无人机模型和MPC控制算法

1.无人机建模

1.1 非线性模型

设状态向量

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x & y & z & \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} & \phi & \theta & \psi & \dot{\phi} & \dot{\theta} & \dot{\psi} \end{bmatrix}^\top$$

设输入向量

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} T & \tau_x & \tau_y & \tau_z \end{bmatrix}^\top$$

则无人机模型可以表述为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}\left(\mathbf{x}, \mathbf{u}\right)$$

即：

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \\ \ddot{\phi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ \frac{1}{m}T\left(cos\phi sin\theta cos\psi + sin\psi sin\phi\right) \\ \frac{1}{m}T\left(cos\phi sin\theta sin\psi - cos\psi sin\phi\right) \\ \frac{1}{m}Tcos\theta cos\phi - g \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \\ \frac{1}{J_{xx}}\left[\tau_x - \omega_y\omega_z\left(J_{yy} - J_{zz}\right)\right] \\ \frac{1}{J_{yy}}\left[\tau_y - \omega_z\omega_x\left(J_{zz} - J_{xx}\right)\right] \\ \frac{1}{J_{zz}}\left[\tau_z - \omega_x\omega_y\left(J_{xx} - J_{yy}\right)\right] \end{bmatrix} \tag{1}$$

1.2 线性化

上述的无人机模型是连续的非线性的模型，为了得到无人机模型的状态空间方程

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= A\mathbf{x} + B\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= C\mathbf{x} + D\mathbf{u} \end{aligned}$$

需要对无人机模型进行线性化，一般采用雅可比线性化

1.2.1 雅可比线性化流程

非线性方程可以表示为以下的一般形式：

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y) \tag{2}$$

Step1：寻找平衡点

平衡点（equilibrium point） (a,b)，满足

$$f\left(a,b\right)=0 \tag{3}$$

Step2：计算在平衡点处的一阶偏导数

根据多元函数泰勒展开公式，(2)式 在平衡点 (a,b)处的一阶泰勒展开式为：

$$f(x,y)=f(a,b)+\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\cdot(x-a)+\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\cdot(y-b)+o(\Delta x,\Delta y)$$

忽略无穷小项，得到

$$f(x,y)=f(a,b)+\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\cdot(x-a)+\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\cdot(y-b) \tag{4}$$

代入(3)，得

$$f(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\cdot(x-a)+\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\cdot(y-b) \tag{5}$$

得到两个一阶偏导数，分别记为

$$\begin{aligned}A&=\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\\B&=\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\end{aligned} \tag{6}$$

Step3：构成线性模型

记

$$\widetilde{x}=x-a,\quad\tilde{y}=y-b$$

则(2)式被线性化为

$$\frac{dx}{dt}=A\widetilde{x}+B\tilde{y}$$

1.2.2 无人机模型的雅可比线性化

下面根据以上理论，对(1)式描述的无人机模型进行雅可比线性化

也就是由非线性方程

$$\dot{\mathbf{x}}=f\left(\mathbf{x},\mathbf{u}\right)$$

得到线性方程

$$\dot{\widetilde{\mathbf{x}}}=A\cdot\widetilde{\mathbf{x}}+B\cdot\widetilde{\mathbf{u}}$$

$$\text{其中：}\begin{cases}\dot{\widetilde{\mathbf{x}}}=\dot{\mathbf{x}}\\A=\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{x}}\\B=\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{u}}\\\widetilde{\mathbf{x}}=\mathbf{x}-\mathbf{x_e}\\\widetilde{\mathbf{u}}=\mathbf{u}-\mathbf{u_e}\end{cases}$$

Step1：寻找平衡点

令(1)式右端等于0

$$
\begin{bmatrix}
v_x \\
v_y \\
v_z \\
\frac{1}{m}T\left(cos\phi sin\theta cos\psi + sin\psi sin\phi\right) \\
\frac{1}{m}T\left(cos\phi sin\theta sin\psi - cos\psi sin\phi\right) \\
\frac{1}{m}Tcos\theta cos\phi - g \\
\omega_x \\
\omega_y \\
\omega_z \\
\frac{1}{J_{xx}}\left[\tau_x - \omega_y\omega_z\left(J_{yy} - J_{zz}\right)\right] \\
\frac{1}{J_{xx}}\left[\tau_y - \omega_z\omega_x\left(J_{zz} - J_{xx}\right)\right] \\
\frac{1}{J_{xx}}\left[\tau_z - \omega_x\omega_y\left(J_{xx} - J_{yy}\right)\right]
\end{bmatrix} = \mathbf{0} \tag{7}
$$

