

# 无人机模型和MPC控制算法

## 1.无人机建模

### 1.1 非线性模型

设状态向量

$$\mathbf{x} = [x \ y \ z \ \dot{x} \ \dot{y} \ \dot{z} \ \phi \ \theta \ \psi \ \dot{\phi} \ \dot{\theta} \ \dot{\psi}]^T$$

设输入向量

$$\mathbf{u} = [T \ \tau_x \ \tau_y \ \tau_z]^T$$

则无人机模型可以表述为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$$

即：

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \\ \ddot{\phi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ \frac{1}{m}T(\cos\phi\sin\theta\cos\psi + \sin\psi\sin\phi) \\ \frac{1}{m}T(\cos\phi\sin\theta\sin\psi - \cos\psi\sin\phi) \\ \frac{1}{m}T\cos\theta\cos\phi - g \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \\ \frac{1}{J_{xx}}[\tau_x - \omega_y\omega_z(J_{yy} - J_{zz})] \\ \frac{1}{J_{yy}}[\tau_y - \omega_z\omega_x(J_{zz} - J_{xx})] \\ \frac{1}{J_{zz}}[\tau_z - \omega_x\omega_y(J_{xx} - J_{yy})] \end{bmatrix} \quad (1)$$

### 1.2 线性化

为了得到无人机模型的状态空间方程

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{Cx} + \mathbf{Du} \end{aligned}$$

需要对无人机模型进行线性化，一般采用雅可比线性化

#### 1.2.1 雅可比线性化流程

非线性方程可以表示为以下的一般形式：

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y) \quad (2)$$

### Step1: 寻找平衡点

平衡点 (equilibrium point)  $(a,b)$ , 满足

$$f(a, b) = 0 \quad (3)$$

### Step2: 计算在平衡点处的一阶偏导数

根据多元函数泰勒展开公式, (2)式 在平衡点  $(a,b)$ 处的一阶泰勒展开式为:

$$f(x, y) = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \cdot (x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \cdot (y - b) + o(\Delta x, \Delta y)$$

忽略无穷小项, 得到

$$f(x, y) = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \cdot (x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \cdot (y - b) \quad (4)$$

代入(3), 得

$$f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \cdot (x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \cdot (y - b) \quad (5)$$

得到两个一阶偏导数, 分别记为

$$\begin{aligned} A &= \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \\ B &= \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \end{aligned} \quad (6)$$

### Step3: 构成线性模型

记

$$\tilde{x} = x - a, \quad \tilde{y} = y - b$$

则(2)式被线性化为

$$\frac{dx}{dt} = A\tilde{x} + B\tilde{y}$$

### 1.2.2 无人机模型的雅可比线性化

下面根据以上理论, 对(1)式描述的无人机模型进行雅可比线性化

也就是由非线性方程

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \mathbf{u})$$

得到线性方程

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\mathbf{x}}} &= A \cdot \tilde{\mathbf{x}} + B \cdot \tilde{\mathbf{u}} \\ \text{其中: } \begin{cases} \dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \dot{\mathbf{x}} \\ A = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \\ B = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} \\ \tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_e \\ \tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_e \end{cases} \end{aligned}$$

### Step1: 寻找平衡点

令(1)式右端等于0

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ \frac{1}{m}T(\cos\phi\sin\theta\cos\psi + \sin\psi\sin\phi) \\ \frac{1}{m}T(\cos\phi\sin\theta\sin\psi - \cos\psi\sin\phi) \\ \frac{1}{m}T\cos\theta\cos\phi - g \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \\ \frac{1}{J_{xx}}[\tau_x - \omega_y\omega_z(J_{yy} - J_{zz})] \\ \frac{1}{J_{xx}}[\tau_y - \omega_z\omega_x(J_{zz} - J_{xx})] \\ \frac{1}{J_{xx}}[\tau_z - \omega_x\omega_y(J_{xx} - J_{yy})] \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (7)$$

可得

$$\begin{cases} v_x = 0 \\ v_y = 0 \\ v_z = 0 \\ \frac{1}{m}T(\cos\phi\sin\theta\cos\psi + \sin\psi\sin\phi) = 0 \\ \frac{1}{m}T(\cos\phi\sin\theta\sin\psi - \cos\psi\sin\phi) = 0 \\ \frac{1}{m}T\cos\theta\cos\phi = g \\ \omega_x = 0 \\ \omega_y = 0 \\ \omega_z = 0 \\ \tau_x = 0 \\ \tau_y = 0 \\ \tau_z = 0 \end{cases} \quad (8)$$

