

第二十一章 一元二次方程

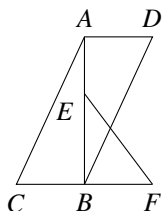
时间：2 小时 满分：120 分

班级：_____ 姓名：_____ 学号：_____ 得分：_____

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

- 关于 x 的一元二次方程 $bx^2 + 18x - 4c = 4$ 的一次项和常数项系数分别为 ()
A. 18, $-4c$ B. b , $4c + 4$ C. 18, $-4c - 4$ D. 18, $-4c$
- 下列关于 x 的方程中，是一元二次方程的是 ()
A. $4x^2 + x = (2x + 1)^2$ B. $\frac{x^3 + 5x^2 + 18x}{5x} = 0$
C. $(x^2 + x)^0 - 1 = 0$ D. $-x^2 + 3 = 1$
- 已知关于 x 的一元二次方程 $-x^2 + 2ax = 3b$ 有实数根，则 ()
A. $x_1 + x_2 = -2a$ B. $x_1x_2 = 3b$
C. $x_1 - x_2 = 2\sqrt{a^2 - 3b}$ D. $x_1 + 2x_2 = 2a + b$
- 若关于 x 的方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 有解，则下列说法正确的是 ()
A. 方程有两个实数根 B. $c = 0$ 时， x 必有一解为 0
C. 当 $a > 0$ 时，方程有两个相等实数根 D. b 不可能为 0
- 若关于 x 的一元二次方程有两个解 $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ ，则这个方程可能是 ()
A. $x^2 + 3x = 2$ B. $x^2 - 3x + 2 = 0$
C. $x^2 - 2x + 3 = 0$ D. $x^2 + 3x = -2$
- 如图，在平行四边形 $ACBD$ 中， $AD = 6$, $BD = \sqrt{205}$ ，连对角线 AB ，有 $AB \perp CB$ ，延长 CB 至 F ，使 $CB = FB$ ，在线段 AB 上取点 E ，连 EF ，使 $EF = 2AE$ ，则 BE 的长度为 ()
A. 5 B. 8 C. 10 D. 6
- 已知理想情况下物体在做自由落体运动时，下落距离 s 与时间 t 满足以下关系： $s = 4.9t^2$ ，若一个物体下落了 181.8m，则下列等式正确的是 ()
A. $4.9s = 181.8^2$ B. $4.9t^2 = \frac{181.8}{4.9}$
C. $t = \sqrt{\frac{181.8}{4.9}}$ D. $\sqrt{181.8} = t + 4.9$
- 如图是一种轻质的老式秤. 在某次称量中，称量的物品和秤盘的总质量为 800g，秤砣到手拉环的距离为 s cm，此时左右两边刚好平衡. 若秤盘到手拉环的距离为 5cm，秤砣质量为 m g，且此时 m 和 s 恰好满足 $m = 8s + 40$ ，则 s 的值为 ()
A. 30 B. 25 C. 20 D. 55
- 计算 $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^8 + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^8$ 的值为 ()
A. 5 B. 47 C. 34 D. 58
- 已知在 $\triangle ABC$ 中，点 E 、 F 分别在线段 AB 、 AC 上，若 $AB = AC$ 、 $AE = EF = FC = CB$ ，则 $\angle A$ 的大小为 ()
A. 15° B. 20° C. 22.5° D. 30°

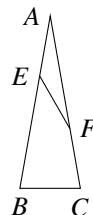
注：为防止有人通过测量得到答案，本小题请将必要的辅助线画在对应的图上！



(第 6 题)



(第 8 题)



(第 10 题)

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 3 分，共 18 分.

11. 一元二次方程 $ax^2 + 2ax + b = 0$ 的一次项系数为 _____, 常数项系数为 _____, 两根之和为 _____.
12. 已知在一元二次方程 $x^2 - (m^2 - 3)x + m = 0$ 中有 $x_1 + x_2 = 2$, 则 $m =$ _____.
13. 若方程 $x^2 + 2x - 3 = 0$ 与 $x^2 + bx + 3 = 0$ 有一个公共解, 则 $b =$ _____.
14. 已知两实数 m 、 n 满足 $m^2 - 3m + 1 = 0$, $n^2 - 3n + 1 = 0$, 且 $m \neq n$, 则代数式 $\sqrt{\frac{m}{n}} + \sqrt{\frac{n}{m}}$ 的值为 _____.
15. 已知两实数 m 、 n 满足 $m^2 + 3m - 9 = 0$, $9n^2 - 3n - 1 = 0$, 且 $mn \neq 1$, 则 $\frac{m+1+mn}{n}$ 的值为 _____.
16. 已知 a 、 b 、 c 为两两不相等的实数, 且满足 $2023(a-b) + \sqrt{2023}(b-c) + (c-a) = 0$, 则代数式 $\frac{(b-c)(c-a)}{(a-b)^2}$ 的值为 _____.

三、解答题：本大题共 8 小题，共 72 分，解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 用因式分解法解下列方程.

- (1) $x^2 - 6x + 8 = 0$
- (2) $(2x+3)^2 = x^2$
- (3) $x^2 - 2ax - 5x + a^2 + 5a + 6 = 0$
- (4) $ax^2 - 3a^2x - x + 3a = 0$ ($a \neq 0$)

18. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 + (m+3)x + m - 3 = 0$.

- (1) 求证：无论 m 取何值，方程总有两个不相等的实数根.
- (2) 记此方程的两根分别为 x_1 、 x_2 ，若 $x_1 + x_2 - 2x_1x_2 = m + 1$ ，求 m 的值.

