Problemas No Lineales: Formulación Completa (Mecánica y Aeronáutica)

1. Ejemplo 1: Ajuste de un tornillo con fricción no lineal (1 incógnita)

En el montaje de dos piezas, un tornillo de acero (diámetro nominal $d = 12$ mm $=$ 0,012 m) se ajusta con una llave dinamométrica. El *momento de apriete* M y la *precarga* F se relacionan por

$$M \;=\; K(F)\,F\,d, \qquad K(F) \;=\; 0{,}18 \;+\; 0{,}0005\,F^{0{,}6},$$

donde $K(F)$ captura el efecto no lineal de fricción/deformación en la rosca (F en N, M en N·m).

Datos

- Llave dinamométrica fija: $M = 40$ N $\cdot$ m.
- Diámetro: $d = 0{,}012$ m.
- Modelo de fricción: $K(F) = 0{,}18 + 0{,}0005\,F^{0{,}6}$ (con F en N).
- (Para comparación de seguridad) Límite de fluencia: $\sigma_y = 640$ MPa; área de tensión $A_t = 84$ mm^2.
- Precarga óptima de referencia: $F_{\text{opt}} = 0{,}35\,\sigma_y\,A_t$.

Ecuación no lineal y derivada

$$f(F) \;=\; K(F)\,F\,d \;-\; M \;=\; 0.$$

La derivada para Newton es

$$K'(F) = 0{,}0005 \times 0{,}6\,F^{-0{,}4} = 0{,}0003\,F^{-0{,}4}, \qquad f'(F) = d\big(K'(F)\,F + K(F)\big).$$

Iteración de Newton (una incógnita)

$$F_{k+1} \;=\; F_k \;-\; \frac{f(F_k)}{f'(F_k)}, \qquad F_k > 0.$$

Sugerencia: elegir F_0 dentro de un intervalo físico, p. ej. $F \in [5 \times 10^3,\, 2 \times 10^4]$ N, ya que $f(F)$ es monótona creciente en $F > 0$.

Cálculos numéricos útiles para clase

$$F_{\text{opt}} = 0{,}35 \times 640 \times 10^6 \text{ Pa} \times 84 \times 10^{-6} \text{ m}^2 = 18{,}816 \text{ N}.$$

El momento que requeriría esa precarga óptima sería

$$M_{\text{req}} \;=\; K(F_{\text{opt}})\, F_{\text{opt}}\, d \approx 0{,}18{+}0{,}0005\, F_{\text{opt}}^{0{,}6} \;\;\Rightarrow\;\; M_{\text{req}} \approx 82{,}08 \text{ N} \cdot \text{m}.$$

Con $M = 40$ N · m, la solución de $f(F) = 0$ resulta $F^{\star} \approx 10{,}720$ N (subsatisfaciendo F_{opt}). Esto permite discutir *sub/sobre-apriete*.

2. Ejemplo 2: Boquilla isentrópica (aeronáutica, 1 incógnita)

Determinar el número de Mach M en una sección de un difusor/boquilla isentrópica 1D para aire ($\gamma = 1{,}4$), con relación de áreas respecto al área crítica:

$$\frac{A}{A^*} = 1{,}80.$$

Relación área–Mach y ecuación

$$R(M) \equiv \frac{A}{A^*}(M) = \frac{1}{M}\left[\frac{2}{\gamma+1}\left(1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2\right)\right]^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}, \qquad f(M) = R(M) - 1{,}80 = 0.$$

Derivada para Newton

$$R'(M) = R(M)\left[-\frac{1}{M} + \frac{\gamma+1}{2}\,\frac{M}{1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2}\right], \qquad f'(M) = R'(M).$$

Newton:

$$M_{k+1} = M_k - \frac{f(M_k)}{f'(M_k)}.$$

Observación: para $A/A^* > 1$ existen dos soluciones (subsónica y supersónica). Elegir M_0 guía la rama.

3. Ejemplo 3: Transmisión de torque por correa (mecánica, 2 incógnitas)

Una polea de radio R transmite un par M mediante una correa con fricción μ y ángulo de arrollamiento β. Tensiones en ramales tenso/flojo: T_1, T_2.

