

自制小题

lcl

2024 年 1 月 27 日

【2024 九省联考 T11 改】

求所有的 $f(x)$ ，使得：① $f(\frac{1}{2}) \neq 0$ ；② 对于任意实数 x, y ，恒有 $f(x+y) + f(x)f(y) = 4xy$.

【解析】

注意到②中等式左边仅含有关函数 f 的项，右边为 $4xy$ ，而①给出条件 $f(\frac{1}{2}) \neq 0$ ，故考虑令 $x = \frac{1}{2}, y = 0$ ，有 $f(\frac{1}{2}) + f(\frac{1}{2})f(0) = 0$ ，故 $f(0) = -1$.

由于已经知道了有关 $f(0)$ 和 $f(\frac{1}{2})$ 的信息，故可考虑令 $x = \frac{1}{2}, y = -\frac{1}{2}$ ，这样有 $f(0) + f(\frac{1}{2})f(-\frac{1}{2}) = -1$ ，于是 $f(-\frac{1}{2}) = 0$.

进一步，注意到②中等式左边有乘积项 $f(x)f(y)$ ，而 $f(-\frac{1}{2}) = 0$ ，故考虑令 $y = -\frac{1}{2}$ ，有 $f(x - \frac{1}{2}) + f(x)f(-\frac{1}{2}) = -2x \Rightarrow f(x - \frac{1}{2}) = -2(x - \frac{1}{2}) - 1$ ，用 x 替换掉 $x - \frac{1}{2}$ ，就得到 $f(x) = -2x - 1$.

综上所述， $f(x) = -2x - 1$.