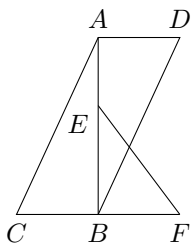


第二十一章 一元二次方程

时间：2 小时 满分：120 分

一、选择题（每小题 3 分，共 30 分）

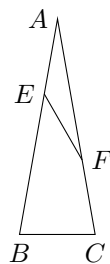
- 关于 x 的一元二次方程 $bx^2 + 18x - 4c = 4$ 的一次项和常数项系数分别为（ ）。
A. 18, $-4c$ B. b , $4c + 4$ C. 18, $-4c - 4$ D. 18, $-4c$
- 下列关于 x 的方程中，是一元二次方程的是（ ）。
A. $4x^2 + x = (2x + 1)^2$ B. $\frac{x^3 + 5x^2 + 18x}{5x} = 0$
C. $(x^2 + x)^0 - 1 = 0$ D. $-x^2 + 3 = 1$
- 已知关于 x 的一元二次方程 $-x^2 + 2ax = 3b$ ，则（ ）。
A. $x_1 + x_2 = -2a$ B. $x_1x_2 = 3b$
C. $x_1 - x_2 = 2\sqrt{a^2 - 3b}$ D. $x_1 + 2x_2 = 2a + b$
- 若关于 x 的方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 有解，则下列说法正确的是（ ）。
A. 方程有两个实数根 B. $c = 0$ 时， x 必有一解为 0
C. 当 $a > 0$ 时，方程有两个相等实数根 D. b 不可能为 0
- 若关于 x 的一元二次方程有两个解 $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ ，则这个方程可能是（ ）。
A. $x^2 + 3x = 2$ B. $x^2 - 3x + 2 = 0$
C. $x^2 - 2x + 3 = 0$ D. $x^2 + 3x = -2$
- 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中， $AD = 6$, $BD = \sqrt{205}$ ，连对角线 AB ，有 $AB \perp CB$ ，延长 CB 至 F ，使 $CB = FB$ ，在线段 AB 上取点 E ，连 EF ，使 $EF = 2AE$ ，则 BE 的长度为（ ）。
A. 5 B. 8 C. 10 D. 6
- 已知理想情况下物体在做自由落体运动时，下落距离 s 与时间 t 满足以下关系： $s = 4.9t^2$ ，若一个物体下落了 181.8m，则下列等式正确的是（ ）。
A. $4.9s = 181.8^2$ B. $4.9t^2 = \frac{181.8}{4.9}$
C. $t = \sqrt{\frac{181.8}{4.9}}$ D. $\sqrt{181.8} = t + 4.9$
- 如图，为一种轻质的老式秤。某次称量时，称量的物品和秤盘的总质量为 800g，秤砣到手拉环的距离为 s cm 时，刚好平衡。若秤盘到手拉环的距离为 5cm，秤砣质量为 m g，且 m 和 s 满足 $m = 8s + 40$ ，则 s 的值为（ ）。
A. 30 B. 25 C. 20 D. 55
- 计算 $(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^8 + (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^8$ 的值为（ ）。
A. 5 B. 47 C. 34 D. 58
- 已知在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， $AE = EF = FC = CB$ ，则 $\angle A$ 的大小为（ ）。
A. 15° B. 20° C. 22.5° D. 30°



（第 6 题）



（第 8 题）



（第 10 题）

二、填空题（每小题3分，共18分）

11. 在一元二次方程 $ax^2+2ax+b=0$ 中，一次项系数为 _____，常数项系数为 _____，两根之和为 _____。
12. 已知一元二次方程中 $x^2-(m^2-3)x+m=0$ ，有 $x_1+x_2=2$ ，则 $m=$ _____。
13. 若方程 $x^2+2x-3=0$ 与 $x^2+bx+3=0$ 有一个公共解，则 $b=$ _____。
14. 已知两实数 m, n 满足 $m^2-3m+1=0$ ， $n^2-3n+1=0$ ，且 $m \neq n$ ，则代数式 $\sqrt{\frac{m}{n}}+\sqrt{\frac{n}{m}}$ 的值为 _____。
15. 已知两实数 m, n 满足 $m^2+3m-9=0$ ， $9n^2-3n-1=0$ ，且 $mn \neq 1$ ，则 $\frac{mn+n+mn^2}{n^2}$ 的值为 _____。
16. 设 $a_1=1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}$ ， $a_2=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}$ ，……， $a_n=1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}$ ，其中 n 为正整数，则 $\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}+\dots+\sqrt{a_{2020}}$ 的值为 _____。

三、解答题（共8题、72分，每小题应写出文字说明、解答过程或演算步骤）

17. 用因式分解法解下列方程。

- (1) $x^2-6x+8=0$
- (2) $(2x+3)^2=x^2$
- (3) $x^2-2ax-5x+a^2+5a+6=0$
- (4) $ax^2-3a^2x-x+3a=0$ ($a \neq 0$)

18. 阅读材料，完成任务。

我们已经知道，对于关于 x 的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ ，由韦达定理， $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ ， $x_1x_2=\frac{c}{a}$ 。如果用 a, x_1, x_2 来表示 b, c ，那么代数式 ax^2+bx+c 可以化为 $ax^2-a(x_1+x_2)x+ax_1x_2$ ，即 $a(x-x_1)(x-x_2)$ ，这意味着，对于任意的二次三项式 ax^2+bx+c ，如果一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有实根为 x_1, x_2 ，那么原式可因式分解为 $a(x-x_1)(x-x_2)$ ，利用这种方法，我们可以实现二次三项式在实数范围内的因式分解。

