第二十一章　一元二次方程

时间：2 小时　满分：120 分

一、选择题（每小题 3 分，共 30 分）

1. 关于 x 的一元二次方程 $bx^2+18x-4c=4$ 的一次项和常数项系数分别为（　　）。
A. 18，$-4c$　　B. b，$4c+4$　　C. 18，$-4c-4$　　D. 18，$-4c$

2. 下列关于 x 的方程中，是一元二次方程的是（　　）。
A. $4x^2+x=(2x+1)^2$　　B. $\frac{x^3+5x^2+18x}{5x}=0$
C. $(x^2+x)^0-1=0$　　D. $-x^2+3=1$

3. 已知关于 x 的一元二次方程 $-x^2+2ax=3b$，则（　　）。
A. $x_1+x_2=-2a$　　B. $x_1x_2=3b$
C. $x_1-x_2=2\sqrt{a^2-3b}$　　D. $x_1+2x_2=2a+b$

4. 若关于 x 的方程 $ax^2+bx+c=0$ 有解，则下列说法正确的是（　　）。
A. 方程有两个实数根　　B. $c=0$ 时，x 必有一解为 0
C. 当 $a>0$ 时，方程有两个相等实数根　　D. b 不可能为 0

5. 若关于 x 的一元二次方程有两个解 $x_1=1$，$x_2=2$，则这个方程可能是（　　）。
A. $x^2+3x=2$　　B. $x^2-3x+2=0$
C. $x^2-2x+3=0$　　D. $x^2+3x=-2$

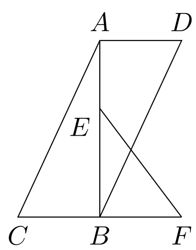
6. 如图，在平行四边形 $ACBD$ 中，$AD=6$，$BD=\sqrt{205}$，连对角线 AB，有 $AB\perp CB$，延长 CB 至 F，使 $CB=FB$，在线段 AB 上取点 E，连 EF，使 $EF=2AE$，则 BE 的长度为（　　）。
A. 5　　B. 8　　C. 10　　D. 6

7. 已知理想情况下物体在做自由落体运动时，下落距离 s 与时间 t 满足以下关系：$s=4.9t^2$，若一个物体下落了 181.8m，则下列等式正确的是（　　）。
A. $4.9s=181.8^2$　　B. $4.9t^2=\frac{181.8}{4.9}$
C. $t=\sqrt{\frac{181.8}{4.9}}$　　D. $\sqrt{181.8}=t+4.9$

8. 如图，为一种轻质的老式秤。某次称量时，称量的物品和秤盘的总质量为 800g，秤砣到手拉环的距离为 $s$cm 时，刚好平衡。若秤盘到手拉环的距离为 5cm，秤砣质量为 mg，且 m 和 s 满足 $m=8s+40$，则 s 的值为（　　）。
A. 30　　B. 25　　C. 20　　D. 55

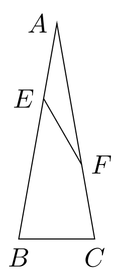
9. 计算 $(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^8+(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^8$ 的值为（　　）。
A. 5　　B. 47　　C. 34　　D. 58

10. 已知在 ΔABC 中，点 E、F 分别在线段 AB、AC 上，若 $AB=AC$、$AE=EF=FC=CB$，则 $\angle A$ 的大小为（　　）。
A. 15°　　B. 20°　　C. 22.5°　　D. 30°



（第 6 题）

（第 8 题）



（第 10 题）

二、填空题（每小题 3 分，共 18 分）

11. 在一元二次方程 $ax^2+2ax+b=0$ 中，一次项系数为________，常数项系数为________，两根之和为________。

12. 已知一元二次方程中 $x^2-(m^2-3)x+m=0$，有 $x_1+x_2=2$，则 $m=$________。

13. 若方程 $x^2+2x-3=0$ 与 $x^2+bx+3=0$ 有一个公共解，则 $b=$________。

14. 已知两实数 m、n 满足 $m^2-3m+1=0$，$n^2-3n+1=0$，且 $m\neq n$，则代数式 $\sqrt{\frac{m}{n}}+\sqrt{\frac{n}{m}}$ 的值为________。

15. 已知两实数 m、n 满足 $m^2+3m-9=0$，$9n^2-3n-1=0$，且 $mn\neq 1$，则 $\frac{mn+n+mn^2}{n^2}$ 的值为________。

16. 已知 a、b、c 为两两不相等的实数，且满足 $2023(a-b)+\sqrt{2023}(b-c)+(c-a)=0$，则代数式 $\frac{(b-c)(c-a)}{(a-b)^2}$ 的值为________。

三、解答题（共 8 题、72 分，每小题应写出文字说明、解答过程或演算步骤）

17. 用因式分解法解下列方程。

（1） $x^2-6x+8=0$

（2） $(2x+3)^2=x^2$

（3） $x^2-2ax-5x+a^2+5a+6=0$

（4） $ax^2-3a^2x-x+3a=0 \quad (a\neq 0)$

18. 阅读材料，完成任务。

我们已经知道，对于关于 x 的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$，由韦达定理，$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$，$x_1x_2=\frac{c}{a}$。如果用 a、x_1、x_2 来表示 b、c，那么代数式 ax^2+bx+c 可以化为 $ax^2-a(x_1+x_2)x+ax_1x_2$，即 $a(x-x_1)(x-x_2)$，这意味着，**对于任意的二次三项式 ax^2+bx+c，如果一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有实根为 x_1，x_2，那么原式可因式分解为** $a(x-x_1)(x-x_2)$，利用这种方法，我们可以实现二次三项式在实数范围内的因式分解。

