

Ejemplo: Vibración torsional de un eje con amortiguador y inercia

En algunos sistemas de transmisión (motores-ejes-cargas), el comportamiento torsional se describe con una **ecuación de tercer orden** si incluimos un término de amortiguación proporcional a la velocidad angular y a la aceleración angular.

Modelo simplificado

Supongamos un eje de transmisión con:

- J : momento de inercia [$\text{kg}\cdot\text{m}^2$]
- c : coeficiente de amortiguamiento viscoso [$\text{N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}/\text{rad}$]
- k : rigidez torsional del eje [$\text{N}\cdot\text{m}/\text{rad}$]
- I_d : inercia adicional de un amortiguador dinámico

Si $\theta(t)$ es el ángulo de giro, la ecuación puede escribirse como:

$$J \theta'''(t) + c \theta''(t) + k \theta'(t) = M(t),$$

donde:

- $\theta'''(t)$ = derivada tercera (cambio de la aceleración angular, a veces llamado *jerk angular*),
- $\theta''(t)$ = aceleración angular,
- $\theta'(t)$ = velocidad angular,
- $M(t)$ = momento aplicado (entrada del motor, por ejemplo sinusoidal o escalón).

Ejemplo concreto para tus estudiantes

Supongamos:

- $J = 10 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$,
- $c = 5 \text{ N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}/\text{rad}$,
- $k = 200 \text{ N}\cdot\text{m}/\text{rad}$,
- Momento aplicado: $M(t) = 100 \sin(5t) \text{ N}\cdot\text{m}$.

La ecuación queda:

$$10 \theta'''(t) + 5 \theta''(t) + 200 \theta'(t) = 100 \sin(5t).$$

$$u = \theta'$$

$$W = u' = \theta''$$

$$10 W' + 5 W + 200 u = 100 \sin(5t)$$

$$\theta' = u$$

$$u' = W$$

$$W' = \frac{100 \sin(5t) - 5W - 200u}{10}$$

$$\vec{z}(t) = \begin{pmatrix} \theta(t) \\ u(t) \\ W(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ W \\ 10 \sin 5t - 0.5W - 20u \end{pmatrix}$$

$$\vec{z}' = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ 10 \sin 5t - 0.5z_2 - 20z_1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{z}' = \vec{f}(\vec{z})$$