- (1) 在实数范围内因式分解下面的代数式：

- ① x^2-x-1
- ② $2x^2-8x+5$
- ③ $x^4-4x^3+2x^2-4x+1$

- (2) 试说明为什么二次三项式 x^2+x+1 无法在实数范围内被因式分解。

19. 已知两个一元二次方程 $M: ax^2 + bx + c = 0$, $N: cx^2 + bx + a = 0$ 。其中 $ac \neq 0$ 且 $a \neq c$ 。

- (1) 如果 M 有两个相等的实数根, 求证: N 也有两个相等的实数根。
- (2) 如果 M 与 N 有实数根, 求证: M 有一个根与 N 两根中的一个互为倒数。
- (3) 求证: 如果 M 的两根符号相同, 那么 N 的两根符号也相同。

20. 在实数范围内解方程组
$$\begin{cases} (x+1)(y+1) = 18 \\ x^2y + xy^2 = 66 \end{cases}。$$

21. “读书可以让人保持思想活力, 让人得到智慧启发, 让人滋养浩然之气”。某校为响应我市全民阅读活动, 利用节假日面向社会开放学校图书馆。据统计, 第一个月进馆 128 人次, 进馆人次逐月增加, 到第三个月末累计进馆 608 人次。

- (1) 若进馆人次的月平均增长率相同, 求进馆人次的月平均增长率。
- (2) 若因条件限制, 学校图书馆每月接纳能力不超过 1000 人次, 在进馆人次的月平均增长率不变的条件下, 校图书馆第几月会接纳能力不足? 在不超过接纳限度内最多可接纳多少人次?
- (3) 现图书馆举行活动, 给每人发送活动邀请, 每人转发三位好友 (保证每人恰好转发 3 个没有获得书签的好友) 即可获得书签一个, 若每个书签 0.5 元, 第一轮只有一人转发, 则三轮发送后, 图书馆要支出多少钱用于购买书签?

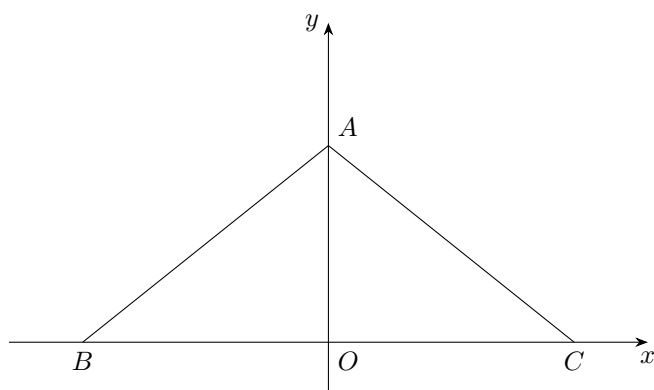
22. 已知关于 x 的一元二次方程 $M: x^2 + (k-2)x - k^2 - 1 = 0$ 。

- (1) 求证: M 有不相等的两个实根, 且两根一正一负。
- (2) 若 M 的两个根中, 一根大于 k , 一根小于 k , 求 k 的取值范围。

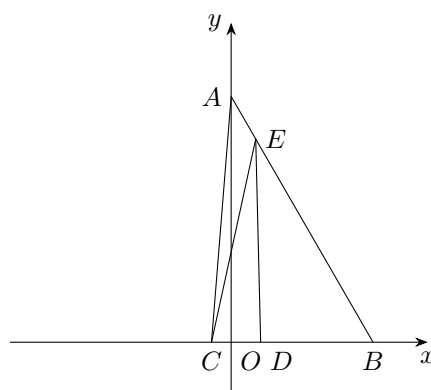
23. (1) 已知 x 为实数, 求 $x^2 - 8x + 5$ 的最小值。
 (2) 已知 x 为实数, 求代数式 $\frac{x^2+x+1}{x^2+1}$ 的取值范围。
 (3) 已知 x, y 均为实数, 直接写出 $-3x^2 + 3xy + 6x - y^2$ 的最大值。

24. 如图, 在平面直角坐标系中, A 在 y 轴正半轴上, B, C 为 x 轴上两动点。

- (1) 如图 1, $A(0, 4)$, B 从 $(-5, 0)$ 出发, C 从 $(5, 0)$ 出发, 都以每秒 t 个单位长度向 x 轴负半轴方向运动, 连 AB, AC 。
 ① 当 $\angle BAC = 90^\circ$ 时, 直接写出直线 AC 的解析式。
 ② 在①的条件下, 若 P 为线段 AC 上一点, 作 PM 垂直于 x 轴于点 M , 作 PN 垂直于 y 轴于点 N , 求四边形 $OMPN$ 面积的最大值。
 (2) 如图 2, 直线 $AB: y = -\sqrt{3}x + b$, C 在 B 左侧, $E(m, n)$ 为射线 AB 上一点, $CD = 2m$, 连接 AC, CE, DE , 若 $AC = 6, DE = 5$, 求 CE 的取值范围。



(1)



(2)

(第 24 题)