Содержание

1. Введение

Математическая модель – математическое представление, отражающее какой-либо процесс, предмет или иной элемент реальности. Она предназначена для того, чтобы прогнозировать поведение реального объекта, основываясь на различных наборах параметров. Изменение этих параметров приводит к изменению поведения модели, а, значит, и объекта, который модель отражает.

Использование моделей незаменимо при проектировании любого рода продуктов. В данной работе речь идёт о нагревательных приборах – вещах, используемых как в быту каждого человека, будь то чайник или кипятильник для воды, так и на производстве, при, например, выплавке металлов или отоплении тепловозов. Каждый нагревательный прибор обладает собственным предназначением, и характеристика, важная для одного прибора, не имеет значения или вовсе не желательна для другого. Данная модель позволит изучить, как те или иные характеристики влияют на нагревание прибора на примере небольшого кипятильника.

Нагревательные приборы могу как обладать терморегуляторами, так и не обладать. В данной работе речь пойдёт об обоих типах: будет составлена и проанализирована математическая модель, выявлено влияние тех или иных параметров на поведение модели.

2. Построение математической модели

2.1. Нагревательный прибор без терморегулятора

Построим математическую модель нагревательного прибора. Прибор нагревается с помощью некого электрического элемента и не содержит в себе элементов, искусственно ограничивающих температуру нагревания. Предполагаем, что прибор состоит из одного материала, и температура окружающей его среды постоянна.

Главной характеристикой нагревательного прибора является, разумеется, его температура. Поскольку со временем после включения прибора она изменяется, будем искать зависимость температуры T $[K]$ от времени t [с]: $T(t)$.

Модель использует следующие параметры:
- m – масса прибора, кг;
- c – удельная теплоёмкость материала прибора, $\frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot K}$;
- S – площадь поверхности прибора, м^2;
- P – мощность тока, Вт;
- k – конвекционный коэффициент, $\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}}$;
- σ – постоянная Стефана-Больцмана, $\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}^4}$;
- ε – коэффициент серости;

Перечислим теперь процессы, которые действуют в нашей модели.
1) Нагревание электрическим элементом. Этот процесс приводит к увеличению температуры прибора.
2) Конвекционный теплообмен. Этот процесс приводит к уменьшению температуры прибора.
3) Радиационный теплообмен. Этот процесс приводит к уменьшению температуры прибора.

2.1.1. Формализация задачи

Рассмотрим уравнение теплового баланса, отражающее закон сохранения энергии при теплообмене:

$$\left|Q_{\text{получ}}\right| = \left|Q_{\text{отд}}\right|. \tag{1}$$

Количество теплоты Q [Дж] – энергия, которую объект получает или теряет при теплообмене.

Теплосодержание самого нагревателя в промежутке времени Δt можно определить следующим образом:

$$\Delta Q = c \cdot m \cdot \Delta T, \tag{2}$$

где $\Delta Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$, и каждое количество теплоты Q_i соответствует одному из процессов, обозначенных выше. Рассмотрим каждый из них.

Источником энергии является электрический нагревательный элемент. Он преобразует работу тока во внутреннюю энергию:

$$Q_1 = P \cdot \Delta t, \tag{3}$$

где P – мощность тока [Вт].

Также на энергию влияют конвекционные потоки. Их действие отразим через зависимость от площади поверхности прибора S [м^2] и разницы между температурой прибора T [К] и температурой среды T_0, с точностью до коэффициента k:

$$Q_2 = k \cdot S \cdot (T - T_0) \cdot \Delta t. \tag{4}$$

Наконец, воспользуемся законом Стефана-Больцмана: любое тело, чья температура превышает $0°K$, за счёт радиационного излучения уменьшает свою внутреннюю энергию:

$$Q_3 = \varepsilon \cdot S \cdot \sigma(T^4 - T_0^4) \cdot \Delta t, \tag{5}$$

где ε – коэффициент серости, σ – постоянная Стефана-Больцмана.

