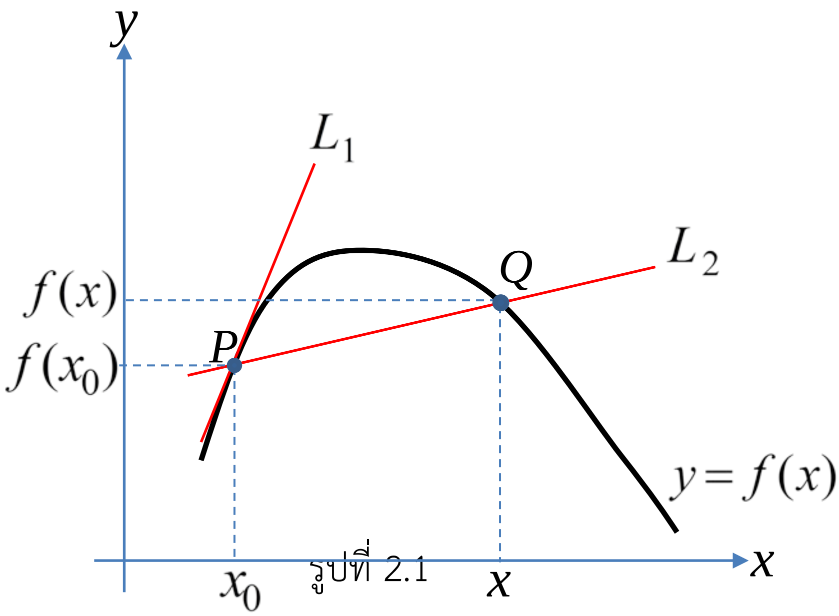
บทที่ 2

ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

2.1 แนวคิดเกี่ยวกับลิมิต

2.1.1 เส้นสัมผัส(Tangent line) และเส้นตัดโค้ง(Secant line)



รูปที่ 2.1

จากรูปที่ 2.1

เส้นตรง L_1 เรียกว่า **<u>เส้นสัมผัส(tangent line)</u>** เส้นโค้ง $y = f(x)$ ที่จุด P และมีความชันเป็น $m_{\tan}$

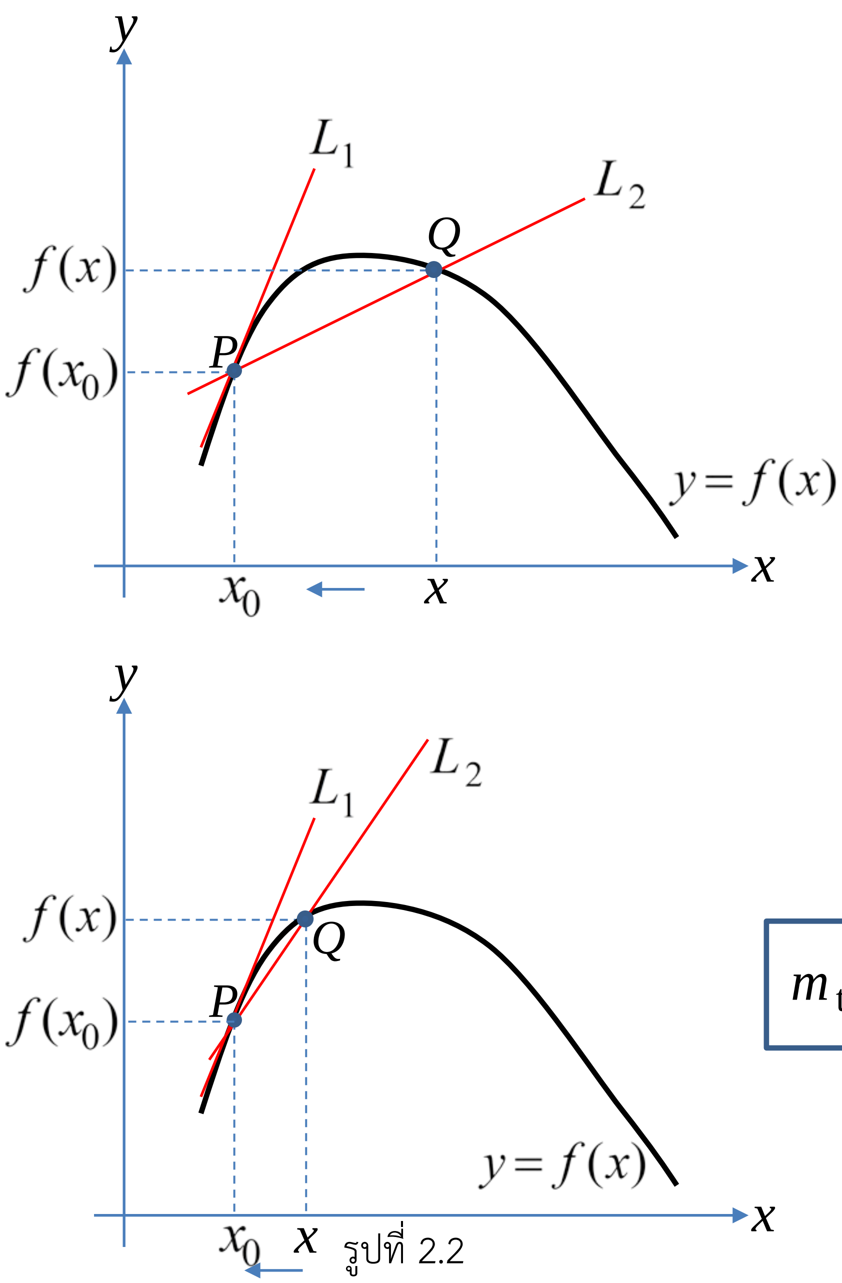
เส้นตรง L_2 ที่ผ่านจุด P และจุด Q เรียกว่า **<u>เส้นตัดโค้ง(segcant line)</u>**

ความชันของเส้นตัดโค้งที่ผ่านจุด P และจุด Q คือ

$$m_{\sec} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

จากรูปที่ 2.2 ขณะที่ x วิ่งเข้าใกล้ค่า x_0 (หรือ $x \to x_0$) จุด Q จะเคลื่อนไปตามเส้นโค้ง $y = f(x)$ เข้าใกล้จุด P และความชันของเส้นตัดโค้ง($m_{\sec}$) จะเข้าใกล้ความชันของเส้นสัมผัส($m_{\tan}$) ที่จุด P เราจะกล่าวว่า

$$\boxed{m_{\tan} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} \tag{2.1}$$



รูปที่ 2.2

ถ้าให้ $h = x - x_0$ จะได้ว่า $x \to x_0$ สมมูลกับ $h \to 0$ ดังนั้น สมการ (2.1) เขียนได้ใหม่ในรูป

$$\boxed{m_{\tan} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}} \tag{2.2}$$

<u>ตัวอย่าง 2.1</u> จงใช้สูตรหาความชัน (2.1) และ (2.2) หาสมการเส้นสัมผัส (tangent line)ของเส้นโค้งพาราโบลา $y = x^2$ ที่จุด (1,1)

<u>วิธีทำ</u> ในที่นี้ $f(x) = x^2$ และ $x_0 = 1$

โดยใช้สูตร (2.2): $m_{\tan} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1}$

โดยใช้สูตร (2.3): $m_{\tan} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h}$

ดังนั้น สมการเส้นสัมผัสของ $y = x^2$ ที่จุด (1,1) มีสมการเป็น

<u>เก็บไปคิด 1</u>

1). จงหาสมการเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = \dfrac{2}{x}$ ที่จุด (2,1)

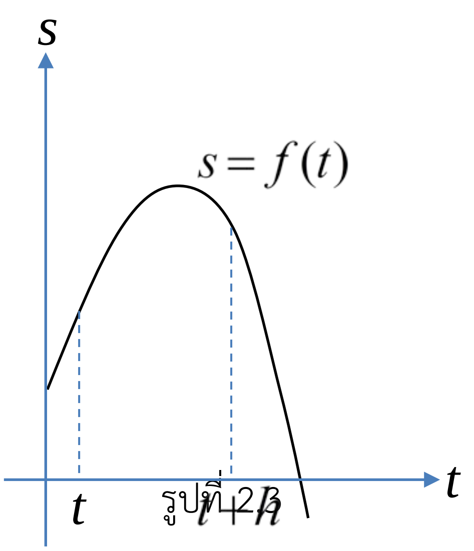
2). จงหาความชันของเส้นโค้ง $y = \sqrt{x}$ ที่จุด $x_0 = 1,\ x_0 = 4$ และ $x_0 = 9$ ตามลำดับ

