

## 第 21~23 章综合能力提升卷

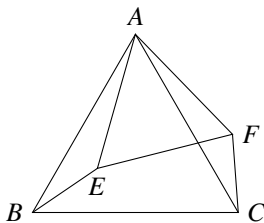
武钢实验学校 914 班数学兴趣小组命制

2023-11

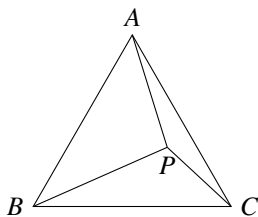
本试卷满分 120 分, 考试用时 120 分钟

一、选择题: 本大题共 10 小题, 每小题 3 分, 共 30 分, 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

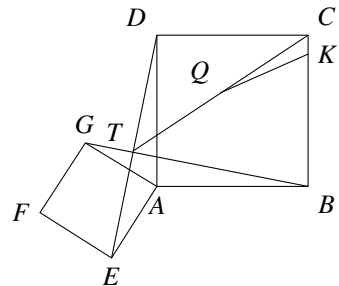
- 已知  $a$  是一个实数, 则下列关于  $x$  的函数中, ( ) 一定是二次函数.  
A.  $y = ax^2 - x + 1$  B.  $y = (x+1)(x-3) - (x+4)(x-8)$   
C.  $y = (a^2 - a + 1)x^2 + ax - a^2$  D.  $y = |a+1|x^2 - 7x + 10a$
- 一元二次方程  $-3x^2 - 3x + 5 = 0$  的两根之和为 ( ).  
A. -1 B. 1 C. 5 D. -5
- 在平面直角坐标系中, 点  $(3, 2)$  关于原点的对称点是 ( ).  
A.  $(3, -2)$  B.  $(-2, -3)$  C.  $(-3, -2)$  D.  $(-3, 2)$
- 如图,  $\triangle ABC$  与  $\triangle AEF$  均为等边三角形, 连  $BE$ 、 $CF$ , 则下列结论不一定成立的是 ( ).  
A.  $BE = CF$  B.  $\angle BAE = \angle CAF$  C.  $\angle EBC + \angle BCF = 120^\circ$  D.  $BE = EF$
- 已知抛物线  $y = ax^2 + ax - b$  ( $a < 0$ ) 上有三点  $(1, y_1)$ 、 $(-1, y_2)$ 、 $(-3, y_3)$ , 则  $y_1$ 、 $y_2$ 、 $y_3$  之间的大小关系正确的是 ( ).  
A.  $y_2 > y_3 > y_1$  B.  $y_2 > y_1 > y_3$  C.  $y_1 > y_2 > y_3$  D.  $y_1 > y_3 > y_2$
- 已知抛物线  $C_1: y = 2x^2 - 4x + 1$ , 将  $C_1$  向上平移 3 个单位长度、向左平移 2 个单位长度可得到抛物线  $C_2$ , 则抛物线  $C_2$  的解析式为 ( ).  
A.  $y = 2x^2 + 4x - 2$  B.  $y = 2x^2 - 12x + 20$  C.  $y = 2x^2 + 4x + 4$  D.  $y = 2x^2 - 12x + 14$
- 一座桥的桥洞形状为抛物线, 当水位正常时, 水面的宽度是桥洞顶点到水面距离的 2 倍, 水上涨 3 米后, 水面的宽度是正常时的一半, 则正常时水面宽 ( ) 米.  
A. 3 B. 4 C. 6 D. 8
- 如图, 在等边三角形  $ABC$  内有一点  $P$ , 连  $AP$ 、 $BP$ 、 $CP$ , 若  $AP = 4$ 、 $CP = 3$ 、 $\angle APC = 150^\circ$ , 则线段  $BP$  长度为 ( ).  
A. 5 B. 3 C.  $\sqrt{7}$  D.  $\sqrt{41}$
- 已知两不等实数  $m$ 、 $n$  满足  $m^2 - 3m - 1 = 0$ 、 $n^2 - 3n - 1 = 0$ , 则代数式  $m^3 - 2m^2 + n^2 - \frac{1}{n} + 2n$  的值为 ( ).  
A. 17 B. -7 C. -12 D. 12
- 如图, 四边形  $ABCD$  和  $AEFG$  均是正方形, 连  $ED$ 、 $BG$  交于点  $T$ , 点  $K$  是线段  $BC$  上一点, 使得  $CK = \frac{1}{8}BC = 1$ , 连线段  $TC$  并取其中点  $Q$ , 连  $QK$ , 则线段  $QK$  长度的最大值是 ( ).  
A.  $\sqrt{5} + 2\sqrt{2}$  B.  $2\sqrt{5}$  C.  $\frac{1}{2} + \sqrt{2}$  D.  $\frac{\sqrt{2}}{2} + 2\sqrt{5}$