Примем, что $\sigma \approx 5.67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}^4}$.

2.1.2. Составление дифференциального уравнения

Принимая во внимание обозначенные выше процессы, уравнение теплового баланса имеет следующий вид:

$$\begin{gathered} cm \cdot \Delta T = P \cdot \Delta t - kS \cdot (T - T_0) \cdot \Delta t - \varepsilon S \sigma \cdot (T^4 - T_0^4) \cdot \Delta t, \\ cm \cdot \Delta T = \Delta t(P - kS \cdot (T - T_0) - \varepsilon S \sigma \cdot (T^4 - T_0^4)). \end{gathered} \tag{6}$$

Устремив Δt к нулю, совершаем предельный переход и получаем обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка, описывающее температуру нагревателя в зависимости от времени:

$$\frac{\delta T}{\delta t} = \frac{P - kS \cdot (T - T_0) - \varepsilon S \sigma \cdot (T^4 - T_0^4)}{cm}. \qquad (7)$$

Для получения единственного решения добавим начальное условие:

$$\begin{cases} \frac{\delta T}{\delta t} = \frac{P - kS \cdot (T - T_0) - \varepsilon S \sigma \cdot (T^4 - T_0^4)}{cm} \\ T(0) = T_0 \end{cases}. \qquad (8)$$

Обозначим правую часть как $\frac{\delta T}{\delta t} = R(T, T_0, P, S, c, m, k, \varepsilon, \sigma)$.

2.2. Нагревательный прибор с терморегулятором

Нагревательный прибор с терморегулятором во многом аналогичен прибору, его не имеющему. Возьмём уже построенную математическую модель и немного её изменим.

На прибор с терморегулятором все процессы, изложенные выше, будут действовать аналогично. Все, кроме нагревания с помощью электрического элемента – ведь именно в нём расположен переключатель, снижающий мощность до нуля, как только температура достигает опасных значений.

Введём вспомогательную функцию $B(T, T_{\max}, T_{\min})$:

$$B(T, T_{\max}) = \begin{cases} 0, \ T \geq T_{\max} \\ 1, \ T \leq T_{\min} \end{cases}, \qquad (9)$$

где $T_{\max}$ – максимальное значение температуры, при достижении которого прибором нагревание прекращается, а $T_{\min}$ – минимальное, при котором нагревание возобновляется.

Соответствующим образом изменим математическую модель:

$$\begin{cases} \frac{\delta T}{\delta t} = \frac{P \cdot B(T, T_{\max}, T_{\min}) - kS \cdot (T - T_0) - \varepsilon S \sigma \cdot (T^4 - T_0^4)}{cm} \\ T(0) = T_0 \end{cases}. \qquad (10)$$

3. Анализ математической модели

Проанализируем полученную модель. Температура нашего прибора в зависимости от времени задана обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка. У всякого такого ОДУ существует единственное решение уравнения с начальным условием – в нашем случае, $T(0) = T_0$.

В начальный момент времени $t = 0$, согласно начальному условию, $T(0) = T_0$. Тогда ОДУ (7) принимает вид:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{P}{cm} > 0. \tag{11}$$

По мере увеличения времени, значение по модулю отрицательных слагаемых числителя $R(T, T_0, P, S, k, \varepsilon, \sigma)$ будет расти, пока не будет достигнут тепловой баланс. Температура в этот момент достигнет своего максимального значения $T_{\max}$.

Найдём точки покоя дифференциального уравнения:

$$\begin{gathered} \frac{\partial T}{\partial t} = 0, \\ \frac{P - kS \cdot (T - T_0) - \varepsilon S \sigma \cdot \left(T^4 - T_0^4\right)}{cm} = 0. \end{gathered} \tag{12}$$

Всего их будет четыре: положительная, отрицательная и комплексно сопряжённая пара. Поскольку значение температуры может быть только положительным и вещественным, трое корней считаем посторонними. Оставшийся принимаем за максимальное значение температуры $T_{\max}$.