<u>คำตอบ</u> 1). $y = -\dfrac{1}{2}x + 2$ 2). $\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}$ และ $\dfrac{1}{6}$

2.2 ความเร็วเฉลี่ย (Average velocity) และความเร็วขณะใดขณะหนึ่ง (Instantaneous velocity)

ความเร็วเฉลี่ย(Average velocity) เป็นความเร็วที่เกิดจากการเปลี่ยนตำแหน่งของวัตถุในช่วงเวลาที่พิจารณา

ความเร็วขณะใดขณะหนึ่ง(Instantaneous velocity) เป็นความเร็ว ณ เวลาใดเวลาหนึ่ง หรือเป็นความเร็วที่กำลังผ่านจุดใดจุดหนึ่ง



รูปที่ 2.3

โดยทั่วไปสมการการเคลื่อนที่ของวัตถุกำหนดในรูป $s = f(t)$ เมื่อ s แทนระยะทาง, t แทนเวลา และ f เป็นฟังก์ชันบอกตำแหน่งของวัตถุ

ความเร็วเฉลี่ย(V_{ave})ของวัตถุในช่วงเวลา $[t, t+h]$, $h>0$ หาได้จากสูตร

$$V_{ave} = \frac{\text{ระยะทางที่วัตถุเคลื่อนที่}}{\text{ช่วงเวลาที่วัตถุใช้ในการเคลื่อนที่}}$$

$$= \frac{f(t+h)-f(t)}{(t+h)-t} = \frac{f(t+h)-f(t)}{h} \qquad (2.3)$$

<u>**หมายเหตุ 2.1**</u>

1) สูตร (2.3) เป็นสูตรคำนวณ**ความเร็วเฉลี่ย**ของการเคลื่อนที่ในช่วงเวลาหนึ่ง ไม่ใช่**ความเร็วขณะใดขณะหนึ่ง**

2) การเปลี่ยนตำแหน่งของวัตถุ $f(t+h)-f(t)$ เรียกว่า **ระยะขจัด** (displacement)ของวัตถุบนในช่วงเวลา t ถึง $t+h$

3) สูตร (2.3) ยังคงเป็นจริงสำหรับช่วงเวลา $\left[t+h,\, t\right]$, $h<0$

4) h เรียกว่า **elapsed time**

<u>ปุจฉา</u> เราจะหาความเร็วขณะใดขณะหนึ่งได้อย่างไร

<u>วิสัชนา</u> ปัญหาต่อไปนี้จะช่วยแสดงแนวคิดในการคำนวณหาความเร็วขณะใดขณะหนึ่ง

<u>ปัญหา</u> ปล่อยวัตถุจากยอดตึกใบหยก 2 ซึ่งสูง 304 เมตรจากพื้นดิน อยากทราบความเร็วของวัตถุหลังจากปล่อยไปแล้ว 5 วินาที

<u>แนวคิด</u> ความเร็วของวัตถุหลังจากปล่อยไปแล้ว 5 วินาที จะเป็น ความเร็วขณะใดขณะหนึ่ง ซึ่งก็คือ ความเร็วในขณะ $t=5$ นั่นเอง โดยจะทำการเปรียบเทียบความเร็วนี้กับความเร็วเฉลี่ยในช่วงเวลาก่อนและหลัง $t=5$

กาลิเลโอค้นพบว่าเมื่อปล่อยวัตถุให้ตกลงมาจากที่สูง(ไม่มีแรงต้านของอากาศ) ระยะทาง s ที่วัตถุเคลื่อนที่ได้สัมพันธ์กับเวลา t ตามสมการ

$$s(t) = 4.9t^2$$

โดยที่ s มีหน่วยเป็นเมตร(m) และ t มีหน่วยเป็นวินาที(s)

พิจารณาความเร็วเฉลี่ยในช่วง $t=5-h$ ถึง $t=5$

$$V_{ave} = \frac{f(5)-f(5-h)}{5-(5-h)}$$

พิจารณาความเร็วเฉลี่ยในช่วง $t=5$ ถึง $t=5+h$

$$V_{ave} = \frac{f(5+h)-f(5)}{(5+h)-5} =$$

จะเห็นได้ว่า

$$\leq \text{ ความเร็วขณะ } t=5 \leq$$

จากตารางที่ 2.1 เมื่อกำหนดให้ h มีค่าเข้าใกล้ 0 ($h \to 0$) ความเร็วเฉลี่ยของวัตถุจะมีค่าเข้าใกล้ 49 เมตรต่อวินาที ซึ่งหมายความว่าความเร็วเฉลี่ยของวัตถุจะมีค่าใกล้เคียงกับความเร็วขณะเวลาผ่านไป 5 วินาที นั่นเอง

ตารางที่ 2.1

h เข้าใกล้ 0 จากทางด้านซ้าย $\rightarrow$ $\leftarrow$ h เข้าใกล้ 0 จากทางด้านขวา

h	-0.1	-0.01	-0.001	-0.0001	0	0.0001	0.001	0.01	0.1
$49-4.9h$	49.49	49.049	49.0049	49.00049	x	48.99951	48.9951	48.951	48.51
$49+4.9h$	48.51	48.951	48.9951	48.99951	x	49.00049	49.0049	49.049	49.49

ดังนั้น ความเร็วขณะ $t=5$ คือ $\lim_{h\to 0} V_{ave} = \lim_{h\to 0}\dfrac{f(5+h)-f(5)}{h} = 49$

สำหรับวัตถุที่มีการเคลื่อนที่ในแนวเส้นตรง(rectilinear motion) กำหนดโดยสมการ $s=f(t)$ ความเร็วขณะ t ใดๆ คือ

$$V_{inst} = \lim_{h\to 0}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}$$

เก็บไปคิด 2

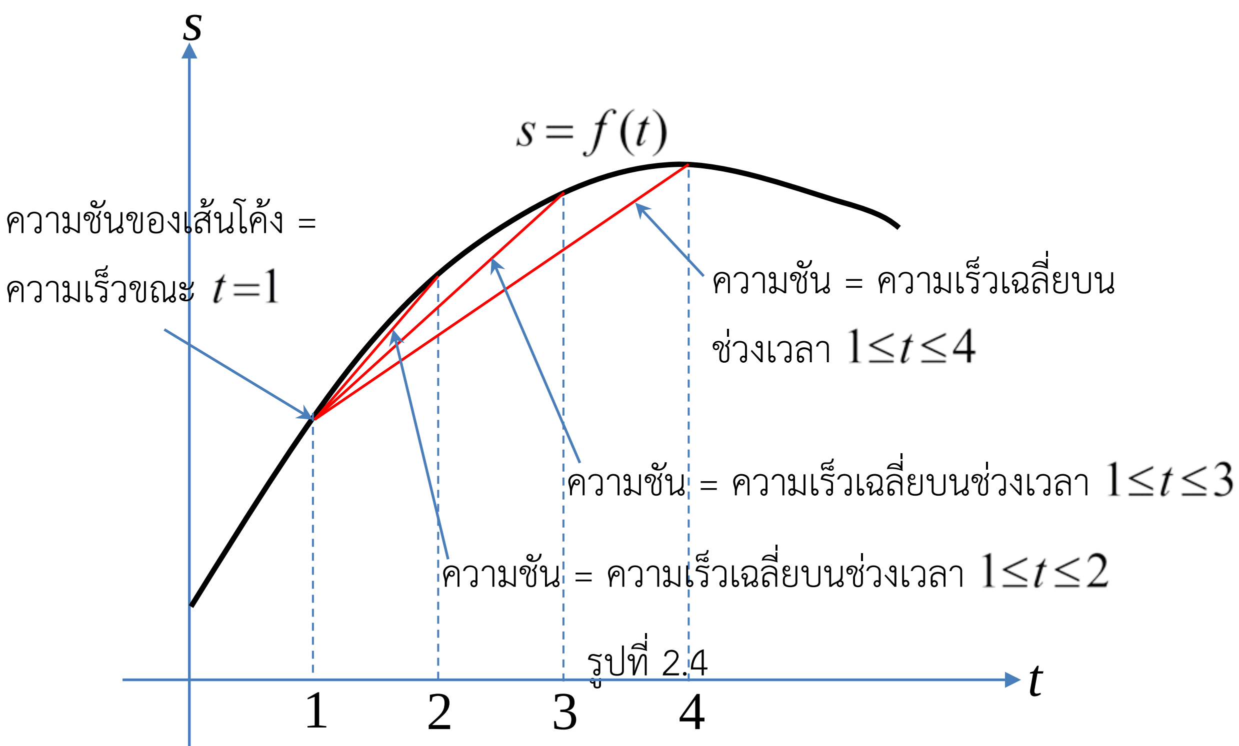
วัตถุชิ้นหนึ่งถูกปล่อยจากตึกๆหนึ่งซึ่งสูง 1,250 ฟุตเหนือระดับพื้นดิน ความสูงของวัตถุชิ้นนี้ถูกกำหนดโดยสมการ $S = f(t) = 1250-16t^2$