(第 4 题)



(第 8 题)

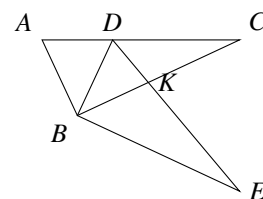


(第 10 题)

二、填空题: 本大题共 6 小题, 每小题 3 分, 共 18 分.

- 抛物线  $y = 2x^2 + 4x - 1$  的顶点是\_\_\_\_\_
- 在平面直角坐标系中, 点  $(3, 7)$  关于点  $(0, 1)$  的对称点是\_\_\_\_\_

13. 若当  $-3 \leq x \leq 2$  时, 函数  $y = x^2 + 4x + a$  的最小值与最大值之积为  $-28$ , 则  $a$  的值为\_\_\_\_\_
14. 如图, 在直角三角形  $ABC$  中,  $\angle A = 65^\circ$ 、 $\angle ABC = 90^\circ$ . 将  $\triangle ABC$  绕点  $B$  顺时针旋转至  $\triangle DBE$  处, 使点  $D$  落在  $AC$  上. 记  $DE$  与  $BC$  的交点为  $K$ , 则  $\angle CKE$  的大小为\_\_\_\_\_



(第 14 题)

15. 已知实数  $a$ 、 $b$ 、 $c$  满足  $a + b + c = 0$ 、 $0 < 3a \leq c$ , 则有下列说法:
- ①  $9a + 3b + c \geq 0$ .
  - ②  $5a + 2b + c \leq 0$ .
  - ③ 对任意的  $x \geq 2$ , 不等式  $ax^2 + bx + c \geq 4a + 2b + c$  恒成立.
  - ④ 若  $16a + 4b + c = 3$ , 则关于  $x$  的不等式  $ax^2 + (b - 1)x + c + 1 \geq 0$  的解集是  $1 \leq x \leq 4$ .

其中正确的是\_\_\_\_\_

16. Pick 定理是格点几何学中的重要定理, 在平面直角坐标系中, 格点指横、纵坐标均为整数的点. 若记  $N$  为一多边形内部 (不包括边上) 格点的个数,  $L$  为该多边形边上格点的个数,  $S$  为该多边形的面积, 则 Pick 定理为:  $S = N + \frac{1}{2}L - 1$ . 若在平面直角坐标系中有  $A(240, 0)$ 、 $B(180, 40)$ 、 $C(0, 220)$ 、 $D(60, 200)$ , 则四边形  $ABCD$  内部 (不包括边上) 的格点数为\_\_\_\_\_

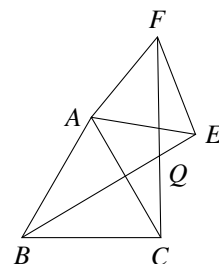
三、解答题: 本大题共 8 小题, 共 72 分, 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 分别求下列抛物线的开口方向、顶点坐标以及与  $x$  轴的交点坐标:

- (1)  $y = x^2 - 8x + 12$
- (2)  $y = -2x^2 + 6x + 8$

18. 如图,  $\triangle ABC$  和  $\triangle AEF$  均为等边三角形, 连  $BE$ 、 $CF$  交于点  $Q$ .

- (1) 求证:  $BE = CF$ .
- (2) 求  $\angle BQF$ .



