★ 保密 · 启用前

第二十二章　二次函数

参考答案及评分标准

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
选项	A	B	C	C	B	D	D	B	D	A

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 3 分，共 18 分.

11. $(-1,0)$ 和 $\left(-\dfrac{1}{2},0\right)$　　12. $(-3,-2)$　　13. -10 或 -2

14. $\dfrac{3}{2}$　　15. ① ② ③ ④ ⑤　　16. $-\dfrac{9}{4}\le a<-2$ 或 0

三、解答题：本大题共 8 小题，共 72 分，解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 设抛物线解析式为 $y=ax^2+bx+c$，依题意，有

$$\begin{cases}2=4a-2b+c\\2=9a+3b+c\\-4=4a+2b+c\end{cases}$$

解之，得

$$\begin{cases}a=\dfrac{3}{2}\\b=-\dfrac{3}{2}\\c=-7\end{cases}\qquad（2分）$$

故抛物线解析式为 $y=\dfrac{3}{2}x^2-\dfrac{3}{2}x-7$（4 分），化简得

$$y=\frac{3}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{59}{8}$$

即原抛物线顶点为 $\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{59}{8}\right)$.（8 分）

18.（1）　由题意，因为有 x 支队伍，且每两个队伍间都需进行一场比赛，故每支队伍都要进行 $(x-1)$ 场比赛，又因为每场比赛都算了两遍，故

$$y=\frac{x(x-1)}{2}=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x\quad（2分）$$

因为 x 表示比赛场数，故 $x>1$（3 分）、x 是整数（4 分）.

（2）　我们令 $y=0$，可以得到

$$x^2-x-36=0\quad（5分）$$

则 $a=1$、$b=-1$、$c=-36$，故

$$\Delta=b^2-4ac=1297\quad（6分）$$

由求根公式 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ 知，x 不是整数（7 分）

故比赛场数不可能为 18.（8 分）

19.（1）　依题意，因为球的轨迹是顶点为 $(5.5,4.825)$ 抛物线，故可设球的轨迹方程为

$$y=a(x-5.5)^2+4.825\quad（1分）$$

又因为球还过点 $(0, 1.8)$，故有

$$1.8 = a \times 5.5^2 + 4.825$$

$$a = -0.1 \quad （2分）$$

即

$$y = -0.1(x-5.5)^2 + 4.825$$

$$y = -0.1x^2 + 1.1x + 1.8 \quad （3分）$$

又因为当 $x = 10$ 时，$y = 2.8$，即点 $(10, 2.8)$ 在球的轨迹上，故此球能被准确投进篮筐.
答：此球能被准确投进篮筐.（4 分）

（2） 依题意，令 $y \le 2.8$，有

$$-0.1x^2 + 1.1x + 1.8 \le 2.8$$

$$x^2 - 11x + 10 \ge 0$$

$$(x-1)(x-10) \ge 0$$

故 $x \le 1$ 或 $x \ge 10$（舍去），即他离甲同学不能超过 1 米.
答：他最远离甲同学 1 米.（8 分）

20.（1） 令 $y = 0$，可得 $x^2 + ax + 2a = 0$，由题意，$|x_1 - x_2| = 3$，即 $(x_1 - x_2)^2 = 9$.（1 分）
由韦达定理，可得

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -a \\ x_1 x_2 = 2a \end{cases} \quad （2分）$$

故有

$$(x_1 - x_2)^2 = 9$$

$$(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 9$$

$$a^2 - 8a = 9$$

$$(a-9)(a+1) = 0$$

于是 $a - 9 = 0$ 或 $a + 1 = 0$，即 $a_1 = 9$、$a_2 = -1$.（4 分）

（2） 当 $b < -\frac{9}{2}$ 时，$y_{min} = b^2 + 9b + 18$.（5 分）
当 $-\frac{9}{2} \le b < \frac{1}{2}$ 时，$y_{min} = -\frac{9}{4}$.（6 分）
当 $b \ge \frac{1}{2}$ 时，$y_{min} = b^2 - b - 2$.（7 分）
（注：三种情况全部正确得 8 分）