ก) จงหาความเร็วเฉลี่ยของวัตถุในช่วงเวลา $t = 5$ ถึง $t = 6$ วินาที

ข) จงหาความเร็วของวัตถุขณะ $t = 5$ วินาที

<u>หมายเหตุ 2.2</u>

เราอาจพิจารณา**ความเร็วขณะใดขณะหนึ่ง**ในบริบทของความชันของเส้นโค้ง $s = f(t)$ ได้ ดังนี้



รูปที่ 2.4

ความเร็วขณะใดขณะหนึ่งเป็น**ความชันของเส้นโค้ง**ที่จุดจุดหนึ่ง

ความเร็วเฉลี่ยบนช่วงเวลา $a \le t \le b$ เป็น**ความชันของเส้นตรง**ที่เชื่อมจุดบนกราฟ $s = f(t)$ ที่ $t = a$ และ $t = b$

<u>ตรวจสอบความเข้าใจ 1</u>

1). ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = f(x)$ ที่จุด $P(x_0, f(x_0))$

กำหนดโดย $\qquad m_{\tan} = \lim\limits_{x \to x_0} \underline{\qquad\qquad} = \lim\limits_{h \to 0} \underline{\qquad\qquad}$

2). ถ้า $4x + y = 0$ เป็นสมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = (x-1)^2$ ที่จุด $(-1,4)$ แล้ว $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x+1} =$ ....

3. ให้ $s = f(t)$ เป็นสมการการเคลื่อนของวัตถุ โดยที่ s มีหน่วยเป็นเมตร และ t มีหน่วยเป็นวินาที สมมติว่า $s = -1$ เมื่อ $t = 2$ และมีความเร็วขณะ $t = 2$ เท่ากับ 3 เมตรต่อวินาที สมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่ $t = 2$ คือ ....

4. “ถ้า $\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = 3$ แล้ว $\lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = 3$” ประโยคนี้จริงหรือเท็จ

2.2 ลิมิตของฟังก์ชัน(The limit of a Function)

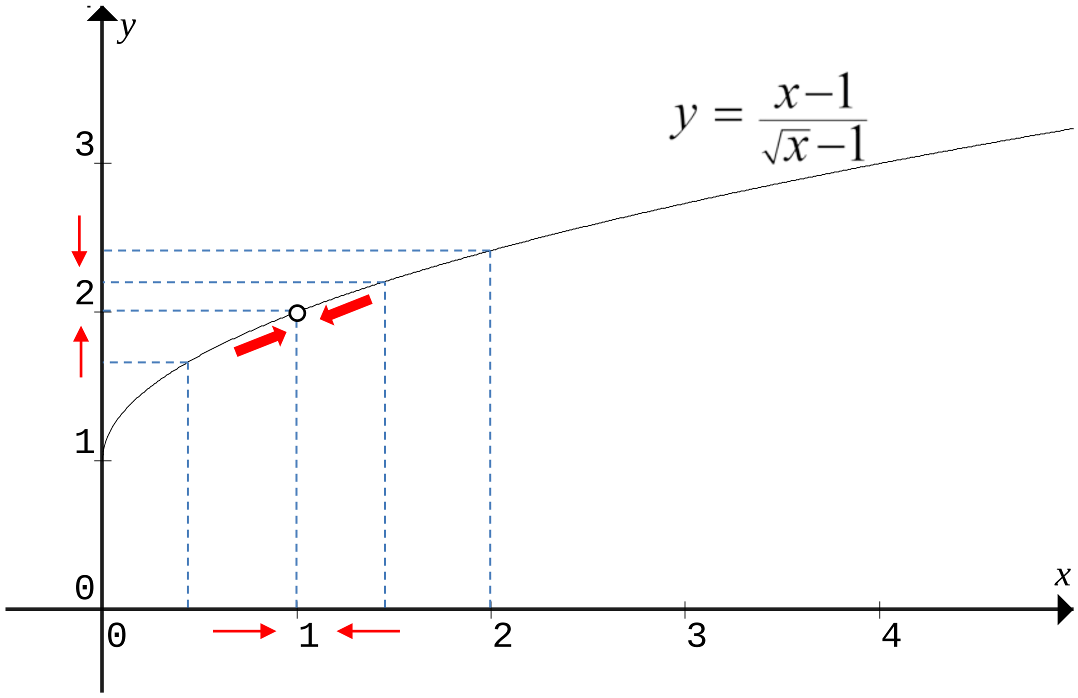
พิจารณาฟังก์ชัน $y = f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$ จะเห็นว่าไม่สามารถหาค่า $f(1)$ ได้ เพราะฟังก์ชันไม่นิยามที่ $x=1$ แต่เราสามารถหาค่าของ $f(x)$ ณ จุด x ต่างๆที่ใกล้ๆ 1 ได้จากทางด้านซ้ายและด้านขวาของ $x=1$ ดังตารางที่ 2.2

ตารางที่ 2.2

x เข้าใกล้ 1 ทางด้านซ้าย $\rightarrow$ $\leftarrow$ x เข้าใกล้ 1 ทางด้านขวา

x	0.99	0.999	0.9999	0.99999	1	1.00001	1.0001	1.001	1.01
$f(x)$	1.994987	1.999500	1.999950	1.999995	x	2.000005	2.000050	2.000500	2.004988

การพิจารณาค่าของฟังก์ชันที่จุดต่างๆใกล้ๆ 1 นั้น นอกจากใช้การแทนค่า x ต่างๆในฟังก์ชันแล้ว ยังสามารถพิจารณาจากกราฟได้อีกวิธีหนึ่ง ดังรูปที่ 2.5



รูปที่ 2.5

จากตารางที่ 2.2 และรูปที่ 2.5 จะได้ว่า

เมื่อ x เข้าใกล้ 1 จากทางซ้าย $(x<1)$ ค่าของ $f(x)$ จะเข้าใกล้ค่า ... ซึ่งเขียนเป็นสัญลักษณ์ได้ว่า .... สัญลักษณ์นี้อ่านว่า .... $f(x)$ เนื่องจากลิมิตนี้พิจารณาจุดที่ $x<1$ จึงเรียกลิมิตนี้ว่า $f(x)$	เมื่อ x เข้าใกล้ 1 จากทางซ้าย $(x<1)$ ค่าของ $f(x)$ จะเข้าใกล้ค่า ... ซึ่งเขียนเป็นสัญลักษณ์ได้ว่า .... สัญลักษณ์นี้อ่านว่า .... $f(x)$ เนื่องจากลิมิตนี้พิจารณาจุดที่ $x<1$ จึงเรียกลิมิตนี้ว่า $f(x)$
เนื่องจากลิมิตทางซ้ายและลิมิตทางขวามีค่าเท่ากัน จึงเขียนสัญลักษณ์รวมเป็น	

<u>หมายเหตุ 2.3</u>

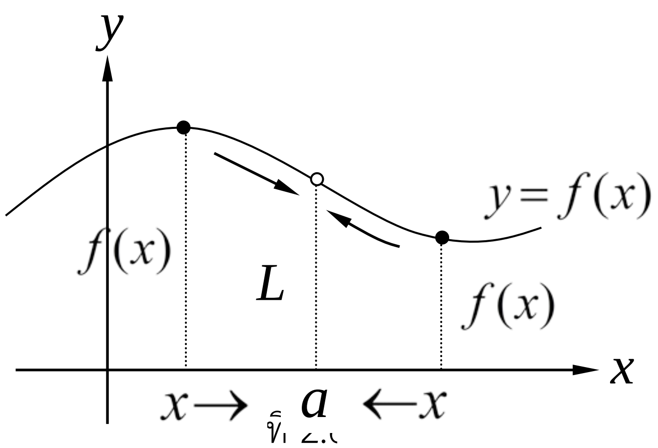
เครื่องหมาย “$-$” หมายถึง การเข้าใกล้จากทางด้านซ้ายเพียงทางเดียว

