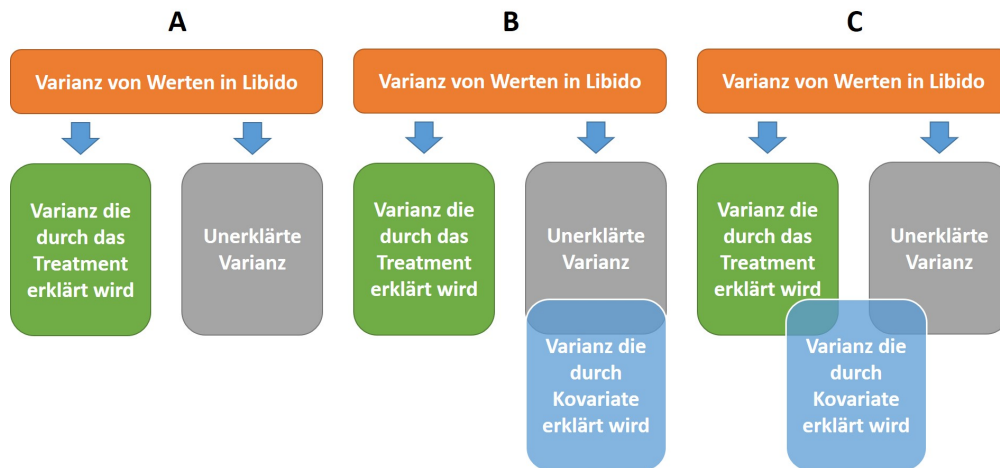


Figure 3: **Abbildung 4:** Wirkungsweise von Kovariate

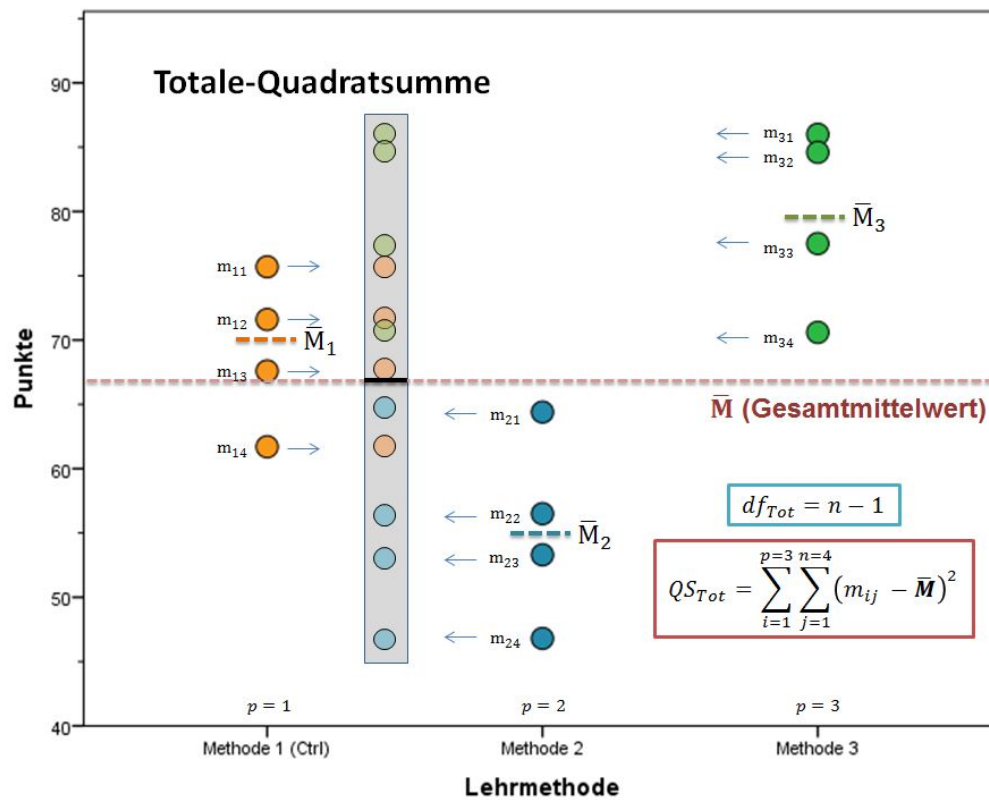


Figure 4: **Abbildung 5:** Totale Quadratsumme

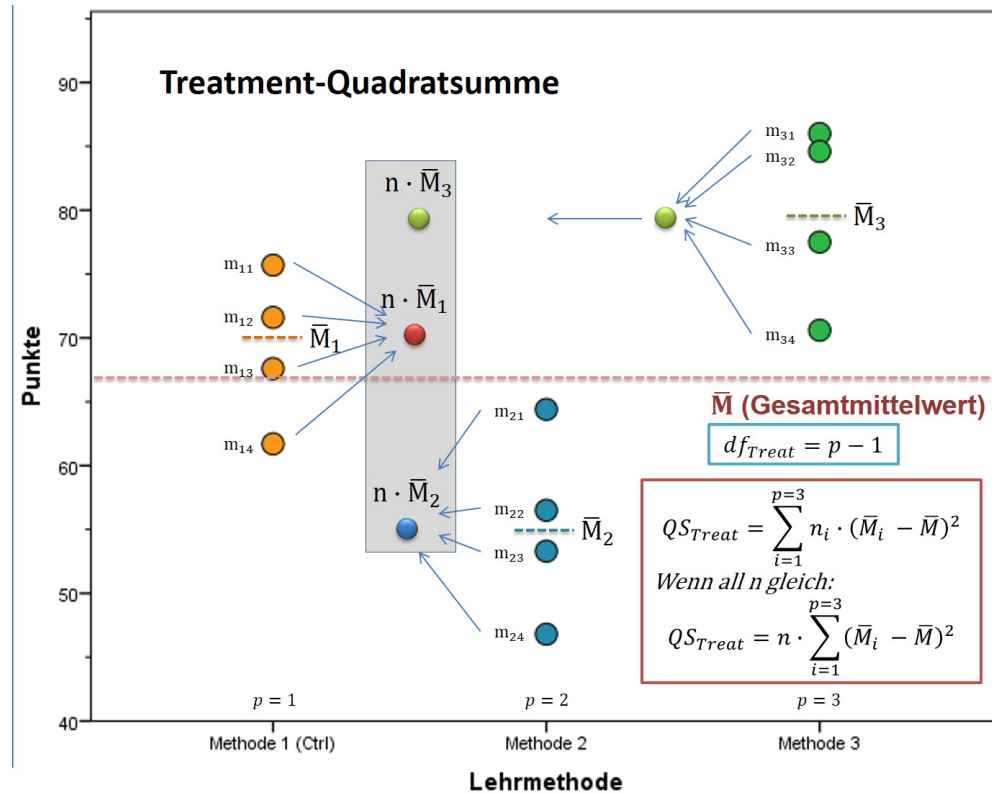


Figure 5: **Abbildung 6:** Treatmentquadratsumme

Ergebnis (*Libido*) auf der anderen Achse, getrennt nach den Gruppen (*Dosierung*). Die Regressionslinien sollten dann mehr oder weniger gleich aussehen (d.h. die Werte von  $b$  in jeder Gruppe sollten gleich sein). Im nachfolgender Darstellung wäre diese Voraussetzung nicht erfüllt!

## Berechnung einer ANCOVA

Bei der Berechnung einer ANCOVA sollten folgende Schritte durchgeführt werden:

1. Grafischen Darstellung der Daten und der Berechnung einiger deskriptiver Statistiken. Dabei sollten auch die Verteilungsannahmen überprüfen und den Levene-Test durchgeführt werden (Homogenitätstest).
2. Überprüfen der Kovariable und alle unabhängigen Variablen auf Unabhängigkeit, d.h. eine ANOVA mit der Kovariablen als Ergebnis und alle unabhängigen Variablen als Prädiktoren durchführen. Damit wird sichergestellt, dass sich die Kovariable auf den Ebenen dieser Variablen nicht signifikant unterscheidet. Wenn man ein signifikantes Ergebnis erhält, dann ist die Analyse bei diesem Schritt beendet<sup>3</sup>.
3. Durchführen der ANCOVA.
4. Berechnung der *Kontraste* oder *post hoc-Tests* (falls signifikante Ergebnisse vorliegen).
5. Überprüfen der Homogenität der Regressionssteigungen. Dies kann graphisch (siehe oben) durchgeführt werden, oder man kann auch die ANCOVA erneut ausführen und die Interaktion zwischen der unabhängigen Variable und der Kovariablen ins Modell aufnehmen. Wenn diese Interaktion signifikant ist, kann man nicht von einer Homogenität der Regressionsflanken ausgehen!

## Deskriptive, graphisch und Homogenität

Um die Verteilung von Daten darzustellen, kann man z.B. Boxplots für *Libido* als auch für *Libido des Partners* erzeugen. Darüber hinaus ist es hilfreich, die Beziehung zwischen der Ergebnisvariablen und der Kovariablen

<sup>3</sup>möglicherweise kann man eine robuste Version des Tests ausführen, Details später.

