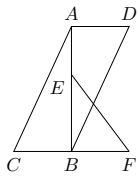


## 第二十一章 一元二次方程

时间：2 小时 满分：120 分

### 一、选择题（每小题 3 分，共 30 分）

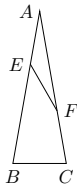
- 关于  $x$  的一元二次方程  $bx^2 + 18x - 4c = 4$  的一次项和常数项系数分别为（ ）。  
A. 18,  $-4c$       B.  $b$ ,  $4c + 4$       C. 18,  $-4c - 4$       D. 18,  $-4c$
- 下列关于  $x$  的方程中，是一元二次方程的是（ ）。  
A.  $4x^2 + x = (2x + 1)^2$       B.  $\frac{x^3 + 5x^2 + 18x}{5x} = 0$   
C.  $(x^2 + x)^0 - 1 = 0$       D.  $-x^2 + 3 = 1$
- 已知关于  $x$  的一元二次方程  $-x^2 + 2ax = 3b$ ，则（ ）。  
A.  $x_1 + x_2 = -2a$       B.  $x_1x_2 = 3b$   
C.  $x_1 - x_2 = 2\sqrt{a^2 - 3b}$       D.  $x_1 + 2x_2 = 2a + b$
- 若关于  $x$  的方程  $ax^2 + bx + c = 0$  有解，则下列说法正确的是（ ）。  
A. 方程有两个实数根      B.  $c = 0$  时， $x$  必有一解为 0  
C. 当  $a > 0$  时，方程有两个相等实数根      D.  $b$  不可能为 0
- 若关于  $x$  的一元二次方程有两个解  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 2$ ，则这个方程可能是（ ）。  
A.  $x^2 + 3x = 2$       B.  $x^2 - 3x + 2 = 0$   
C.  $x^2 - 2x + 3 = 0$       D.  $x^2 + 3x = -2$
- 如图，在平行四边形  $ABCD$  中， $AD = 6$ ,  $BD = \sqrt{205}$ ，连对角线  $AB$ ，有  $AB \perp CB$ ，延长  $CB$  至  $F$ ，使  $CB = FB$ ，在线段  $AB$  上取点  $E$ ，连  $EF$ ，使  $EF = 2AE$ ，则  $BE$  的长度为（ ）。  
A. 5      B. 8      C. 10      D. 6
- 已知理想情况下物体在做自由落体运动时，下落距离  $s$  与时间  $t$  满足以下关系： $s = 4.9t^2$ ，若一个物体下落了 181.8m，则下列等式正确的是（ ）。  
A.  $4.9s = 181.8^2$       B.  $4.9t^2 = \frac{181.8}{4.9}$   
C.  $t = \sqrt{\frac{181.8}{4.9}}$       D.  $\sqrt{181.8} = t + 4.9$
- 如图，为一种轻质的老式秤。某次称量时，称量的物品和秤盘的总质量为 800g，秤砣到手拉环的距离为  $s$ cm 时，刚好平衡。若秤盘到手拉环的距离为 5cm，秤砣质量为  $m$ g，且  $m$  和  $s$  满足  $m = 8s + 40$ ，则  $s$  的值为（ ）。  
A. 30      B. 25      C. 20      D. 55
- 计算  $(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^8 + (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^8$  的值为（ ）。  
A. 5      B. 47      C. 34      D. 58
- 已知在  $\triangle ABC$  中， $AB = AC$ ,  $AE = EF = FC = CB$ ，则  $\angle A$  的大小为（ ）。  
A.  $15^\circ$       B.  $20^\circ$       C.  $22.5^\circ$       D.  $30^\circ$



（第 6 题）



（第 8 题）



（第 10 题）

### 二、填空题（每小题 3 分，共 18 分）

- 在一元二次方程  $ax^2 + 2ax + b = 0$  中，一次项系数为 \_\_\_\_\_，常数项系数为 \_\_\_\_\_，两根之和为 \_\_\_\_\_。
- 已知一元二次方程中  $x^2 - (m^2 - 3)x + m = 0$ ，有  $x_1 + x_2 = 2$ ，则  $m =$  \_\_\_\_\_。
- 若方程  $x^2 + 2x - 3 = 0$  与  $x^2 + bx + 3 = 0$  有一个公共解，则  $b =$  \_\_\_\_\_。
- 已知两实数  $m$ 、 $n$  满足  $m^2 - 3m + 1 = 0$ ,  $n^2 - 3n + 1 = 0$ ，且  $m \neq n$ ，则代数式  $\sqrt{\frac{m}{n}} + \sqrt{\frac{n}{m}}$  的值为 \_\_\_\_\_。
- 已知两实数  $m$ 、 $n$  满足  $m^2 + 3m - 9 = 0$ ,  $9n^2 - 3n - 1 = 0$ ，且  $mn \neq 1$ ，则  $\frac{mn + n + mn^2}{n^2}$  的值为 \_\_\_\_\_。
- 设  $a_1 = 1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}$ ,  $a_2 = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}$ , ...,  $a_n = 1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}$ ，其中  $n$  为正整数，则  $\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2} + \sqrt{a_3} + \dots + \sqrt{a_{2020}}$  的值为 \_\_\_\_\_。

### 三、解答题（共 8 题、72 分，每小题应写出文字说明、解答过程或演算步骤）

- 用因式分解法解下列方程。  
(1)  $x^2 - 6x + 8 = 0$   
(2)  $(2x + 3)^2 = x^2$   
(3)  $x^2 - 2ax - 5x + a^2 + 5a + 6 = 0$   
(4)  $ax^2 - 3a^2x - x + 3a = 0$  ( $a \neq 0$ )