4. Проведение эксперимента

Проведём серию вычислительных экспериментов: сравним, как будет вести себя модель при различных наборах параметров. Рассматривать будем обе модели, как с терморегулятором, так и без.

Напишем программу на языке `Python`. Полный код приведён в разделе приложений к отчёту.

Чтобы численно найти решение уравнения, воспользуемся методом Рунге-Кутты четвёртого порядка. Для визуализации результатов воспользуемся библиотекой `matplotlib`.

4.1. Модель без терморегулятора

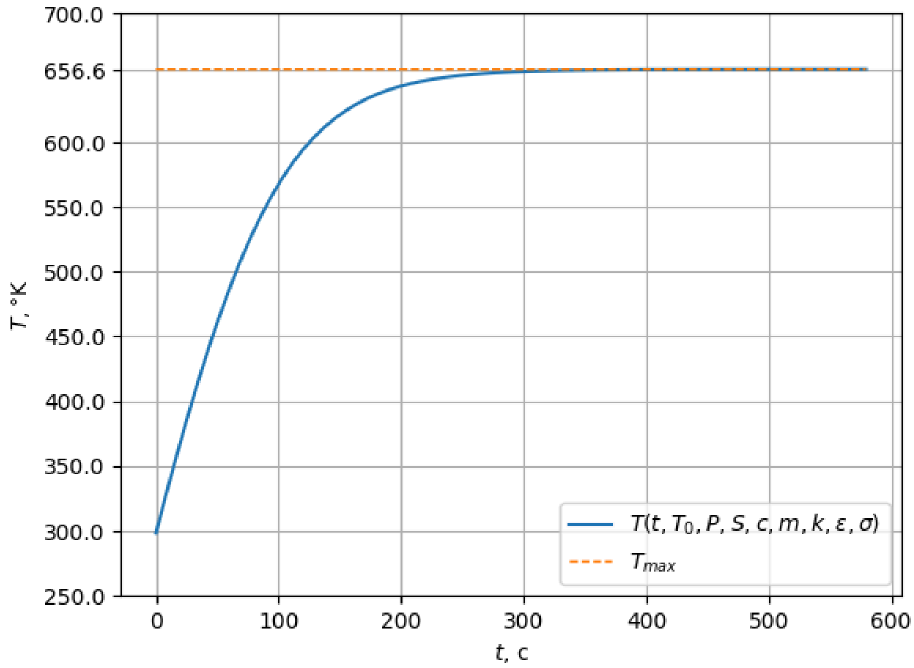
Для иллюстрации работы модели, рассмотрим пример - небольшой кипятильник для нагревания воды в кружке. Примем следующие значения параметров:

- $T_0 = 298°K$ – температура окружающей среды, равная $25°C$;
- $P = 500$ Вт;
- $S = 0.04$ м^2;
- $c = 904\frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot °K}$ – удельная теплоёмкость алюминия;
- $m = 0.15$ кг;
- $\varepsilon = 1$;
- $k = 6.706\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}}$.

σ примем равным значению, установленному в предыдущем разделе.