可得

$$
\begin{cases}
v_x = 0 \\
v_y = 0 \\
v_z = 0 \\
\frac{1}{m}T\left(cos\phi sin\theta cos\psi + sin\psi sin\phi\right) = 0 \\
\frac{1}{m}T\left(cos\phi sin\theta sin\psi - cos\psi sin\phi\right) = 0 \\
\frac{1}{m}Tcos\theta cos\phi = g \\
\omega_x = 0 \\
\omega_y = 0 \\
\omega_z = 0 \\
\tau_x = 0 \\
\tau_y = 0 \\
\tau_z = 0
\end{cases} \tag{8}
$$

考虑在悬停点处，有

$$
\begin{cases}
T = mg \\
\phi = 0 \\
\theta = 0 \\
\psi = 0
\end{cases} \tag{9}
$$

把(9)代入(8)，发现恰好满足(8)中的12个方程。说明悬停点正好也是平衡点。

又因为，大部分情况下，无人机状态是悬停状态或者接近悬停状态。所以使用悬停点这个平衡点来进行后面的线性化。

悬停点这个平衡点表示为

$$\mathbf{x_e} = \begin{bmatrix} x_e \\ y_e \\ z_e \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u_e} = \begin{bmatrix} mg \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Step2：计算平衡点处一阶偏导数

f 对**x**求偏导

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial \dot{y}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial \dot{z}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial \ddot{x}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m}T\left(-sin\phi sin\theta cos\psi + sin\psi cos\phi\right) \\ \frac{1}{m}T\left(cos\phi cos\theta cos\psi + sin\psi sin\phi\right) \\ \frac{1}{m}T\left(-cos\phi sin\theta sin\psi + cos\psi sin\phi\right) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^\top, \quad \frac{\partial \ddot{x}}{\partial \mathbf{x}}\Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x_e}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ g \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^\top$$

$$\frac{\partial \ddot{y}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m}T\left(-sin\phi sin\theta sin\psi - cos\psi cos\phi\right) \\ \frac{1}{m}T\left(cos\phi cos\theta sin\psi - cos\psi sin\phi\right) \\ \frac{1}{m}T\left(cos\phi sin\theta cos\psi + sin\psi sin\phi\right) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^\top, \quad \frac{\partial \ddot{y}}{\partial \mathbf{x}}\Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x_e}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -g \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^\top$$

$$\frac{\partial \ddot{z}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{m}Tcos\theta sin\phi \\ -\frac{1}{m}Tsin\theta cos\phi \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^\top, \quad \frac{\partial \ddot{z}}{\partial \mathbf{x}}\Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x_e}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^\top$$

$$\frac{\partial \dot{\phi}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial \dot{\theta}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial \dot{\psi}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial \ddot{\phi}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial \ddot{\psi}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

从而构成矩阵A

$$A = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x_e}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -g & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{10}$$

f对u求偏导

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial \mathbf{u}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial \dot{y}}{\partial \mathbf{u}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial \dot{z}}{\partial \mathbf{u}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial \ddot{x}}{\partial \mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{m}(cos\phi sin\theta cos\psi + sin\psi sin\phi) & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial \ddot{x}}{\partial \mathbf{u}}\Big|_{\mathbf{u}=\mathbf{u_e}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial \ddot{y}}{\partial \mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{m}(cos\phi sin\theta sin\psi - cos\psi sin\phi) & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial \ddot{y}}{\partial \mathbf{u}}\Big|_{\mathbf{u}=\mathbf{u_e}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial \ddot{z}}{\partial \mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{m}cos\theta cos\phi & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial \ddot{z}}{\partial \mathbf{u}}\Big|_{\mathbf{u}=\mathbf{u_e}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{m} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial \dot{\phi}}{\partial \mathbf{u}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial \dot{\theta}}{\partial \mathbf{u}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial \dot{\psi}}{\partial \mathbf{u}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial \ddot{\phi}}{\partial \mathbf{u}} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{J_{xx}} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial \mathbf{u}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{Jyy} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial \ddot{\psi}}{\partial \mathbf{u}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{J_{zz}} \end{bmatrix}$$