（1） 在实数范围内因式分解下面的代数式，并直接写出结果：

① x^2-x-1

② $2x^2-8x+5$

③ $x^4-4x^3+2x^2-4x+1$

（2） 试说明为什么二次三项式 x^2+x+1 无法在实数范围内被因式分解。

19. 已知两个一元二次方程 $M: ax^2+bx+c=0$ 和 $N: cy^2+by+a=0$ 均有两个实数根。其中 $ac\neq 0$ 且 $a\neq c$。

（1） 求证：如果 M 的两个实数根相等，那么 N 的两个实数根也相等。

（2） 求证：如果 M 的两根符号相同，那么 N 的两根符号也相同。

20. 在实数范围内解方程组 $\begin{cases}(x+1)(y+1)=18\\ x^2y+xy^2=66\end{cases}$。

21. “读书可以让人保持思想活力，让人得到智慧启发，让人滋养浩然之气”。某校为响应我市全民阅读活动，利用节假日面向社会开放学校图书馆。据统计，第一个月进馆 128 人次，进馆人次逐月增加，到第三个月末累计进馆 608 人次。

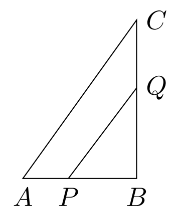
（1） 若进馆人次的月平均增长率相同，求进馆人次的月平均增长率。

（2） 现图书馆举行活动，给每人发送活动邀请，每人转发 n 位好友即可获得书签一个，若第一轮只有一人转发，每人最多累计领一个书签，并恰好转发给了 n 个没有获得邀请的好友，且三轮发送后累计 13 人收到邀请，求 n 的值。

22. 如图，在 ΔABC 中，$\angle B=90^\circ$，$AB=5$cm，$BC=7$cm，点 P 从点 A 开始沿 AB 边向点 B 以 1 cm/s 的速度移动，点 Q 从点 B 开始沿 BC 边向点 C 以 2 cm/s 的速度移动，若 P、Q 同时出发，且一点到达目标点，两点均立刻停止运动，则：

（1） 在几秒后，$S_{\Delta PBQ}=4\ \text{cm}^2$？

（2） 在几秒后，$PQ=5$ cm？



（第 22 题）

23.（1） 已知 x 为实数，求代数式 x^2-8x+5 的最小值。

（2） 已知 x 为实数，求代数式 $\frac{x^2+x+1}{x^2+1}$ 的取值范围。

（3） 已知 x、y 均为实数，直接写出代数式 $-3x^2+3xy+6x-y^2$ 的最大值。

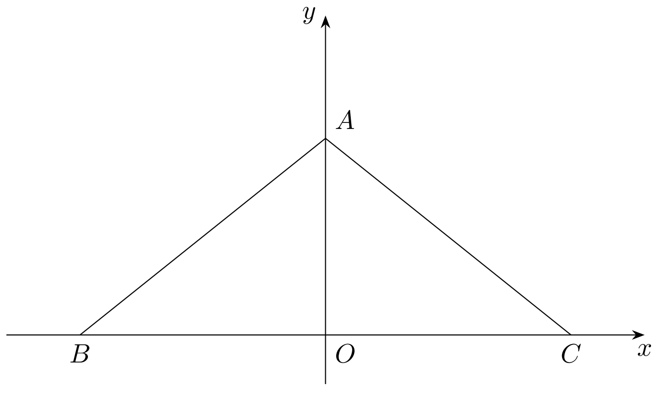
24. 如图，在平面直角坐标系中，A 在 y 轴正半轴上，B、C 为 x 轴上两动点。

（1） 如图 1，$A(0,4)$，B 从 $(-5,0)$ 出发，C 从 $(5,0)$ 出发，都以每秒 t 个单位长度向 x 轴负半轴方向运动，连 AB、AC。

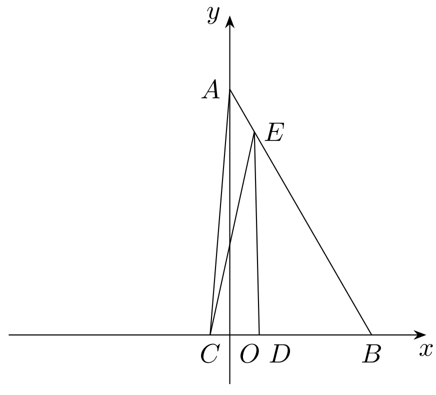
① 当 $\angle BAC=90°$ 时，直接写出直线 AC 的解析式。

② 在①的条件下，若 P 为线段 AC 上一点，作 PM 垂直于 x 轴于点 M，作 PN 垂直于 y 轴于点 N，求四边形 $OMPN$ 面积的最大值。

（2） 如图 2，直线 $AB: y=-\sqrt{3}x+b$，C 在 B 左侧，$E(m,n)$ 为射线 AB 上一点，$CD=2m$，连接 AC，CE，DE，若 $AC=6$，$DE=5$，求 CE 的取值范围。



（1）



（2）

（第 24 题）