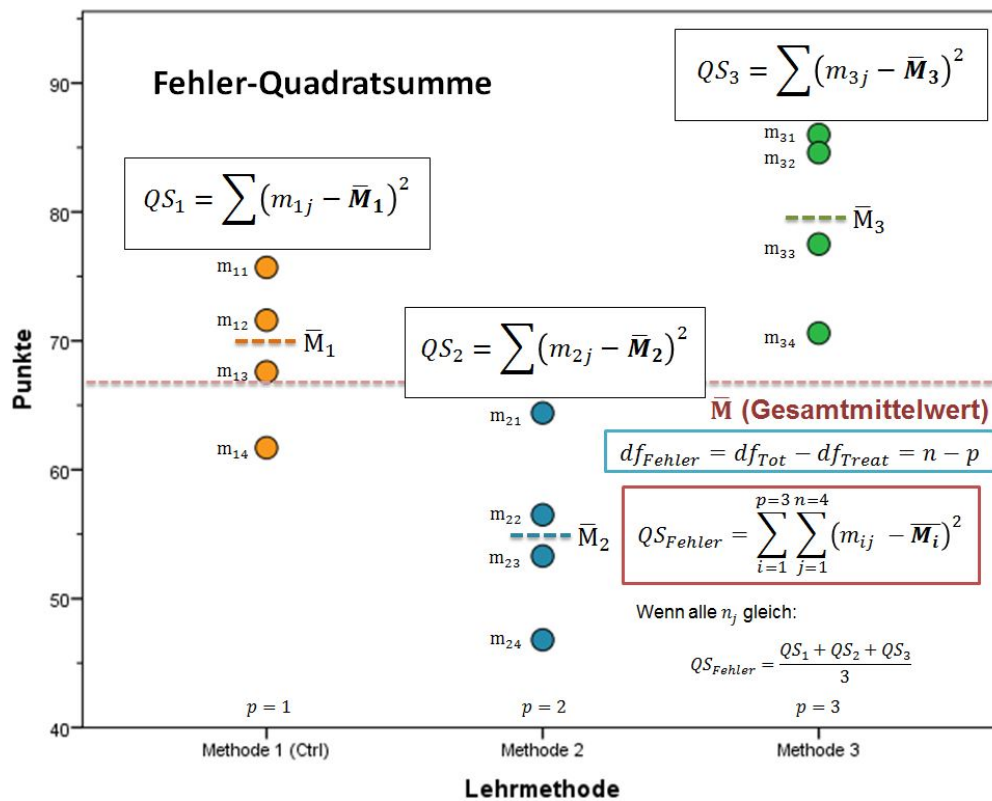


Figure 6: **Abbildung 7:** Fehlerquadratsumme

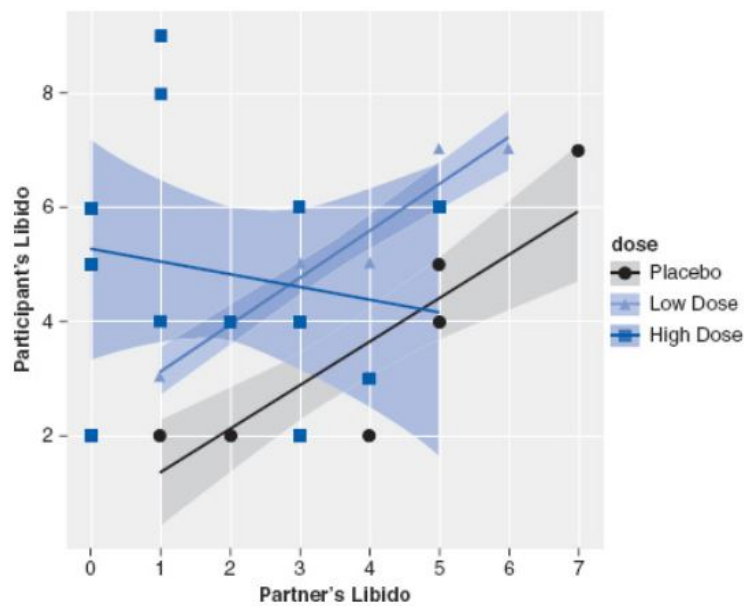
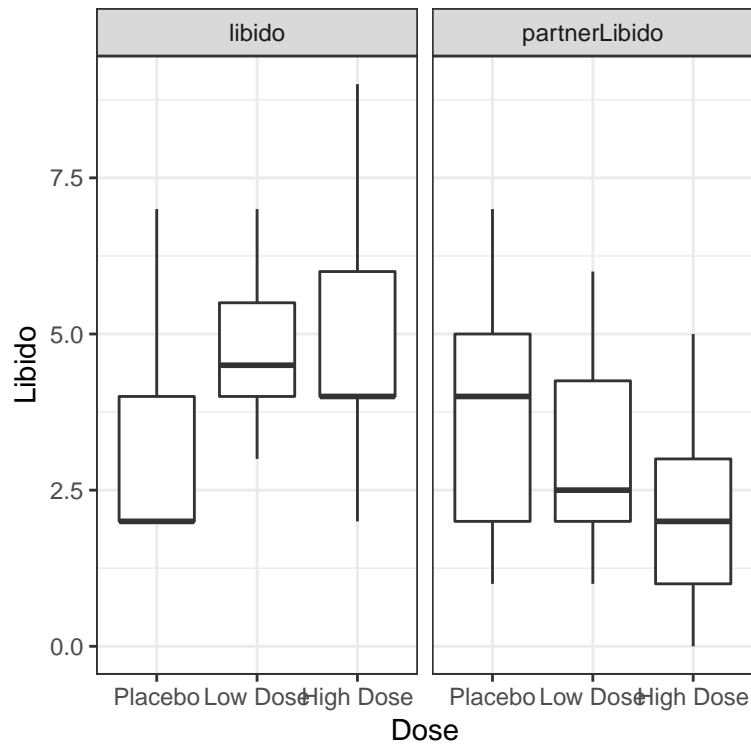


Figure 7: **Abbildung 8:** Verletzung der Homogenitätsbedingung

innerhalb jeder Gruppe zu betrachten (dies sagt uns etwas über die Homogenität der Steigungen aus).



Die Boxplots zeigen den Libido bei den Teilnehmern und ihren Partnern über die drei Dosen von Viagra. Die Libido scheint für die Teilnehmer mit zunehmender Dosis von Viagra zu steigen, aber das Gegenteil gilt für ihre Partner.

Neben der graphischen Darstellung sind auch die deskriptiven Werte aufschlussreich, da diese Kennwerte wie die Streuung ( $sd$ ) und Mittelwerte ( $\bar{x}$ ), Konfidenzintervalle ( $CI$ ), etc. ausgegeben werden.

median	mean	SE.mean	CI.mean.0.95	var	std.dev	coef.var
2	3.222	0.5958	1.374	3.194	1.787	0.5547

median	mean	SE.mean	CI.mean.0.95	var	std.dev	coef.var
4.5	4.875	0.5154	1.219	2.125	1.458	0.299

median	mean	SE.mean	CI.mean.0.95	var	std.dev	coef.var
4	4.846	0.5867	1.278	4.474	2.115	0.4365

median	mean	SE.mean	CI.mean.0.95	var	std.dev	coef.var
4	3.444	0.6894	1.59	4.278	2.068	0.6005

median	mean	SE.mean	CI.mean.0.95	var	std.dev	coef.var
2.5	3.125	0.6105	1.444	2.982	1.727	0.5526

median	mean	SE.mean	CI.mean.0.95	var	std.dev	coef.var
2	2	0.4529	0.9868	2.667	1.633	0.8165

median	mean	SE.mean	CI.mean.0.95	var	std.dev	coef.var
4	4.367	0.3571	0.7304	3.826	1.956	0.448

median	mean	SE.mean	CI.mean.0.95	var	std.dev	coef.var
2.5	2.733	0.3388	0.6929	3.444	1.856	0.6789

Der Test auf Varianzhomogenität wird mit dem Levene's-Test durchgeführt. Dabei zeigt sich der Test mit dem Median als zentraler Kennwert robuster als die Schätzung durch den Mittelwert (*Bemerkung*: man kann auch das Verhältnis der größten zur kleinsten Varianz<sup>4</sup> (aus deskriptiver Statistik) bilden und in einer entsprechenden Tabelle auf Signifikanz prüfen).