从而构成矩阵B

$$B = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}}\Big|_{\mathbf{u}=\mathbf{u_e}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{m} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{J_{xx}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{Jyy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{J_{zz}} \end{bmatrix} \tag{11}$$

Step3：构成线性模型

记

$$\widetilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \mathbf{x_e}, \quad \widetilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u} - \mathbf{u_e} \tag{12}$$

所以，

$$\dot{\widetilde{\mathbf{x}}} = \frac{d\widetilde{\mathbf{x}}}{dt} = \frac{d\left(\mathbf{x} - \mathbf{x_e}\right)}{dt} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \dot{\mathbf{x}}$$

从而综合(10),(11),(12) 得到线性模型

$$\dot{\widetilde{\mathbf{x}}} = A \cdot \widetilde{\mathbf{x}} + B \cdot \widetilde{\mathbf{u}} \tag{13}$$

由于$\mathbf{y}$一般取12个状态量中的某几个，比如：x,y,z,yaw。

所以$\mathbf{y}$一般与$\mathbf{x}$，$\mathbf{u}$是线性关系，不需要线性化

从而，总的线性模型为

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{\mathbf{x}}} &= A \cdot \tilde{\mathbf{x}} + B \cdot \tilde{\mathbf{u}} \\ \mathbf{y} &= C\mathbf{x} + D\mathbf{u}\end{aligned} \tag{13}$$

即

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \begin{bmatrix} 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&g&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&-g&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix} \cdot \tilde{\mathbf{x}} + \begin{bmatrix} 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ \frac{1}{m}&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&\frac{1}{J_{xx}}&0&0 \\ 0&0&\frac{1}{Jyy}&0 \\ 0&0&0&\frac{1}{J_{zz}} \end{bmatrix} \cdot \tilde{\mathbf{u}}$$

1.3 离散化

参考自[【离散系统】传递函数和状态空间方程离散化_离散传递函数转换为状态方程csdn-CSDN博客]

1.3.1 欧拉法介绍

对于以下连续线性状态空间方程

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= A\mathbf{x} + B\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= C\mathbf{x} + D\mathbf{u}\end{aligned}$$

设在第k状态下，离散的线性状态空间方程如下：

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_{[\mathbf{k}]} &= A\mathbf{x}_{[\mathbf{k}]} + B\mathbf{u}_{[\mathbf{k}]} \\ \mathbf{y}_{[\mathbf{k}]} &= C\mathbf{x}_{[\mathbf{k}]} + D\mathbf{u}_{[\mathbf{k}]}\end{aligned} \tag{14}$$

设采样周期为T_s，则

$$\dot{\mathbf{x}}_{[\mathbf{k}]} = \frac{\mathbf{x}_{[\mathbf{k+1}]} - \mathbf{x}_{[\mathbf{k}]}}{T_s} \tag{15}$$

将(15)代入方程(14)得

$$\frac{\mathbf{x}_{[\mathbf{k+1}]} - \mathbf{x}_{[\mathbf{k}]}}{T_s} = A\mathbf{x}_{[\mathbf{k}]} + B\mathbf{u}_{[\mathbf{k}]}$$

移项得

$$\mathbf{x}_{[\mathbf{k+1}]} = (I + T_s A)\mathbf{x}_{[\mathbf{k}]} + T_s B\mathbf{u}_{[\mathbf{k}]}$$