(第 18 题)

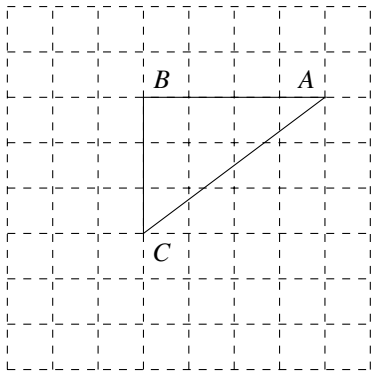
19. 在一个小区内, 有一人患上了流感, 经过两轮传染后, 总共有 64 人患上了流感.
- (1) 平均在每轮传染中, 一个流感患者可以将流感传染给多少人?
  - (2) 第二年流感再次来袭时, 该小区采取了恰当的应对措施, 每一个流感患者在传播完一轮后都被及时发现并被医治健康, 并且流感在第三轮传染开始前被彻底消灭, 若一开始只有一人患上流感, 流感被消灭后累计 31 人在这一年得过流感, 则这一年平均一个流感患者只将流感传染了几个人?

20. 已知关于  $x$  的一元二次方程  $x^2 + 4x + m + 1 = 0$  有两个实数根  $x_1$ 、 $x_2$ .

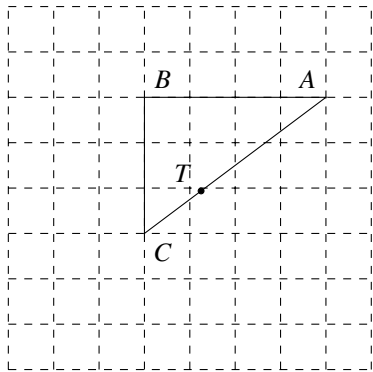
- (1) 求实数  $m$  的取值范围.
- (2) 若  $x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 = 0$ , 求实数  $m$  的值.

21. 如图, 在  $8 \times 8$  的网格中, 点  $A$ 、 $B$ 、 $C$  均是格点, 且以这三点围成的三角形是以  $B$  为直角顶点的直角三角形. 仅用无刻度直尺完成下列作图任务 (保留作图痕迹):

- (1) 在图 1 中, 作  $\angle BCA$  的角平分线.
- (2) 在图 2 中, 点  $T$  是线段  $AC$  上的任意一点, 在线段  $AB$  上作点  $E$ , 使得  $EA = TA$ .
- (3) 在 (2) 的条件下, 记  $\angle BAC = \alpha$ , 将点  $T$  绕点  $A$  逆时针旋转  $\alpha$  至点  $F$ , 求作点  $F$ .



(1)

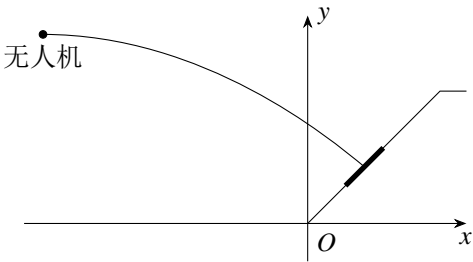


(2)

(第 21 题)

22. 在一次军事演习中, 我军一架无人机正在以  $100\text{m/s}$  的飞行速度与  $500\text{m}$  的飞行高度对一片山区执行低空轰炸任务, 已知该飞机以水平轰炸的方式投下航空炸弹, 且炸弹的下落距离  $h$ 、水平飞行距离  $x$  和飞行时间  $t$  之间的关系如下表所示 (不计空气阻力):

飞行时间 $t$ (s)	0	1	2	3
水平飞行距离 $x$ (m)	0	100	200	300
下落距离 $h$ (m)	0	5	20	45



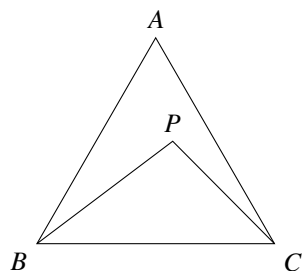
- 其中,  $x$  与  $t$  和  $h$  与  $t$  之间存在函数关系, 且这些函数都是我们学过的函数.
- (1) 直接写出  $x$  与  $t$  和  $h$  与  $t$  之间的函数关系式 (不必写出  $t$  的取值范围).
  - (2) 已知无人机攻击的目标在一座坡度为  $45^\circ$  的山处, 现以山脚为原点, 建立如图所示的坐标系.
    - ① 在一次投弹任务中, 已知航弹释放后正好在无人机从山脚正上方掠过时落地爆炸, 求投弹点与山脚间的水平距离.
    - ② 已知在山坡上水平距离山脚  $100\text{m}$  至  $200\text{m}$  的地方 (包括这两点, 图中已经加粗) 有敌军的迫击炮阵地, 若无人机需要攻击那里, 求无人机与山脚之间水平距离的取值范围.

