★ 保密 · 启用前

第二十二章 二次函数

参考答案及评分标准

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
选项	A	B	C	C	B	B	A	B	C	C

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 3 分，共 18 分.

11. $(-1,0)$和$\left(-\dfrac{1}{2},0\right)$　　12. $(-3,-2)$　　13. -10或-2

14. 6　　15. ①②③④⑤　　16. $-\dfrac{9}{4}\le x<-2$

三、解答题：本大题共 8 小题，共 72 分，解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 设抛物线解析式为 $y=ax^2+bx+c$，依题意，有

$$\begin{cases}2=4a-2b+c\\2=9a+3b+c\\-4=4a+2b+c\end{cases}$$

解之，得

$$\begin{cases}a=\dfrac{3}{2}\\b=-\dfrac{3}{2}\\c=-7\end{cases}\quad（2分）$$

故抛物线解析式为 $y=\dfrac{3}{2}x^2-\dfrac{3}{2}x-7$（4 分），化简得

$$y=\frac{3}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{59}{8}$$

即原抛物线顶点为 $\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{59}{8}\right)$.（8 分）

18.（1） 由题意，因为直线两两不平行，且任意三线不共点，故有

$$y=\frac{x(x-1)}{2}=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x\quad（2分）$$

因为 x 表示点数，故 $x>0$（3 分）、x 是整数（4 分）.

（2） 我们令 $y=0$，可以得到

$$x^2-x-36=0\quad（5分）$$

则 $a=1$、$b=1$、$c=-36$，故

$$\Delta=b^2-4ac=1297\quad（6分）$$

由求根公式 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ 知，x 不是整数（7 分）

故交点个数不可能为 18.（8 分）

19.（1） $y=x^2-2x$（2 分）

（2） 令 $y=0$，有 $x^2-2x=0$，解得 $x_1=2$、$x_2=0$，即 $A(2,0)$.（3 分）

记 AB 与 x 轴的交点为 T，由 $\angle BAO=45^\circ$ 易得 $T(0,2)$，于是设 AT：$y=kx+b$，则 $\begin{cases}2k+b=0\\b=2\end{cases}$，解得

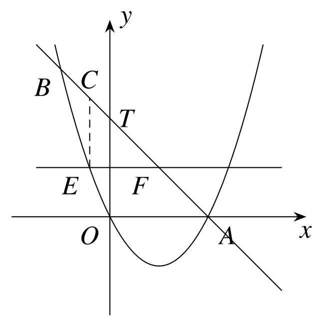
$$\begin{cases} k=-1 \\ b=2 \end{cases}$$ 即

$$AT: y=-x+2 \quad （4分）$$

设点 $E(e,e^2-2e)$，并过 E 作 $EC\perp EF$ 交 AB 于 C，于是 $C(e,-e+2)$（5 分）
又因为 EF 平行于 x 轴，故易得 $CE=EF$（6 分）
于是

$$\begin{aligned} EF=CE&=y_C-y_E \\ &=(-e+2)-(e^2-2e) \\ &=-e^2+e+2 \\ &=-\left(e-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{4} \end{aligned}$$

即 EF 最大为 $\frac{9}{4}$.（8 分）



20.（1） 令 $y=0$，可得 $x^2+ax+2a=0$，由题意，$|x_1-x_2|=3$，即 $(x_1-x_2)^2=9$.（1 分）
由韦达定理，可得

$$\begin{cases} x_1+x_2=-a \\ x_1x_2=2a \end{cases} \quad （2分）$$

故有

$$\begin{aligned} (x_1-x_2)^2&=9 \\ (x_1+x_2)^2-4x_1x_2&=9 \\ a^2-8a&=9 \\ (a-9)(a+1)&=0 \end{aligned}$$

于是 $a-9=0$ 或 $a+1=0$，即 $a_1=9$（舍去）、$a_2=-1$.
故 $a=-1$.（4 分）

（2） 当 $b<-\frac{9}{2}$ 时，$y_{min}=b^2+9b+18$.（5 分）
当 $-\frac{9}{2}\le b<\frac{1}{2}$ 时，$y_{min}=-\frac{9}{4}$.（6 分）
当 $b\ge\frac{1}{2}$ 时，$y_{min}=b^2-b-2$.（7 分）
（注：三种情况全部正确得 8 分）