Table 9: Levene's Test for Homogeneity of Variance (center = median)

	Df	F value	Pr(>F)
<b>group</b>	2	0.3256	0.7249
	27	NA	NA

Table 10: Levene's Test for Homogeneity of Variance (center = mean)

	Df	F value	Pr(>F)
<b>group</b>	2	0.7112	0.5
	27	NA	NA

## Unabhängigkeit

Die Unabhängigkeit kann man relativ einfach durch eine ANOVA mit *partnerLibido* als Ergebnis und *Dosis* als Prädiktor durchführen.

Table 11: Analysis of Variance Model

	Df	Sum Sq	Mean Sq	F value	Pr(>F)
<b>dose</b>	2	12.77	6.385	1.979	0.1577
<b>Residuals</b>	27	87.1	3.226	NA	NA

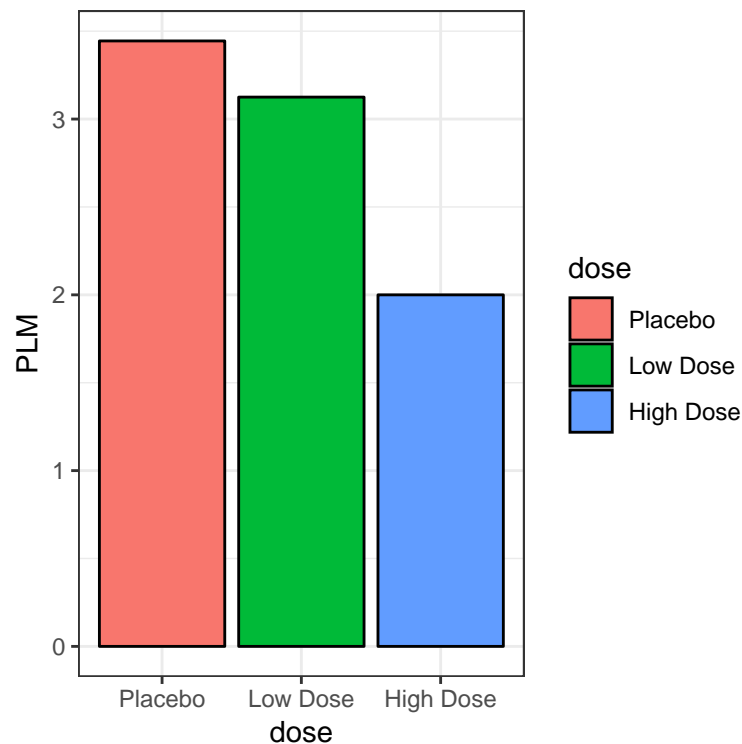
<sup>4</sup>Hartely's  $F_{max}$  variance ratio.



	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )
<b>(Intercept)</b>	3.444	0.5987	5.753	4.062e-06
<b>doseLow Dose</b>	-0.3194	0.8727	-0.366	0.7172
<b>doseHigh Dose</b>	-1.444	0.7788	-1.855	0.0746

Table 13: Fitting linear model: partnerLibido ~ dose

Observations	Residual Std. Error	$R^2$	Adjusted $R^2$
30	1.796	0.1279	0.06326



```
## $fill
## [1] FALSE
##
## attr(,"class")
## [1] "guides"
```

Bei den Koeffizienten (Estimate) des Modells entspricht der Intercept den Mittelwert der ersten Dosierungsstufe (= Placebo) und die weiteren den jeweiligen Abstand zum Mittelwert der Placebodosierung!

### Berechnung ANCOVA

Nach Überprüfung der Voraussetzungen können wir die ANCOVA berechnen.

Table 14: Anova Table (Type III tests)

	Sum Sq	Df	F value	Pr(>F)
<b>(Intercept)</b>	12.94	1	4.257	0.0492
<b>partnerLibido</b>	15.08	1	4.959	0.03483
<b>dose</b>	25.19	2	4.142	0.02745
<b>Residuals</b>	79.05	26	NA	NA

Betrachtet man die Signifikanz-Werte, so ist klar, dass die Kovariable die abhängige Variable signifikant vorhersagt, da  $F(1, 26) = 4.96, p = .035$  ist. Es ist also davon auszugehen, dass der Libido der Person durch die Libido des Partners beeinflusst wird.

Interessant ist, dass nach Berücksichtigung der Wirkung des Libido's vom Partners die Wirkung von Viagra signifikant ist ( $F(2, 26) = 4.14, p = .028$ ).

Wenn wir das nochmals mit den Ergebnissen einer ANOVA (also ohne Berücksichtigung der Kovariaten vergleichen), stellen wir fest, dass durch die Kovariate sich ein nicht signifikantes in ein signifikantes Ergebnis geändert hat.

Table 15: Anova Table (Type III tests)

	Sum Sq	Df	F value	Pr(>F)
<b>(Intercept)</b>	93.44	1	26.81	1.891e-05
<b>dose</b>	16.84	2	2.416	0.1083
<b>Residuals</b>	94.12	27	NA	NA

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )
<b>(Intercept)</b>	1.789	0.8671	2.063	0.0492
<b>partnerLibido</b>	0.416	0.1868	2.227	0.03483
<b>doseLow Dose</b>	1.786	0.8494	2.102	0.04535
<b>doseHigh Dose</b>	2.225	0.8028	2.771	0.01018

Table 17: Fitting linear model: libido ~ partnerLibido + dose

Observations	Residual Std. Error	$R^2$	Adjusted $R^2$
30	1.744	0.2876	0.2055

### Interpretation ANCOVA

Es scheint ziemlich klar zu sein, dass die signifikante ANOVA einen Unterschied zwischen der Placebogruppe und den beiden experimentellen Gruppen widerspiegelt.