23. (1) 已知等边三角形  $ABC$  内 (不包括三边) 有一点  $P$ .

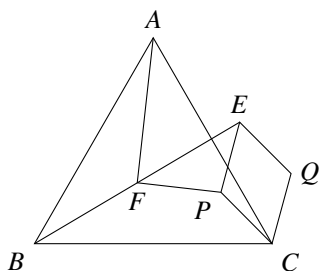
① 如图 1, 连  $PB$ 、 $PC$ , 求证:  $PB + PC < 2BC$ .

② 如图 2, 连  $PC$ , 以  $PC$  为边, 向外作菱形  $CPEQ$ , 使  $\angle PCQ = 60^\circ$ , 连  $BE$  并取其中点  $F$ , 连  $AF$ 、 $PF$ . 试求出线段  $AF$  与线段  $PF$  之间的关系.

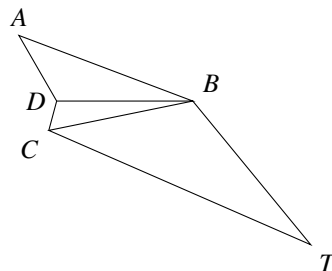
(2) 如图 3, 在凹四边形  $ABCD$  中, 连  $BD$ , 有  $\angle ADB = 120^\circ$ 、 $\angle CDB = 105^\circ$ , 将线段  $AB$  绕点  $B$  顺时针旋转  $150^\circ$  得到线段  $TB$ , 连  $CT$ , 若  $AD + BD = 7$ 、 $CD = 1$ , 直接写出线段  $CT$  长度的最小值.



(1)



(2)



(3)

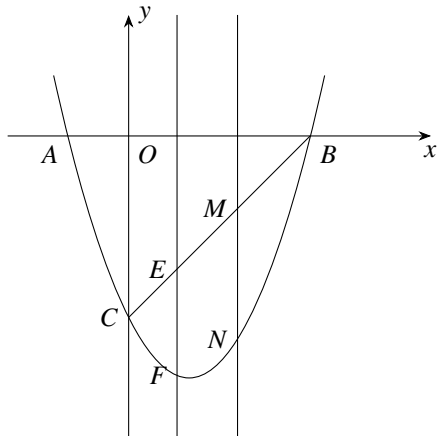
(第 23 题)

24. 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 抛物线  $y = x^2 - 2x - 3$  的顶点是  $D$ , 交  $x$  轴于点  $A$ 、点  $B$  (点  $A$  在点  $B$  左侧), 交  $y$  轴于点  $C$ .

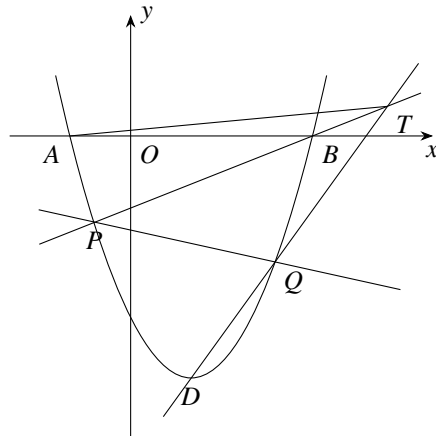
(1) 直接写出点  $A$ 、点  $B$ 、点  $C$ 、点  $D$  的坐标.

(2) 如图 1, 连  $BC$ , 设直线  $l_1: x = t$  交线段  $BC$  (含两端) 于点  $E$ , 交抛物线于点  $F$ , 直线  $l_2: x = t + 1$  交线段  $BC$  (含两端) 于点  $M$ , 交抛物线于点  $N$ , 试根据  $t$  的取值讨论线段  $EF$  与线段  $MN$  的大小关系.

(3) 如图 2, 过点  $(2, -2)$  的直线交抛物线于点  $P$ 、 $Q$ , 作直线  $PB$  与直线  $DQ$  交于点  $T$ , 连  $AT$ , 求线段  $AT$  长度的最小值.



(1)



(2)

(第 24 题)