

第二十二章 二次函数

时间：2 小时 满分：120 分

班级：_____ 姓名：_____ 学号：_____ 得分：_____

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 下列函数为二次函数的是 ()

A. $y = x^2 - 2x + 1 - (x - 1)(2x + 1)$

B. $y = \frac{x^4 - 3x^3 + x^2 + 1}{x}$

C. $y = 18x - 16$

D. $y = x^2 + 2x + 3 - \frac{1}{x}$

2. 二次函数 $y = x^2 + ax + 1 - a$ 的图像必过点 ()

A. (0, 1)

B. (1, 2)

C. (-1, 0)

D. (0, 0)

3. 已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的顶点为 (4, -2)，且过点 (6, 2)，则 ()

A. $a = -1, b = 8, c = 18$

B. $a = 1, b = 8, c = 14$

C. $a = 1, b = -8, c = 14$

D. $a = -1, b = 6, c = -14$

4. 已知抛物线 $y = ax^2 - 2ax + b$ ($a < 0$) 上有三点 $A(2, y_1)$ 、 $B(1, y_2)$ 、 $C(-3, y_3)$ ，则 y_1 、 y_2 、 y_3 的大小关系正确的是 ()

A. $y_3 > y_2 > y_1$

B. $y_2 > y_3 > y_1$

C. $y_2 > y_1 > y_3$

D. $y_1 > y_2 > y_3$

5. 若二次函数 $y = x^2 + 4x + 4$ 的图像与一次函数 $y = ax + a$ 的图像有且仅有一个交点，则 ()

A. $a = 2$

B. $a = 4$

C. $a = -1$

D. $a = -2$

6. 已知抛物线 $y_1 = ax^2 + bx + c$ ($a > 0$) 与直线 $y_2 = mx + n$ ($m \neq 0$) 交于两点 $A(x_a, y_a)$ 、 $B(x_b, y_b)$ ，且点 A 在点 B 左侧，则不等式 $y_1 < y_2$ 的解集是 ()

A. $y_a < x < y_b$

B. $x_a < x < x_b$

C. $y_a > x$ 或 $y_b < x$

D. $x_a > x$ 或 $x_b < x$

7. 已知一本书的成本为 20 元，售价为 35 元，日销量 100 本，为了提高销售量，商家决定进行降价. 经市场调研，每降价 1 元，日销量增加 2 本，则降低价格 x (单位：元) 与每日利润 y (单位：元) 的关系式正确的是 ()

A. $y = (100 + 2x)(35 - x)$

B. $y = (100 - 2x)(15 + x)$

C. $y = (100 - 2x)(35 + x)$

D. $y = (100 + 2x)(15 - x)$

8. 如图是一座桥的桥洞，已知此桥洞的形状是一条抛物线，且当水面宽 4 米时，水深 3 米；当水面宽 6 米时，水深 1.75 米，则桥洞顶点距离水底 () 米.

A. 3

B. 4

C. 6

D. 8



(第 8 题)

9. 若关于 x 的一元二次方程 $ax^2 - 2ax - 2 = 0$ 在 $-1 < x < 4$ 范围内有且仅有一根，结合方程对应的二次函数的图像，则实数 a 的取值范围是 ()

A. $a > \frac{2}{3}$

B. $a < \frac{1}{4}$

C. $\frac{1}{4} < a < \frac{2}{3}$

D. $a > \frac{2}{3}$ 或 $a < \frac{1}{4}$

10. 已知 x 、 y 为实数，则代数式 $\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{x^2 - 4x + 4 + y^2} + \sqrt{x^2 + y^2 - 4y + 4}$ 的最小值为 () .

A. 4

B. $3\sqrt{2}$

C. $\sqrt{6} + \sqrt{2}$

D. $2\sqrt{3}$

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 3 分，共 18 分.

11. 抛物线 $y = 4x^2 + 6x + 2$ 与 x 轴的交点是_____.12. 抛物线 $y = x^2 + 6x + 7$ 的顶点为_____.13. 若将抛物线 $y = x^2 - 2ax + a^2 + 2a$ 向右平移 5 个单位长度，再向下平移 5 个单位长度，得到的抛物线过原点，则 a 的值为_____.

14. 把二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a > 0$) 的图像作关于 x 轴的对称变换, 所得图像的解析式为 $y = -a(x-1)^2 + 4a$, 若 $(m-1)a + b + c \leq 0$, 则 m 的最大值为_____.