19. 阅读材料，完成任务.

我们已经知道，对于关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ，由韦达定理， $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ ， $x_1x_2 = \frac{c}{a}$. 如果用 a 、 x_1 、 x_2 来表示 b 、 c ，那么代数式 $ax^2 + bx + c$ 可以化为 $ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1x_2$ ，即 $a(x - x_1)(x - x_2)$ ，于是我们可以得到如下法则：

对于任意的二次三项式 $ax^2 + bx + c$ ，如果一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 有实根为 x_1 、 x_2 ，那么原式可因式分解为 $a(x - x_1)(x - x_2)$.

利用这个法则，我们可以实现二次三项式在实数范围内的因式分解.

(1) 在实数范围内因式分解下面的代数式，并直接写出结果：

- ① $x^2 - x - 1$
- ② $2x^2 - 8x + 5$
- ③ $x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 4x + 1$

(2) 试说明为什么二次三项式 $x^2 + x + 1$ 无法在实数范围内被因式分解.

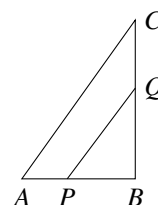
20. 在实数范围内解方程组
$$\begin{cases} (x+1)(y+1) = 18 \\ x^2y + xy^2 = 66 \end{cases}.$$

21. “读书可以让人保持思想活力，让人得到智慧启发，让人滋养浩然之气”. 某校为响应我市全民阅读活动，利用节假日面向社会开放学校图书馆. 据统计，第一个月进馆 128 人次，进馆人次逐月增加，到第三个月末累计进馆 608 人次.

- (1) 若进馆人次的月平均增长率相同，求进馆人次的月平均增长率.
- (2) 现图书馆举行活动，给每人发送活动邀请，每人转发 n 位好友即可获得书签一个，若第一轮只有一人转发，每人最多累计参与一轮转发，并恰好转发给了 n 个没有获得邀请的好友，且三轮发送后累计 13 人收到邀请，求 n 的值.

22. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle B = 90^\circ$ ， $AB = 5\text{cm}$ ， $BC = 7\text{cm}$ ，点 P 从点 A 开始沿 AB 边向点 B 以 1cm/s 的速度移动，点 Q 从点 B 开始沿 BC 边向点 C 以 2cm/s 的速度移动，若 P 、 Q 同时出发，且一点到达目标点，两点均立刻停止运动，则：

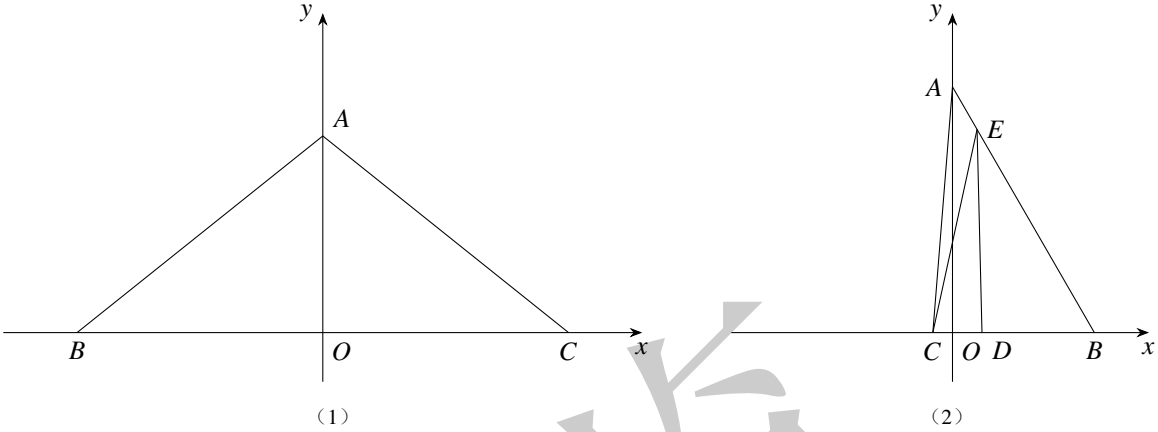
- (1) 在几秒后， $S_{\triangle PBQ} = 4\text{cm}^2$?
- (2) 在几秒后， $PQ = 5\text{cm}$? (P 、 Q 未离开原点前不算)



(第 22 题)

23. (1) 已知 x 为实数，求代数式 $x^2 - 8x + 5$ 的最小值.
- (2) 已知 x 为实数，求代数式 $\frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1}$ 的取值范围.
- (3) 已知 x 、 y 均为实数，求代数式 $-3x^2 + 3xy + 6x - y^2$ 的最大值.

24. 如图，在平面直角坐标系中， A 在 y 轴正半轴上， B 、 C 为 x 轴上两动点.
- (1) 如图 1， $A(0,4)$ ， B 从 $(-5,0)$ 出发， C 从 $(5,0)$ 出发，都以每秒 t 个单位长度向 x 轴负半轴方向运动，连 AB 、 AC .
- ① 当 $\angle BAC = 90^\circ$ 时，直接写出直线 AC 的解析式.
- ② 在①的条件下，若 P 为线段 AC 上一点，作 $PM \perp x$ 轴于点 M ，作 $PN \perp y$ 轴于点 N ，求四边形 $OMPN$ 面积的最大值.
- (2) 如图 2，直线 $AB: y = -\sqrt{3}x + b$ ， C 在 B 左侧， $E(m,n)$ 为射线 AB 上一点， $CD = 2m$ ，连接 AC ， CE ， DE ，若 $AC = 6$ ， $DE = 5$ ，求 CE 的取值范围.



(第 24 题)