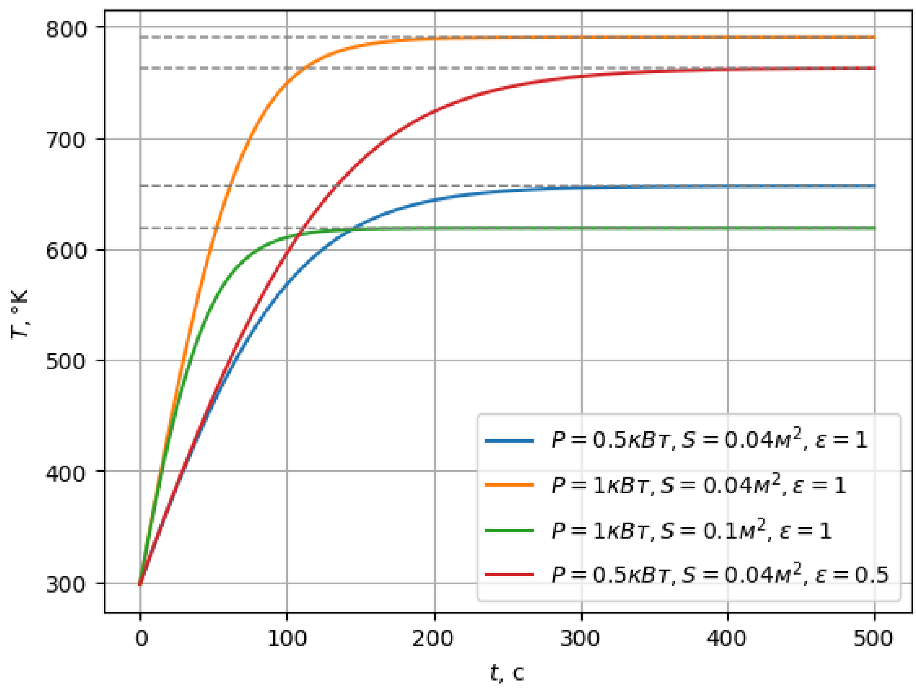
Для оценки правильности нашей модели найдём $T_{\max}$, решив уравнение (12) аналитически, используя параметры выше. Получим четыре корня: положительный, отрицательный и комплексно-сопряжённую пару. Очевидно, что $T_{\max}$ является положительный корень, приблизительно равный 656.62.

Получим следующий рисунок:

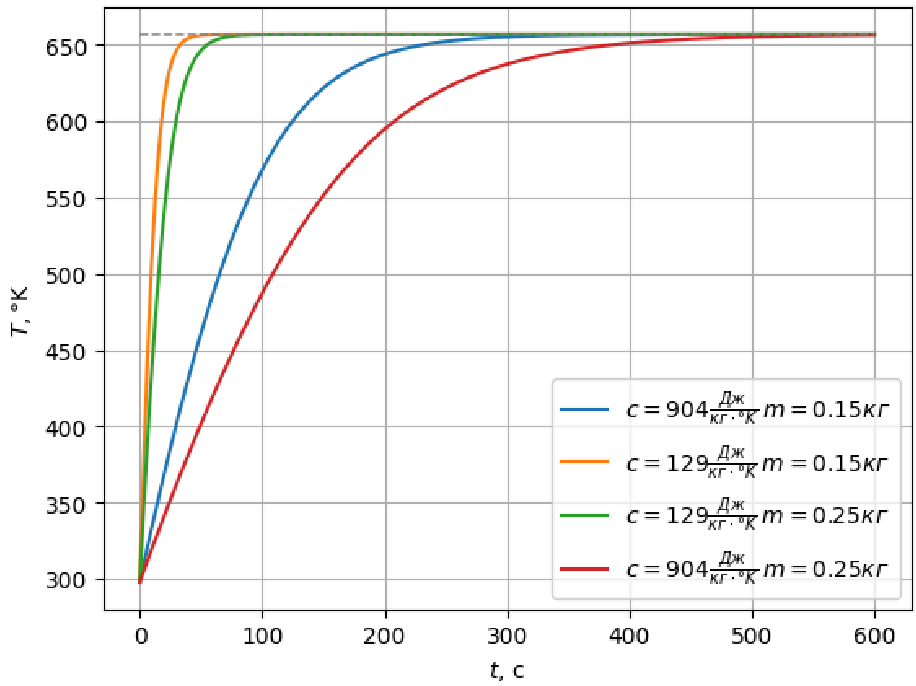


По нему можно определить, что максимальная принимаемая прибором температура равна, действительно, $656.62°K$, или $383.65°C$.