Datos

$$\mu = 0{,}30, \quad \beta = 2{,}5 \text{ rad}, \quad R = 0{,}10 \text{ m}, \quad M = 50 \text{ N} \cdot \text{m}, \quad E \equiv e^{\mu\beta}.$$

Sistema no lineal

$$\begin{cases} f_1(T_1, T_2) = \dfrac{T_1}{T_2} - E = 0, \\ f_2(T_1, T_2) = (T_1 - T_2)R - M = 0. \end{cases}$$

Jacobiano analítico y Newton multivariable

$$\mathbf{J}(T_1, T_2) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{T_2} & -\dfrac{T_1}{T_2^2} \\ R & -R \end{bmatrix}.$$

Con $\mathbf{x} = [T_1,\, T_2]^T$, $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = [f_1, f_2]^T$,

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \mathbf{J}(\mathbf{x}_k)^{-1}\,\mathbf{f}(\mathbf{x}_k).$$

Solución cerrada (útil para verificar):

$$T_2 = \frac{M}{R(E-1)}, \qquad T_1 = E\,T_2.$$

4. Ejemplo 4: Intercambiador tubos–coraza con restricción de ΔPDelta P (mecánica, 2 incógnitas)

Diseñar un intercambiador para enfriar aceite con agua cumpliendo simultáneamente Q y $\Delta P_{\text{máx}}$. Incógnitas: velocidades v_w (tubos, agua) y v_o (coraza, aceite).

Datos

$$Q = 150 \text{ kW}, \quad \Delta T_{lm} = 25 \text{ K}, \quad \Delta P_{\text{máx}} = 100 \text{ kPa}.$$

Geometría:

$$D = 0{,}025 \text{ m}, \quad L = 4{,}0 \text{ m}, \qquad D_h = 0{,}04 \text{ m}, \quad L_c = 3{,}0 \text{ m}.$$

Propiedades (representativas):

$$\rho_w = 995 \text{ kg/m}^3,\ \mu_w = 8 \times 10^{-4} \text{ Pa} \cdot \text{s},\ k_w = 0{,}60 \text{ W/m} \cdot \text{K},\ \text{Pr}_w = 5{,}5,$$

$$\rho_o = 850 \text{ kg/m}^3,\ \mu_o = 0{,}03 \text{ Pa} \cdot \text{s},\ k_o = 0{,}13 \text{ W/m} \cdot \text{K},\ \text{Pr}_o = 200.$$

Caudal másico de agua (para dimensionar número de tubos): $\dot{m}_w = 1{,}5$ kg/s.

Transferencia de calor

$$\mathrm{Re}_w = \frac{\rho_w v_w D}{\mu_w}, \quad \mathrm{Re}_o = \frac{\rho_o v_o D_h}{\mu_o},$$
$$h_w = 0{,}023\,\frac{k_w}{D}\,\mathrm{Re}_w^{0{,}8}\,\mathrm{Pr}_w^{0{,}3}, \qquad h_o = 0{,}36\,\frac{k_o}{D_h}\,\mathrm{Re}_o^{0{,}55}\,\mathrm{Pr}_o^{1/3},$$
$$U = \left(\frac{1}{h_w} + \frac{1}{h_o}\right)^{-1}.$$

Área de intercambio

$$\dot{V}_w = \frac{\dot{m}_w}{\rho_w}, \quad A_{\mathrm{sec,t}} = \frac{\pi D^2}{4}, \quad N_{\mathrm{tubos}} = \frac{\dot{V}_w}{v_w\,A_{\mathrm{sec,t}}}, \quad A_{\mathrm{total}} = N_{\mathrm{tubos}}\,(\pi D L).$$

Caída de presión

$$f = 0{,}079\,\mathrm{Re}^{-0{,}25}, \qquad \Delta P_w = f_w\,\frac{L}{D}\,\frac{\rho_w v_w^2}{2}, \quad \Delta P_o = f_o\,\frac{L_c}{D_h}\,\frac{\rho_o v_o^2}{2}.$$

Sistema no lineal

$$\begin{cases} f_1(v_w, v_o) = U(v_w, v_o)\,A_{\mathrm{total}}(v_w)\,\Delta T_{lm} - Q = 0, \\ f_2(v_w, v_o) = \Delta P_w(v_w) + \Delta P_o(v_o) - \Delta P_{\mathrm{máx}} = 0. \end{cases}$$

Resolución con Newton multivariable. Se recomienda Jacobiano numérico (diferencias finitas) y cuidados de convergencia (p. ej., búsqueda de línea y cotas $v_w, v_o > 0$).