自制小题

lcl

2023 年 8 月 3 日

题目

甲、乙、丙三人玩传花游戏，游戏的规则是：在每一回合的游戏中，有一人拿到花，并随机传给两人中的另一个，接到花的人成为下一回合拿花的人。为了保证游戏公平，决定在每一回合中，使用掷硬币的方式决定将花传给谁，即每个未拿到花的人都有一半的概率在下一回合拿到花。现在假设游戏从甲开始，即第一回合甲拿到花，则第 i 轮甲拿到花的概率是多少？（用 i 表示，i 是一个正整数）

解答

解：

我们设 a_i, b_i, c_i 分别为 $P($ 第 i 回合甲拿到花 $)$、$P($ 第 i 回合乙拿到花 $)$ 和 $P($ 第 i 回合丙拿到花 $)$。

由于每一回合游戏都必定有人拿到花，因此

$$a_i + b_i + c_i = 1$$

同理，有

$$a_{i-1} + b_{i-1} + c_{i-1} = 1$$

又因为甲拿到花的条件是：上一回合乙拿到花并传给甲或上一回合丙拿到花并传给甲，因此有

$$a_i = \frac{1}{2}b_{i-1} + \frac{1}{2}c_{i-1}$$

即

$$a_i = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}a_{i-1}$$

上式化为

$$a_i - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}(a_{i-1} - \frac{1}{3})$$

因此，数列 $\{a_i - \frac{1}{3}\}$ 是公比为 $-\frac{1}{2}$ 的等比数列，且首项为 $\frac{2}{3}$，于是有

$$a_i - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}(-\frac{1}{2})^{i-1}$$

即

$$a_i = \frac{2}{3}(-\frac{1}{2})^{i-1} + \frac{1}{3}$$

综上所述，第 i 回合甲拿到花的概率是 $\frac{2}{3}(-\frac{1}{2})^{i-1} + \frac{1}{3}$。