

## 第二十二章 二次函数

时间：2 小时 满分：120 分

班级：\_\_\_\_\_ 姓名：\_\_\_\_\_ 学号：\_\_\_\_\_ 得分：\_\_\_\_\_

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 下列函数为二次函数的是 ( )

A.  $y = x^2 - 2x + 1 - (x-1)(2x+1)$

B.  $y = \frac{x^4 - 3x^3 + x^2 + 1}{x}$

C.  $y = 18x - 16$

D.  $y = x^2 + 2x + 3 - \frac{1}{x}$

2. 二次函数  $y = x^2 + ax + 1 - a$  的图像必过点 ( )

A. (0, 1)

B. (1, 2)

C. (-1, 0)

D. (0, 0)

3. 已知二次函数  $y = ax^2 + bx + c$  的顶点为 (4, -2)，且过点 (6, 2)，则 ( )

A.  $a = -1, b = 8, c = 18$

B.  $a = 1, b = 8, c = 14$

C.  $a = 1, b = -8, c = 14$

D.  $a = -1, b = 6, c = -14$

4. 已知抛物线  $y = ax^2 - 2ax + b$  ( $a < 0$ ) 上有三点  $A(2, y_1)$ 、 $B(1, y_2)$ 、 $C(-3, y_3)$ ，则  $y_1$ 、 $y_2$ 、 $y_3$  的大小关系正确的是 ( )

A.  $y_3 > y_2 > y_1$

B.  $y_2 > y_3 > y_1$

C.  $y_2 > y_1 > y_3$

D.  $y_1 > y_2 > y_3$

5. 若二次函数  $y = x^2 + 4x + 4$  的图像与一次函数  $y = ax + a$  的图像有且仅有一个交点，则 ( )

A.  $a = 2$

B.  $a = 4$

C.  $a = -1$

D.  $a = -2$

6. 已知抛物线  $y_1 = ax^2 + bx + c$  ( $a > 0$ ) 与直线  $y_2 = mx + n$  ( $m \neq 0$ ) 交于两点  $A(1, 8)$ 、 $B(6, 4)$ ，则不等式  $y_1 > y_2$  的解集是 ( )

A.  $4 < x < 8$

B.  $1 < x < 6$

C.  $x < 4$  或  $x > 8$

D.  $x < 1$  或  $x > 6$

7. 已知一本书的成本为 20 元，售价为 35 元，日销量 100 本，为了提高销售量，商家决定进行降价. 经市场调研，每降价 1 元，日销量增加 2 本，则降低价格  $x$  (单位：元) 与每日利润  $y$  (单位：元) 之间的函数关系式正确的是 ( )

A.  $y = (100 + 2x)(35 - x)$

B.  $y = (100 - 2x)(15 + x)$

C.  $y = (100 - 2x)(35 + x)$

D.  $y = (100 + 2x)(15 - x)$

8. 如图是一座桥的桥洞，已知此桥洞的形状是一条抛物线，且当水面宽 4 米时，水深 3 米；当水面宽 6 米时，水深 1.75 米，则桥洞顶点距离水底 ( ) 米.

A. 3

B. 4

C. 6

D. 8



(第 8 题)

9. 已知抛物线  $y = ax^2 - 4ax - 1$  上有两点  $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$  满足  $y_1 < y_2$ ，则下列说法正确的是 ( )

A. 若  $x_1 - x_2 < 0$ ，则  $x_1 + x_2 - 4 < 0$

B. 若  $x_1 - x_2 < 0$ ，则  $x_1 + x_2 - 4 > 0$

C. 若  $x_1 - x_2 > 0$ ，则  $a(x_1 + x_2 - 4) > 0$

D. 若  $x_1 - x_2 > 0$ ，则  $a(x_1 + x_2 - 4) < 0$

10. 关于  $x$  的方程  $x^2 - |x - 2| - 4x + k + 1 = 0$  不可能有 ( ) 个不同的实数根.

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 3 分，共 18 分.

11. 抛物线  $y = 4x^2 + 6x + 2$  与  $x$  轴的交点是\_\_\_\_\_.12. 抛物线  $y = x^2 + 6x + 7$  的顶点为\_\_\_\_\_.13. 若将抛物线  $y = x^2 - 2ax + a^2 + 2a$  向右平移 5 个单位长度，再向下平移 5 个单位长度，得到的抛物线过原点，则  $a$  的值为\_\_\_\_\_.14. 若抛物线  $y = ax^2 + bx + c$  与抛物线  $y = -a(x - 1)^2 + 4a$  关于  $x$  轴对称，则  $\frac{c}{b}$  的值为\_\_\_\_\_.

