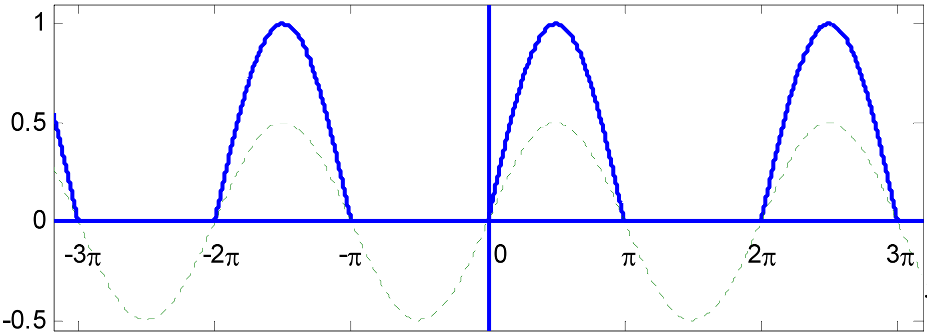
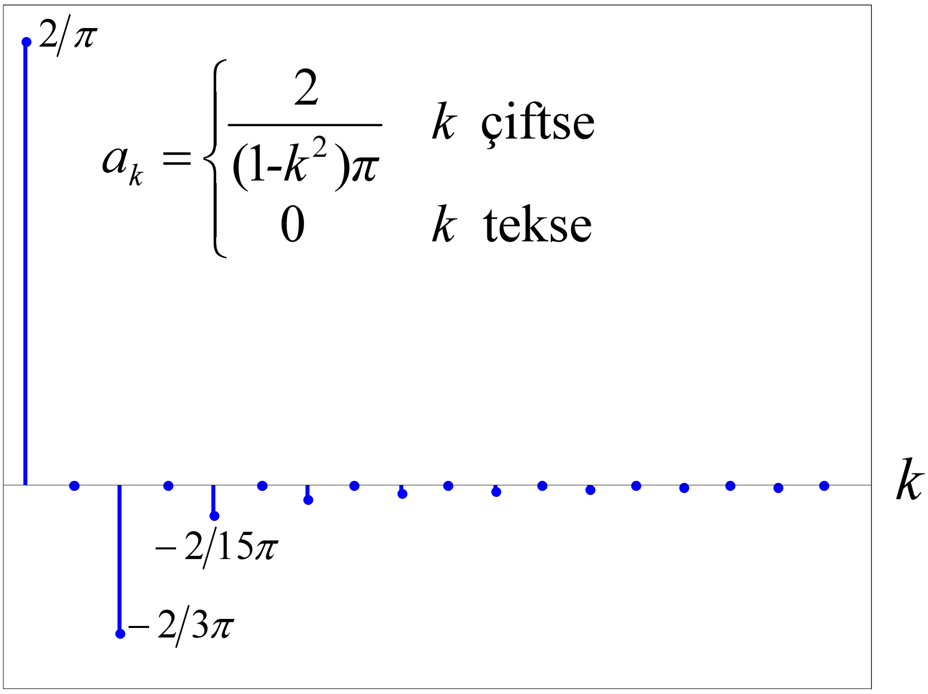
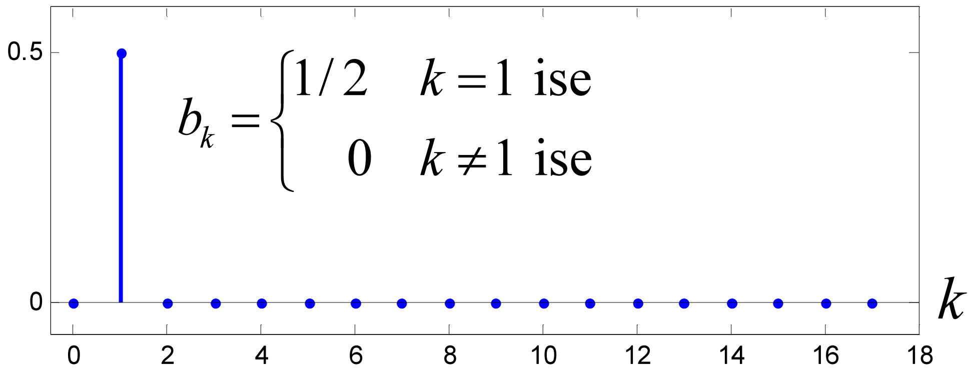
SPEKTRUM ÇİZİMLERİ: Örnek 1: $x(t) = \max\{\sin t\,,\,0\}$