เครื่องหมาย “$+$” หมายถึง การเข้าใกล้จากทางด้านซ้ายเพียงทางเดียว

2.2.1 Informal Definition of a Limit

<u>นิยาม 2.1 (Two-sided Limit)</u>

ให้ $f(x)$ นิยามบนช่วงเปิดที่มี a อยู่ภายในช่วงเปิดนี้ แต่ $f(x)$ ไม่จำเป็นต้องนิยามที่จุด a แล้วเราจะกล่าวว่า จำนวนจริง L เป็นลิมิตของ $f(x)$ ขณะที่ x มีค่าเข้าใกล้ a ก็ต่อเมื่อ $f(x) \to L$ ขณะที่ $x \to a$ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$



<u>นิยาม 2.2</u> One-sided Limit(ลิมิตทางเดียว)

ค่า x ที่เข้าใกล้ a ในทางที่**มากกว่า** a เรียกว่า x เข้าใกล้ a ทาง**ขวามือ** ใช้สัญลักษณ์ $x \to a^+$ และค่าของ $f(x)$ ที่เข้าใกล้ค่า L ขณะที่ $x \to a^+$ เรียกว่า **ลิมิตทางขวามือ**ของ $f(x)$ ใช้สัญลักษณ์ $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$

ค่า x ที่เข้าใกล้ a ในทางที่**น้อยกว่า** a เรียกว่า x เข้าใกล้ a ทาง**ซ้ายมือ**

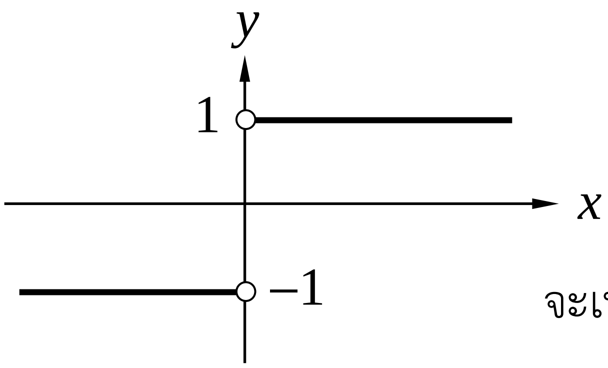
ใช้สัญลักษณ์ $x \to a^-$ และค่าของ $f(x)$ ที่เข้าใกล้ค่า L ขณะที่ $x \to a^-$ เรียกว่า **ลิมิตทางซ้ายมือ**ของ $f(x)$ ใช้สัญลักษณ์ $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L$

<u>ตัวอย่าง 2.1</u> จงพิจารณาลิมิตเมื่อ $x \to 0^+$ และ $x \to 0^-$ ของฟังก์ชัน $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก $f(x)$ ไม่นิยามที่ $x = 0$ และ $|x| = \Big\{$

จะได้ว่า $f(x) = \dfrac{|x|}{x} = \Big\{$

เมื่อเขียนกราฟของ $f(x)$ จะได้ดังรูปที่ 2.7



รูปที่ 2.7

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) =$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) =$

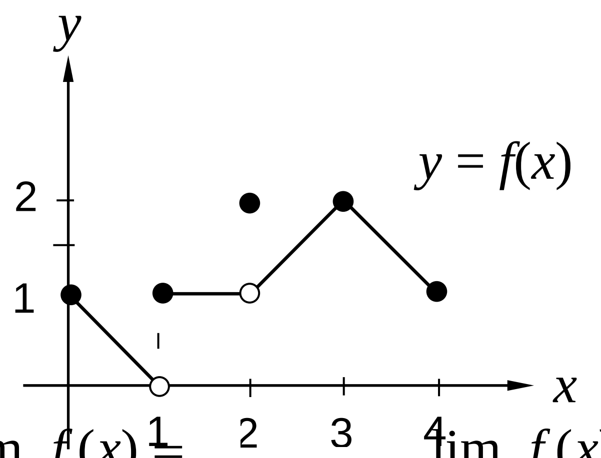
จะเห็นได้ว่า $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$

และจะได้ว่า $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ หาค่าไม่ได้ #

<u>ความสัมพันธ์ระหว่าง one-sided limit และ two-sided limit</u>

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ ก็ต่อเมื่อ $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L = \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$

<u>ตัวอย่าง 2.2</u> กำหนดฟังก์ชัน $f(x)$ ให้ดังรูป



ที่จุด $x=0$: $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) =$ $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) =$

$f(0) =$ ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 0} f(x) =$

ที่จุด $x=1$: $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) =$ $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) =$

$f(1) =$ ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 1} f(x) =$

ที่จุด $x=2$: $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) =$ $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) =$

$f(2) =$ ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 2} f(x) =$

ที่จุด $x=3$: $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) =$ $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) =$

$f(3) =$ ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 3} f(x) =$

ที่จุด $x=4$: $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x) =$ หาค่าไม่ได้ $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) =$

$f(4) =$ ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 4} f(x) =$

<u>หมายเหตุ 2.4</u>

จากตัวอย่าง 2.2 จะเห็นว่า ที่จุด $x=3$, $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = f(3)$ ในขณะที่จุดอื่นๆไม่เป็นเช่นนี้ โดยทั่วไปแล้ว ค่าของฟังก์ชันและค่าลิมิตของฟังก์ชันอาจจะเท่ากันหรือไม่เท่ากันก็ได้

ตอบได้ให้รางวัล 1

1) กำหนดฟังก์ชัน $f(x)$ ให้ นศ.คิดว่า $\lim_{x \to a} f(x)$ ต่างหรือเหมือนกับ $f(a)$ อย่างไร?

2) นศ.คิดว่าอะไรเป็นปัจจัยที่ทำให้ค่าของฟังก์ชันกับค่าลิมิตของฟังก์ชันมีค่าเท่ากัน?

ตัวอย่าง 2.3 กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} -1, & x < -1 \\ x^2, & -1 < x < 1 \\ 2x-1, & x > 1 \end{cases}$ จงหา $\lim_{x \to -1} f(x)$ และ $\lim_{x \to 1} f(x)$

วิธีทำ

เก็บไปคิด 2.3

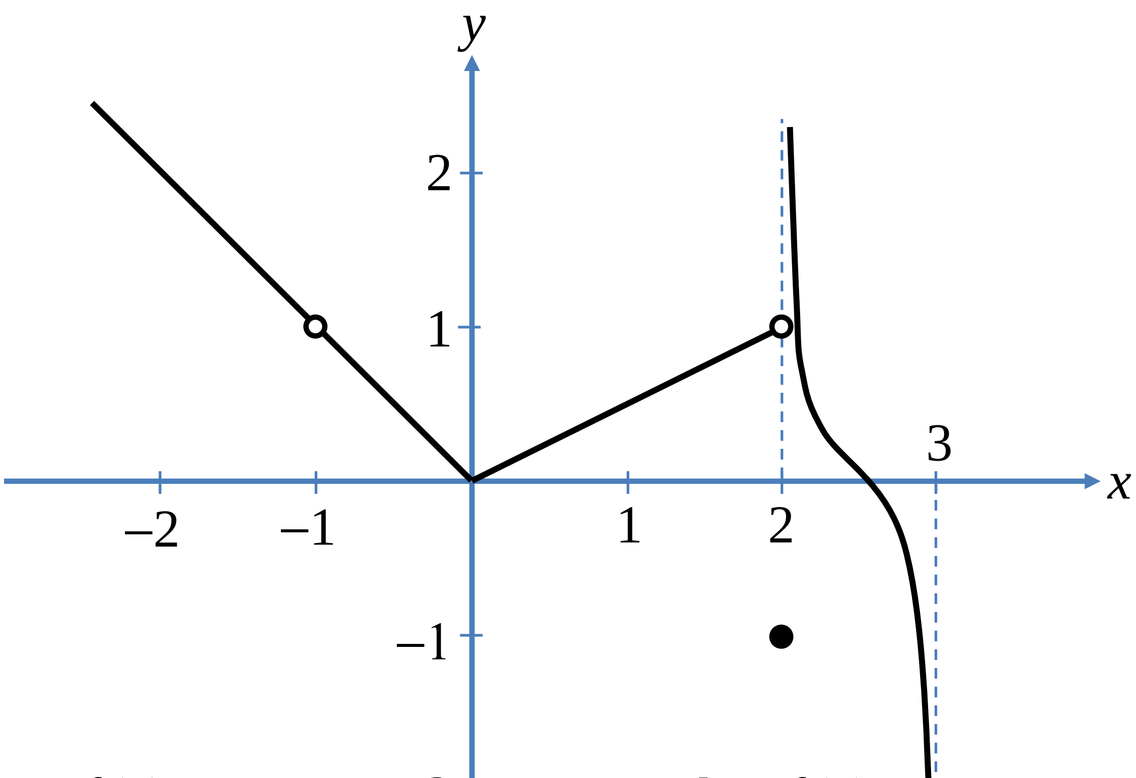
กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} 2x^2 & , x < 0 \\ x & , 0 \le x < 1 \\ x+1 & , x \ge 1 \end{cases}$

จงหา $\lim_{x \to 0} f(x)$ และ $\lim_{x \to 1} f(x)$

ตรวจสอบความเข้าใจ 2.2

1) $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ และ $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ ต้องมีเงื่อนไขอย่างไรจึงจะทำให้ $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$

2) กำหนดฟังก์ชัน $y = f(x)$ ให้ดังรูป



$\lim\limits_{x\to -1} f(x) =$ ________ $\qquad \lim\limits_{x\to 0} f(x) =$ ________

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) =$ ________ $\qquad \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) =$ ________

$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) =$ ________

3) ถ้าความชันของเส้นตัดโค้ง(secant line)ที่ผ่านจุด $P(2,4)$ และ $Q(x,x^2)$ บนเส้นโค้งพาราโบลา $y=x^2$ มีค่าเท่ากับ $m_{\text{sec}}=x+2$ แล้ว ความชันของเส้นสัมผัส(tangent line)เส้นโค้ง $y=x^2$ ที่จุด P คือ..........

