

Simulación Numérica de la Dinámica Térmica de un Intercambiador de Calor

Santiago Espitia, Jerónimo Salazar Ortiz, Samuel Henao Mejía, Jaiver Patiño, David Andrés Arismendi Ortiz, Johan David Hincapié, Andrés David Iriarte Hernández, and Miguel Bustamente Correa

Universidad Pontificia Bolivariana

Abstract. Este informe presenta la solución numérica de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias que modelan la transferencia de calor en un intercambiador de calor de flujo cruzado. Se implementan diferentes métodos numéricos y se comparan sus resultados para evaluar precisión y estabilidad.

1 Introducción

Dentro de la ingeniería térmica, es fundamental entender la transferencia de calor, destacando el papel de los intercambiadores de calor en la industria para optimizar el aprovechamiento energético. Dado que las ecuaciones diferenciales que modelan su dinámica térmica no siempre tienen solución analítica, es fundamental recurrir a métodos numéricos para predecir su comportamiento y mejorar su eficiencia.

En este caso para el comportamiento del intercambiador de calor de flujo paralelo, se utilizarán cuatro métodos, siendo estos Runge-Kutta de orden 2, y 4, método de Euler, y como método implícito LSODA, el cual servirá de guía para comparar la tendencia, estabilidad, y demás propiedades de los métodos.

2 Objetivos

Enumere claramente los objetivos del proyecto, tales como:

- Modelar el comportamiento térmico de un intercambiador de calor mediante EDOs.
- Implementar y comparar métodos numéricos para resolver el sistema.
- Analizar la influencia de parámetros físicos en la transferencia de calor.

3 Metodología

3.1 Formulación del Problema

Se considera un intercambiador de calor de flujo paralelo con flujo de aire y agua. Aplicando la ecuación de conservación de energía a ambos fluidos, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias acopladas:

$$\frac{dT_h}{dx} = -\frac{UA}{\dot{m}_h C_{p,h}}(T_h - T_c) \quad (1)$$

$$\frac{dT_c}{dx} = \frac{UA}{\dot{m}_c C_{p,c}}(T_h - T_c) \quad (2)$$

Estas ecuaciones diferenciales describen la evolución de la temperatura a lo largo del intercambiador de calor para los fluidos caliente (T_h) y frío (T_c). Se derivan a partir del principio de conservación de la energía, considerando que la tasa de transferencia de calor entre los fluidos es proporcional a la diferencia de temperatura y al coeficiente global de transferencia de calor U .

El término $\dot{m}C_p$ en el denominador representa la capacidad térmica del flujo másico de cada fluido, lo que indica que el cambio de temperatura depende de la cantidad de energía transferida y de las propiedades termodinámicas del fluido. Al resolver este sistema de ecuaciones, se pueden obtener los perfiles de temperatura a lo largo del intercambiador y evaluar la eficiencia del proceso de intercambio térmico.

3.2 Condiciones Iniciales

Las siguientes son las condiciones iniciales utilizadas en la simulación del intercambiador de calor:

- **Coeficiente global de transferencia de calor (U):**

$$U = 500W/m^2K$$

- **Área de intercambio térmico (A):**

$$A = 50.0m^2$$

- **Caudales másicos (\dot{m}_h, \dot{m}_c):**

$$\dot{m}_h = 1.7kg/s \quad (fluidocaliente - aceite\ trmico)$$

$$\dot{m}_c = 1.199174kg/s \quad (fluido\ fro - agua)$$

- **Capacidades caloríficas específicas ($C_{p,h}$ y $C_{p,c}$):**

$$C_{p,h} = 2.2 \times 1000 = 2200J/kgK \quad (aceite\ trmico)$$

$$C_{p,c} = 4.18 \times 1000 = 4180J/kgK \quad (agua)$$

- **Temperatura de entrada del fluido caliente:**

$$T_{h0} = 150.0^\circ C \quad (aceite\ trmico)$$

- **Temperatura de entrada del fluido frío:**

$$T_{c0} = 30.0^\circ C \quad (agua)$$

3.3 Implementación Numérica

Dentro del código, inicialmente definimos los valores necesarios para la resolución de las ecuaciones planteadas, así como los valores iniciales de las temperaturas. Luego de eso, escribimos las ecuaciones para su resolución, en orden, LSODA, RK45, RK23 y Euler, poniendo antes de ellos, las variables en la forma admitida de cada uno. Para poder usar los métodos, importamos las librerías numpy junto con el módulo odeint de la librería scipy.integrate, luego para sus respectivas gráficas, se usó la librería matplotlib.pyplot.