考虑在悬停点处，有

$$\begin{cases} T = mg \\ \phi = 0 \\ \theta = 0 \\ \psi = 0 \end{cases} \quad (9)$$

把(9)代入(8)，发现恰好满足(8)中的12个方程。说明悬停点正好也是平衡点。

又因为，大部分情况下，无人机状态是悬停状态或者接近悬停状态。所以使用悬停点这个平衡点来进行后面的线性化。

悬停点这个平衡点表示为

$$\mathbf{x}_e = \begin{bmatrix} x_e \\ y_e \\ z_e \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_e = \begin{bmatrix} mg \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

### Step2: 计算平衡点处一阶偏导数

## f 对x求偏导

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{y}}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{z}}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ddot{x}}{\partial \mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m}T(-\sin\phi\sin\theta\cos\psi + \sin\psi\cos\phi) \\ \frac{1}{m}T(\cos\phi\cos\theta\cos\psi + \sin\psi\sin\phi) \\ \frac{1}{m}T(-\cos\phi\sin\theta\sin\psi + \cos\psi\sin\phi) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^{\top}, \quad \frac{\partial \ddot{x}}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_e} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ g \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^{\top} \\ \frac{\partial \ddot{y}}{\partial \mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m}T(-\sin\phi\sin\theta\sin\psi - \cos\psi\cos\phi) \\ \frac{1}{m}T(\cos\phi\cos\theta\sin\psi - \cos\psi\sin\phi) \\ \frac{1}{m}T(\cos\phi\sin\theta\cos\psi + \sin\psi\sin\phi) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^{\top}, \quad \frac{\partial \ddot{y}}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_e} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -g \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^{\top} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \ddot{\mathbf{z}}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{m}T\cos\theta\sin\phi \\ -\frac{1}{m}T\sin\theta\cos\phi \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^{\top}, \quad \frac{\partial \ddot{\mathbf{z}}}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_e} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^{\top}$$

$$\frac{\partial \dot{\phi}}{\partial \mathbf{x}} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0]$$

$$\frac{\partial \dot{\theta}}{\partial \mathbf{x}} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0]$$

$$\frac{\partial \dot{\psi}}{\partial \mathbf{x}} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]$$

$$\frac{\partial \ddot{\phi}}{\partial \mathbf{x}} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

$$\frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial \mathbf{x}} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

$$\frac{\partial \ddot{\psi}}{\partial \mathbf{x}} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

从而构成矩阵A

$$A = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_e} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -g & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

**f** 对**u**求偏导

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial \mathbf{u}} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

$$\frac{\partial \dot{y}}{\partial \mathbf{u}} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

$$\frac{\partial \dot{z}}{\partial \mathbf{u}} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

$$\frac{\partial \ddot{x}}{\partial \mathbf{u}} = \left[ \frac{1}{m}(\cos\phi \sin\theta \cos\psi + \sin\psi \sin\phi) \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right], \quad \frac{\partial \ddot{x}}{\partial \mathbf{u}} \Big|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}_e} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

$$\frac{\partial \ddot{y}}{\partial \mathbf{u}} = \left[ \frac{1}{m}(\cos\phi \sin\theta \sin\psi - \cos\psi \sin\phi) \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right], \quad \frac{\partial \ddot{y}}{\partial \mathbf{u}} \Big|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}_e} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

$$\frac{\partial \ddot{z}}{\partial \mathbf{u}} = \left[ \frac{1}{m} \cos\theta \cos\phi \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right], \quad \frac{\partial \ddot{z}}{\partial \mathbf{u}} \Big|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}_e} = \left[ \frac{1}{m} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right]$$

$$\frac{\partial \dot{\phi}}{\partial \mathbf{u}} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

$$\frac{\partial \dot{\theta}}{\partial \mathbf{u}} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

$$\frac{\partial \dot{\psi}}{\partial \mathbf{u}} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

$$\frac{\partial \ddot{\phi}}{\partial \mathbf{u}} = \left[ 0 \quad \frac{1}{J_{xx}} \quad 0 \quad 0 \right]$$

$$\frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial \mathbf{u}} = \left[ 0 \quad 0 \quad \frac{1}{J_{yy}} \quad 0 \right]$$

$$\frac{\partial \ddot{\psi}}{\partial \mathbf{u}} = \left[ 0 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{1}{J_{zz}} \right]$$