21.（1） 令 $y=0$，得到 $-\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x+c=0$，即 $x^2+3x-2c=0$，则 $A=1$、$B=3$、$C=-2c$.（2 分）
因为抛物线与 x 轴有两个不同的交点，故该方程有两个不等实根，故

$$\begin{aligned} \Delta=B^2-4AC&>0 \\ 3^2-4\cdot(-2c)&>0 \\ 9+8c&>0 \\ c&>-\frac{9}{8} \quad （4分） \end{aligned}$$

（2） 由题，$y=-\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x+c=-\frac{1}{2}\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+c+\frac{9}{8}$，则 $D\left(-\frac{3}{2},c+\frac{9}{8}\right)$，令 $x=0$，得 $y=c$，故 $C(0,c)$.（5 分）

设 $CD:y=kx+b$，则 $\begin{cases}c=b\\ c+\frac{9}{8}=-\frac{3}{2}k+b\end{cases}$，解得 $\begin{cases}k=-\frac{3}{4}\\ b=c\end{cases}$，故 $CD:y=-\frac{3}{4}x+c$，又因为 MN 平行于 CD 且过原点，故 $MN:y=-\frac{3}{4}x$.（6 分）

联立抛物线与 MN 的方程

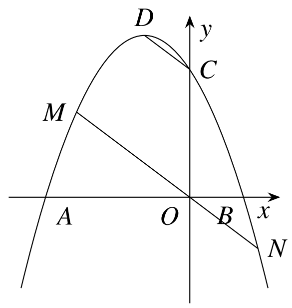
$$\begin{cases}y=-\frac{4}{3}x\\ y=-\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x+c\end{cases}$$

则 $-\frac{4}{3}x=-\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x+c$，化简得到 $x^2+\frac{3}{2}x-2c=0$，由题意，x_M、x_N 是这个方程的两根，故由韦达定理得

$$\begin{cases}x_M+x_N=-\frac{3}{2}\\ x_Mx_N=-2c\end{cases}\quad（7分）$$

于是

$$MN^2=16CD^2$$
$$(x_M-x_N)^2+(y_M-y_N)^2=16(x_C-x_D)^2+16(y_C-y_D)^2$$
$$(x_M-x_N)^2+\left(-\frac{3}{4}x_M+\frac{3}{4}x_N\right)^2=36+\frac{81}{4}$$
$$\frac{25}{16}(x_M-x_N)^2=\frac{225}{4}$$
$$(x_M+x_N)^2-4x_Mx_N=36$$
$$\frac{9}{4}+8c=36$$
$$c=\frac{135}{32}\quad（8分）$$



22.（1） 记 $w_{甲}$、$w_{乙}$ 分别为销售甲、乙两种草莓所获得的总利润，依题意

$$w_{甲}=-3x-x+\begin{cases}x(-x+14) & (x\le 8).\\ 6x & (x>8).\end{cases}=\begin{cases}-x^2+10x & (x\le 8).\\ 2x & (x>8).\end{cases}\quad（2分）$$

$$w_{乙}=9y-3y-(12+3y)=3y-12\quad（3分）$$

则

$$w=w_{甲}+w_{乙}=\begin{cases}-x^2+10x+3y-12 & (x\le 8).\\ 2x+3y-12 & (x>8).\end{cases}$$

答：$w=\begin{cases}-x^2+10x+3y-12 & (x\le 8).\\ 2x+3y-12 & (x>8).\end{cases}$（4 分）

（2） 依题意，$x+y=20$，即 $y=-x+20$，于是

$$w=\begin{cases}-x^2+7x+48 & (x\le 8).\\ -x+48 & (x>8).\end{cases}\qquad \text{（5分）}$$

则依题有 $w=30$.