2.2.2 คุณสมบัติที่สำคัญของลิมิต

ให้ $\lim_{x\to a} f(x)$ หาค่าได้ และ $\lim_{x\to a} g(x)$ หาค่าได้

1. $\lim_{x\to a} c = c$ เมื่อ c เป็นค่าคงที่

2. $\lim_{x\to a} x = a$

3. $\lim_{x\to a} cf(x) = c\lim_{x\to a} f(x)$

4. $\lim_{x\to a}\left[f(x)\pm g(x)\right] = \lim_{x\to a} f(x)\pm\lim_{x\to a} g(x)$

5. $\lim_{x\to a}\left[f(x)\cdot g(x)\right] = \lim_{x\to a} f(x)\cdot\lim_{x\to a} g(x)$

6. $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$ เมื่อ $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$

7. $\lim_{x\to a}\left[f(x)\right]^n = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^n$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก

8. $\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก

   และ $\lim_{x\to a} f(x) \geq 0$

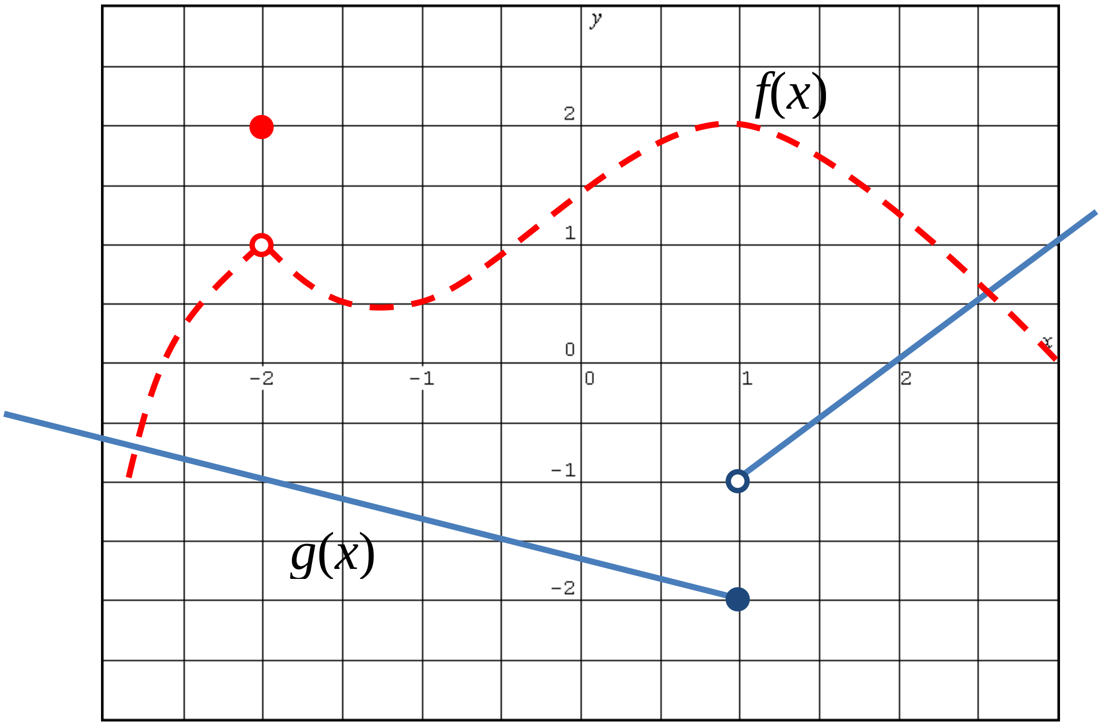
9. ถ้า $f(x)$ เป็นฟังก์ชันพหุนาม จะได้ว่า สำหรับจำนวนจริง a ใดๆ

   $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

10. $\lim_{x\to a}\left[f(x)\right]^{g(x)} = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^{\lim_{x\to a} g(x)}$

<u>หมายเหตุ 2.5</u> คุณสมบัติข้างต้นยังสามารถใช้ได้กับลิมิตทางเดียว

ตัวอย่าง 2.4 กำหนดฟังก์ชัน $f(x)$ (เส้นประสีแดง) และฟังก์ชัน $g(x)$ (เส้นทึบสีฟ้า)ให้ดังรูป จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้



ก) $\lim\limits_{x\to -2}\left[f(x)+5g(x)\right]$ ข) $\lim\limits_{x\to 1}\left[f(x)\cdot g(x)\right]$ ค) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{g(x)}$

วิธีทำ

ตัวอย่าง 2.5 จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้

ก) $\lim_{x\to 5}(x^2-4x+3)$

ข) $\lim_{x\to 0}\frac{x^3-3x^2+4}{\cos x}$

ค) $\lim_{x\to 1}(x^7-2x^5+1)^{10}$

ง) $\lim_{x\to 1}\sqrt{x-1}$

วิธีทำ

2.3 เทคนิคการหาลิมิต

ในการหาลิมิตบางครั้ง เราจะพบว่าเมื่อแทนค่า x ด้วย a แล้ว จะได้ฟังก์ชันอยู่ในรูป $\frac{0}{0}$ ซึ่งจำเป็นต้องเปลี่ยนรูปก่อนที่จะหาลิมิตโดย

1) การแยกตัวประกอบ (Factor)

2) ใช้สังยุค (Conjugate) คูณทั้งเศษและส่วน

<u>ตัวอย่าง 2.6</u> จงหาค่า $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x^2+2x-3}$

<u>วิธีทำ</u>

<u>ตัวอย่าง 2.7</u> จงหาค่า $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^3 - x^2 - 9x + 9}{x^2 - x - 6}$.

<u>วิธีทำ</u>

<u>ตัวอย่าง 2.8</u> จงหาค่า $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4 - \sqrt{16 + x}}{x}$

<u>วิธีทำ</u>

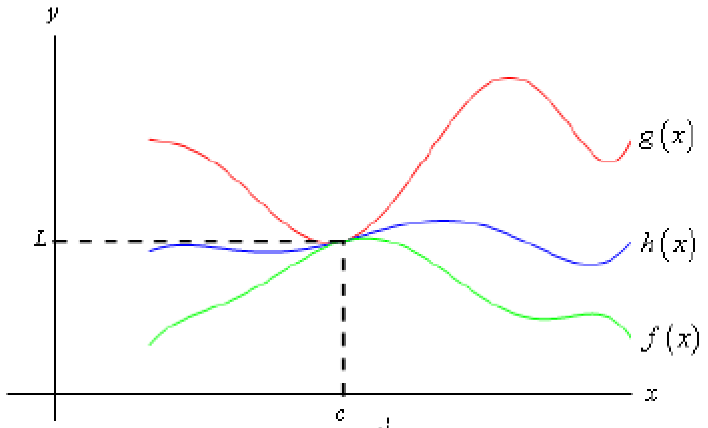
<u>ตัวอย่าง 2.9</u> จงหา $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{16 + 2\sqrt{x}} - 4}$.