Table 18: Anova Table (Type III tests)

	Sum Sq	Df	F value	Pr(>F)
<b>(Intercept)</b>	76.07	1	25.02	3.342e-05
<b>partnerLibido</b>	15.08	1	4.959	0.03483
<b>dose</b>	25.19	2	4.142	0.02745
<b>Residuals</b>	79.05	26	NA	NA

Sum Sq	Df	F value	Pr(>F)
--------	----	---------	--------

Dieser Effekt kann damit begründet werden, da niedrig- und hochdosierten Gruppen sehr ähnliche Mittel haben ( $\bar{x}_{Low} = 4.88$ ,  $\bar{x}_{High} = 4.85$ , während der Mittelwert der Placebogruppe bei  $\bar{x}_{Placebo} = 3.22$  viel niedriger ist.

	Libido	Libido_Partner	Libido_Adj
<b>Placebo</b>	3.222	3.444	2.926
<b>Low Dose</b>	4.875	3.125	4.712
<b>High Dose</b>	4.846	2	5.151

Eigentlich können wir aber diese Gruppenmittel nicht interpretieren, da sie nicht um den Effekt der Kovarianz bereinigt wurden. Diese ursprünglichen Mittel sagen uns nichts über die Gruppenunterschiede, die sich in der signifikanten ANCOVA widerspiegeln! Daher müssen für diesen Vergleich die um den Effekt der Kovariaten bereinigten Mittelwerte verwendet werden. Diese sind in obiger Tabelle in Spalte *Libido\_Adj* angegeben!

### Geplante Kontraste

Für die Berechnung von Kontrasten können entweder vordefinierte Kontrastcodes, oder eigene Kontrastekodierungen angegeben werden<sup>5</sup>. In R lässt sich z.B. ein Kontrast durch folgende Eingabe definieren:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )
<b>(Intercept)</b>	3.126	0.625	5.002	3.342e-05
<b>partnerLibido</b>	0.416	0.1868	2.227	0.03483
<b>dose1</b>	0.6684	0.24	2.785	0.009852
<b>dose2</b>	0.2196	0.4056	0.5414	0.5928

Die Ausgabe des zweiten - oben angegebenen - Kontrastes lässt sich folgendermaßen interpretieren:

- die erste Variable (*Dosis1*) vergleicht die Placebogruppe mit der Niedrig- und Hochdosisgruppe. Als solches vergleicht es den angepassten Mittelwert der Placebogruppe ( $\bar{x}_{Placebo} = 2.93$ ) mit dem Durchschnitt der angepassten Mittelwerte für die niedrig- und hochdosierten Gruppen  $((4.71 + 5.15)/2 = 4.93)$ .
- der b-Wert für die erste Variable sollte daher die Differenz zwischen diesen Werten sein:  $4.93 - 2.93 = 2$ .
- dieser Wert wird durch die Anzahl der Gruppen innerhalb des Kontrastes (d.h. 3) dividiert und somit  $2/3 = .67$  (wie in der Ausgabe) beträgt. Die zugehörige *t*-Statistik ist signifikant, was darauf hindeutet, dass sich die Placebogruppe signifikant vom kombinierten Mittelwert der Viagra-Gruppen unterschied.
- die zweite Variable (*Dosis2*) vergleicht die niedrig- und hochdosierten Gruppen, so dass der *b*-Wert die Differenz zwischen den eingestellten Mitteln dieser Gruppen sein sollte:  $5.15 - 4.71 = 0.44$ . Dieser Wert wird durch die Anzahl der Gruppen innerhalb des Kontrastes (d.h. 2) dividiert und somit  $0.44/2 = 0.22$  (wie in der Ausgabe) beträgt.
- die zugehörige *t*-Statistik ist nicht signifikant ( $p = .590$ ), was darauf hindeutet, dass die hochdosierte Gruppe keine signifikant höhere Libido produzierte als die niedrigdosierte Gruppe.

<sup>5</sup>für eine Liste vordefinierter Kontraste siehe Literatur. Kontraste können sowohl in SPSS wie auch in R durch entsprechende Kontrastcodierungen definiert werden. Bei R ist darauf zu achten, dass bei orthogonalen Kontrasten die Type III sum of squares verwendet wird, da sonst die Quadratsummen für derartige Kontraste nicht stimmen!

- der Wert für die *Kovariablen* beträgt ( $b = 0.416$ ). Wenn also der Libido eines Partners um eine Einheit zunimmt, sollte der Libido der Person um knapp eine halbe Einheit zunehmen (obwohl es nichts gibt, was auf einen kausalen Zusammenhang zwischen den beiden hinweist).
- das Vorzeichen dieses Koeffizienten zeigt in welche Richtung die Beziehung zwischen der Kovariablen und dem Ergebnis geht. Da der Koeffizient in diesem Beispiel positiv ist, bedeutet dies also, dass die Libido des Partners in einem positiven Verhältnis zur Libido des Teilnehmers steht:
- mit dem einen steigt auch der andere.
- ein negativer Koeffizient würde das Gegenteil bedeuten: wenn einer steigt, sinkt der andere.