15. 如图，抛物线  $y = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ ) 的对称轴为直线  $x = -1$ ，则有下列说法：

①  $abc < 0$ ;

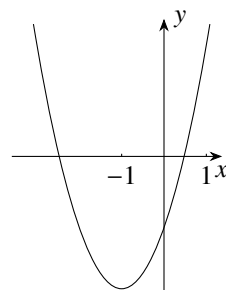
②  $3a + c > 0$ ;

③  $\left(\frac{b}{a}\right)^2 - \frac{4c}{a} > 4$ ;

④ 当抛物线经过点  $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$  时，若方程  $ax^2 + bx + c - 2 = 0$  的两根为  $x_1, x_2$  ( $x_1 < x_2$ )，则  $x_1 + 2x_2 = -\frac{3}{2}$ ;

⑤ 若在方程  $|ax^2 + bx + c| = k$  中， $k$  为常数，且  $0 < k < -a + b - c$ ，则方程所有根的和为  $-4$ ;

其中正确的有\_\_\_\_\_.



(第 15 题)

16. 若关于  $x$  的方程  $ax^2 - 3x - 1 = 0$  的所有实根均满足  $-1 < x < 0$ ，则  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

三、解答题：本大题共 8 小题，共 72 分，解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 已知在平面直角坐标系内有一条抛物线过点  $(-2, 2)$ 、 $(3, 2)$  和  $(2, -4)$ ，求这条抛物线的顶点坐标.

18. 在一次足球联赛中，共有  $x$  支球队参加，已知每两个队伍间都需进行一场比赛，且他们一共打了  $y$  场比赛.

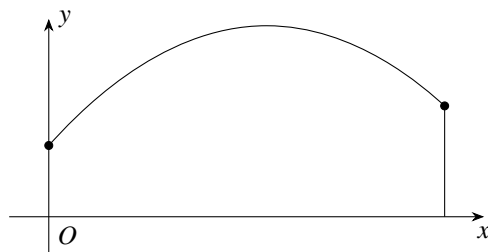
(1) 求  $y$  与  $x$  之间的函数关系式，并写出  $x$  的取值范围.

(2) 比赛场数可能为 18 吗？为什么？

19. 体育课上，同学们正在打篮球，如图，甲同学在水平距离球筐 10 米的地方投出一个三分球. 已知球在出手时距离地面 1.8 米，水平飞行 5.5 米后达到最高 4.825 米，且球筐高 2.8 米. 现建立如图的坐标系.

(1) 试计算说明此球能不能被准确投入篮筐.

(2) 现在乙同学在甲同学正前方准备盖帽，已知他跳起摸高最高为 2.8 米，则他最远离甲同学多少米才能使盖帽成功？(补充：篮球在下降阶段不可盖帽)



(第 19 题)

20. 已知二次函数  $y = x^2 + ax + 2a$  的图像与  $x$  轴有两个交点，且这两个交点间的距离为 3.

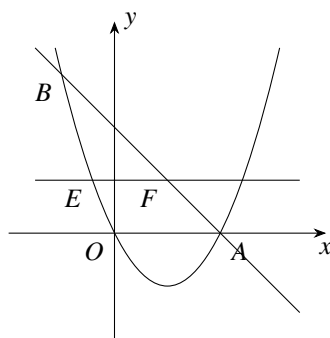
(1) 求  $a$ .

(2) 若此函数的图像交  $y$  轴于负半轴，直接写出当  $b \leq x \leq b+5$  时，函数值  $y$  的最小值.

21. 如图，在平面直角坐标系中，顶点为点  $(1, -1)$  的一抛物线过原点.

(1) 直接写出这条抛物线的解析式.

(2) 记这条抛物线与  $x$  轴的另一交点为  $A$ ，过点  $A$  作直线  $AB$  交抛物线于第二象限一点  $B$ ，使  $\angle BAO = 45^\circ$ . 已知点  $E$  是抛物线上线段  $AB$  下方一动点，过  $E$  作直线  $l$  垂直于  $y$  轴，交直线  $AB$  于一点  $F$ ，求线段  $EF$  长度的最大值.



(第 21 题)

22. 2015 年初，草莓进入采摘旺季，某公司经营销售草莓的业务，以 3 万元/吨的价格向农户收购后，分拣成甲、乙两类，甲类草莓包装后直接销售，乙类草莓深加工后再销售. 甲类草莓的包装成本为 1 万元/吨，且当甲类草莓的销售量  $m$  不超过 8 吨时，它的平均销售价格  $n = -m + 14$ ，当甲类草莓的销售量超过 8 吨时，它的平均销售价格为 6 万元/吨；乙类草莓加工总费用  $s$  (单位：万元) 与加工数量  $t$  (单位：吨) 之间的函数关系为  $s = 12 + 3t$ ，平均销售价格为 9 万元/吨.

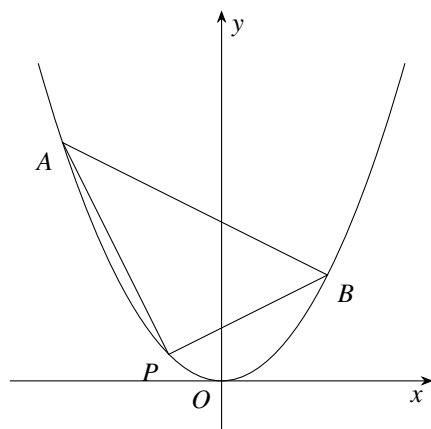
在该公司的某次收购中，计划甲类草莓分  $x$  吨、乙类草莓分  $y$  吨，假设经营这批草莓所获得的总利润为  $w$  万元.