当 $x\le 8$ 时，有

$$-x^2+7x+48=30$$
$$x^2-7x-18=0$$
$$(x-9)(x+2)=0$$

于是 $x-9=0$ 或 $x+2=0$，即 $x_1=9$、$x_2=-2$，这两个答案都应舍去.（6 分）

当 $x>8$ 时，有

$$-x+48=30$$
$$x=18$$

答：用于销售甲类的草莓有 18 吨.（7 分）

（3） 依题，有 $3x+x+3y+12+3y=100$，即 $3y=44-2x$.

于是有

$$w=\begin{cases}-x^2+8x+32 & (x\le 8).\\ 32 & (x>8).\end{cases}\qquad \text{（8分）}$$

当 $x\le 8$ 时，有 $w=-x^2+8x+32=-(x-4)^2+48$，因为 $4\le 8$，所以 $w_{min}=w\mid_{x=4}=48$.

当 $x>8$ 时，w 恒为 32.

因为 $48>32$，故 $w_{min}=w\mid_{x=4}=48$，此时 $y=12$.

答：甲类草莓 4 吨，乙类草莓 12 吨，这样有最大利润为 48 万元.（10 分）

23.（1） 联立抛物线与 AB 的方程

$$\begin{cases}y=-\frac{1}{2}x+3\\ y=\frac{1}{2}x^2\end{cases}$$

于是有

$$\frac{1}{2}x^2=-\frac{1}{2}x+3$$
$$x^2+x-6=0$$
$$(x+3)(x-2)=0$$

故 $x+3=0$ 或 $x-2=0$，即 $x_1=-3$、$x_2=2$，又因为 A 在 B 的左侧，故 $A\left(-3,\frac{9}{2}\right)$、$B(2,2)$.（2 分）

（2） 设 $P\left(p,\frac{1}{2}p^2\right)$，过 P 作 $PT\perp x$ 轴、交 AB 于 T，则 $T\left(p,-\frac{1}{2}p+3\right)$，于是

$$PT=y_T-y_P=\left(-\frac{1}{2}p+3\right)-\frac{1}{2}p^2=-\frac{1}{2}p^2-\frac{1}{2}p+3$$

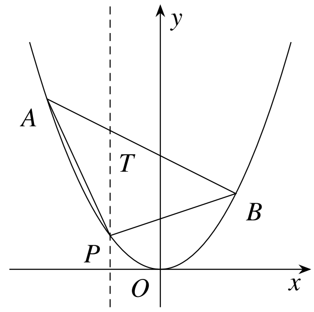
则

$$\begin{aligned}S_{\Delta ABP}&=\frac{1}{2}PT(x_B-x_A)\\&=-\frac{5}{4}p^2-\frac{5}{4}p+\frac{15}{2}\end{aligned}\qquad \text{（4分）}$$

又因为 $S_{\Delta ABP}=5$，故

$$-\frac{5}{4}p^2-\frac{5}{4}p+\frac{15}{2}=5$$
$$p^2+p-2=0$$
$$(p+2)(p-1)=0$$

于是 $p+2=0$ 或 $p-1=0$，即 $p_1=-2$、$p_2=1$，故 $P_1(-2,2)$、$P_2\left(1,\frac{1}{2}\right)$.（6 分）



（3） $\begin{cases} P_1\left(-1, \dfrac{1}{2}\right) \\ Q_1(0,6) \end{cases}$ （7 分）$\begin{cases} P_2\left(5, \dfrac{25}{2}\right) \\ Q_2(0,15) \end{cases}$ （8 分）$\begin{cases} P_3\left(-5, \dfrac{25}{2}\right) \\ Q_3(0,10) \end{cases}$ （9 分）

（注：三种情况全部正确得 10 分）

24.（1） 因为抛物线对称轴为 $x = 1$、且与 x 轴交于 $A(4,0)$ 和 B，故

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{2a} = 1 \\ 16a + 4 + c = 0 \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} a = -\dfrac{1}{2} \\ c = 4 \end{cases}$$

故原抛物线解析式为 $y = -\dfrac{1}{2}x^2 + x + 4$.（2 分）

（2） 如图，过 A 作 x 轴的垂线，交 CD 延长线于 T.

