บทที่ 5

รูปแบบยังไม่กำหนด (Indeterminate forms)

5.1 ลิมิตของผลหารของฟังก์ชัน

จากที่เคยเรียนมาแล้ว

ถ้า $\lim_{x \to a} f(x)$ และ $\lim_{x \to a} g(x)$ หาค่าได้ โดยที่ $\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$ แล้วจะได้ว่า

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} \quad \text{หาค่าได้}$$

แต่ถ้า $\lim_{x \to a} g(x) = 0$ จะยังไม่สามารถบอกได้ว่า $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ หาค่าได้หรือไม่ ต้องทำการพิจารณาใหม่ดังต่อไปนี้

1. ถ้า $\lim_{x \to a} f(x) =$ ค่าคงที่ $\neq 0$ และ $\lim_{x \to a} g(x) = 0$

จะได้ว่า $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ หาค่าไม่ได้ $(= \infty)$

2. ถ้า $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ และ $\lim_{x \to a} g(x) = 0$ ในกรณีนี้เราเรียก $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ ว่าอยู่ในรูปแบบยังไม่กำหนด $\frac{0}{0}$ ซึ่งเป็นลักษณะที่ยังบอกค่าที่แน่นอนไม่ได้

นอกจากนี้ยังมีรูปแบบยังไม่กำหนด (indeterminate forms) รูปอื่นๆ อีกดังนี้ $\frac{\infty}{\infty}$, $0.\infty$, $\infty - \infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞

การหาค่าของลิมิตในรูปแบบยังไม่กำหนด ค้นพบโดยนักคณิตศาสตร์ชาวฝรั่งเศสชื่อ โลปิตาล (L' Hopital) <u>กฎของโลปิตาล</u> (L' Hopital 's rule) กล่าวไว้ดังนี้

> สำหรับจำนวนจริง x_0 , $f(x)$ และ $g(x)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้สำหรับทุกค่าภายใน $0<|x-x_0|<\delta$
>
> ถ้า $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ และ $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$ จะได้ว่า เมื่อ $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ หาค่าได้ จะได้ $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

และถ้า $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ ยังอยู่ในรูปแบบยังไม่กำหนดรูป $\frac{0}{0}$ อีก ก็ใช้กฎของโลปิตาลทำซ้ำจนกระทั่งได้ค่า $\lim\limits_{x\to x_0} f^{(n)}(x)$ และ $\lim\limits_{x\to x_0} g^{(n)}(x)$ ไม่เป็น 0 พร้อมกัน โดยที่ n เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ว่า

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f''(x)}{g''(x)}$$

$$= \ldots = \lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{g^{(n)}(x_0)}$$

<u>ตัวอย่าง 5.1</u> Evaluate $\lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\sqrt{4+\cos\theta}-2}{\theta-\dfrac{\pi}{2}}$.

<u>วิธีทำ</u>

<u>ตัวอย่าง 5.2</u> Evaluate $\lim_{t \to 0} \dfrac{\sqrt{1+t}-(1+\dfrac{t}{2})}{t^2}$

<u>วิธีทำ</u>

ในบางครั้ง ฟังก์ชันที่จะหาค่าลิมิตประกอบด้วย พจน์ที่สามารถแยกออกไป แล้วหาค่าลิมิตได้เป็นค่าคงที่ คูณกับ ลิมิตของส่วนที่เหลือที่ยังอยู่ในรูปแบบยังไม่กำหนด เราควรจะแยกพจน์เหล่านั้นออกไปก่อนเพื่อที่จะได้ใช้กฎของโลปิตาลกระทำกับส่วนที่เหลือได้ง่ายขึ้น

<u>ตัวอย่าง 5.3</u> Evaluate $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x\,(1-e^x)}{(1+x)\ln(1-x)}$