### 18. 阅读材料，完成任务。

我们已经知道，对于关于  $x$  的一元二次方程  $ax^2 + bx + c = 0$ ，由韦达定理， $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ ,  $x_1x_2 = \frac{c}{a}$ 。如果用  $a$ 、 $x_1$ 、 $x_2$  来表示  $b$ 、 $c$ ，那么代数式  $ax^2 + bx + c$  可以化为  $ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1x_2$ ，即  $a(x - x_1)(x - x_2)$ ，这意味着，**对于任意的二次三项式  $ax^2 + bx + c$ ，如果一元二次方程  $ax^2 + bx + c = 0$  有实根为  $x_1$ ,  $x_2$ ，那么原式可因式分解为  $a(x - x_1)(x - x_2)$** ，利用这种方法，我们可以实现二次三项式在实数范围内的因式分解。

- 在实数范围内因式分解下面的代数式：  
①  $x^2 - x - 1$   
②  $2x^2 - 8x + 5$   
③  $x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 4x + 1$
- 试说明为什么二次三项式  $x^2 + x + 1$  无法在实数范围内被因式分解。

19. 已知两个一元二次方程  $M: ax^2 + bx + c = 0$ ,  $N: cx^2 + bx + a = 0$ 。其中  $ac \neq 0$  且  $a \neq c$ 。

- (1) 如果  $M$  有两个相等的实数根, 求证:  $N$  也有两个相等的实数根。
- (2) 如果  $M$  与  $N$  有实数根, 求证:  $M$  有一个根与  $N$  两根中的一个互为倒数。
- (3) 求证: 如果  $M$  的两根符号相同, 那么  $N$  的两根符号也相同。

20. 在实数范围内解方程组  $\begin{cases} (x+1)(y+1) = 18 \\ x^2y + xy^2 = 66 \end{cases}$ 。

21. “读书可以让人保持思想活力, 让人得到智慧启发, 让人滋养浩然之气”。某校为响应我市全民阅读活动, 利用节假日面向社会开放学校图书馆。据统计, 第一个月进馆 128 人次, 进馆人次逐月增加, 到第三个月末累计进馆 608 人次。

- (1) 若进馆人次的月平均增长率相同, 求进馆人次的月平均增长率。
- (2) 若因条件限制, 学校图书馆每月接纳能力不超过 1000 人次, 在进馆人次的月平均增长率不变的条件下, 校图书馆第几个月会接纳能力不足? 在不超过接纳限度内最多可接纳多少人次?
- (3) 现图书馆举行活动, 给每人发送活动邀请, 每人转发三位好友 (保证每人恰好转发 3 个没有获得书签的好友) 即可获得书签一个, 若每个书签 0.5 元, 第一轮只有一人转发, 则三轮发送后, 图书馆要支出多少钱用于购买书签?

22. 已知关于  $x$  的一元二次方程  $M: x^2 + (k-2)x - k^2 - 1 = 0$ 。

- (1) 求证:  $M$  有不相等的两个实根, 且两根一正一负。
- (2) 若  $M$  的两个根中, 一根大于  $k$ , 一根小于  $k$ , 求  $k$  的取值范围。

23. (1) 已知  $x$  为实数, 求  $x^2 - 8x + 5$  的最小值。

(2) 已知  $x$  为实数, 求代数式  $\frac{x^2+x+1}{x^2+1}$  的取值范围。

(3) 已知  $x, y$  均为实数, 直接写出  $-3x^2 + 3xy + 6x - y^2$  的最大值。

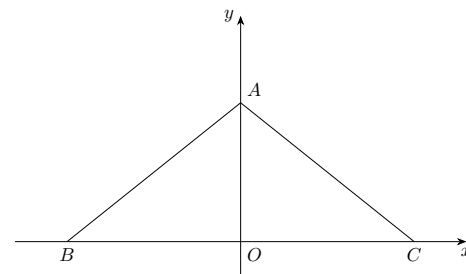
24. 如图, 在平面直角坐标系中,  $A$  在  $y$  轴正半轴上,  $B, C$  为  $x$  轴上两动点。

(1) 如图 1,  $A(0, 4)$ ,  $B$  从  $(-5, 0)$  出发,  $C$  从  $(5, 0)$  出发, 都以每秒  $t$  个单位长度向  $x$  轴负半轴方向运动, 连  $AB, AC$ 。

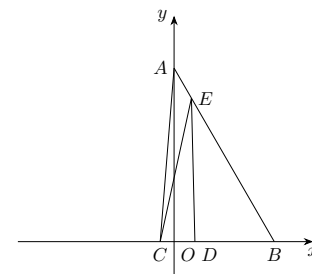
① 当  $\angle BAC = 90^\circ$  时, 直接写出直线  $AC$  的解析式。

② 在①的条件下, 若  $P$  为线段  $AC$  上一点, 作  $PM$  垂直于  $x$  轴于点  $M$ , 作  $PN$  垂直于  $y$  轴于点  $N$ , 求四边形  $OMPN$  面积的最大值。

(2) 如图 2, 直线  $AB: y = -\sqrt{3}x + b$ ,  $C$  在  $B$  左侧,  $E(m, n)$  为射线  $AB$  上一点,  $CD = 2m$ , 连接  $AC, CE, DE$ , 若  $AC = 6, DE = 5$ , 求  $CE$  的取值范围。



(1)



(2)

(第 24 题)