所以离散化后的矩阵A，B为

$$
\begin{aligned}
A_d &= I + T_s A \\
B_d &= T_s B
\end{aligned} \tag{16}
$$

而离散化后的矩阵C，D不变

$$
\begin{aligned}
C_d &= C \\
D_d &= D
\end{aligned} \tag{17}
$$

从而，离散状态空间方程为

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x_{[k+1]}} &= A_d \mathbf{x_{[k]}} + B_d \mathbf{u_{[k]}} \\
\mathbf{y_{[k]}} &= C_d \mathbf{x_{[k]}} + D_d \mathbf{u_{[k]}}
\end{aligned}
$$

1.3.2 无人机模型的欧拉法离散化

由上文得到的线性化模型（式13）

$$
\begin{aligned}
\dot{\tilde{\mathbf{x}}} &= A \cdot \tilde{\mathbf{x}} + B \cdot \tilde{\mathbf{u}} \\
\mathbf{y} &= C\mathbf{x} + D\mathbf{u}
\end{aligned}
$$

$$
\mathbf{A} = \begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -g & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}, \quad
\mathbf{B} = \begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{m} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{J_{xx}} & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{Jyy} & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{J_{zz}}
\end{bmatrix}
$$

利用欧拉法离散化，得到

$$
\mathbf{A_d} = \begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & T_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & T_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & T_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & T_s g & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -T_s g & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & T_s & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & T_s & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & T_s \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}, \quad
\mathbf{B_d} = \begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{m}T_s & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{J_{xx}}T_s & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{Jyy}T_s & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{J_{zz}}T_s
\end{bmatrix}
$$

1.3.3 零阶保持法介绍

推导略

$$A_d = e^{AT_s}$$
$$B_d = B\int_0^{T_s} e^{At}\,dt$$

而离散化后的矩阵C，D不变

$$C_d = C$$
$$D_d = D$$

从而，离散状态空间方程为

$$\begin{aligned}\mathbf{x_{[k+1]}} &= A_d\mathbf{x_{[k]}} + B_d\mathbf{u_{[k]}} \\ \mathbf{y_{[k]}} &= C_d\mathbf{x_{[k]}} + D_d\mathbf{u_{[k]}}\end{aligned}$$

网上介绍，零阶保持法的效果更好，而且 **MATLAB** 自带的函数 `c2d()` 默认就是使用零阶保持法。

所以，我选择了**零阶保持法**，对(13)的连续状态空间方程使用零阶保持法，得到的离散状态空间方程为

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathbf{x}}_{\mathbf{[k+1]}} &= A_d\widetilde{\mathbf{x}}_{\mathbf{[k]}} + B_d\widetilde{\mathbf{u}}_{\mathbf{[k]}} \\ \mathbf{y_{[k]}} &= C_d\mathbf{x_{[k]}} + D_d\mathbf{u_{[k]}}\end{aligned} \tag{18}$$

2.MPC

对于以上得到的离散状态空间方程

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathbf{x}}_{\mathbf{[k+1]}} &= A_d\widetilde{\mathbf{x}}_{\mathbf{[k]}} + B_d\widetilde{\mathbf{u}}_{\mathbf{[k]}} \\ \mathbf{y_{[k]}} &= C_d\mathbf{x_{[k]}} + D_d\mathbf{u_{[k]}}\end{aligned}$$

方案一：直接用x来控制

使用$\mathbf{x}$来控制，也就是使用12个状态量来共同控制，

则误差可写为

$$\mathbf{e_{[k]}} = \widetilde{\mathbf{x}}_{\mathbf{[k]}} - \widetilde{\mathbf{x}}_{\mathbf{ref[k]}}$$

方案二：用y来控制

使用$\mathbf{y}$来控制，比如选择x, y, z, yaw来控制

即

$$\mathbf{y_{[k]}} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ \psi \end{bmatrix}$$

此时

$$C_d = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$D_d = \mathbf{0}$$

则

$$\mathbf{y_{[k]}} = C_d \widetilde{\mathbf{x}}_{\mathbf{[k]}}$$

则误差可写为

$$\mathbf{e_{[k]}} = \mathbf{y_{[k]}} - \mathbf{y_{ref[k]}} = C_d \mathbf{x_{[k]}} - \mathbf{y_{ref[k]}}$$