<u>วิธีทำ</u>

กรณีที่ลิมิตอยู่ในรูปแบบยังไม่กำหนด $\dfrac{\infty}{\infty}$ ทำได้ 2 แบบ คือ

(1) พยายามกำจัดพจน์ที่เข้าใกล้ ∞ โดยเอาพจน์ที่มีกำลังสูงสุดของฟังก์ชันพหุนามหารตลอด

(2) ใช้กฎของโลปิตาลเข้าช่วยในกรณีที่ไม่ใช่ลิมิตของผลหารของฟังก์ชันพหุนาม

คือเปลี่ยน $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)}{\displaystyle\lim_{x\to a} g(x)} \quad (=\frac{\infty}{\infty})$

ให้อยู่ในรูป $\dfrac{0}{0}$ โดยให้ $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{1/g(x)}{1/f(x)}$

<u>ทฤษฎีบท 1</u> กำหนด $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)=\infty$ และ $\displaystyle\lim_{x\to a} g(x)=\infty$

ฟังก์ชัน f และ g หาอนุพันธ์ได้ และถ้า $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ หาค่าได้

แล้วจะได้ว่า $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

<u>หมายเหตุ</u> ถ้า $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ ยังอยู่ในรูป $\dfrac{\infty}{\infty}$ อีก ให้ใช้การทำซ้ำจนกระทั่งลิมิตของฟังก์ชันที่เป็นเศษ หรือฟังก์ชันที่เป็นส่วน มีค่าไม่เป็นอนันต์พร้อมๆกัน การหาลิมิตในลักษณะนี้ถือว่าเป็นการหาลิมิตโดยใช้กฎของโลปิตาลเช่นกัน

<u>ตัวอย่าง 5.4</u> Evaluate $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x+2\ln x}{x+3\ln x}$

<u>วิธีทำ</u>

<u>ตัวอย่าง 5.5</u> Evaluate $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cot x}{\cot 2x}$

<u>วิธีทำ</u>

ตัวอย่าง 5.6 Evaluate $\lim_{x \to 0^+} \dfrac{e^{-3/x}}{x^2}$

วิธีทำ

สำหรับรูปแบบยังไม่กำหนดรูป $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$ จะหาค่าลิมิตได้โดยจัดให้อยู่ในรูป $\frac{0}{0}$ หรือ $\frac{\infty}{\infty}$ ก่อน แล้วจึงใช้กฎของโลปิตาล

<u>ตัวอย่าง 5.7</u> Evaluate $\lim\limits_{x \to 0^+} x^3 \ln x$

<u>วิธีทำ</u>

<u>ตัวอย่าง 5.8</u> Evaluate $\lim\limits_{x \to 0} (\operatorname{cosec} x - \frac{1}{x})$

<u>วิธีทำ</u>

<u>ตัวอย่าง 5.9</u> Evaluate $\lim_{x\to\infty} (x-\sqrt{x^2+x})$

<u>วิธีทำ</u>

สำหรับรูปแบบยังไม่กำหนดรูป 0^0 , ∞^0 , 1^∞ ได้จากการหาลิมิตของฟังก์ชันที่อยู่ในรูป $y = f(t)^{g(t)}$ โดยที่ $g(a) = f(a) = 0$ หรือ $\lim_{t\to a} f(t) = \infty$, $g(a) = 0$ หรือ $f(a) = 1$, $\lim_{t\to a} g(t) = \infty$ จะหาค่าลิมิตโดยการใส่ ln เพื่อกำจัดกำลัง และจัดให้อยู่ในรูป $0\cdot(-\infty)$ หรือ $0\cdot\infty$ ซึ่งหาค่าลิมิตได้โดยวิธีที่กล่าวไปแล้ว

<u>หมายเหตุ</u> $1^{\infty} \neq 1$ เสมอไป เช่น $1^{\frac{1}{h}}$ และ $(1+h)^{\frac{1}{h}}$ มีค่าแตกต่างกัน แม้ว่าขณะที่ h เข้าใกล้ 0 ทั้ง 2 เทอมจะมีรูปเป็น 1^{∞} แต่ $\lim_{h\to 0} 1^{\frac{1}{h}} = 1$ และ $\lim_{h\to 0} (1+h)^{\frac{1}{h}} = e$