<u>วิธีทำ</u>

บางครั้ง เราไม่สามารถใช้วิธีแยกตัวประกอบหรือสังยุคในการกำจัดรูป $\frac{0}{0}$ ได้ ทฤษฎีบทต่อไปนี้สามารถช่วยในการหาลิมิตได้

ทฤษฎีบท (Squeeze Theorem)

ถ้า $f(x) \le h(x) \le g(x)$ สำหรับทุกค่า $x, x \ne a$ ในบางย่านจุดของ a และ $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = L$ จะได้ว่า $\lim_{x\to a} h(x) = L$



รูปที่ 2.7

<u>**ตัวอย่าง 2.10**</u> ให้ $3x \le f(x) \le x^3 + 2$ โดยที่ $0 \le x \le 2$ จงหา $\lim_{x\to 1} f(x)$.

<u>**วิธีทำ**</u> เนื่องจาก $\lim_{x\to 1} 3x = 3 = \lim_{x\to 1} x^3 + 2$

โดย Squeeze Theorem จะได้ว่า $\lim_{x\to 1} f(x) = 3$

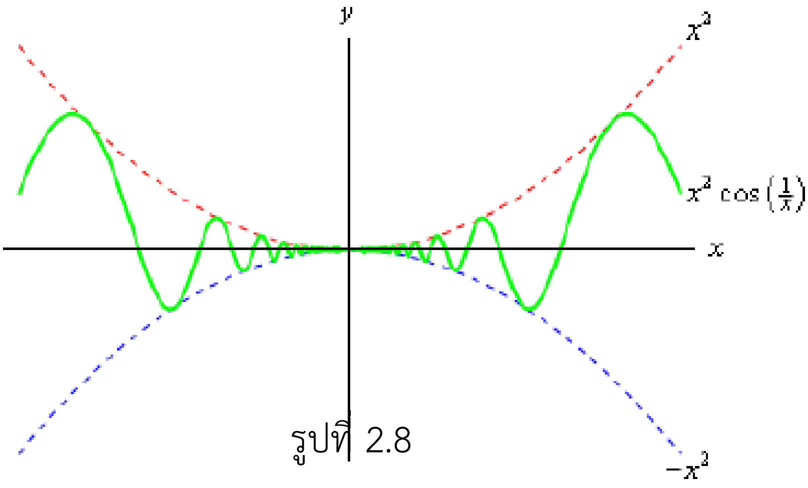
<u>ตัวอย่าง 2.11</u> จงหาค่า $\lim_{x\to 0} x^2 \cos\frac{1}{x}$

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก $-x^2 \le x^2 \cos\frac{1}{x} \le x^2$

พิจารณา $\lim_{x\to 0}(-x^2) = 0$ และ $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$

โดย Squeeze Theorem สรุปได้ว่า $\lim_{x\to 0} x^2 \cos\frac{1}{x} = 0$

ค่าลิมิตของฟังก์ชันสามารถแสดงได้ดังรูปที่ 2.8



รูปที่ 2.8

<u>ตัวอย่าง 2.12</u> จงใช้ Squeeze Theorem หาค่า $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{1+\left(1+x^4\right)^{\frac{5}{2}}}$.

<u>วิธีทำ</u>

2.4 ลิมิตที่เกี่ยวข้องกับค่าอนันต์ (Limits involving infinity)

ในหัวข้อนี้จะพิจารณาการหาลิมิตของฟังก์ชัน 2 กรณี

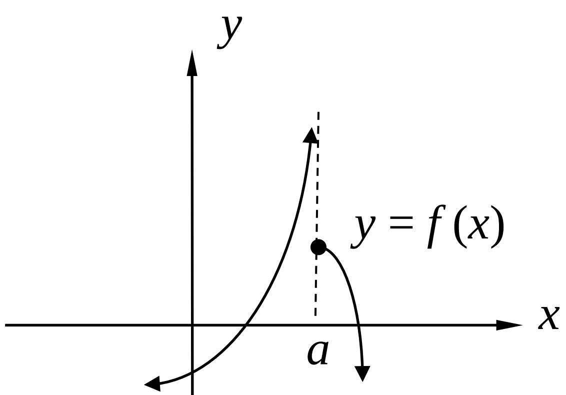
1) ลิมิตมีค่าอนันต์ (Infinite limits)

2) ลิมิตที่อนันต์ (Limits at infinity)

2.4.1 ลิมิตมีค่าอนันต์

ในการหาค่าลิมิตของฟังก์ชัน $y = f(x)$ ขณะที่ $x \to a$ พบว่าฟังก์ชัน $f(x)$ มีค่าเพิ่มมากขึ้นโดยไม่มีขอบเขต (เขียน $f(x) \to +\infty$) หรือมีค่าลดลงโดยไม่มีขอบเขต (เขียน $f(x) \to -\infty$) ซึ่งแทนด้วยสัญลักษณ์ $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ หรือ $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$

<u>ตัวอย่าง 2.13</u> พิจารณาค่าลิมิตของ $y = f(x)$ เมื่อ $x \to a$

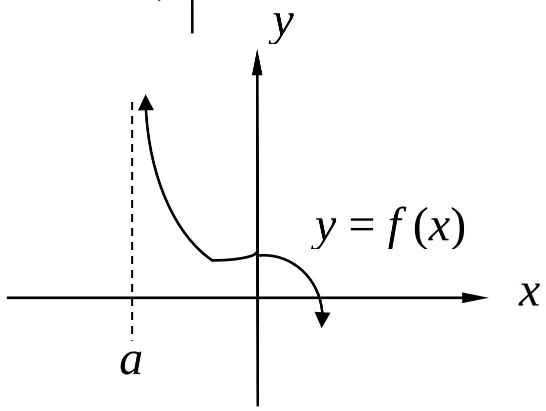


$\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = +\infty$

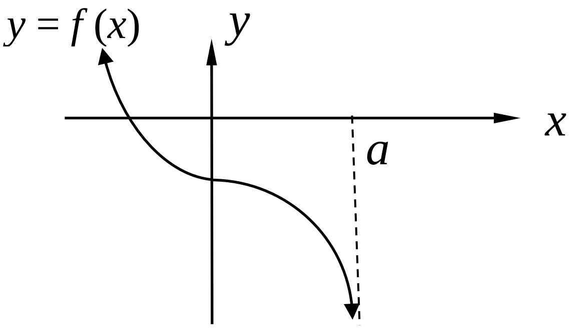
$\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -\infty$

แสดงว่า

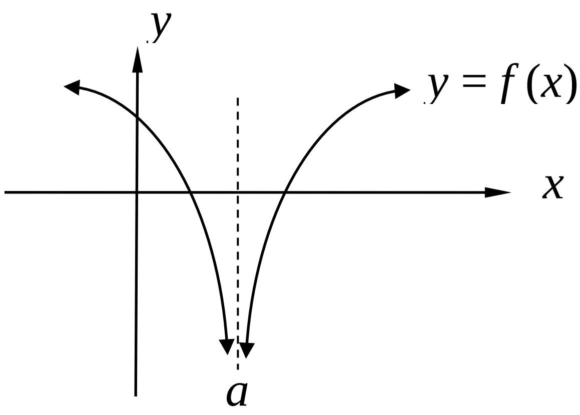
$\lim\limits_{x\to a} f(x)$ ไม่มีค่า



$\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = +\infty$



$$\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$$



$$\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$$

แสดงว่า

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$$

<u>หมายเหตุ</u> จากตัวอย่างจะเรียก เส้นตรง $x = a$ ว่า **เส้นกำกับแนวดิ่ง** (vertical asymptote)

<u>ตัวอย่าง 2.14</u> จงหา $\displaystyle\lim_{x\to 2^+} \frac{x-3}{x-2}$.