从而构成矩阵B

$$B = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \Big|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}_e} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{m} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{J_{xx}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{J_{yy}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{J_{zz}} \end{bmatrix} \quad (11)$$

**Step3: 构成线性模型**

记

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_e, \quad \tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_e \quad (12)$$

所以,

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \frac{d\tilde{\mathbf{x}}}{dt} = \frac{d(\mathbf{x} - \mathbf{x}_e)}{dt} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \dot{\mathbf{x}}$$

从而综合(10),(11),(12) 得到线性模型

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = A \cdot \tilde{\mathbf{x}} + B \cdot \tilde{\mathbf{u}} \quad (13)$$

由于 $\mathbf{y}$ 一般取12个状态量中的某几个，比如： $x, y, z, yaw$ 。

所以 $\mathbf{y}$ 一般与 $\mathbf{x}$ ， $\mathbf{u}$ 是线性关系，不需要线性化

从而，总的线性模型为

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{\mathbf{x}}} &= \mathbf{A} \cdot \tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{B} \cdot \tilde{\mathbf{u}} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}\end{aligned}\quad (13)$$

即

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -g & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \tilde{\mathbf{x}} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{m} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{J_{xx}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{J_{yy}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{J_{zz}} \end{bmatrix} \cdot \tilde{\mathbf{u}}$$

## 1.3 离散化

参考自[【离散系统】传递函数和状态空间方程离散化, 离散传递函数转换为状态方程csdn-CSDN博客](#)

### 1.3.1 欧拉法介绍

对于以下连续线性状态空间方程

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}\end{aligned}$$

在当前第 $k$ 状态下

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_{[k]} &= \mathbf{A}\mathbf{x}_{[k]} + \mathbf{B}\mathbf{u}_{[k]} \\ \mathbf{y}_{[k]} &= \mathbf{C}\mathbf{x}_{[k]} + \mathbf{D}\mathbf{u}_{[k]}\end{aligned}\quad (14)$$

设采样周期为 $T_s$ ，则

$$\dot{\mathbf{x}}_{[k]} = \frac{\mathbf{x}_{[k+1]} - \mathbf{x}_{[k]}}{T_s}\quad (15)$$

将(15)代入方程(14)得

$$\frac{\mathbf{x}_{[k+1]} - \mathbf{x}_{[k]}}{T_s} = \mathbf{A}\mathbf{x}_{[k]} + \mathbf{B}\mathbf{u}_{[k]}$$

移项得

$$\mathbf{x}_{[k+1]} = (\mathbf{I} + T_s\mathbf{A})\mathbf{x}_{[k]} + T_s\mathbf{B}\mathbf{u}_{[k]}$$

所以离散化后的矩阵 $\mathbf{A}$ ， $\mathbf{B}$ 为

$$\begin{aligned} A_d &= I + T_s A \\ B_d &= T_s B \end{aligned} \quad (16)$$

而离散化后的矩阵C，D不变

$$\begin{aligned} C_d &= C \\ D_d &= D \end{aligned} \quad (17)$$

从而，离散状态空间方程为

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{[k+1]} &= A_d \mathbf{x}_{[k]} + B_d \mathbf{u}_{[k]} \\ \mathbf{y}_{[k]} &= C_d \mathbf{x}_{[k]} + D_d \mathbf{u}_{[k]} \end{aligned}$$

### 1.3.2 零阶保持法介绍

推导略

$$\begin{aligned} A_d &= e^{AT_s} \\ B_d &= B \int_0^{T_s} e^{At} dt \end{aligned}$$

而离散化后的矩阵C，D不变

$$\begin{aligned} C_d &= C \\ D_d &= D \end{aligned}$$

从而，离散状态空间方程为

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{[k+1]} &= A_d \mathbf{x}_{[k]} + B_d \mathbf{u}_{[k]} \\ \mathbf{y}_{[k]} &= C_d \mathbf{x}_{[k]} + D_d \mathbf{u}_{[k]} \end{aligned}$$