Теперь изменим некоторые из параметров. Вновь обратившись к уравнению (12), обратим внимание, что на максимальную температуру нагревания не влияют ни удельная теплоёмкость c, ни масса m. Посмотрим, как будет меняться $T_{\max}$ при изменении мощности P, площади поверхности S и коэффициента серости ε:



И, наконец, изучим влияние удельной теплоёмкости и массы прибора. Значения теплоёмкости будем рассматривать для двух материалов – алюминия ($904\frac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot{}^\circ K}$) и, например, золота ($129\frac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot{}^\circ K}$). Как можно заметить, максимальная температура нагревания действительно не меняется, зато меняется скорость, с которой прибор этой температуры достигает.

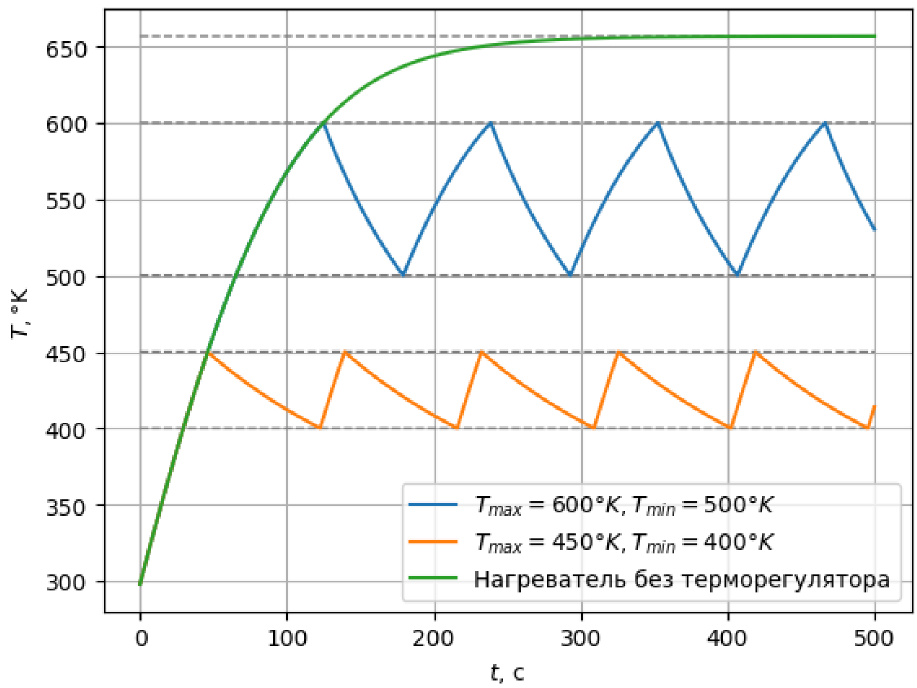


4.2. Модель с терморегулятором

Воспользуемся теми же параметрами, что и для модели без терморегулятора:

- $T_0 = 298°K$;
- $P = 500$ Вт;
- $S = 0.04$ м^2;
- $c = 904\frac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot{}^\circ K}$;
- $m = 0.15$ кг;
- $\varepsilon = 1$;
- $k = 6.706\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2\cdot\text{К}}$.

Образом, аналогичным предыдущей модели, построим график решения дифференциального уравнения сначала для прибора без терморегулятора, а потом – с ним, рассматривая различные значения максимальной принимаемой им температуры.



Обратим внимание, какой вид приняла функция. Он объясняется самим механизмом работы терморегулятора: как только значение температуры достигает заранее установленного значения $T_{\max}$, используемое в качестве терморегулятора реле размыкается, и мощность, подаваемая прибору, становится равной нулю. До тех пор, пока прибором не будет достигнута некая пороговая температура $T_{\min}$, он будет охлаждаться. Затем процесс повторяется.