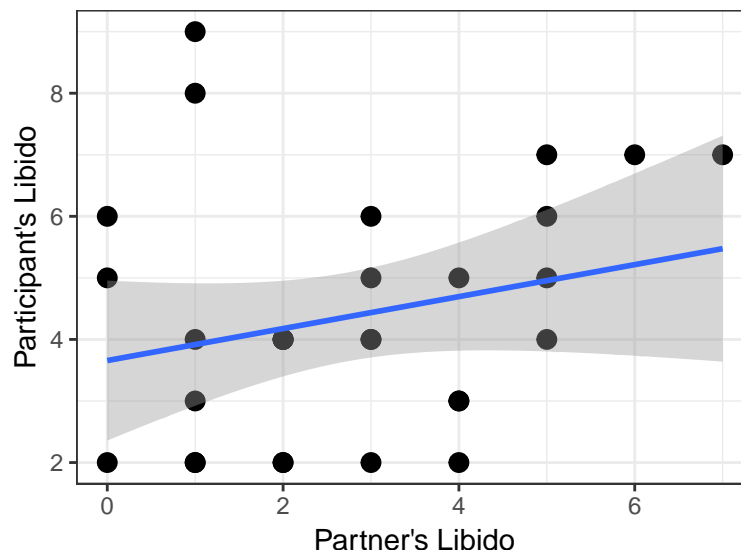
### Interpretation Kovariate

Für die Interpretation der Kovariaten verwendet man am besten die Parameterschätzungen ( $b$ ) in folgender Weise:

- wenn der  $b$ -Wert für die Kovariable positiv ist, haben die Kovariable und die Ergebnisvariable eine positive Beziehung, also mit zunehmenden Werten der Kovariable steigt auch das Ergebnis!
- wenn der  $b$ -Wert negativ ist, bedeutet das das Gegenteil.

Für diese Daten war der  $b$ -Wert positiv, was darauf hindeutet, dass mit zunehmender Libido des Partners auch die Libido des Teilnehmers steigt. Eine weitere Möglichkeit, das Gleiche zu entdecken, besteht darin, einfach ein Streudiagramm der Kovariablen gegen das Ergebnis zu zeichnen.

Abschließend wird durch den Scatterplot nochmals bestätigt, was wir bereits wissen: die Kovariable bewirkt, dass mit zunehmender Partnerlibido auch die Libido des Teilnehmers zunimmt (wie die Steigung der Regressionslinie zeigt).



### Post hoc Tests

Wie bereits aus der ANOVA bekannt sein sollte, werden bei den Post hoc Tests alle Stufen der unabhängigen Variablen paarweise miteinander verglichen. Im Unterschied zur herkömmlichen ANOVA werden jedoch bei der ANCOVA die adjustierten Mittelwerte verwendet!

Das Ergebnis zeigt die drei Vergleiche (niedrige Dosis vs. Placebo, hohe Dosis vs. Placebo, hohe Dosis vs. niedrige Dosis).

Verglichen werden die Differenzen zu den adjustierten Gruppenmitteln

- die Schätzung für die niedrige Dosis vs. Placebo beträgt  $4.71 - 2.93 = 1.78$
- für die hohe Dosis vs. Placebo beträgt sie  $5.15 - 2.93 = 2.22$  und
- für die niedrige vs. hohe  $5.15 - 4.71 = 0.44$

Der angegebene Standardfehler bezieht sich auf die Differenz zwischen den adjusitierten Mittelwerten.

Der  $t$ -Test (Differenz zwischen den Mitteln geteilt durch den Standardfehler) und dem zugehörigen  $p$ -Wert deutet auf signifikante Unterschiede zwischen der Hochdosis- und Placebogruppe ( $t = 2.77, p < .050$ ) hin.

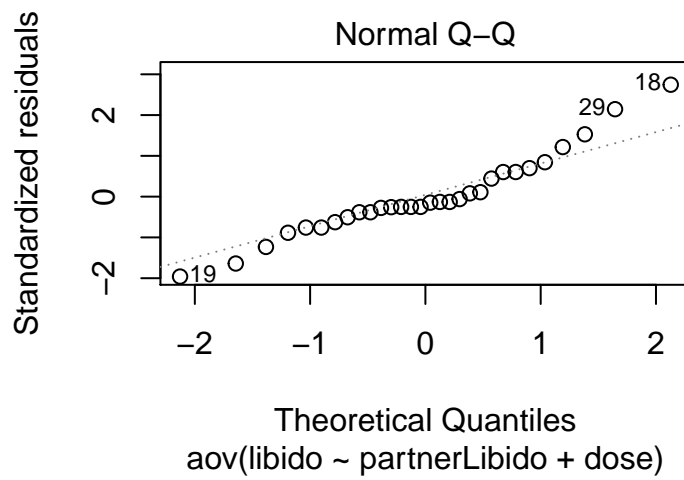
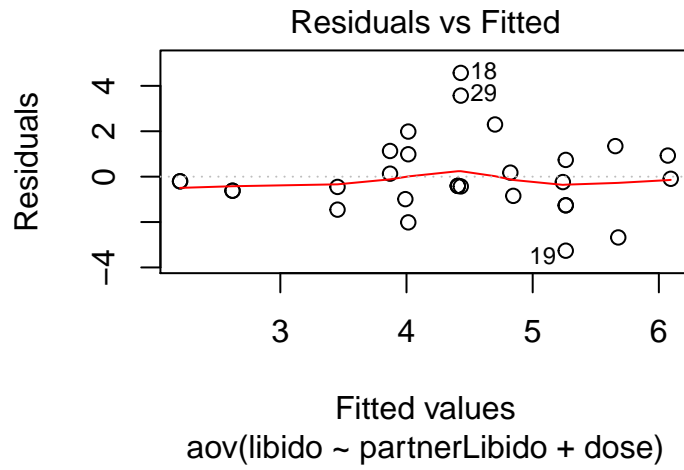
Kein Unterschied besteht zwischen der Niedrigdosisgruppe und der Placebogruppe ( $t = 2.10, p = .120$ ) und der Hochdosisgruppe ( $t = 0.54, p = .850$ ).