<u>วิธีทำ</u> พิจารณา $\displaystyle\lim_{x\to 2^+} \frac{x-3}{x-2}$ จะเห็นว่า $\displaystyle\lim_{x\to 2^+} (x-3) = -1 < 0$ และ $\displaystyle\lim_{x\to 2^+} (x-2) = 0$ โดยที่ $x-2>0$ เมื่อ $x>2$

ดังนั้นโดยใช้คุณสมบัติข้อ 6 จะได้ว่า $\displaystyle\lim_{x\to 2^+} \frac{x-3}{x-2} = -\infty$

<u>ตัวอย่าง 2.15</u> จงหา $\lim_{x\to 0^+} (x-1)\ln x$

<u>วิธีทำ</u> จะเห็นว่า $\lim_{x\to 0^+} (x-1) = -1 < 0$ และ $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$

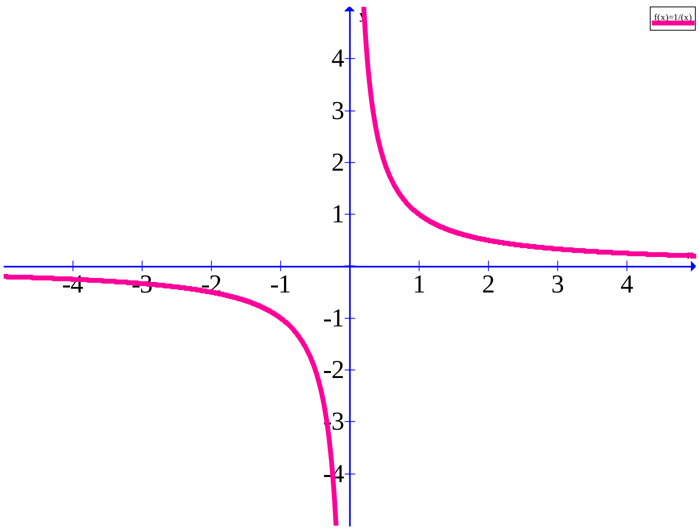
ดังนั้น จึงได้ว่า $\lim_{x\to 0^+} (x-1)\ln x = +\infty$

2.4.2 ลิมิตที่อนันต์ (ลิมิตของฟังก์ชัน เมื่อ $x\to\infty$)

ในกรณีนี้จะพิจารณาค่าลิมิตของฟังก์ชัน $y = f(x)$ เมื่อ x มีค่าเพิ่มมากขึ้นโดยไม่มีขอบเขต (เขียน $x\to +\infty$) หรือเมื่อ x มีค่าลดลงโดยไม่มีขอบเขต (เขียน $x\to -\infty$) ซึ่งแทนด้วยสัญลักษณ์

$$\lim_{x\to\infty} f(x) \quad \text{หรือ} \quad \lim_{x\to -\infty} f(x)$$

<u>ตัวอย่าง 2.16</u> กำหนดฟังก์ชัน $f(x) = \dfrac{1}{x}$ ซึ่งมีกราฟดังรูปที่ 2.9



รูปที่ 2.9

(1) พิจารณาค่าฟังก์ชัน $f(x)=\frac{1}{x}$ เมื่อ x มีค่าเพิ่มมากขึ้นโดยไม่มีขอบเขต

(2) พิจารณาค่าฟังก์ชัน $f(x)=\frac{1}{x}$ เมื่อ x มีค่าลดลงเรื่อยๆโดยไม่มีขอบเขต

ตารางที่ 2.3

x	100	1000	10000	เพิ่มขึ้นโดยไม่มีขอบเขต
$f(x)=\frac{1}{x}$	0.01	0.001	0.0001	$\ldots \to 0$
x	-100	-1000	-10000	ลดลงโดยไม่มีขอบเขต
$f(x)=\frac{1}{x}$	-0.01	-0.001	-0.0001	$\ldots \to 0$

จากตารางที่ 2.3 พบว่า ค่าของ $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ 0 เมื่อ x มีค่าเป็นบวกเพิ่มมากขึ้น ลักษณะเช่นนี้กล่าวได้ว่าลิมิตของ $f(x)$ เท่ากับ 0 เมื่อ $x \to +\infty$ และเขียนแทนด้วย $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$

ในทำนองเดียวกัน ค่าของ $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ 0 เมื่อ $x \to -\infty$ เช่นกัน แต่ $f(x) < 0$ ลักษณะเช่นนี้กล่าวได้ว่าลิมิตของ $f(x)$ เท่ากับ 0 เมื่อ $x \to -\infty$ เขียนแทนด้วย $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$

จากรูปที่ 2.9 พบว่า กราฟของ $f(x)=\frac{1}{x}$ เบนเข้าใกล้แกน x มากขึ้นเรื่อยๆ แต่ไม่ได้สัมผัสกับแกน x ในทางคณิตศาสตร์ จะเรียกเส้นตรง $x = 0$ ที่กราฟเบนเข้าหาเช่นนี้ว่า **เส้นกำกับแนวนอน** (horizontal asymptote)

<u>ทฤษฎีบท</u> ถ้า n เป็นจำนวนจริงบวก แล้ว

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^n}=0 \quad \text{และ} \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^n}=0$$

ทฤษฎีบทนี้ใช้ในการหาลิมิตของฟังก์ชันพหุนามและฟังก์ชันตรรกยะ ดังต่อไปนี้

1. ถ้า $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0,\ a_n\neq 0$ เป็นฟังก์ชันพหุนาม จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}f(x) &= \lim_{x\to\infty}\left(a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0\right)\\ &= \lim_{x\to\infty}x^n\left(a_n+\frac{a_{n-1}}{x}+\ldots+\frac{a_1}{x^{n-1}}+\frac{a_0}{x^n}\right)\\ &= \lim_{x\to\infty}a_nx^n\end{aligned}$$

ดังนั้น สรุปได้ว่า

$$\lim_{x\to\infty}\left(a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0\right)=\lim_{x\to\infty}a_nx^n$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0\right)=\lim_{x\to-\infty}a_nx^n$$

ตัวอย่าง 2.17 จงหาค่า

ก) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(10x^5-3x^4+2x^2-8\right)$

ข) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-3x^7+20x^4-7x^2+9\right)$

2. ถ้า $f(x)=\dfrac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{-1}x^{m-1}+\ldots+b_1x+b_0}$, $a_n\neq 0,\ b_m\neq 0$

   เป็นฟังก์ชันตรรกยะ จะได้ว่า

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{-1}x^{m-1}+\ldots+b_1x+b_0}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{x^m}\left(\frac{a_n+\dfrac{a_{n-1}}{x}+\ldots+\dfrac{a_1}{x^{n-1}}+\dfrac{a_0}{x^n}}{b_m+\dfrac{b_{m-1}}{x}+\ldots+\dfrac{b_1}{x^{m-1}}x+\dfrac{b_0}{x^m}}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{a_nx^n}{b_mx^m}$$

ดังนั้น สรุปได้ว่า

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{-1}x^{m-1}+\ldots+b_1x+b_0}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{a_nx^n}{b_mx^m}}$$

ตัวอย่าง 2.18 จงหาค่า

ก) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x^2 - 5}{3x^2 + x + 2}$

ข) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x^2 - 5}{3x^4 + x + 2}$

ค) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x^3 - 5}{3x^2 + x + 2}$

ตัวอย่าง 2.19 จงหาค่า $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+3}}{x+3}.$

วิธีทำ เมื่อ $x<0$ จะเขียน $\dfrac{\sqrt{x^2+3}}{x+3}$ ได้ใหม่เป็น

$$\frac{\sqrt{x^2+3}}{x+3}=\frac{\sqrt{x^2(1+\frac{3}{x^2})}}{x(1+\frac{3}{x})}=\frac{(-x)\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}}{x(1+\frac{3}{x})}=\frac{-\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}}{1+\frac{3}{x}}$$

ดังนั้น $$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+3}}{x+3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}}{1+\frac{3}{x}}=\frac{-1}{1}=-1$$

ตัวอย่าง 2.20 Evaluate $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{3x^4+7x^2+6}}{4x^2-3x-6}$

วิธีทำ

<u>ตัวอย่าง 2.21</u> จงหาค่า $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4^x - 4^{-x}}{4^x + 4^{-x}}$

<u>วิธีทำ</u>

2.5 ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน (Continuous functions)

ในการหาลิมิตของฟังก์ชัน พบว่า บางครั้งค่าของลิมิตของฟังก์ชันเมื่อ x เข้าใกล้ a จะเท่ากับค่าของฟังก์ชัน ที่จุด $x = a$ ซึ่ง เราจะเรียกฟังก์ชันลักษณะนี้ว่า มีความต่อเนื่องที่จุด $x = a$ ซึ่งสามารถกำหนดเป็นนิยามได้ดังนี้

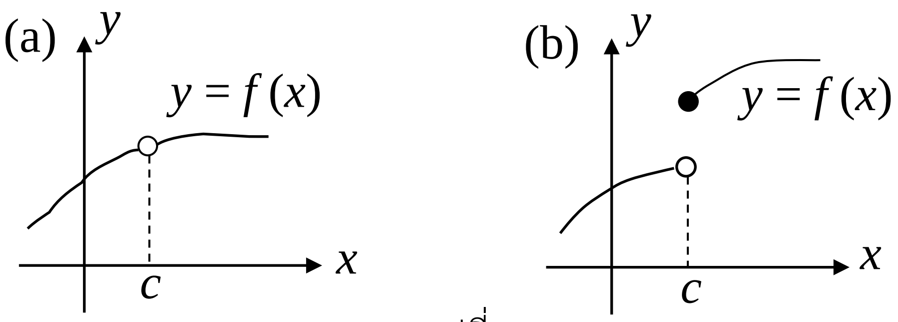
นิยาม ฟังก์ชัน $f(x)$ จะเรียกว่ามีความต่อเนื่องที่จุด $x = a$ ถ้าเงื่อนไขทั้ง 3 ข้อต่อไปนี้เป็นจริง

