

反演變換

Whale120

June 2023

1 Introduction

反演變換對於許多複雜的幾何問題都能發揮它的強大之處

2 定義與性質

Definition 1.

對於兩個點 P 、 O 以及實數 k ，若點 P^* 滿足 $OP \cdot OP^* = k$ ，則稱 P^* 為 P 以反演幂 k 、反演中心 O 產生的像

其中，若 $k > 0$ 則稱為**雙曲線型變換**，若 $k < 0$ 則是**橢圓型變換**

Remark. 注意，邊相乘在這邊是具有方向性的，同向 $k > 0$ ，反之則小於 0

接下來，來關心不同的圖形反演後的像會有什麼樣的變化

Property 2.

- i.* 一條直線若通過反演中心，則反演後的像為它自己
- ii.* 一條直線若不通過反演中心，則反演後的為通過反演中心的一個圓
- iii.* 一個通過反演中心的圓，反演後為不通過反演中心的直線

iv. 一個不通過反演中心的圓，反演後為不通過反演中心的另一圓
(證明的部分可以自己仔細思考看看，原則上這些性質解題都可以直接使用)

Property 3.

A, B 經過同一個反演後的像為 A^*, B^* ，則四點共圓

Proof. 圓幂性質即可說明

Property 4.

A, B 經過同一個反演後的像為 A^*, B^* ，則 $\overline{A^*B^*} = \frac{|k|}{OA \cdot OB} \overline{AB}$

本結論可以用前一個性質得到相似形的關係解出

Property 5.

反演後兩平滑曲線相交角度保持不變(平滑曲線包含圓形和直線)

Definition 6.

一個點 P 對一圓 O 的兩切點連線稱為 P 對於圓 O (半徑為 r) 的極線，其中 OP 與極線的交點就是 P 對於中心為 O ，幂為 r^2 的反演變換像

其中，若 P 在圓上，則極線就是它的切線

P.S. 極線也有許多相關知識，有興趣可以上網查詢相關資料(之後或許也會做講義(?))

Theorem 7.

La Hire

若 A 在 B 的極線上，則 B 在 A 的極線上(可以嘗試用共圓的性質證明之)

3 例題和習題

3.1 例題

例題 1.(USAMO 1993 P2)

設四邊形 $ABCD$ 對角線互相垂直且交於 E ，證明： E 關於四個邊的反射點共圓

Solution 1-1:

設它對於四個邊 (AB, BC, CD, AD) 的垂足為 W, X, Y, Z ，利用垂直的角度們可以得 $AXEZ, BWEX, CXEY, DYEZ$ 點組們四點共圓，則可以計算角度：

$$\begin{aligned}\angle ZWX &= 180^\circ - (\angle AWZ + \angle BWX) = 180^\circ - (\angle AEZ + \angle BEX) \\ &= 180^\circ - (\angle ADE + \angle BCE) = 180^\circ - (\angle ZYE + \angle XYE) = 180^\circ - \angle XYZ\end{aligned}$$

於是 $WXYZ$ 四點共圓，又其反射點形成的四邊形即為 $WXYZ$ 對 E 的兩倍位似，必共圓，得證。

Solution 1-2:

設它對於四個邊 (AB, BC, CD, AD) 的反射點為 W, X, Y, Z ，則有 W, Z, E 在以 A 為圓心的圓型上(同理對於其餘四個點組)。接著考慮他們對 E 反演後的像，以圓 $\odot(WZE)$ 為例，以 E 反演後 $\odot(WZE)$ 變成一個不過 E 的直線，而且它垂直於 AE (E 過它的圓心所以反演後他們垂直)

於是，反演後 W, X, Y, Z 的像 W^*, X^*, Y, Z^* 為四線交點，是一個矩形，四點共圓，而四點變換前就不過 E ，所以變換後共圓即代表變換前亦共圓

看出來了嗎?其實反演就是將一個圖形變成另一個之後讓你有更多不同的角度進行切入並解答它(雖然上面的例子看似多此一舉...)

例題 2.(NIMO 2014)

$\triangle ABC$ 的內心是 I ， $\triangle DEF$ 為內切三角形，點 Q 為滿足 $AB \perp QB$ ， $AC \perp QC$ 。證明： $DP \perp EF$

hint 1.反演中心是 I

hint 2.中點 \rightarrow 九點圓

利用反演解題時，你必須能清楚說出每個點的像是什麼再解題

例題 3.(China Western 2006)

設四邊形 $ADBE$ 內接於以 AB 為直徑的圓，對角線相交於 C ，設 Γ 為 BOD 外接圓，其中 O 為 AB 中點，設 F 是 Γ 的點 O 對其圓心的對稱點(我們稱之為對徑點)，射線 FC 交 Γ 於另一點 G 。證明： $AOGE$ 四點共圓。

hint 1.反演中心是 O

hint 2. G 除了以線與圓的交點表達有沒有更好的取代方式?

hint 3.定義某個點 G' 為 $\odot DOB$ 與 AOE 的交點

3.2 習題

習題 1.(USAMO 2009 P5)

Trapezoid $ABCD$, with $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, is inscribed in circle ω and point G lies inside triangle BCD . Rays AG and BG meet ω again at points P and Q ,

respectively. Let the line through G parallel to \overline{AB} intersects \overline{BD} and \overline{BC} at points R and S , respectively. Prove that quadrilateral $PQRS$ is cyclic if and only if \overline{BG} bisects $\angle CBD$.

習題 2.(2015 IMO P3)

Let ABC be an acute triangle with $AB > AC$. Let Γ be its circumcircle, H its orthocenter, and F the foot of the altitude from A . Let M be the midpoint of BC . Let Q be the point on Γ such that $\angle HQA = 90^\circ$ and let K be the point on Γ such that $\angle HKQ = 90^\circ$. Assume that the points A, B, C, K and Q are all different and lie on Γ in this order.

Prove that the circumcircles of triangles KQH and FKM are tangent to each other.

習題 3.(2015 Canada MO P4)

Let ABC be an acute-angled triangle with circumcenter O . Let I be a circle with center on the altitude from A in ABC , passing through vertex A and points P and Q on sides AB and AC . Assume that

$$BP \cdot CQ = AP \cdot AQ.$$

Prove that I is tangent to the circumcircle of triangle BOC .

習題 4.(2013 ELMO shortlist)

Let ω_1 and ω_2 be two orthogonal circles, and let the center of ω_1 be O . Diameter AB of ω_1 is selected so that B lies strictly inside ω_2 . The two circles tangent to ω_2 , passing through O and A , touch ω_2 at F and G . Prove that $FGOB$ is cyclic.

習題 5.(2010 Croatia MO P7)

Given a non- isosceles triangle ABC . Let the points B' and C' be symmetric to the points B and C wrt AC and AB respectively. If the circles circumscribed around triangles ABB' and ACC' intersect at point P , prove that the line AP passes through the center of the circumcircle of the triangle ABC .

習題 6.(2015 Taiwan TST 3J)

In a scalene triangle ABC with incenter I , the incircle is tangent to sides CA and AB at points E and F . The tangents to the circumcircle of triangle AEF at E and F meet at S . Lines EF and BC intersect at T . Prove that the circle with diameter ST is orthogonal to the nine-point circle of triangle BIC .

習題 7.(2008 BAMO G4)

A point D lies inside triangle ABC . Let A_1, B_1, C_1 be the second intersection points of the lines AD , BD , and CD with the circumcircles of BDC , CDA , and ADB , respectively. Prove that

$$\frac{AD}{AA_1} + \frac{BD}{BA_1} + \frac{CD}{CC_1} = 1.$$