(1) 求  $w$  与  $x$  和  $y$  之间的函数关系式.

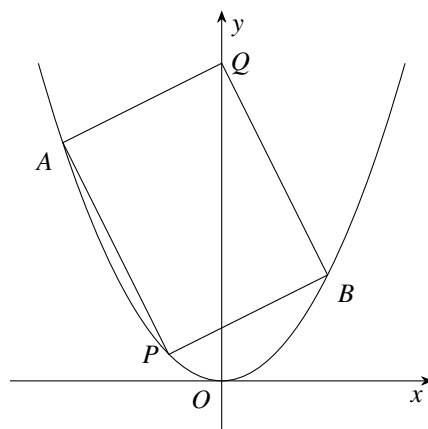
(2) 若该公司收购了 20 吨的草莓，且获得了 30 万元的总利润，求用于销售甲类的草莓有多少吨?

(3) 若该公司准备投入 100 万元资金进行收购及后续加工，请你设计一种收购与经营方案，使该公司获得最大的总利润，并求出最大的总利润.

23. 在平面直角坐标系中, 直线  $AB: y = -\frac{1}{2}x + 3$  与抛物线  $y = \frac{1}{2}x^2$  交于  $A$ 、 $B$  两点, 点  $P$  是抛物线上异于  $O$  的一动点.
- (1) 求点  $A$ 、 $B$  的坐标.
  - (2) 如图 1, 求所有的点  $P$ , 使  $P$  到直线  $AB$  的距离与  $O$  到直线  $AB$  的距离相等.
  - (3) 如图 2,  $Q$  是  $y$  轴上一动点, 直接写出所有的组合  $P$ 、 $Q$ , 使得  $A$ 、 $B$ 、 $P$ 、 $Q$  构成的四边形是平行四边形.



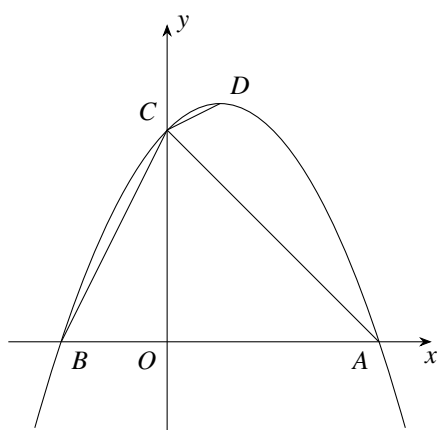
(1)



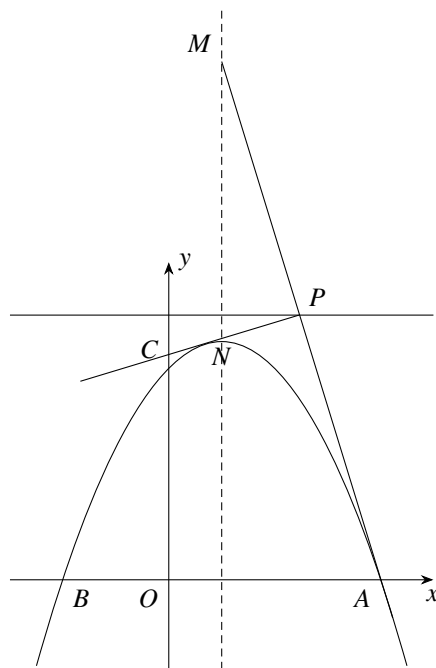
(2)

(第 23 题)

24. 在平面直角坐标系中, 抛物线  $y = ax^2 + x + c$  的对称轴为  $x = 1$ , 且与  $x$  轴交于点  $A(4, 0)$  和点  $B$ , 与  $y$  轴交于点  $C$ .
- (1) 求抛物线的解析式.
  - (2) 如图 1, 连  $BC$ 、 $AC$ ,  $D$  是抛物线上一点, 连  $DC$ , 若  $AC$  平分  $\angle BCD$ , 求点  $D$  的坐标.
  - (3) 如图 2, 点  $P$  是直线  $y = 5$  上、但不在抛物线对称轴上的动点, 过点  $P$  且不与  $y$  轴平行的两条直线  $l_1$ 、 $l_2$  与抛物线均只有一个交点,  $l_1$ 、 $l_2$  分别交抛物线对称轴与点  $M$ 、 $N$ , 点  $G$  为抛物线对称轴上点  $M$ 、 $N$  下方一点, 若  $GP^2 = GM \cdot GN$  恒成立, 求点  $G$  的坐标.



(1)



(2)

(第 24 题)