网上介绍，零阶保持法的效果更好，而且 **MATLAB** 自带的函数 **c2d()**默认就是使用零阶保持法。

所以，我选择了**零阶保持法**，对(13)的连续状态空间方程使用零阶保持法，得到的离散状态空间方程为

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}_{[k+1]} &= A_d \tilde{\mathbf{x}}_{[k]} + B_d \tilde{\mathbf{u}}_{[k]} \\ \mathbf{y}_{[k]} &= C_d \mathbf{x}_{[k]} + D_d \mathbf{u}_{[k]} \end{aligned} \quad (18)$$

## 2.MPC

对于以上得到的离散状态空间方程

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}_{[k+1]} &= A_d \tilde{\mathbf{x}}_{[k]} + B_d \tilde{\mathbf{u}}_{[k]} \\ \mathbf{y}_{[k]} &= C_d \mathbf{x}_{[k]} + D_d \mathbf{u}_{[k]} \end{aligned}$$

#### 方案一：直接用x来控制

使用x来控制，也就是使用12个状态量来共同控制，

则误差可写为

$$\mathbf{e}_{[k]} = \tilde{\mathbf{x}}_{[k]} - \tilde{\mathbf{x}}_{\text{ref}[k]}$$

#### 方案二：用y来控制

使用y来控制，比如选择x,y,z,yaw来控制



即

$$\mathbf{y}_{[k]} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ \psi \end{bmatrix}$$

此时

$$C_d = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$D_d = \mathbf{0}$$

则

$$\mathbf{y}_{[k]} = C_d \tilde{\mathbf{x}}_{[k]}$$

则误差可写为

$$\mathbf{e}_{[k]} = \mathbf{y}_{[k]} - \mathbf{y}_{\text{ref}[k]} = C_d \mathbf{x}_{[k]} - \mathbf{y}_{\text{ref}[k]}$$

无论方案一还是方案二，优化问题都可以写为

$$\begin{aligned} \min \quad & J = \sum_{k=0}^{N-1} \left( \mathbf{e}_{[k]}^\top Q \mathbf{e}_{[k]} + \tilde{\mathbf{u}}_{[k]}^\top R \tilde{\mathbf{u}}_{[k]} \right) + \mathbf{e}_{[N]}^\top Q \mathbf{e}_{[N]} \\ \text{s.t.} \quad & \tilde{\mathbf{x}}_{[k+1]} = A_d \tilde{\mathbf{x}}_{[k]} + B_d \tilde{\mathbf{u}}_{[k]} \end{aligned}$$

求解得到

$$\tilde{\mathbf{U}}$$

取出其中的第一个值

$$\tilde{\mathbf{u}} = [I \quad \mathbf{0} \quad \dots \quad \mathbf{0}] \cdot \tilde{\mathbf{U}}$$

然后求出真正用于控制的 $\mathbf{u}$

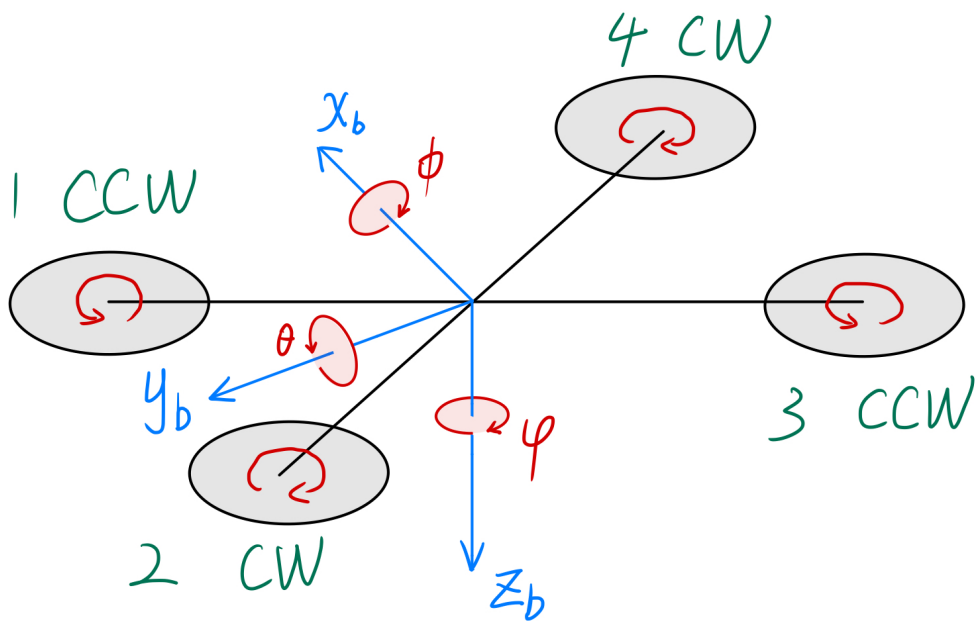
$$\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{u}_e$$

