【2023 武汉四调】

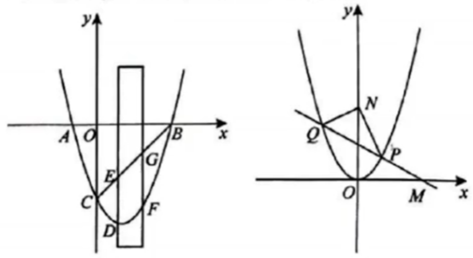
24.（本小题 12 分）

如图，抛物线 $C_1: y=x^2+bx+c$ 与 $x$ 轴交于 $A(-1,0)$，$B(3,0)$ 两点，与 $y$ 轴交于点 $C$.

（1）直接写出抛物线 $C_1$ 的解析式；

（2）如图(1)，有一宽度为 1 的直尺平行于 $y$ 轴，在点 $O$，$B$ 之间平行移动，直尺两长边被线段 $BC$ 和抛物线 $C_1$ 截得两线段 $DE$，$FG$. 设点 $D$ 的横坐标为 $t$，且 $0<t<2$，试比较线段 $DE$ 与 $FG$ 的大小；

（3）如图(2)，将抛物线 $C_1$ 平移得到顶点为原点的抛物线 $C_2$，$M$ 是 $x$ 轴正半轴上一动点，$N(0,3)$. 经过点 $M$ 的直线 $PQ$ 交抛物线 $C_2$ 于 $P$，$Q$ 两点. 当点 $M$ 运动到某一个位置时，存在唯一的一条直线 $PQ$，使 $\angle PNQ=90°$，求点 $M$ 的坐标.




(1)　　(2)

(第24题)

数学试卷　第 6 页(共 6 页)

1.【第 3 题解答】

由（1）知 $C_1: y=x^2-2x-3=(x-1)^2-4$，$\because C_2$ 由 $C_1$ 平移得到，且顶点为原点，$\therefore C_2: y=x^2$.

设 $M(m,0)$、$PQ: y=kx+b$，则有 $0=km+b \Rightarrow b=-km \Rightarrow PQ: y=kx-km$，故 $P(p,kp-km)$、$Q(q,kq-km)$

联立 $C_2$ 与 $PQ$ 的解析式，有 $\begin{cases} y=kx-km \\ y=x^2 \end{cases}$，整理得 $x^2-kx+km=0$.

$\because x_P$、$x_Q$ 是这个方程的两根，$\therefore$ 由韦达定理，有 $\begin{cases} p+q=k \\ pq=km \end{cases} \quad (*)$

（接下来的地方正常情况下应使用相似，此处因为还没学改为勾股定理）

$\because \angle PNQ=90° \ \therefore PQ^2=PN^2+QN^2$，即

$$(x_P-x_Q)^2+(y_P-y_Q)^2=(x_P-x_N)^2+(y_P-y_N)^2+(x_Q-x_N)^2+(y_Q-y_N)^2$$
$$x_P^2-2x_Px_Q+x_Q^2+y_P^2-2y_Py_Q+y_Q^2=x_P^2-2x_Px_N+x_N^2+y_P^2-2y_Py_N+y_N^2+x_Q^2-2x_Qx_N+x_N^2+y_Q^2-2y_Qy_N+y_N^2$$
$$x_Px_Q+y_Py_Q=x_Px_N+y_Py_N+x_Qx_N+y_Qy_N-x_N^2-y_N^2$$

又 $\because N(0,3)$，$\therefore$ 将 $P$、$Q$、$N$ 三点坐标代入，有

$$pq+(kp-km)(kq-km)=3(kp-km)+3(kq-km)-9$$
$$pq+k^2(p-m)(q-m)=3k(p-m)+3k(q-m)-9$$
$$pq+k^2[pq-m(p+q)+m^2]=3k(p+q-2m)-9$$

将 $(*)$ 代入，有

$$km+k^2(km-mk+m^2)=3k(k-2m)-9$$
$$(m^2-3)k^2+7mk+9=0$$

接下来分情况解这个方程：

① 当 $m^2-3=0$ 时，有 $m=\pm\sqrt{3}$，$\because m>0$，$\therefore m=\sqrt{3}$，此时原方程化为 $7\sqrt{3}k+9=0$，解得 $k=-\dfrac{3}{7}\sqrt{3}$，符合要求.

② 当 $m^2-3\neq 0$ 时，由上知 $m\neq\sqrt{3}$，此时 $A=m^2-3$、$B=7m$、$C=9$

$\because$ 直线 $PQ$ 唯一，$\therefore$ 原方程两根相同，即 $\Delta=0$，然而 $\Delta=B^2-4AC=13m^2+108>0$，故此情况不成立.

综上所述，$m=\sqrt{3}$.