

# 培训班小题

lcl

2024 年 2 月 4 日

## 题目

已知  $m$ 、 $n$  是两个正整数，且  $n \leq 100$ ，求证：分数  $\frac{m}{n}$  在化成十进制小数时，其小数点后不可能有连续三位是 1、6、7。

## 解答

证明：

用反证法，假设  $\frac{m}{n}$  的十进制小数中小数点后第  $(k+1)$ 、 $(k+2)$ 、 $(k+3)$  位（ $k$  是正整数）分别为 1、6、7，那么可设  $\frac{m}{n} = \overline{A.a_1a_2 \dots a_{k-1}a_k167a_{k+4}a_{k+5} \dots}$ ，其中  $A$  是正整数、 $a_i$ （ $i$  为正整数）是小于 10 的自然数，于是有  $10^k \cdot \frac{m}{n} = \overline{Aa_1a_2 \dots a_{k-1}a_k + 0.167a_{k+4}a_{k+5} \dots}$ ，这样  $\frac{10^k \cdot m - n \cdot \overline{Aa_1a_2 \dots a_{k-1}a_k}}{n} = \overline{0.167a_{k+4}a_{k+5} \dots}$ 。

记  $b = 10^k \cdot m - n \cdot \overline{Aa_1a_2 \dots a_{k-1}a_k}$ ，显然  $b$  是一个正整数，那么  $\frac{b}{n} = \overline{0.167a_{k+4}a_{k+5} \dots}$ ，于是有  $0.167 < \frac{b}{n} < 0.168$ ，故  $0.167n < b < 0.168n \Rightarrow 1002n < 6000b < 1008n \Rightarrow 2n < 1000(6b - n) < 8n$ 。

然而  $n$  是不大于 100 的正整数，因此显然上式不可能成立，于是假设不成立，因此分数  $\frac{m}{n}$  在化成十进制小数时，其小数点后不可能有连续三位是 1、6、7，证毕。