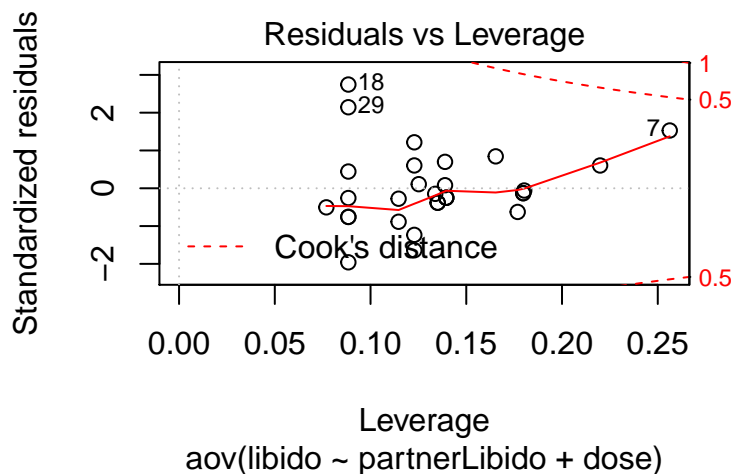
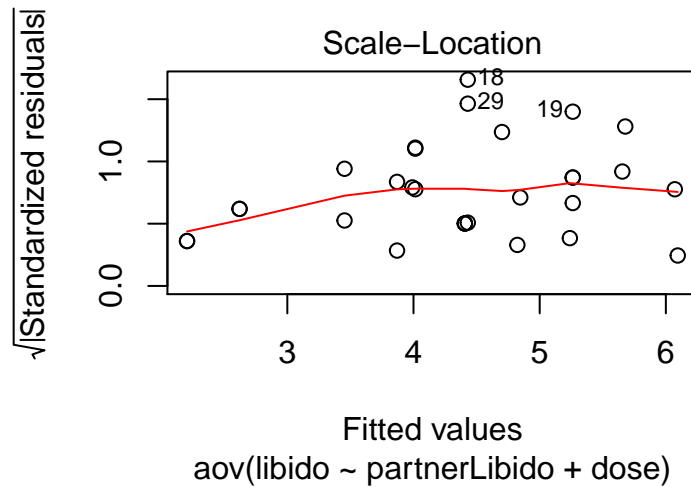
Die Konfidenzintervalle bestätigen diese Schlussfolgerung (weil sie für den Vergleich der Hochdosis- und Placebogruppen Null nicht enthalten).

```
##
## Simultaneous Tests for General Linear Hypotheses
##
## Multiple Comparisons of Means: Tukey Contrasts
##
## Fit: aov(formula = libido ~ partnerLibido + dose, data = viagraData)
##
## Linear Hypotheses:
##               Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## Low Dose - Placebo == 0      1.786      0.849    2.10    0.109
## High Dose - Placebo == 0      2.225      0.803    2.77    0.027 *
## High Dose - Low Dose == 0     0.439      0.811    0.54    0.852
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
## (Adjusted p values reported -- single-step method)
##
## Simultaneous Confidence Intervals
##
## Multiple Comparisons of Means: Tukey Contrasts
##
## Fit: aov(formula = libido ~ partnerLibido + dose, data = viagraData)
##
## Quantile = 2.48
## 95% family-wise confidence level
##
## Linear Hypotheses:
##               Estimate lwr    upr
## Low Dose - Placebo == 0      1.786   -0.324  3.895
## High Dose - Placebo == 0      2.225    0.231  4.219
## High Dose - Low Dose == 0     0.439   -1.575  2.454
```

## Nützliche Graphen

Zur Überprüfung von Voraussetzungen können sich folgende Graphiken als hilfreich erweisen:





Von den vier Diagramme sind die ersten beiden die wichtigsten:

- Ersterer kann zur Überprüfung der Varianzhomogenität der Varianz verwendet werden. Es zeigt sich, dass die Verteilung der Scores an einigen Stellen breiter als an anderenis (Funnelling). Die Residuen sind also heteroscedastisch.
- Das zweite Diagramm ist ein Q-Q-Diagramm. Die Punkte im Diagramm sollten nahe der diagonalen Linie liegen. Die vorliegende Verteilung deutet darauf hin, dass keine Normalverteilung vorliegt und daher eher eine robuste ANCOVA<sup>6</sup> angebracht wäre.
- Die dritte Graphik wird auch als *Spread-Location-Plot* bezeichnet. Diese Darstellung zeigt, ob die Residuen gleichmäßig über die Bereiche der Prädiktoren verteilt sind. So können Sie die Annahme der gleichen Varianz (Homoscedastizität) überprüfen. Es ist gut, wenn man eine horizontale Linie mit gleichmäßig (zufällig) gespreizten Punkten sehen - was hier nicht der Fall ist.
- Die vierte Graphik identifiziert einflussreiche Fälle (Ausreißer). Nicht alle Ausreißer beeinflussen die linearen Regressionsanalyse im negativen Sinn, d.h. die Ergebnisse wären nicht viel anders, wenn wir sie entweder einbeziehen oder von der Analyse ausschließen würden. Sie folgen in den meisten Fällen dem Trend und sind nicht wirklich wichtig. Andererseits können einige Fälle sehr einflussreich sein,

<sup>6</sup>robuste ANCOVAS werden in dieser LV nicht näher besprochen - siehe Literatur.

auch wenn sie sich in einem angemessenen Bereich der Werte bewegen. Sie können Extremfälle gegen eine Regressionslinie sein und die Ergebnisse verändern, wenn wir sie von der Analyse ausschließen. Im Gegensatz zu den anderen Graphiken sind hier Muster nicht relevant. Man achtet auf die äußeren Werte in der oberen rechten Ecke oder in der unteren rechten Ecke. Diese Punkte sind die Orte, an die für eine Regressionslinie einflussreich sein können. Man beachtet vor allem Fälle, die *außerhalb einer gestrichelten Linie* (Cook's Distance) sind. Werte die außerhalb liegen, sind für die Regressionsergebnisse von Bedeutung. Die Regressionsergebnisse werden geändert, wenn wir diese Fälle ausschließen!