El método de Euler es una técnica numérica simple para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO). Utiliza un enfoque de paso único para aproximar la solución. En cada paso, calcula la pendiente de la solución en el punto actual y usa esa pendiente para estimar el valor de la solución en el siguiente punto. Es menos preciso que otros métodos pero es mucho más rápido.

El método de Runge-Kutta de segundo orden (RK2), también conocido como método del punto medio o de Heun, es una técnica para resolver EDO. Utiliza dos cálculos intermedios (k_1 y k_2) para estimar la solución en un paso. Es menos preciso que el RK4 pero más sencillo y computacionalmente más eficiente.

El método de Runge-Kutta de cuarto orden (RK4) es una técnica numérica para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO). Utiliza cuatro cálculos intermedios (k_1 , k_2 , k_3 y k_4) para estimar la solución en un paso. Estos cálculos se combinan para obtener una mayor precisión que su método de segundo orden.

LSODA alterna automáticamente entre dos métodos para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO): el método de Adams para sistemas no rígidos y el método de Backward Differentiation Formulas (BDF) para sistemas rígidos. Monitorea el comportamiento del sistema y ajusta el tamaño del paso de integración para controlar el error, cambiando entre métodos según sea necesario. Esta flexibilidad lo hace eficiente y preciso en una amplia variedad de problemas.

4 Resultados

5 Análisis y Discusión

5.1 Validación de las temperaturas de los fluidos a lo largo del intercambiador

Según Kreith, F. Manglik, R. y Bohn, M. (2012), en un intercambiador de calor, el fluido caliente (aceite térmico) tiene su temperatura en descenso a medida que avanza debido a la transferencia de calor al fluido frío (agua). Esta disminución de temperatura es proporcional a la diferencia de temperatura entre los dos fluidos y al coeficiente global de transferencia de calor (U). Por otro lado, el fluido frío muestra un aumento de temperatura en la medida en que el fluido caliente puede suministrar calor, siendo este aumento también proporcional a la diferencia de temperatura y al coeficiente U . En este caso, el gradiente de temperatura entre los fluidos disminuye a lo largo del intercambiador de calor,

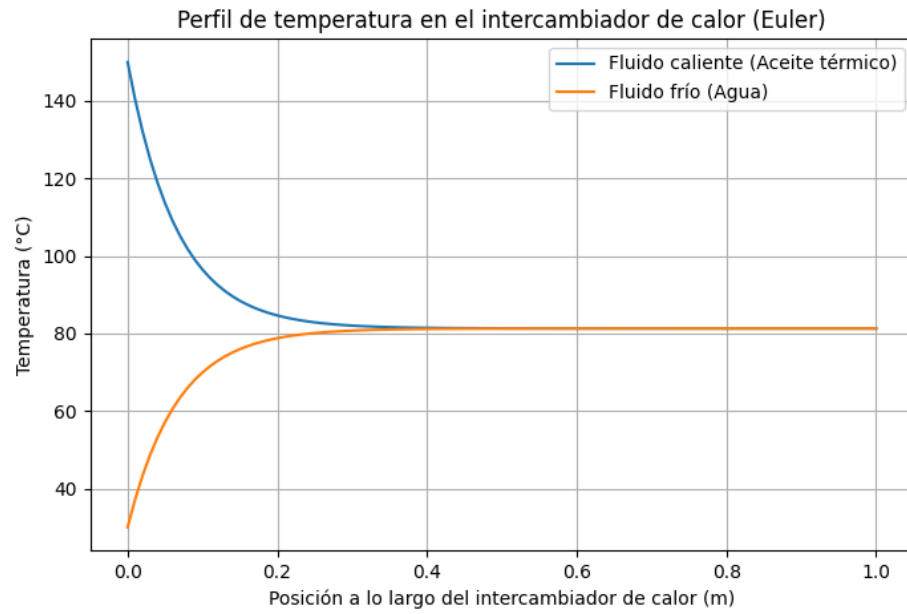


Fig. 1. Perfil de temperatura en el intercambiador de calor (Euler)