因为抛物线对称轴为 $x = 1$，且 $A(4,0)$，所以 $B(-2,0)$. 又令 $x = 0$，得 $y = 4$，故 $C(0,4)$.（3 分）

于是 $OA = CA = 4$，故 $\angle OAC = \angle OCA = 45°$. 又因为 CA 平分 $\angle BCD$，故 $\angle BCA = \angle TCA$，于是 $\Delta BCA \cong \Delta TCA$，故 $TA = BA = 6$，即 $T(4,6)$.（4 分）

设 $CT: y = kx + b$，则 $\begin{cases} 4 = b \\ 6 = 4k + b \end{cases}$，解得 $\begin{cases} k = \dfrac{1}{2} \\ b = 4 \end{cases}$，即 $CT: y = \dfrac{1}{2}x + 4$.（5 分）

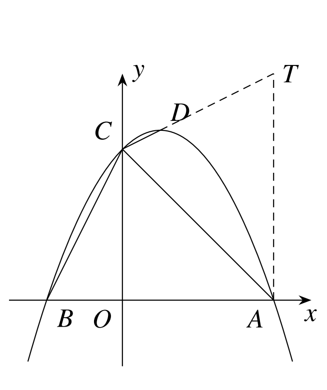
联立抛物线与 CT 的方程，得到

$$\begin{cases} y = \dfrac{1}{2}x + 4 \\ y = -\dfrac{1}{2}x^2 + x + 4 \end{cases}$$

即

$$-\frac{1}{2}x^2 + x + 4 = \frac{1}{2}x + 4$$
$$x^2 - x = 0$$
$$x(x-1) = 0$$

于是 $x = 0$ 或 $x - 1 = 0$，即 $x_1 = 0$（舍去）、$x_2 = 1$，所以 $D\left(1, \dfrac{9}{2}\right)$.（7 分）



（3） 依题，设 $P(p,5)$，直线 $l: y=kx+b$ 过 P，则 $5=kp+b$，即 $b=5-kp$，故 $l: y=kx-kp+5$，即

$$l: y=k(x-p)+5 \quad （8分）$$

联立 l 与抛物线的方程

$$\begin{cases} y=k(x-p)+5 \\ y=-\dfrac{1}{2}x^2+x+4 \end{cases}$$

则

$$k(x-p)+5=-\frac{1}{2}x^2+x+4$$

$$x^2+(2k-2)x+(2-2kp)=0 \quad （9分）$$

当 l 与抛物线有且仅有一个交点时，此方程两根相同，又因为 $A=1$、$B=2k-2$、$C=2-2kp$，故

$$\Delta=B^2-4AC=0$$
$$(2k-2)^2-4(2-2kp)=0$$
$$k^2+(2p-2)k-1=0 \quad （10分）$$

由韦达定理，得

$$\begin{cases} k_1+k_2=-(2p-2) \\ k_1k_2=-1 \end{cases} \qquad (*)$$

于是可设 $PC: y=k_1(x-p)+5$、$PA: y=k_2(x-p)+5$.
令 $x=1$，得 $N(1,k_1(1-p)+5)$、$M(1,k_2(1-p)+5)$
设 $G(1,g)$，则

$GM=k_2(1-p)+(5-g)$、$GN=k_1(1-p)+(5-g)$、$GP^2=(x_P-x_G)^2+(y_P-y_G)^2=(p-1)^2+(5-g)^2$.（11分）

又因为 $GP^2=GM\cdot GN$，故

$$(p-1)^2+(5-g)^2=[k_1(1-p)+(5-g)][k_2(1-p)+(5-g)]$$
$$(p-1)^2+(5-g)^2=k_1k_2(1-p)^2+(k_1+k_2)(1-p)(5-g)+(5-g)^2$$
$$(p-1)^2=k_1k_2(1-p)^2+(k_1+k_2)(1-p)(5-g)$$

将 $(*)$ 代入，有

$$(p-1)^2=-(1-p)^2-2(p-1)(1-p)(5-g)$$
$$2(p-1)^2(4-g)=0$$

由于当 P 运动时，上式恒成立，故 $4-g=0$，即 $g=4$.
综上所述，$G(1,4)$.（12 分）