

## 第二十一章 一元二次方程

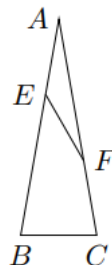
时间：2 小时 满分：120 分

### 一、选择题（每小题 3 分，共 30 分）

- 1.
- 2.
- 3.
- 4.
- 5.
- 6.
- 7.
8. 如图，为一种轻质的老式秤。某次称量时，称量的物品和秤盘的总质量为 800g，秤砣到手拉环的距离为  $s$ cm 时，刚好平衡。若秤盘到手拉环的距离为 5cm，秤砣质量为  $m$ g，且  $m$  和  $s$  满足  $m = 8s + 40$ ，则  $s$  的值为（ ）。



- A. 30                      B. 25                      C. 20                      D. 55
9. 计算  $(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^8 + (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^8$  的值为（ ）。
- A. 5                      B. 47                      C. 34                      D. 58
10. 已知在  $\triangle ABC$  中， $AB = AC$ ， $AE = EF = FC = CB$ ，则  $\angle A$  的值为（ ）。



- A.  $15^\circ$                       B.  $20^\circ$                       C.  $22.5^\circ$                       D.  $30^\circ$

### 二、填空题（每小题 3 分，共 18 分）

- 11.
- 12.
- 13.
- 14.
15. 已知两实数  $m$ ， $n$  满足  $m^2 + 3m - 9 = 0$ ， $9n^2 - 3n - 1 = 0$ ，且  $mn \neq 1$ ，则  $\frac{mn+n+mn^2}{n^2}$  的值为\_\_\_\_\_。
16. 设  $a_1 = 1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}$ ， $a_2 = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}$ ，……， $a_n = 1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}$ ，其中  $n$  为正整数，则  $\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2} + \sqrt{a_3} + \dots + \sqrt{a_{2020}}$  的值为\_\_\_\_\_。

三、解答题（共 8 题、72 分，每小题应写出文字说明、解答过程或演算步骤）

17. (1)

(2)

18. 阅读材料，完成任务。

我们已经知道，对于关于  $x$  的一元二次方程  $ax^2 + bx + c = 0$ ，由韦达定理， $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ ， $x_1x_2 = \frac{c}{a}$ 。如果用  $a$ 、 $x_1$ 、 $x_2$  来表示  $b$ 、 $c$ ，那么代数式  $ax^2 + bx + c$  可以化为  $ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1x_2$ ，即  $a(x - x_1)(x - x_2)$ ，这意味着，对于任意的二次三项式  $ax^2 + bx + c$ ，如果一元二次方程  $ax^2 + bx + c = 0$  有实根为  $x_1, x_2$ ，那么原式可因式分解为  $a(x - x_1)(x - x_2)$ ，利用这种方法，我们可以实现二次三项式在实数范围内的因式分解。

(1) 在实数范围内因式分解下面的代数式：

①  $x^2 - x - 1$

②  $2x^2 - 8x + 5$

③  $x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 4x + 1$

(2) 试说明为什么二次三项式  $x^2 + x + 1$  无法在实数范围内被因式分解。

19. 已知  $x, y$  均为实数，且  $xy + x + y = 17, x^2y + xy^2 = 66$ ，求  $x^3y + xy + xy^3$  的值。

20. 已知两个一元二次方程  $M: ax^2 + bx + c = 0$ ， $N: cx^2 + bx + a = 0$ 。其中  $ac \neq 0$  且  $a \neq c$ 。

(1) 如果  $M$  有两个相等的实数根，求证： $N$  也有两个相等的实数根。

(2) 如果  $M$  与  $N$  有实数根，求证： $M$  有一个根与  $N$  两根中的一个互为倒数。

(3) 在 (2) 的条件下，如果  $M$  与  $N$  有一根相同，试求出这个根的值。

(4) 求证：如果  $M$  的两根符号相同，那么  $N$  的两根符号也相同。

21. “读书可以让人保持思想活力，让人得到智慧启发，让人滋养浩然之气”。某校为响应我市全民阅读活动，利用节假日面向社会开放学校图书馆。据统计，第一个月进馆 128 人次，进馆人次逐月增加，到第三个月末累计进馆 608 人次。