5. Заключение

В данной работе было произведено качественное исследование математической модели, отражающей процесс нагревания простого нагревательного прибора, как содержащего терморегулятор, так и нет. Был определён главный параметр модели – температура – а затем сама модель была построена с учётом всех основных процессов, влияющих на изменение температуры в изучаемом приборе.

Модель представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка. Были найдены его точки покоя, одна из которых отражает важную для нас величину, а именно – максимальную температуру, до которой может нагреваться прибор. Численное решение подтвердило правильность проведённого анализа модели. Также было проведено и визуализировано несколько экспериментов, наглядно показывающих, как изменение тех или иных параметров влияет на нашу модель.

6. Приложение

```
import matplotlib.pyplot as plt

def exit_condition(experiment, x):
    match experiment:
        case 1:
            return True
        case 2:
            return x > 500
        case 3:
            return x > 600
        case 4:
            return x > 500


def func(t, T, T0, P, S, c, m, k, epsilon, sigma, T_max, T_min):
    Q1 = P * relais(T, T_max, T_min)
    Q2 = k * S * (T - T0)
    Q3 = epsilon * S * sigma * (T**4 - T0**4)
    return (Q1 - Q2 - Q3) / (c * m)


R = 1
def relais(T, T_max, T_min):
    if T_max == 0:
        return 1

    global R
    if T > T_max:
        R = 0
    elif T < T_min:
        R = 1
    return R


def rungeKutta(x0, y0, h, param_list, r_param_list, experiment):
    y = y0
    x_list = [x0]
    y_list = [y0]

    while 1:
        y_prev = y
        k1 = h * func(x0, y, *param_list, *r_param_list)
        k2 = h * func(x0 + 0.5 * h, y + 0.5 * k1, *param_list,
```

```
*r_param_list)
        k3 = h * func(x0 + 0.5 * h, y + 0.5 * k2, *param_list,
*r_param_list)
        k4 = h * func(x0 + h, y + k3, *param_list,
*r_param_list)

        y = y + (1/6) * (k1 + 2 * k2 + 2 * k3 + k4)
        x0 = x0 + h

        x_list.append(x0)
        y_list.append(y)

        if (abs(y - y_prev) < 1e-5 or experiment == 4) and
exit_condition(experiment, x0):
            break
    return x_list, y_list


if __name__ == '__main__':
    # МОДЕЛЬ БЕЗ ТЕРМОРЕГУЛЯТОРА
    Tmax = 0
    Tmin = 0

    # ИССЛЕДОВАНИЕ 1
    experiment = 1

    T0 = 298 # 25 градусов Цельсия
    P = 500 # 0.5 кВ
    S = 0.04
    c = 904 # алюминий
    m = 0.15
    epsilon = 1
    sigma = 5.67 * 10**(-8)
    k = 6.706

    x0 = 0
    y = T0
    h = 0.1

    rk = rungeKutta(x0, y, h, [T0, P, S, c, m, k, epsilon,
sigma], [Tmax, Tmin], experiment)
    x_list = rk[0]
    y_list = rk[1]
    T_max = y_list[len(y_list) - 1]
```

```
    plt.plot(x_list, y_list, label=r'$T(t, T_0, P, S, c, m, k,
\epsilon, \sigma)$')
    plt.plot(x_list, [T_max for i in range(len(y_list))], '--',