无论方案一还是方案二，优化问题都可以写为

$$min \quad J = \sum_{k=0}^{N-1} \left(\mathbf{e_{[k]}}^\top Q \mathbf{e_{[k]}} + \widetilde{\mathbf{u}}_{\mathbf{[k]}}^\top R \widetilde{\mathbf{u}}_{\mathbf{[k]}} \right) + \mathbf{e_{[N]}}^\top Q \mathbf{e_{[N]}}$$
$$s.t. \quad \widetilde{\mathbf{x}}_{\mathbf{[k+1]}} = A_d \widetilde{\mathbf{x}}_{\mathbf{[k]}} + B_d \widetilde{\mathbf{u}}_{\mathbf{[k]}}$$

求解得到$\widetilde{\mathbf{U}}$，取出其中的第一个值

$$\widetilde{\mathbf{u}} = [I \quad \mathbf{0} \quad \cdots \quad \mathbf{0}] \cdot \widetilde{\mathbf{U}}$$

然后求出真正用于控制的$\mathbf{u}$

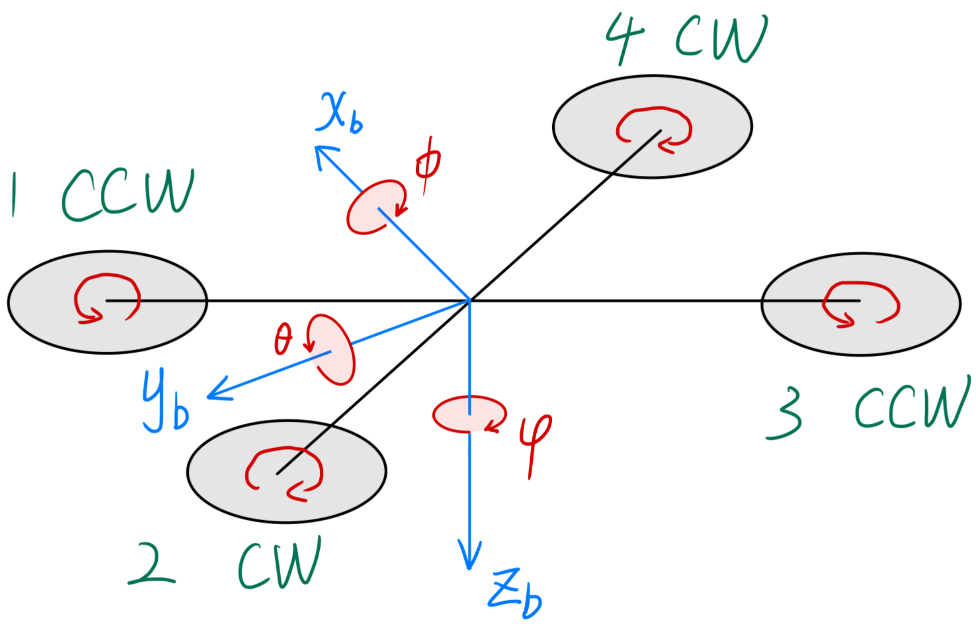
$$\mathbf{u} = \widetilde{\mathbf{u}} + \mathbf{u_e}$$

即：

$$\mathbf{u} = \widetilde{\mathbf{u}} + \begin{bmatrix} mg \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3.控制分配

下面根据无人机4个螺旋桨的转向，建立$\mathbf{u}$(推力和力矩) 与 4个电机转速之间的关系。



如上图所示，从上往下看，无人机4个螺旋桨按逆时针方向依次标记为：

位置	编号	转向
左前(front left)	1	逆时针(CCW)
左后(back left)	2	顺时针(CW)
右后(back right)	3	逆时针(CCW)
右前(front right)	4	顺时针(CW)

> **Caution**
>
> 注意：在无人机模型中
>
> 总推力T的方向垂直机身向上
>
> $$\begin{gathered}\phi\text{的正方向} \Leftrightarrow x_b\text{轴的右手螺旋方向} \Leftrightarrow \tau_x\text{的方向}\\ \theta\text{的正方向} \Leftrightarrow y_b\text{轴的右手螺旋方向} \Leftrightarrow \tau_y\text{的方向}\\ \psi\text{的正方向} \Leftrightarrow z_b\text{轴的右手螺旋方向} \Leftrightarrow \tau_z\text{的方向}\end{gathered}$$
>
> 一句话概括：
>
> 三个**欧拉角的正方向** 分别是 对应**坐标轴**的**右手螺旋方向**，也分别是 **力矩对应分量的正方向**