21.（1） $y = x^2 - 2x$（2 分）

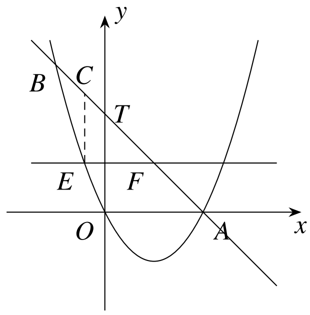
（2） 令 $y = 0$，有 $x^2 - 2x = 0$，解得 $x_1 = 2$、$x_2 = 0$，即 $A(2, 0)$.（3 分）
记 AB 与 x 轴的交点为 T，由 $\angle BAO = 45°$ 易得 $T(0, 2)$，于是设 $AT: y = kx + b$，则 $\begin{cases} 2k + b = 0 \\ b = 2 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} k = -1 \\ b = 2 \end{cases}$ 即

$$AT: y = -x + 2 \quad （4分）$$

设点 $E(e, e^2 - 2e)$，并过 E 作 $EC \perp EF$ 交 AB 于 C，于是 $C(e, -e+2)$（5 分）
又因为 EF 平行于 x 轴，故易得 $CE = EF$（6 分）
于是

$$\begin{aligned} EF = CE &= y_C - y_E \\ &= (-e+2) - (e^2 - 2e) \\ &= -e^2 + e + 2 \\ &= -\left(e - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{4} \end{aligned}$$

即 EF 最大为 $\frac{9}{4}$.（8 分）



22.（1） 记 $w_{甲}$、$w_{乙}$ 分别为销售甲、乙两种草莓所获得的总利润，依题意

$$w_{甲} = -3x - x + \begin{cases} x(-x+14) & (0 \le x \le 8). \\ 6x & (x > 8). \end{cases} = \begin{cases} -x^2 + 10x & (0 \le x \le 8). \\ 2x & (x > 8). \end{cases} \quad (2分)$$

$$w_{乙} = 9y - 3y - (12 + 3y) = 3y - 12 \quad (3分)$$

则

$$w = w_{甲} + w_{乙} = \begin{cases} -x^2 + 10x + 3y - 12 & (0 \le x \le 8). \\ 2x + 3y - 12 & (x > 8). \end{cases}$$

答：$w = \begin{cases} -x^2 + 10x + 3y - 12 & (0 \le x \le 8). \\ 2x + 3y - 12 & (x > 8). \end{cases}$（4 分）

（2） 依题意，$x + y = 20$，即 $y = -x + 20$，于是

$$w = \begin{cases} -x^2 + 7x + 48 & (0 \le x \le 8). \\ -x + 48 & (8 < x \le 20). \end{cases} \quad (5分)$$

则依题有 $w = 30$.
当 $0 \le x \le 8$ 时，有

$$-x^2 + 7x + 48 = 30$$

$$x^2 - 7x - 18 = 0$$

$$(x-9)(x+2) = 0$$

于是 $x - 9 = 0$ 或 $x + 2 = 0$，即 $x_1 = 9$、$x_2 = -2$，这两个答案都应舍去.（6 分）
当 $8 < x \le 20$ 时，有

$$-x + 48 = 30$$

$$x = 18$$

答：用于销售甲类的草莓有 18 吨.（7 分）

（3） 依题，有 $3x + x + 3y + 12 + 3y = 100$，即 $3y = 44 - 2x$.
于是有

$$w = \begin{cases} -x^2 + 8x + 32 & (0 \le x \le 8). \\ 32 & (8 < x \le 22). \end{cases} \quad (8分)$$

当 $0 \le x \le 8$ 时，有 $w = -x^2 + 8x + 32 = -(x-4)^2 + 48$，因为 $4 \le 8$，所以 $w_{min} = w\,|_{x=4} = 48$.
当 $8 < x \le 22$ 时，w 恒为 32.
因为 $48 > 32$，故 $w_{min} = w\,|_{x=4} = 48$，此时 $y = 12$.
答：甲类草莓 4 吨，乙类草莓 12 吨，这样有最大利润为 48 万元.（10 分）