## Homogenität der Steigung

Bereits im Scatterplot der nach Gruppen getrennten Regressionen konnten wir feststellen, dass die Annahme der Homogenität der Regressionssteigungen für die *Hochdosisgruppe* unterschiedlich verletzt wird. Um einen statistischen Test dieser Annahme durchzuführen, wird die ANCOVA unter Einbeziehung des Interaktionseffektes zwischen der Kovariaten und dem Prädiktor nochmals durchgeführt.

Table 21: Anova Table (Type III tests)

	Sum Sq	Df	F value	Pr(>F)
<b>(Intercept)</b>	53.54	1	21.92	9.323e-05
<b>partnerLibido</b>	17.18	1	7.035	0.01395
<b>dose</b>	36.56	2	7.484	0.00298
<b>partnerLibido:dose</b>	20.43	2	4.181	0.02767
<b>Residuals</b>	58.62	24	NA	NA

Die Auswirkungen der Dosis von Viagra und der Libido des Partners sind immer noch signifikant, aber da die Interaktion (partnerLibido:dose) signifikant ( $p = .028$ ) ist, ist die Annahme der Homogenität der Regressionsgeraden verletzt.

Obwohl dieser Befund nicht überraschend ist (vgl. Graphik oben), gibt er Anlass zur Sorge über die Hauptanalyse. Dieses Beispiel veranschaulicht, warum es wichtig ist, Annahmen zu testen und nicht nur die Ergebnisse einer Analyse blind zu akzeptieren!

## Bericht der Ergebnisse

Der Ergebnisbericht einer ANCOVA ist weitgehend identisch mit der einer ANOVA. Hinzu kommt lediglich die Wirkung der Kovariablen. Für die Kovariable und den experimentellen Effekt berichten wir Details über das  $F$ -Verhältnis und die Freiheitsgrade, aus denen es berechnet wurde. In beiden Fällen wurde das  $F$ -Verhältnis aus der Division der mittleren Quadrate für den Effekt durch die mittleren Quadrate der Residuen ermittelt. Die Freiheitsgrade zur Beurteilung des  $F$ -Wertes sind daher die Freiheitsgrade für die Wirkung des Modells ( $df_M = 1$  für die Kovariable und 2 für die experimentelle Wirkung) und die Freiheitsgrade für die Residuen des Modells ( $df_R = 26$  für die Kovariable und die experimentelle Wirkung). Der Bericht könnte folgendermaßen abgefasst werden:

Die Kovariable (Libido des Partners) zeigt einen signifikanten Zusammenhang mit dem Libido des Teilnehmers ( $F(1, 26) = 4.96, p < .050, r = 0.40$ ). Kontrolliert man für den Effekt des Libido's des Partners, dann zeigt sich auch ein signifikanter Effekt der Dosis von Viagra auf den Libido ( $F(2, 26) = 4.14, p < .050, \eta_{part}^2 = .24$ ).

Die geplanten Kontraste zeigten, dass die Einnahme einer hohen oder niedrigen Dosis von Viagra den Libido im Vergleich zur Einnahme eines Placebos signifikant erhöht ( $t(26) = 2.79, p < .010, r = 0.48$ ). Es gab keinen signifikanten Unterschied zwischen der hohen und niedrigen Dosis von Viagra ( $t(26) = 0.54, p = .590, r = 0.11$ ).

Die Tukey-Post-Hoc-Tests zeigten, dass der über die Kovariate angepasste Mittelwert der Hochdosis-Gruppe signifikant größer war als der des Placebos (Differenz = 2.22,  $t = 2.77, p < .050, d = 1, 13$ ).



Es gab jedoch keinen signifikanten Unterschied zwischen der Niedrigdosis- und Placebogruppe (Differenz = 1.79,  $t = 2.10$ ,  $p = .110$ ,  $d = 1.04$ ) und zwischen der Niedrigdosis- und der Hochdosisgruppe (Differenz = 0.44,  $t = 0.54$ ,  $p = .850$ ,  $d = 0.11$ ).

Trotz der fehlenden Bedeutung zwischen der Niedrigdosis- und der Placebogruppe war die Effektgröße ziemlich groß.

Bühner, M. 2009. *Statistik Für Psychologen Und Sozialwissenschaftler*. Erste Auflage. Martin-Kollar-Str. 10-12, D-81829 München/Germany: Pearson Education Deutschland GmbH.

———. 2017. *Statistik Für Psychologen Und Sozialwissenschaftler*. Zweite Auflage. Lilienthalstraße 2, 85399 Hallbergmoos, Germany: Pearson Deutschland GmbH.

Coursera. 2018. “Coursera Take the World’s Best Courses.” <https://www.coursera.org/>.

DataCamp. 2018. “DataCamp Learn Data Science.” <https://www.datacamp.com/>.

Field, A. 2017. *Discovering Statistics Using R*. 2nd ed. 1 Olivers Yard, 55 City Road, London EC1Y 1SP: SAGE Publications Ltd.

Stevens, J.P. 2002. “Applied Multivariate Statistics for the Social Sciences.” *APA PsycNET*.

Wildt, A. 2009. *Analysis of Covariance*. 12th ed. 1 Olivers Yard, 55 City Road, London EC1Y 1SP: SAGE Publications Ltd.