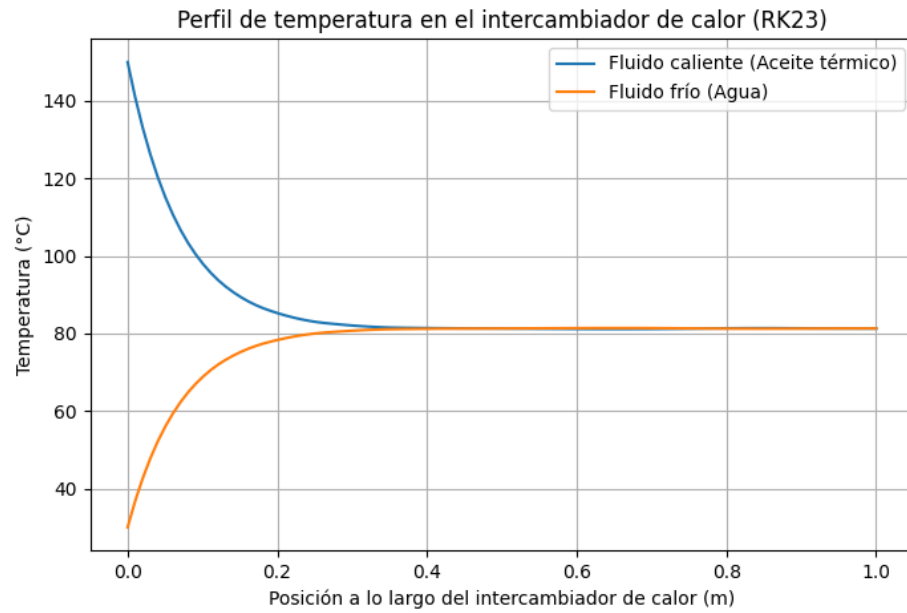


Fig. 2. Perfil de temperatura en el intercambiador de calor (RK23)

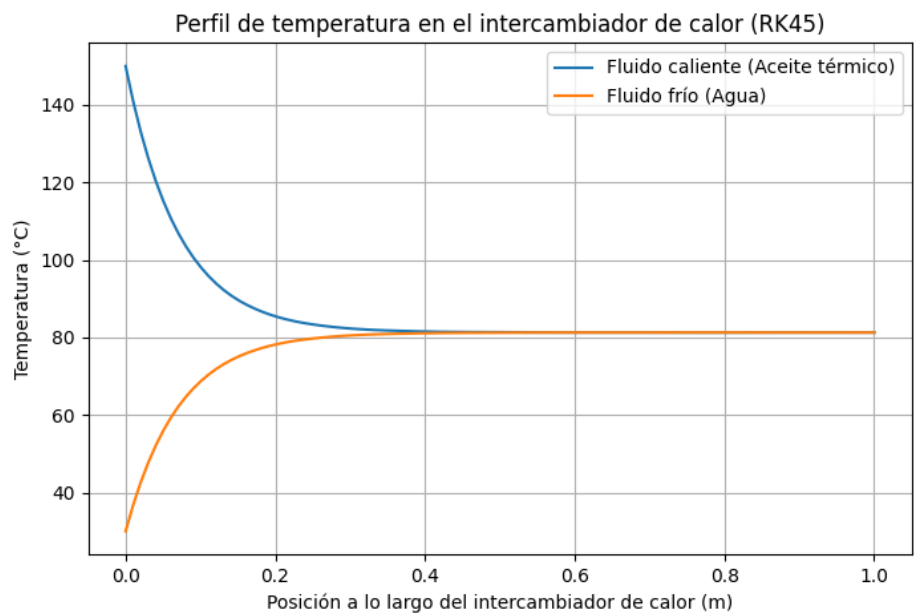


Fig. 3. Perfil de temperatura en el intercambiador de calor (RK45)