1. $f(a)$ หาค่าได้
2. $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ หาค่าได้ นั่นคือ $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x)$
3. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

หมายเหตุ

1. ถ้าฟังก์ชัน ขาดเงื่อนไขข้อใดข้อหนึ่ง จะได้ว่าฟังก์ชันนั้นไม่มีความต่อเนื่องที่จุด a

2. ถ้าฟังก์ชันมีความต่อเนื่องที่จุดใด กราฟของฟังก์ชันจะไม่ขาดตอนที่จุดนั้น



รูปที่ 2.10

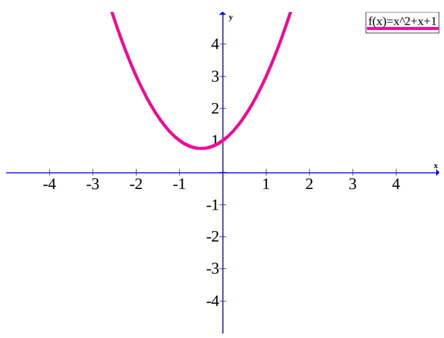
<u>ตัวอย่าง 2.22</u> จงพิจารณาว่า $f(x) = x^2 + x + 1$ ต่อเนื่องที่ $x = 0$ หรือไม่

<u>วิธีทำ</u> 1. $f(0) = 1$ is defined

2. $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$ exists

3. $\lim_{x \to 0} f(0) = f(0) = 1$

ดังนั้น $f(x)$ ต่อเนื่องที่ $x = 0$ ดังรูป



<u>ตัวอย่าง 2.23</u> กำหนดให้ $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-x^2}{1-x} & ,x\neq 1\\ 3 & ,x=1\end{cases}$.

จงพิจารณาว่าฟังก์ชันนี้ต่อเนื่องที่ $x=1$ หรือไม่

<u>วิธีทำ</u>

<u>ตัวอย่าง 2.24</u> Let $f(x)=\begin{cases}bx^2+1 & ,x<-2\\ x & ,x\geq -2\end{cases}$.

Find a value for b that makes $f(x)$ continuous at $x=-2$.

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจากต้องการให้ฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด $\mathrm{x}=-2$ จึงต้องใช้สมบัติของฟังก์ชันต่อเนื่อง นั่นคือ

คุณสมบัติทางพีชคณิตของฟังก์ชันเกี่ยวกับความต่อเนื่องมีดังนี้

1. ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x=a$ จะได้ว่า $f \pm g, f.g, \dfrac{f}{g}$ $(g(a) \neq 0)$ และ kf (k เป็นจำนวนจริง) มีความต่อเนื่องที่ $x=a$ ด้วย
2. ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x=b$ และ $\lim\limits_{x \to a} g(x) = b$ จะได้ว่า

$$\lim_{x \to a} f(g(x)) = f(\lim_{x \to a} g(x)) = f(b)$$

3. ถ้าฟังก์ชัน g มีความต่อเนื่องที่ $x=a$ และฟังก์ชัน f มีความต่อเนื่องที่ $g(a)$ จะได้ว่า ฟังก์ชัน $f \circ g$ มีความต่อเนื่องที่ $x=a$

ทฤษฎีบท

1. ฟังก์ชันพหุนามเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องทุกจำนวนจริง c
2. ฟังก์ชันตรรกยะ $f(x) = \dfrac{h(x)}{g(x)}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องทุกจำนวนจริงยกเว้นจุด c ที่ทำให้ $g(c) = 0$

ตัวอย่าง 2.25 Let $f(x)=\dfrac{2(x^2+4x+2)}{(x^2-9)(x-1)}$.

Determine where f is continuous.

วิธีทำ ให้ $\mathrm{F(x)=2(x^2+4x+2)}$,$\mathrm{G(x)=x^2-9}$ และ $\mathrm{H(x)=x-1}$
ดังนั้น $\mathrm{F,G,H}$ จึงเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องสำหรับทุกๆ x
จะได้ว่า $\mathrm{f=\dfrac{F}{G.H}}$ ต่อเนื่องทุกแห่ง ยกเว้นจุด x ซึ่ง $\mathrm{G(x)=0}$ หรือ $\mathrm{H(x)=0}$

นั่นคือฟังก์ชันนี้จะต่อเนื่องทุกแห่งยกเว้นที่ $\mathrm{x=\pm 3}$ และ $\mathrm{x=1}$

นิยาม ถ้าฟังก์ชัน f มีความต่อเนื่องที่ทุกจุดในช่วง (a,b) จะเรียก f มีความต่อเนื่องใน (a,b)

นิยาม ฟังก์ชัน $f(x)$ มีความต่อเนื่องใน $[a,b]$ โดยที่ $a<b$ ถ้า

1. $f(x)$ มีความต่อเนื่องใน (a,b)
2. $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a)$
3. $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=f(b)$

ตัวอย่าง 2.26 Show that $g(x)=\sqrt{x-4}$ is continuous on the closed interval $[4,8]$.

วิธีทำ เนื่องจาก

1. g เป็นฟังก์ชันมีความต่อเนื่องบน $(4,8)$
2. $\lim\limits_{x\to 4^+} \sqrt{x-4}=0$
3. $\lim\limits_{x\to 8^-} \sqrt{x-4}=2$

ดังนั้น จากนิยาม 2.4 จะได้ว่า $g(x)=\sqrt{x-4}$ เป็นฟังก์ชันมีความต่อเนื่องบน $[4,8]$

ตัวอย่าง 2.27 Let $g(x)=\sqrt{\dfrac{3-x}{4+x}}$.

Find all number at which g is continuous.

วิธีทำ เนื่องจาก $\mathrm{g(x)}=\sqrt{\dfrac{3-\mathrm{x}}{4+\mathrm{x}}}$ จะมีค่า เมื่อ $\dfrac{3-\mathrm{x}}{4+\mathrm{x}}\ge 0$

ซึ่งเกิดขึ้นได้สองกรณีคือ $3-\mathrm{x}\ge 0$ และ $4+\mathrm{x}>0$

หรือ $3-\mathrm{x}\le 0$ และ $4+\mathrm{x}<0$

ทำให้ได้ $-4<\mathrm{x}\le 3$

ดังนั้น ฟังก์ชันมีความต่อเนื่องบน $(-4,3]$

Exercises

1. Find the limit, if it exists.

(a) $\lim_{x\to 1} f(x)$, $f(x)=\dfrac{x^3}{|x-1|}$

(b) $\lim_{x\to 0} g(x)$, $g(x)=\begin{cases} x^2-2; & x>0 \\ -2-x; & x<0 \end{cases}$

(c) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{6\sqrt{x^2-3}}{2x-1}$ (d) $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+7}}{2x-4}$

2. Determine whether the following function is continuous.

(a) $h(x)=\dfrac{2}{x^2+3x-28}$ (b) $k(x)=\sqrt[3]{(x-a)(x-b)}$

3. Explain why f is not continuous at a.

(a) $f(x)=\dfrac{1}{x-1};\ a=1$ (b) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x-3}, & x\neq 3 \\ 4, & x=3 \end{cases}$

4. Find all numbers at which f is discontinuous.

(a) $f(x)=\dfrac{3}{x^2+x-6}$ (b) $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+x-2}$

5. Find a value k that

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-5x+6}{x-2}; & x\neq 2 \\ kx-3; & x=2 \end{cases}$$ is continuous.

6. Find a value k in which the following limits exist.

(a) $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2-kx+4}{x-1}$ (b) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{x^4+3x-5}{2x^2-1+x^k}$

(c) $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{e^{2x}-5}{e^{kx}+4}$

7. Compute the following limits.

(a) $\lim_{h\to 0}\dfrac{(3+h)^2-9}{h}$ (b) $\lim_{h\to 0}\dfrac{1/(1+h)-1}{h}$

(c) $\lim_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{4+h}-2}{h}$

Answers

1. (a) $+\infty$ (b) -2 (c) 3 (d) $-1/2$
2. (a) $x\neq -7,4$ (b) $(-\infty,\infty)$
3. (a) f is not defined at x = 1 (b) $\lim_{x\to 3} f(x)=6\neq 4= f(3)$
4. (a) $-3,2$ (b) $-2,1$
5. 1
6. (a) 5 (b) greater than or equal to 4
   (c) less than or equal to 2

7. (a) 6 (b) -1 (c) 1/4