由此，可以写出 $\mathbf{u}$(推力和力矩) 与 4个电机转速之间的关系：

总推力为所有螺旋桨的推力之和

$$T = c_t{\widetilde{\omega}_1}^2 + c_t{\widetilde{\omega}_2}^2 + c_t{\widetilde{\omega}_3}^2 + c_t{\widetilde{\omega}_4}^2$$

根据x方向上力矩的方向，要使得x方向上力矩增大，就要让螺旋桨1、2的推力增大，而螺旋桨3、4的推力减小

$$\tau_x = \frac{\sqrt{2}}{2} d c_t {\widetilde{\omega}_1}^2 + \frac{\sqrt{2}}{2} d c_t {\widetilde{\omega}_2}^2 - \frac{\sqrt{2}}{2} d c_t {\widetilde{\omega}_3}^2 - \frac{\sqrt{2}}{2} d c_t {\widetilde{\omega}_4}^2$$

根据y方向上力矩的方向，要使得y方向上力矩增大，就要让螺旋桨2、3的推力增大，而螺旋桨1、4的推力减小

$$\tau_y = -\frac{\sqrt{2}}{2} d c_t {\widetilde{\omega}_1}^2 + \frac{\sqrt{2}}{2} d c_t {\widetilde{\omega}_2}^2 + \frac{\sqrt{2}}{2} d c_t {\widetilde{\omega}_3}^2 - \frac{\sqrt{2}}{2} d c_t {\widetilde{\omega}_4}^2$$

根据z方向上力矩的方向（从上向下看是顺时针），要使得z方向上力矩增大，就要让顺时针旋转的螺旋桨的推力增大，而逆时针旋转的螺旋桨的推力减小

即：让螺旋桨2、4的推力增大，而螺旋桨1、3的推力减小

$$\tau_z = -c_m {\widetilde{\omega}_1}^2 + c_m {\widetilde{\omega}_2}^2 - c_m {\widetilde{\omega}_3}^2 + c_m {\widetilde{\omega}_4}^2$$

> **Caution**
>
> **z方向上力矩的方向 与 螺旋桨的关系：**
>
> 如果 z方向上力矩的方向 是顺时针，则顺时针旋转的螺旋桨的推力增大，而逆时针旋转的螺旋桨的推力减小
>
> 即：顺时针旋转的螺旋桨的推力取正号，逆时针旋转的螺旋桨的推力取负号
>
> 相反，
>
> 如果 z方向上力矩的方向 是逆时针，则逆时针旋转的螺旋桨的推力增大，而顺时针旋转的螺旋桨的推力减小
>
> 即：逆时针旋转的螺旋桨的推力取正号，顺时针旋转的螺旋桨的推力取负号

> **Important**
>
> **参数解释：**
>
> $$\begin{cases} c_t：\text{单个螺旋桨的推力系数}[N \cdot (rad/s)^{-2}] \\ c_m：\text{单个螺旋桨的力矩系数}[N \cdot m \cdot (rad/s)^{-2}] \\ d：\text{螺旋桨中心到机架中心的距离}[m] \end{cases}$$
>
> 其中
>
> $$c_t = motor\ constant$$
> $$c_m = motor\ constant \cdot moment\ constant$$