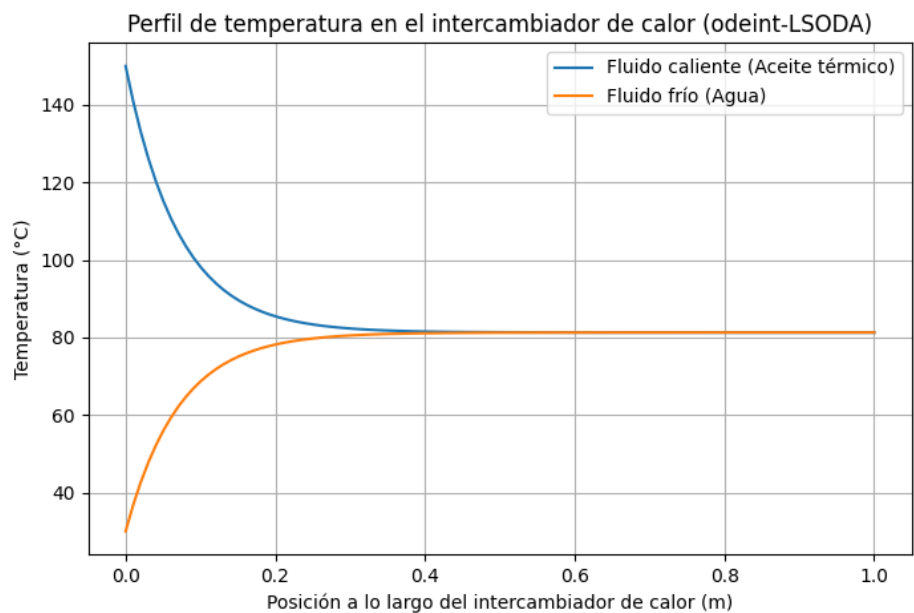


Fig. 4. Perfil de temperatura en el intercambiador de calor (LSODA)