<u>ตัวอย่าง 5.10</u> Evaluate $\lim_{x\to 0} (\sec^3 2x)^{\cot^2 3x}$

<u>วิธีทำ</u>

ตัวอย่าง 5.11 Evaluate $\lim_{x \to 0^+} \left(1 + \frac{5}{x} \right)^{2x}$

วิธีทำ

<u>ตัวอย่าง 5.12</u> Find a value for r and s that make

$$\lim_{x\to 0}\left(x^{-3}\sin 3x + rx^{-2} + s \right) = 0$$

<u>วิธีทำ</u>

Exercise

Compute the following limits.

1. $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\sin z^2-\sin^2 z}{z^4}$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sinh x-\sin x}{x^3}$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+(1-x)}{x^2}$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xe^x}{1-e^x}$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{8^x-2^x}{4x}$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\tan^{-1}x-x}{2x-\sin^{-1}x}$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\sec 2x}{\ln\sec x}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\ln^2(x+1)}$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}-x^2-2}{\sin^2 x-x^2}$

10. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{\sin\frac{\pi}{x}}$

11. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^{100}}{e^x}$

12. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x}$

13. $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{5}{x})^{2x}$

14. $\lim\limits_{x\to 0}(e^x+3x)^{\frac{1}{x}}$

15. $\lim\limits_{x\to\infty}(1-e^{-x})^{e^x}$

16. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(\cos x-1)}{\sin x-x}$

17. $\lim\limits_{x\to 0^+}(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}})$

18. $\lim\limits_{x\to\infty}(x-\sqrt{x^2+x})$

19. $\lim\limits_{x\to 0} x\operatorname{cosec}^2\sqrt{2x}$

20. $\lim\limits_{x\to 0} \sin 5x \cot 3x$

21. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} (\sec x - \tan x)$

22. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-1-e^{x-2}}{1-\cos 2\pi x}$

23. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan ax}{x}$ (a is constant)

24. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-(1+x)-\frac{x^2}{2}}{x^3}$

25. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cosh x-(1+x-\sinh x)}{x^2}$

26. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{ax}-ax-1}{ax^2}$

27. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^4+x^2}{e^x+1}$

28. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{2^x}{3^{x^2}}$

29. Find a value for a,b,c that makes

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sinh ax+bx+c}{x^3}=\frac{1}{6}$$

30. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{(x+\sqrt{x})\sin^2 2x}{x^{3/2}}$

31. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3}{1-\cos x^2}$

32. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cot x}{\cot 2x}$

33. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\ln^5 x}{x^2}$

34. $\lim\limits_{x\to \pi/2} (\sec^3 x-\tan^3 x)$

35. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{4}{x^2}-\frac{2}{1-\cos x}\right)$ 36. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{x^3}$

Answer to Exercise

1. $\frac{1}{3}$ 2. $\frac{1}{3}$ 3. $\frac{1}{2}$ 4. -1

5. $\frac{1}{2}\ln 2$ 6. 1 7. 4 8. does not exist

9. $-\frac{1}{4}$ 10. $\frac{1}{\pi}$ 11. 0 12. 0

13. e^{10} 14. e^4 15. $\frac{1}{e}$ 16. 3

17. $+\infty$ 18. $-\frac{1}{2}$ 19. $\frac{1}{2}$ 20. $\frac{5}{3}$

21. 0 22. $-\frac{1}{4\pi^2}$ 23. a 24. $\frac{1}{6}$

25. $\frac{1}{2}$ 26. 0 27. 0 28. 0

29. $a=1, b=-1, c=0$ 30. 0 31. ∞

32. 2 33. 0 34. ∞ 35. $-\frac{1}{3}$

36. 1