linewidth=1, label=r'$T_{max}$')
    plt.xlabel(r'$t$, c')
    plt.ylabel(r'$T, \degree$K')
    old_ticks = list(plt.yticks()[0])
    old_ticks.remove(650)
    plt.yticks(old_ticks + [T_max])
    plt.legend(loc='lower right')
    plt.grid()
    plt.savefig('1.png', bbox_inches='tight')
    plt.show()
    plt.clf()


    # ИССЛЕДОВАНИЕ 2
    experiment = 2

    T0 = 298 # 25 градусов Цельсия
    P = 500 # 0.5 кВ
    S = 0.04
    c = 904 # алюминий
    m = 0.15
    epsilon = 1
    sigma = 5.67 * 10**(-8)
    k = 6.706

    y = T0

    rk = rungeKutta(x0, y, h, [T0, P, S, c, m, k, epsilon,
sigma], [Tmax, Tmin], experiment)
    x_list1 = rk[0][:(int)(500/h)]
    y_list1 = rk[1][:(int)(500/h)]
    T_max1 = y_list1[len(y_list1) - 1]

    P = 1000

    rk = rungeKutta(x0, y, h, [T0, P, S, c, m, k, epsilon,
sigma], [Tmax, Tmin], experiment)
    x_list2 = rk[0]
    y_list2 = rk[1]
    T_max2 = y_list2[len(y_list2) - 1]
```

```
    S = 0.1

    rk = rungeKutta(x0, y, h, [T0, P, S, c, m, k, epsilon,
sigma], [Tmax, Tmin], experiment)
    x_list3 = rk[0]
    y_list3 = rk[1]
    T_max3 = y_list3[len(y_list3) - 1]

    epsilon = 0.5
    P = 500
    S = 0.04

    rk = rungeKutta(x0, y, h, [T0, P, S, c, m, k, epsilon,
sigma], [Tmax, Tmin], experiment)
    x_list4 = rk[0][:(int)(500/h)]
    y_list4 = rk[1][:(int)(500/h)]
    T_max4 = y_list4[len(y_list4) - 1]


    plt.xlabel(r'$t$, c')
    plt.ylabel(r'$T, \degree$K')

    plt.plot(x_list1, y_list1, label=r'$P = 0.5 кВт, S = 0.04
м^2, \epsilon = 1$')
    plt.plot(x_list2, y_list2, label=r'$P = 1 кВт, S = 0.04 м^2,
\epsilon = 1$')
    plt.plot(x_list3, y_list3, label=r'$P = 1 кВт, S = 0.1 м^2,
\epsilon = 1$')
    plt.plot(x_list4, y_list4, label=r'$P = 0.5 кВт, S = 0.04
м^2, \epsilon = 0.5$')

    plt.plot(x_list1, [T_max1 for i in range(len(y_list1))],
'--', linewidth=1, color='grey')
    plt.plot(x_list2, [T_max2 for i in range(len(y_list2))],
'--', linewidth=1, color='grey')
    plt.plot(x_list3, [T_max3 for i in range(len(y_list3))],
'--', linewidth=1, color='grey')
    plt.plot(x_list4, [T_max4 for i in range(len(y_list4))],
'--', linewidth=1, color='grey')

    plt.legend(loc='lower right')
    plt.grid()
    plt.savefig('2.png', bbox_inches='tight')
```

```
    plt.show()
    plt.clf()


    # ИССЛЕДОВАНИЕ 3
    experiment = 3

    T0 = 298 # 25 градусов Цельсия
    P = 500 # 0.5 кВ
    S = 0.04
    c = 904 # алюминий
    m = 0.15
    epsilon = 1
    sigma = 5.67 * 10**(-8)
    k = 6.706

    y = T0

    rk = rungeKutta(x0, y, h, [T0, P, S, c, m, k, epsilon,
sigma], [Tmax, Tmin], experiment)
    x_list1 = rk[0][:(int)(600 / h)]
    y_list1 = rk[1][:(int)(600 / h)]
    T_max1 = y_list1[len(y_list1) - 1]

    c = 129 # золото

    rk = rungeKutta(x0, y, h, [T0, P, S, c, m, k, epsilon,
sigma], [Tmax, Tmin], experiment)