15. 如图, 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的对称轴为直线 $x = -1$, 则有下列说法:

① $abc < 0$;

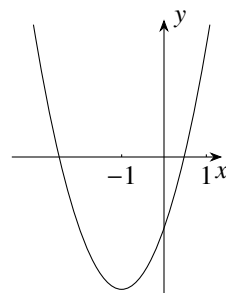
② $3a + c > 0$;

③ $\left(\frac{b}{a}\right)^2 - \frac{4c}{a} > 4$;

④ 当抛物线经过点 $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ 时, 若方程 $ax^2 + bx + c - 2 = 0$ 的两根为 x_1, x_2 ($x_1 < x_2$), 则 $x_1 + 2x_2 = -\frac{3}{2}$;

⑤ 若在方程 $|ax^2 + bx + c| = k$ 中, k 为常数, 且 $0 < k < -a + b - c$, 则方程所有根的和为 -4 ;

其中正确的有_____.



(第 15 题)

16. 若关于 x 的方程 $ax^2 - 3x - 1 = 0$ 的所有实根均满足 $-1 < x < 0$, 则 a 的取值范围是_____.

三、解答题: 本大题共 8 小题, 共 72 分, 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 已知在平面直角坐标系内有一条抛物线过点 $(-2, 2)$ 、 $(3, 2)$ 和 $(2, -4)$, 求这条抛物线的顶点坐标.

18. 已知在同一平面内有 x 条互不平行的直线两两交于 y 个不同的点.

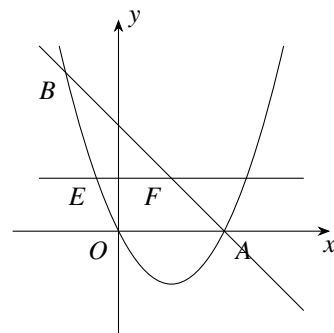
(1) 求 y 与 x 之间的函数关系式, 并写出 x 的取值范围.

(2) 交点个数可能为 18 吗? 为什么?

19. 如图, 在平面直角坐标系中, 顶点为点 $(1, -1)$ 的一抛物线过原点.

(1) 直接写出这条抛物线的解析式.

(2) 记这条抛物线与 x 轴的另一交点为 A , 过点 A 作直线 AB 交抛物线于第二象限一点 B , 使 $\angle BAO = 45^\circ$. 已知点 E 是抛物线上线段 AB 下方一动点, 过 E 作直线 l 垂直于 y 轴, 交直线 AB 于一点 F , 求线段 EF 长度的最大值.



(第 19 题)

20. 已知二次函数 $y = x^2 + ax + 2a$ 的图像与 x 轴有两个交点，且这两个交点间的距离为 3.

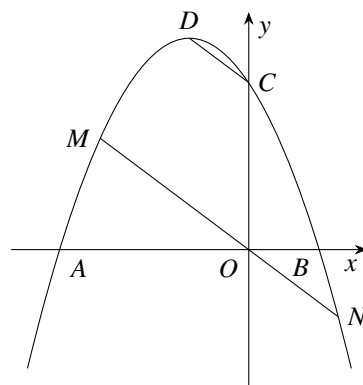
(1) 求 a .

(2) 结合函数图像，直接写出当 $b \leq x \leq b+5$ 时，函数值 y 的最小值.

21. 如图，在平面直角坐标系中，抛物线 $y = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + c$ 交 x 轴于 A 、 B 两不同的点，交 y 轴于点 C ，抛物线顶点为点 D .

(1) 求 c 的取值范围.

(2) 过 O 作 MN 平行于 CD 分别交抛物线于 M 、 N ，若 $MN = 4CD$ ，求 c 的值.



(第 21 题)

22. 2015 年初，草莓进入采摘旺季，某公司经营销售草莓的业务，以 3 万元/吨的价格向农户收购后，分拣成甲、乙两类，甲类草莓包装后直接销售，乙类草莓深加工后再销售. 甲类草莓的包装成本为 1 万元/吨，且当甲类草莓的销售量 m 不超过 8 吨时，它的平均销售价格 $n = -m + 14$ ，当甲类草莓的销售量超过 8 吨时，它的平均销售价格为 6 万元/吨；乙类草莓加工总费用 s (单位：万元) 与加工数量 t (单位：吨) 之间的函数关系为 $s = 12 + 3t$ ，平均销售价格为 9 万元/吨.

在该公司的某次收购中，计划甲类草莓分 x 吨、乙类草莓分 y 吨，假设经营这批草莓所获得的总利润为 w 万元.

(1) 求 w 与 x 和 y 之间的函数关系式.

(2) 若该公司收购了 20 吨的草莓，且获得了 30 万元的总利润，求用于销售甲类的草莓有多少吨?