23.（1） 联立抛物线与 AB 的方程

$$\begin{cases} y = -\dfrac{1}{2}x + 3 \\ y = \dfrac{1}{2}x^2 \end{cases}$$

于是有

$$\frac{1}{2}x^2 = -\frac{1}{2}x + 3$$
$$x^2 + x - 6 = 0$$
$$(x+3)(x-2) = 0$$

故 $x + 3 = 0$ 或 $x - 2 = 0$，即 $x_1 = -3$、$x_2 = 2$，又因为 A 在 B 的左侧，故 $A\left(-3, \frac{9}{2}\right)$、$B(2, 2)$.（2 分）

（2） 如图，过 O 作直线 l_1 平行于 AB，则 l_1 上所有点到 AB 的距离与 O 到 AB 的距离相等.（3 分）

又因为 $AB: y = -\frac{1}{2}x + 3$，故 $l_1: y = -\frac{1}{2}x$. 联立抛物线与 l_1 的方程

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2 \\ y = -\frac{1}{2}x \end{cases}$$

即

$$\frac{1}{2}x^2 = -\frac{1}{2}x$$
$$x^2 + x = 0$$
$$x(x+1) = 0$$

故 $x = 0$ 或 $x + 1 = 0$，即 $x_1 = -1$，$x_2 = 0$（舍去），故 $P_1\left(-1, \frac{1}{2}\right)$.（4 分）

记 AB 与 y 轴的交点为 N，如图，在 y 轴上截 $MN = ON$，过 M 作直线 l_2 平行于 AB，则 l_2 也平行于 l_1.

过 N 作 $NE \perp l_2$ 于 E，延长 EN 交 l_1 于 F，则 $NF \perp l_1$.

又因为 $MN = ON$，故 $\Delta EMN \cong \Delta FON$，即 $EN = FN$，于是直线 l_2 到直线 AB 的距离与点 O 到直线 AB 距离相等.

设 $l_2: y = -\frac{1}{2}x + b$，则 $6 = b \Rightarrow b = 6$，即 $l_2: y = -\frac{1}{2}x + 6$.（5 分）

联立抛物线与 l_2 的方程

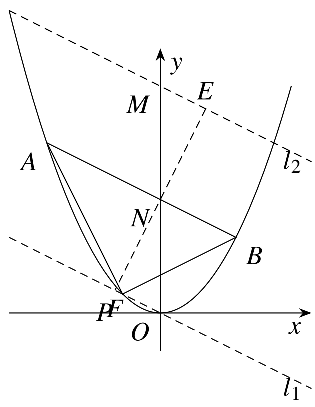
$$\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + 6 \\ y = -\frac{1}{2}x^2 \end{cases}$$

即

$$-\frac{1}{2}x + 6 = -\frac{1}{2}x^2$$
$$x^2 + x - 12 = 0$$
$$(x+4)(x-3) = 0$$

于是 $x + 4 = 0$ 或 $x - 3 = 0$，即 $x_1 = -4$、$x_2 = 3$，故 $P_2(-4, 8)$、$P_3\left(3, \frac{9}{2}\right)$.

综上所述，$P_1\left(-1, \frac{1}{2}\right)$、$P_2(-4, 8)$、$P_3\left(3, \frac{9}{2}\right)$.（6 分）



（3） $\begin{cases}P_1\left(-1,\dfrac{1}{2}\right)\\Q_1(0,6)\end{cases}$ （7 分） $\begin{cases}P_2\left(5,\dfrac{25}{2}\right)\\Q_2(0,15)\end{cases}$ （8 分） $\begin{cases}P_3\left(-5,\dfrac{25}{2}\right)\\Q_3(0,10)\end{cases}$ （9 分）

（注：三种情况全部正确得 10 分）

24.（1） 因为抛物线对称轴为 $x=1$、且与 x 轴交于 $A(4,0)$ 和 B，故

$$\begin{cases}-\dfrac{1}{2a}=1\\16a+4+c=0\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}a=-\dfrac{1}{2}\\c=4\end{cases}$$

故原抛物线解析式为 $y=-\dfrac{1}{2}x^2+x+4$.（2 分）

（2） 如图，过 A 作 x 轴的垂线，交 CD 延长线于 T.

