24. 已知在平面直角坐标系 xOy 中，动点 P 到点 $F(0,1)$ 的距离恒等于其到直线 $y=-1$ 的距离，记 P 的轨迹为 E.

（1） 求 E 的解析式.

（2） 已知平面内一直线 l_1 过点 $M(-1,-1)$，并与 E 交于 A、B 两点，过 A 作比例系数为 $-\dfrac{1}{2}$ 的直线 l_2，交 E 于另一点 C.

① 求证：直线 BC 过定点.

② 记①中的定点为 H，若 $S_{\triangle ABH}$ 的面积不大于 5，求直线 l_1 比例系数的取值范围.

【解析】

24. 解：

（1） 设 $P(x_0,y_0)$，依题意，$x_0^2+(y_0-1)^2=(y_0+1)^2$，化简后得到 $y_0=\dfrac{1}{4}x_0^2$，故 $E:y=\dfrac{1}{4}x^2$.

（2） ① 设 $A(4a,4a^2)$、$B(4b,4b^2)$、$C(4c,4c^2)$，$AB:y=k_1x+b_1$，则 $\begin{cases}4a^2=4ak_1+b_1\\4b^2=4bk_1+b_1\end{cases}$，解得 $\begin{cases}k_1=a+b\\b_1=-4ab\end{cases}$，故 $AB:y=(a+b)x-4ab$.

同理，$BC:y=(b+c)x-4bc$、$CA:y=(c+a)x-4ca$.

$\because AB$ 过 $M(-1,-1)$，$\therefore -1=-a-b-4ab\Rightarrow 4ab+a+b=1$.

$\because k_{AC}=-\dfrac{1}{2}$，$\therefore c+a=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow a=-c-\dfrac{1}{2}$，代入上式得到 $4b(-c-\dfrac{1}{2})-c-\dfrac{1}{2}+b=1\Rightarrow -(b+c)-4bc=\dfrac{3}{2}$.

$\therefore BC$ 过 $(-1,\dfrac{3}{2})$.

② 令 $k=a+b$，则 $k=k_{AB}$.

依题意，$H(-1,\dfrac{3}{2})$，则 $MH\perp x$轴，并且 $MH=\dfrac{5}{2}$，则 $S_{\triangle ABH}=\dfrac{1}{2}MH|x_B-x_A|=\dfrac{5}{4}|4b-4a|=5|a-b|$.

$\because S_{\triangle ABH}\le 5$，$\therefore |a-b|\le 1\Rightarrow (a-b)^2\le 1\Rightarrow (a+b)^2-4ab\le 1\Rightarrow (a+b)^2+a+b-1\le 1\Rightarrow k^2+k-2\le 0\Rightarrow -2\le k\le 1$.

$\because AB:y=(a+b)x-4ab=kx+k-1$ 与抛物线有交点，$\therefore x^2-4kx-4k+4=0$ 有实数解，于是 $16k^2-4(-4k+4)\ge 0\Rightarrow k^2+k-1\ge 0$，解得 $k\ge\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ 或 $k\le-\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$.

综上，$\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\le k\le 1$ 或 $-2\le k\le-\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$.