- (1) 若进馆人次的月平均增长率相同，求进馆人次的月平均增长率。
- (2) 若因条件限制，学校图书馆每月接纳能力不超过 1000 人次，在进馆人次的月平均增长率不变的条件下，校图书馆第几月会接纳能力不足？在不超过接纳限度内最多可接纳多少人次？
- (3) 现图书馆举行活动，给每人发送活动邀请，每人转发三位好友（保证每人恰好转发 3 个没有获得书签的好友）即可获得书签一个，若每个书签 0.5 元，第一轮只有一人转发，则三轮发送后，图书馆要支出多少钱用于购买书签？

22. 已知关于  $x$  的一元二次方程  $M: x^2 + (k-2)x - k^2 - 1 = 0$ 。

- (1) 求证： $M$  有不相等的两个实根，且两根一正一负。
- (2) 若  $M$  的两个根中，一根大于  $k$ ，一根小于  $k$ ，不解方程，求  $k$  的取值范围。

23. (1) 已知  $x$  为实数，求  $x^2 - 8x + 5$  的最小值。

(2) 已知  $x$  为实数，求代数式  $\frac{x^2+x+1}{x^2+1}$  的取值范围。

(3) 已知  $x, y$  为实数，直接写出  $-3x^2 + 3xy + 6x - y^2$  的最大值。

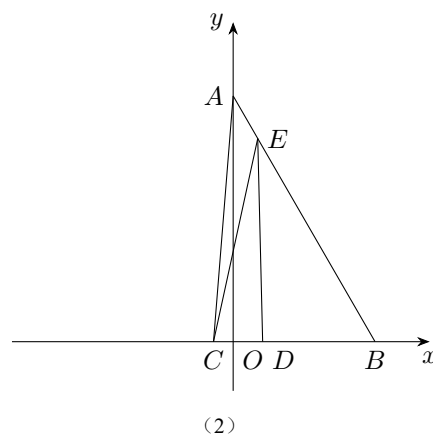
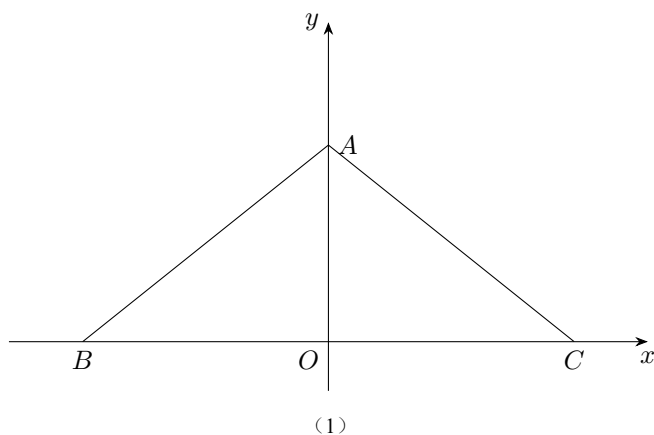
24. 如图，在平面直角坐标系中， $A$  在  $y$  轴正半轴上， $B$ 、 $C$  为  $x$  轴上两动点。

(1) 如图 1， $A(0,4)$ ， $B$  从  $(-5,0)$  出发， $C$  从  $(5,0)$  出发，都以每秒  $t$  个单位长度向  $x$  轴负半轴方向运动，连  $AB$ 、 $AC$ 。

① 当  $\angle BAC = 90^\circ$  时，直接写出直线  $AC$  的解析式。

② 在①的条件下，若  $P$  为线段  $AC$  上一点，作  $PM$  垂直于  $x$  轴于点  $M$ ，作  $PN$  垂直于  $y$  轴于点  $N$ ，求四边形  $OMPN$  面积的最大值。

(2) 如图 2，直线  $AB: y = -\sqrt{3}x + b$ ， $C$  在  $B$  左侧， $E(m,n)$  为射线  $AB$  上一点， $CD = 2m$ ，连接  $AC$ ， $CE$ ， $DE$ ，若  $AC = 6, DE = 5$ ，求  $CE$  的取值范围。



(第 24 题)