因为抛物线对称轴为 $x=1$，且 $A(4,0)$，所以 $B(-2,0)$. 又令 $x=0$，得 $y=4$，故 $C(0,4)$.（3 分）

于是 $OA=CA=4$，故 $\angle OAC=\angle OCA=45^\circ$. 又因为 CA 平分 $\angle BCD$，故 $\angle BCA=\angle TCA$，于是 $\Delta BCA\cong\Delta TCA$，故 $TA=BA=6$，即 $T(4,6)$.（4 分）

设 $CT:y=kx+b$，则 $\begin{cases}4=b\\6=4k+b\end{cases}$，解得 $\begin{cases}k=\dfrac{1}{2}\\b=4\end{cases}$，即 $CT:y=\dfrac{1}{2}x+4$.（5 分）

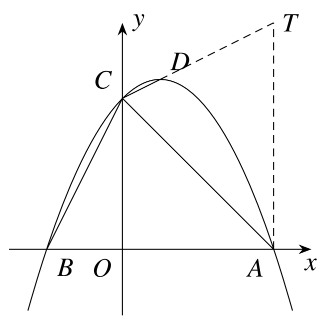
联立抛物线与 CT 的方程，得到

$$\begin{cases}y=\dfrac{1}{2}x+4\\y=-\dfrac{1}{2}x^2+x+4\end{cases}$$

即

$$-\frac{1}{2}x^2+x+4=\frac{1}{2}x+4$$
$$x^2-x=0$$
$$x(x-1)=0$$

于是 $x=0$ 或 $x-1=0$，即 $x_1=0$（舍去）、$x_2=1$，所以 $D\left(1,\dfrac{9}{2}\right)$.（7 分）



（3） 依题，设 $P(p,5)$，直线 $l:y=kx+b$ 过 P，则 $5=kp+b$，即 $b=5-kp$，故 $l:y=kx-kp+5$，即

$$l:y=k(x-p)+5 \quad （8分）$$

联立 l 与抛物线的方程

$$\begin{cases}y=k(x-p)+5\\y=-\dfrac{1}{2}x^2+x+4\end{cases}$$

则

$$k(x-p)+5=-\frac{1}{2}x^2+x+4$$
$$x^2+(2k-2)x+(2-2kp)=0 \quad （9分）$$

当 l 与抛物线有且仅有一个交点时，此方程两根相同，又因为 $A=1$、$B=2k-2$、$C=2-2kp$，故

$$\Delta = B^2-4AC=0$$
$$(2k-2)^2-4(2-2kp)=0$$
$$k^2+(2p-2)k-1=0 \quad （10分）$$

由韦达定理，得

$$\begin{cases} k_1+k_2=-(2p-2) \\ k_1k_2=-1 \end{cases} \qquad (*)$$

于是可设 $PC: y=k_1(x-p)+5$、$PA: y=k_2(x-p)+5$.
令 $x=1$，得 $N(1,k_1(1-p)+5)$、$M(1,k_2(1-p)+5)$
设 $G(1,g)$，则

$GM=k_2(1-p)+(5-g)$、$GN=k_1(1-p)+(5-g)$、$GP^2=(x_P-x_G)^2+(y_P-y_G)^2=(p-1)^2+(5-g)^2$.（11分）

又因为 $GP^2=GM\cdot GN$，故

$$(p-1)^2+(5-g)^2=[k_1(1-p)+(5-g)][k_2(1-p)+(5-g)]$$
$$(p-1)^2+(5-g)^2=k_1k_2(1-p)^2+(k_1+k_2)(1-p)(5-g)+(5-g)^2$$
$$(p-1)^2=k_1k_2(1-p)^2+(k_1+k_2)(1-p)(5-g)$$

将 $(*)$ 代入，有

$$(p-1)^2=-(1-p)^2-2(p-1)(1-p)(5-g)$$
$$2(p-1)^2(4-g)=0$$

由于当 P 运动时，上式恒成立，故 $4-g=0$，即 $g=4$.
综上所述，$G(1,4)$.（12 分）