    x_list2 = rk[0]
    y_list2 = rk[1]

    m = 0.25

    rk = rungeKutta(x0, y, h, [T0, P, S, c, m, k, epsilon,
sigma], [Tmax, Tmin], experiment)
    x_list3 = rk[0]
    y_list3 = rk[1]

    c = 904

    rk = rungeKutta(x0, y, h, [T0, P, S, c, m, k, epsilon,
sigma], [Tmax, Tmin], experiment)
    x_list4 = rk[0][:(int)(600/h)]
    y_list4 = rk[1][:(int)(600/h)]
```

```
    plt.xlabel(r'$t$, c')
    plt.ylabel(r'$T, \degree$K')

    plt.plot(x_list1, y_list1, label=r'$c = 904 \frac{Дж}{кг
\cdot \degree K}\, m = 0.15 кг$')
    plt.plot(x_list2, y_list2, label=r'$c = 129 \frac{Дж}{кг
\cdot \degree K}\, m = 0.15 кг$')
    plt.plot(x_list3, y_list3, label=r'$c = 129 \frac{Дж}{кг
\cdot \degree K}\, m = 0.25 кг$')
    plt.plot(x_list4, y_list4, label=r'$c = 904 \frac{Дж}{кг
\cdot \degree K}\, m = 0.25 кг$')

    plt.plot(x_list1, [T_max1 for i in range(len(y_list1))],
'--', linewidth=1, color='grey')

    plt.legend(loc='lower right')
    plt.grid()
    plt.savefig('3.png', bbox_inches='tight')
    plt.show()
    plt.clf()


    # МОДЕЛЬ С ТЕРМОРЕГУЛЯТОРОМ
    experiment = 4

    T0 = 298 # 25 градусов Цельсия
    P = 500 # 0.5 кВ
    S = 0.04
    c = 904 # алюминий
    m = 0.15
    epsilon = 1
    sigma = 5.67 * 10**(-8)
    k = 6.706

    y = T0

    rk = rungeKutta(x0, y, h, [T0, P, S, c, m, k, epsilon,
sigma], [Tmax, Tmin], experiment)
    x_list1 = rk[0][:(int)(600 / h)]
    y_list1 = rk[1][:(int)(600 / h)]
    T_max1 = y_list1[len(y_list1) - 1]

    R = 1
```

```
    Tmax = 600
    Tmin = 500

    rk = rungeKutta(x0, y, h, [T0, P, S, c, m, k, epsilon,
sigma], [Tmax, Tmin], experiment)
    x_list2 = rk[0]
    y_list2 = rk[1]
    T_max2 = Tmax
    T_min2 = Tmin

    R = 1
    Tmax = 450
    Tmin = 400

    rk = rungeKutta(x0, y, h, [T0, P, S, c, m, k, epsilon,
sigma], [Tmax, Tmin], experiment)
    x_list3 = rk[0]
    y_list3 = rk[1]
    T_max3 = Tmax
    T_min3 = Tmin

    plt.xlabel(r'$t$, c')
    plt.ylabel(r'$T, \degree$K')

    plt.plot(x_list2, [T_max2 for i in range(len(y_list2))],
'--', linewidth=1, color='grey')
    plt.plot(x_list2, [T_min2 for i in range(len(y_list2))],
'--', linewidth=1, color='grey')

    plt.plot(x_list3, [T_max3 for i in range(len(y_list3))],
'--', linewidth=1, color='grey')
    plt.plot(x_list3, [T_min3 for i in range(len(y_list3))],
'--', linewidth=1, color='grey')

    plt.plot(x_list1, [T_max1 for i in range(len(y_list1))],
'--', linewidth=1, color='grey')

    plt.plot(x_list2, y_list2, label=r'$T_{max} = 600 \degree K,
T_{min} = 500 \degree K$')
    plt.plot(x_list3, y_list3, label=r'$T_{max} = 450 \degree K,
T_{min} = 400 \degree K$')
    plt.plot(x_list1, y_list1, label='Нагреватель без
терморегулятора')
```

```
plt.legend(loc='lower right')
plt.grid()
plt.savefig('4.png', bbox_inches='tight')
plt.show()
plt.clf()
```