综上，

$$\begin{cases} T = c_t {\widetilde{\omega}_1}^2 + c_t {\widetilde{\omega}_2}^2 + c_t {\widetilde{\omega}_3}^2 + c_t {\widetilde{\omega}_4}^2 \\ \tau_x = \frac{\sqrt{2}}{2} d c_t {\widetilde{\omega}_1}^2 + \frac{\sqrt{2}}{2} d c_t {\widetilde{\omega}_2}^2 - \frac{\sqrt{2}}{2} d c_t {\widetilde{\omega}_3}^2 - \frac{\sqrt{2}}{2} d c_t {\widetilde{\omega}_4}^2 \\ \tau_y = -\frac{\sqrt{2}}{2} d c_t {\widetilde{\omega}_1}^2 + \frac{\sqrt{2}}{2} d c_t {\widetilde{\omega}_2}^2 + \frac{\sqrt{2}}{2} d c_t {\widetilde{\omega}_3}^2 - \frac{\sqrt{2}}{2} d c_t {\widetilde{\omega}_4}^2 \\ \tau_z = -c_m {\widetilde{\omega}_1}^2 + c_m {\widetilde{\omega}_2}^2 - c_m {\widetilde{\omega}_3}^2 + c_m {\widetilde{\omega}_4}^2 \end{cases}$$

解方程得

$$\begin{cases} \widetilde{\omega}_1 = \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{T}{c_t} + \frac{\sqrt{2}\tau_x}{dc_t} - \frac{\sqrt{2}\tau_y}{dc_t} - \frac{\tau_z}{c_m}\right)} \\ \widetilde{\omega}_2 = \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{T}{c_t} + \frac{\sqrt{2}\tau_x}{dc_t} + \frac{\sqrt{2}\tau_y}{dc_t} + \frac{\tau_z}{c_m}\right)} \\ \widetilde{\omega}_3 = \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{T}{c_t} - \frac{\sqrt{2}\tau_x}{dc_t} + \frac{\sqrt{2}\tau_y}{dc_t} - \frac{\tau_z}{c_m}\right)} \\ \widetilde{\omega}_4 = \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{T}{c_t} - \frac{\sqrt{2}\tau_x}{dc_t} - \frac{\sqrt{2}\tau_y}{dc_t} + \frac{\tau_z}{c_m}\right)} \end{cases}$$

也可以写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} T \\ \tau_x \\ \tau_y \\ \tau_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_t & c_t & c_t & c_t \\ \frac{\sqrt{2}}{2}dc_t & \frac{\sqrt{2}}{2}dc_t & -\frac{\sqrt{2}}{2}dc_t & -\frac{\sqrt{2}}{2}dc_t \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}dc_t & \frac{\sqrt{2}}{2}dc_t & \frac{\sqrt{2}}{2}dc_t & -\frac{\sqrt{2}}{2}dc_t \\ -c_m & c_m & -c_m & c_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{\omega}_1{}^2 \\ \widetilde{\omega}_2{}^2 \\ \widetilde{\omega}_3{}^2 \\ \widetilde{\omega}_4{}^2 \end{bmatrix}$$

记

$$M = \begin{bmatrix} c_t & c_t & c_t & c_t \\ \frac{\sqrt{2}}{2}dc_t & \frac{\sqrt{2}}{2}dc_t & -\frac{\sqrt{2}}{2}dc_t & -\frac{\sqrt{2}}{2}dc_t \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}dc_t & \frac{\sqrt{2}}{2}dc_t & \frac{\sqrt{2}}{2}dc_t & -\frac{\sqrt{2}}{2}dc_t \\ -c_m & c_m & -c_m & c_m \end{bmatrix}, \quad \widetilde{\omega}^2 = \begin{bmatrix} \widetilde{\omega}_1{}^2 \\ \widetilde{\omega}_2{}^2 \\ \widetilde{\omega}_3{}^2 \\ \widetilde{\omega}_4{}^2 \end{bmatrix}$$

又由于

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} T \\ \tau_x \\ \tau_y \\ \tau_z \end{bmatrix}$$

所以

$$\mathbf{u} = M\widetilde{\omega}^2$$

因此，由MPC控制算法求出$\mathbf{u}$之后，可以反过来求出它对应的螺旋桨转速

$$\widetilde{\omega}^2 = M^{-1}\mathbf{u}$$

$$\widetilde{\omega} = \sqrt{\widetilde{\omega}^2} = \begin{bmatrix} \sqrt{\widetilde{\omega}_1{}^2} \\ \sqrt{\widetilde{\omega}_2{}^2} \\ \sqrt{\widetilde{\omega}_3{}^2} \\ \sqrt{\widetilde{\omega}_4{}^2} \end{bmatrix}$$

=