即：

$$\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}} + \begin{bmatrix} mg \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

### 3.控制分配

下面根据无人机4个螺旋桨的转向，建立  $\mathbf{u}$ (推力和力矩) 与 4个电机转速之间的关系。



如上图所示，从上往下看，无人机4个螺旋桨按逆时针方向依次标记为：

位置	编号	转向
左前(front left)	1	逆时针(CCW)
左后(back left)	2	顺时针(CW)
右后(back right)	3	逆时针(CCW)
右前(front right)	4	顺时针(CW)

### ⚠ Caution

注意：在无人机模型中

总推力 $T$ 的方向垂直机身向上

$\phi$ 的正方向  $\Leftrightarrow x_b$ 轴的右手螺旋方向  $\Leftrightarrow \tau_x$ 的方向

$\theta$ 的正方向  $\Leftrightarrow y_b$ 轴的右手螺旋方向  $\Leftrightarrow \tau_y$ 的方向

$\psi$ 的正方向  $\Leftrightarrow z_b$ 轴的右手螺旋方向  $\Leftrightarrow \tau_z$ 的方向

一句话概括：

三个欧拉角的正方向 分别是 对应坐标轴的右手螺旋方向，也分别是 力矩对应分量的正方向

由此，可以写出  $\mathbf{u}$ (推力和力矩) 与 4个电机转速之间的关系：

总推力为所有螺旋桨的推力之和

$$T = c_t \tilde{\omega}_1^2 + c_t \tilde{\omega}_2^2 + c_t \tilde{\omega}_3^2 + c_t \tilde{\omega}_4^2$$

根据x方向上力矩的方向，要使得x方向上力矩增大，就要让螺旋桨1、2的推力增大，而螺旋桨3、4的推力减小

$$\tau_x = \frac{\sqrt{2}}{2}dc_t\tilde{\omega}_1^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}dc_t\tilde{\omega}_2^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}dc_t\tilde{\omega}_3^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}dc_t\tilde{\omega}_4^2$$

根据y方向上力矩的方向，要使得y方向上力矩增大，就要让螺旋桨2、3的推力增大，而螺旋桨1、4的推力减小

$$\tau_y = -\frac{\sqrt{2}}{2}dc_t\tilde{\omega}_1^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}dc_t\tilde{\omega}_2^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}dc_t\tilde{\omega}_3^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}dc_t\tilde{\omega}_4^2$$

根据z方向上力矩的方向（从上向下看是顺时针），要使得z方向上力矩增大，就要让顺时针旋转的螺旋桨的推力增大，而逆时针旋转的螺旋桨的推力减小

即：让螺旋桨2、4的推力增大，而螺旋桨1、3的推力减小

$$\tau_z = -c_m\tilde{\omega}_1^2 + c_m\tilde{\omega}_2^2 - c_m\tilde{\omega}_3^2 + c_m\tilde{\omega}_4^2$$

#### ⚠ Caution

##### z方向上力矩的方向 与 螺旋桨的关系：

如果 z方向上力矩的方向 是顺时针，则顺时针旋转的螺旋桨的推力增大，而逆时针旋转的螺旋桨的推力减小

即：顺时针旋转的螺旋桨的推力取正号，逆时针旋转的螺旋桨的推力取负号

相反，

如果 z方向上力矩的方向 是逆时针，则逆时针旋转的螺旋桨的推力增大，而顺时针旋转的螺旋桨的推力减小

即：逆时针旋转的螺旋桨的推力取正号，顺时针旋转的螺旋桨的推力取负号

#### 💡 Important

##### 参数解释：

$$\begin{cases} c_t : \text{单个螺旋桨的推力系数} [N \cdot (rad/s)^{-2}] \\ c_m : \text{单个螺旋桨的力矩系数} [N \cdot m \cdot (rad/s)^{-2}] \\ d : \text{螺旋桨中心到机架中心的距离} [m] \end{cases}$$