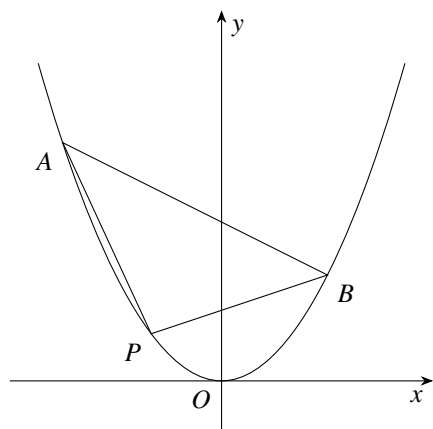
(3) 若该公司准备投入 100 万元资金进行收购及后续加工，请你设计一种收购与经营方案，使该公司获得最大的总利润，并求出最大的总利润.

23. 在平面直角坐标系中, 直线 $AB: y = -\frac{1}{2}x + 3$ 与抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2$ 交于 A 、 B 两点, 点 P 是抛物线上一动点.

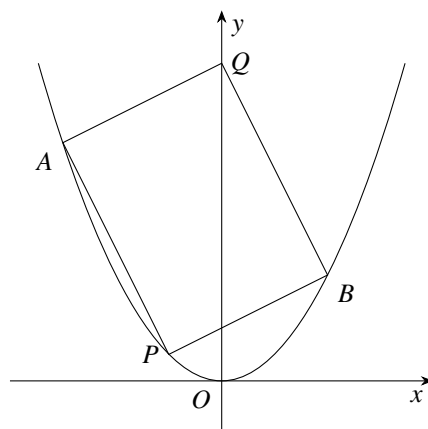
(1) 求点 A 、 B 的坐标.

(2) 如图 1, 当点 P 在直线 AB 下方时, 求所有的点 P , 使 $\triangle APB$ 的面积为 5.

(3) 如图 2, Q 是 y 轴上一动点, 直接写出所有的组合 P 、 Q , 使得 A 、 B 、 P 、 Q 构成的四边形是平行四边形.



(1)



(2)

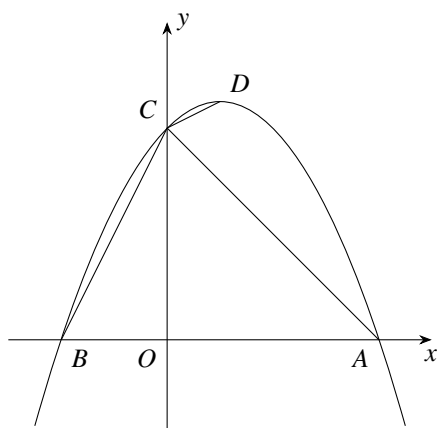
(第 23 题)

24. 在平面直角坐标系中, 抛物线 $y = ax^2 + x + c$ 的对称轴为 $x = 1$, 且与 x 轴交于点 $A(4, 0)$ 和点 B , 与 y 轴交于点 C .

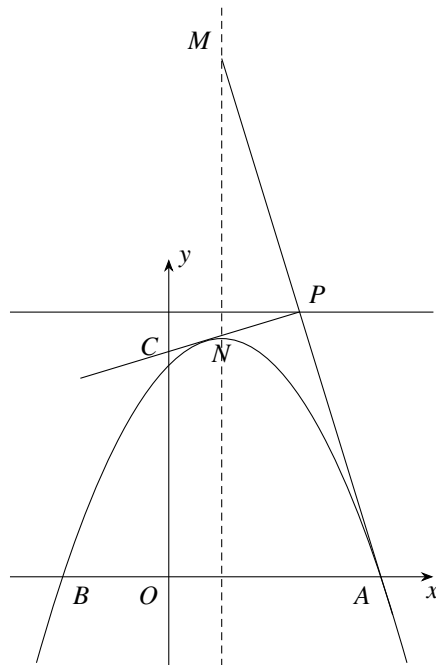
(1) 求抛物线的解析式.

(2) 如图 1, 连 BC 、 AC , D 是抛物线上一点, 连 DC , 若 AC 平分 $\angle BCD$, 求点 D 的坐标.

(3) 如图 2, 点 P 是直线 $y = 5$ 上、但不在抛物线对称轴上的动点, 过点 P 且不与 y 轴平行的两条直线 l_1 、 l_2 与抛物线均只有一个交点, l_1 、 l_2 分别交抛物线对称轴与点 M 、 N , 点 G 为抛物线对称轴上点 M 、 N 下方一点, 若 $GP^2 = GM \cdot GN$ 恒成立, 求点 G 的坐标.



(1)



(2)

(第 24 题)