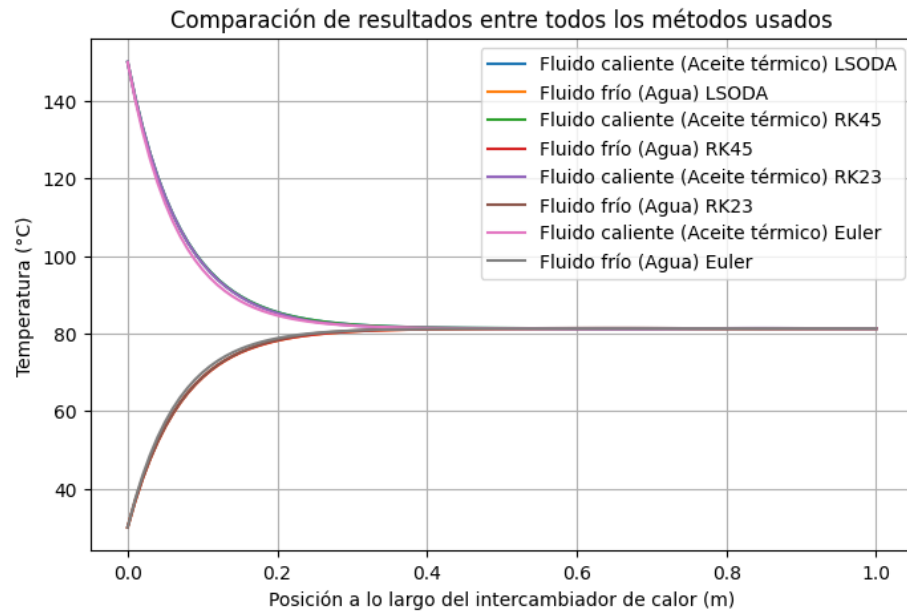


Fig. 5. Comparación de resultados entre métodos utilizados

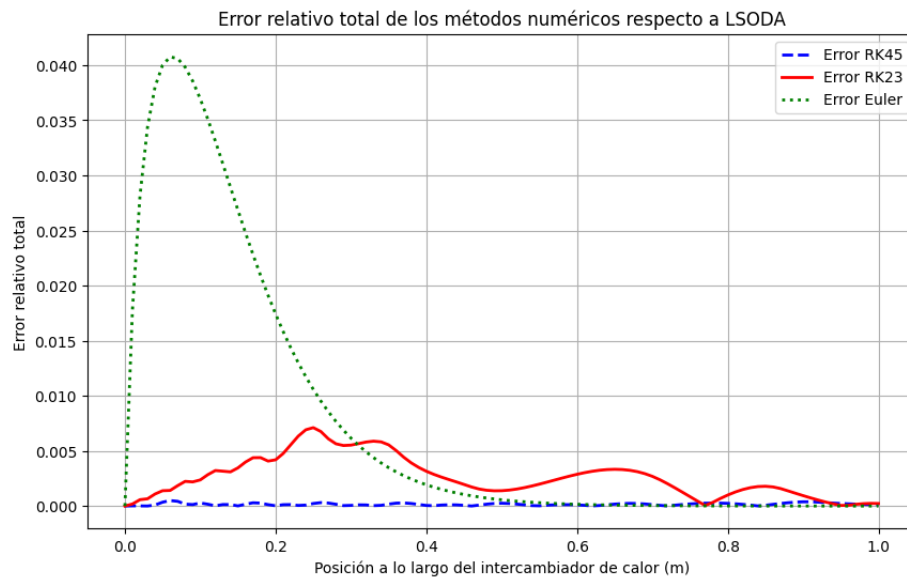


Fig. 6. Error relativo de los tres métodos con respecto al LSODA

lo que implica una disminución en la tasa de transferencia de calor a medida que los fluidos tienden a alcanzar el equilibrio térmico. Además, en un intercambiador de calor de flujo paralelo, la diferencia de temperatura de salida es mayor que en un intercambiador de flujo contrario, lo que resulta en una eficiencia menor.

5.2 Errores y estabilidad

La figura 6 presenta un análisis comparativo del error relativo generado por los métodos numéricos Euler, RK23 y RK45 en la resolución de un problema de transferencia de calor en un intercambiador, utilizando LSODA como referencia debido a su capacidad para ajustar dinámicamente su estrategia de integración, optimizando así la eficiencia y la estabilidad. El método de Euler, al ser de primer orden, exhibe el mayor error relativo al inicio del dominio, consistente con su tendencia a acumular errores rápidamente en las primeras iteraciones, aunque este error disminuye gradualmente a medida que avanza la posición, debido a su baja estabilidad (que se confirma en la grafica). RK23 muestra un error relativo significativamente menor que Euler, reflejando su mayor precisión por ser de orden superior, pero presenta oscilaciones a lo largo del intercambiador, indicando una estabilidad inferior comparada con RK45. Por otro lado, RK45 demuestra el rendimiento más sólido, con el error relativo más bajo y una estabilidad excepcional en todo el dominio, manteniendo una curva de error que tiende a ser plana y cercana a cero, lo que confirma su alta precisión como método de orden superior. Esto revela una clara relación entre el orden del método y su estabilidad, siendo Euler el menos estable, RK23 una mejora en precisión pero con inestabilidades, y RK45, un método adaptativo de orden superior, el de mayor estabilidad y precisión.

5.3 Precisión y tiempos computacionales

Con lo visto anteriormente sobre errores y estabilidad, podemos analizar cómo estos factores influyen en la precisión y el tiempo computacional de los diferentes métodos numéricos. Se ha observado que Euler, al ser el método menos estable y con mayor acumulación de errores, es también el más rápido, ya que solo realiza una evaluación por paso. RK23, aunque más preciso que Euler, presenta oscilaciones en el error y requiere más cálculos, lo que lo hace más lento. RK45, al ser un método de orden superior y más estable, necesita aún más evaluaciones por paso, aumentando su tiempo computacional, pero asegurando una mayor precisión. Finalmente, LSODA, al ser un método adaptativo, ajusta automáticamente su estrategia para minimizar errores sin aumentar innecesariamente los cálculos, logrando un balance entre precisión y eficiencia.

De acuerdo, con Silberschatz, A., Galvin, P. B., y Gagne, G. (2018). Los tiempos computacionales (figura 2) varían en cada ejecución debido a factores como la carga del procesador, la gestión de memoria, la optimización del intérprete de Python y la administración de recursos del sistema operativo. También influye la cantidad de evaluaciones de función que cada método realiza en cada paso: Euler evalúa una vez, RK23 tres veces, RK45 seis veces y LSODA ajusta

dinámicamente su estrategia, lo que explica por qué RK45 es el más lento en la mayoría de casos y LSODA logra mayor eficiencia en la mayoría de los casos.