其中

$$c_t = \text{motor constant}$$

$$c_m = \text{motor constant} \cdot \text{moment constant}$$

综上，

$$\begin{cases} T = c_t\tilde{\omega}_1^2 + c_t\tilde{\omega}_2^2 + c_t\tilde{\omega}_3^2 + c_t\tilde{\omega}_4^2 \\ \tau_x = \frac{\sqrt{2}}{2}dc_t\tilde{\omega}_1^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}dc_t\tilde{\omega}_2^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}dc_t\tilde{\omega}_3^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}dc_t\tilde{\omega}_4^2 \\ \tau_y = -\frac{\sqrt{2}}{2}dc_t\tilde{\omega}_1^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}dc_t\tilde{\omega}_2^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}dc_t\tilde{\omega}_3^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}dc_t\tilde{\omega}_4^2 \\ \tau_z = -c_m\tilde{\omega}_1^2 + c_m\tilde{\omega}_2^2 - c_m\tilde{\omega}_3^2 + c_m\tilde{\omega}_4^2 \end{cases}$$

解方程得

$$\begin{cases} \tilde{\omega}_1 = \sqrt{\frac{1}{4} \left( \frac{T}{c_t} + \frac{\sqrt{2}\tau_x}{dc_t} - \frac{\sqrt{2}\tau_y}{dc_t} - \frac{\tau_z}{c_m} \right)} \\ \tilde{\omega}_2 = \sqrt{\frac{1}{4} \left( \frac{T}{c_t} + \frac{\sqrt{2}\tau_x}{dc_t} + \frac{\sqrt{2}\tau_y}{dc_t} + \frac{\tau_z}{c_m} \right)} \\ \tilde{\omega}_3 = \sqrt{\frac{1}{4} \left( \frac{T}{c_t} - \frac{\sqrt{2}\tau_x}{dc_t} + \frac{\sqrt{2}\tau_y}{dc_t} - \frac{\tau_z}{c_m} \right)} \\ \tilde{\omega}_4 = \sqrt{\frac{1}{4} \left( \frac{T}{c_t} - \frac{\sqrt{2}\tau_x}{dc_t} - \frac{\sqrt{2}\tau_y}{dc_t} + \frac{\tau_z}{c_m} \right)} \end{cases}$$

也可以写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} T \\ \tau_x \\ \tau_y \\ \tau_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_t & c_t & c_t & c_t \\ \frac{\sqrt{2}}{2}dc_t & \frac{\sqrt{2}}{2}dc_t & -\frac{\sqrt{2}}{2}dc_t & -\frac{\sqrt{2}}{2}dc_t \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}dc_t & \frac{\sqrt{2}}{2}dc_t & \frac{\sqrt{2}}{2}dc_t & -\frac{\sqrt{2}}{2}dc_t \\ -c_m & c_m & -c_m & c_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\omega}_1^2 \\ \tilde{\omega}_2^2 \\ \tilde{\omega}_3^2 \\ \tilde{\omega}_4^2 \end{bmatrix}$$

记

$$M = \begin{bmatrix} c_t & c_t & c_t & c_t \\ \frac{\sqrt{2}}{2}dc_t & \frac{\sqrt{2}}{2}dc_t & -\frac{\sqrt{2}}{2}dc_t & -\frac{\sqrt{2}}{2}dc_t \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}dc_t & \frac{\sqrt{2}}{2}dc_t & \frac{\sqrt{2}}{2}dc_t & -\frac{\sqrt{2}}{2}dc_t \\ -c_m & c_m & -c_m & c_m \end{bmatrix}, \quad \tilde{\omega}^2 = \begin{bmatrix} \tilde{\omega}_1^2 \\ \tilde{\omega}_2^2 \\ \tilde{\omega}_3^2 \\ \tilde{\omega}_4^2 \end{bmatrix}$$

又由于

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} T \\ \tau_x \\ \tau_y \\ \tau_z \end{bmatrix}$$

所以

$$\mathbf{u} = M\tilde{\omega}^2$$

因此，由MPC控制算法求出

$$\mathbf{u}$$

之后，可以求出它对应的螺旋桨转速

$$\tilde{\omega}^2 = M^{-1}\mathbf{u}$$

$$\tilde{\omega} = \sqrt{\tilde{\omega}^2} = \begin{bmatrix} \sqrt{\tilde{\omega}_1^2} \\ \sqrt{\tilde{\omega}_2^2} \\ \sqrt{\tilde{\omega}_3^2} \\ \sqrt{\tilde{\omega}_4^2} \end{bmatrix}$$