5.4 Comparación con la literatura

Según el libro de Frank Kreith, el balance de energía en un intercambiador de calor se expresa como:

$$Q = \dot{m}c_p\Delta T \quad (3)$$

Además, el coeficiente global de transferencia de calor se define mediante:

$$Q = UA\Delta T_m \quad (4)$$

donde ΔT_m es la diferencia de temperatura media logarítmica, que se usa cuando las temperaturas de entrada y salida de los fluidos son conocidas.

Para intercambiadores de flujo en contracorriente, la eficiencia térmica se puede determinar mediante el método NTU (Número de Unidades de Transferencia):

$$\eta = 1 - \exp\left(\frac{-NTU(1 - C_r)}{1 - C_r \exp(-NTU)}\right) \quad (5)$$

donde C_r es la relación de capacidades térmicas de los fluidos.

A partir de lo anterior, obtenemos la figura 7

6 Conclusiones

- La implementación del método de Runge-Kutta de cuarto orden (RK4) permitió obtener una solución numérica estable y precisa para el sistema de ecuaciones diferenciales del intercambiador de calor de flujo paralelo.
- Se observó que la temperatura del fluido caliente disminuye de manera no lineal a lo largo del intercambiador, mientras que la temperatura del fluido frío aumenta siguiendo una tendencia similar.
- La diferencia de temperatura entre los fluidos disminuye progresivamente, lo que impacta la tasa de transferencia de calor, reduciéndola a medida que los fluidos avanzan en el intercambiador.
- La simulación numérica mostró que los valores finales de temperatura dependen directamente de los parámetros físicos del sistema, como el coeficiente de transferencia de calor (U), el caudal másico y la capacidad calorífica de los fluidos.
- Se comprobó que, al aumentar la longitud del intercambiador en la simulación, la diferencia de temperatura entre los fluidos se reduce más, acercándose a un equilibrio térmico, pero sin alcanzarlo completamente en la longitud considerada.
- La comparación de los resultados numéricos con las ecuaciones de la literatura mostró que la solución obtenida sigue la tendencia teórica esperada, validando la implementación computacional utilizada.

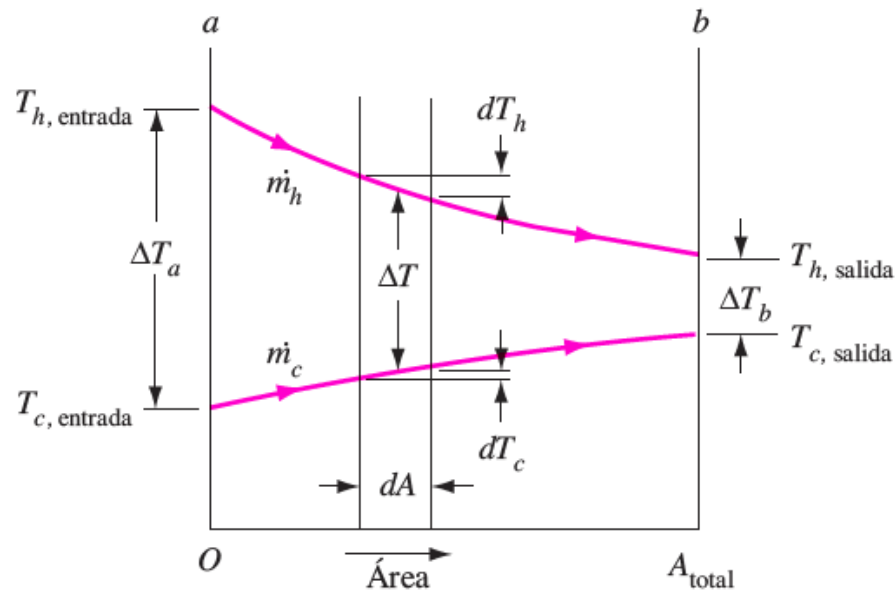


Fig. 7. Distribución de temperatura en un intercambiador de calor de flujo paralelo de un paso.

References

1. AKreith, F. y Manglik, R. y Bohn, M.. (2012). Principios de transferencia de calor. Cengage Learning
2. Incropera, F. P., DeWitt, D. P., Bergman, T. L., Lavine, A. S. (2011). Fundamentals of heat and mass transfer. Wiley.
3. Silberschatz, A., Galvin, P. B., Gagne, G. (2018). Operating system concepts (10th ed.). John Wiley Sons.