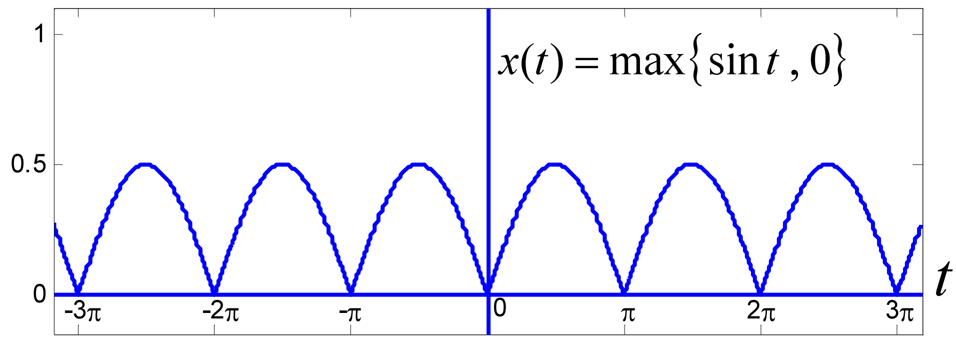
$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t)\right)$$

sinyalinin gerçel Fourier seri katsayıları spektrumunu çizelim (Temel bileşen yukarıda gösterilmiştir):



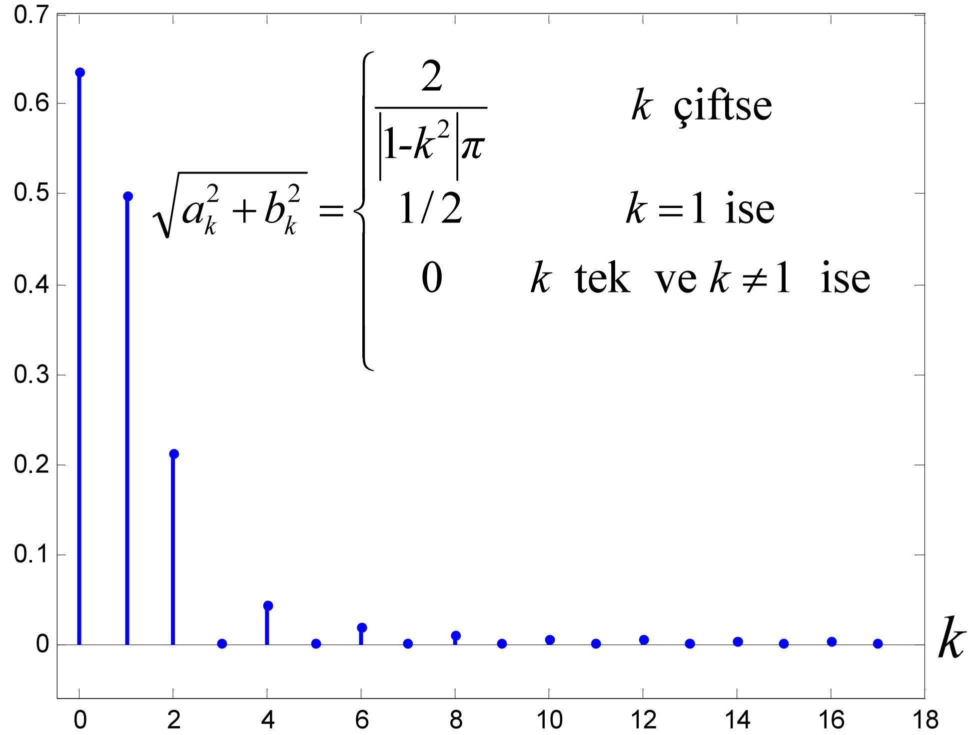


Burada 1. harmonik sadece $b_1 \sin t$ teriminden ibarettir ve bunun dışında tek harmonik bulunmamaktadır. Bunun da nedeni, eğer bu 1. harmonik sinyalden çıkarılırsa elde kalan kısmın ($y(t) = x(t) - b_1 \sin t$) çift harmonik simetrisine ($y(t + \frac{T_0}{2}) = y(t) \quad \forall t$) sahip olmasıdır ki bu da aşağıda gösterildiği gibi o kısmın periyodunun $T_0/2$ olduğu anlamına gelir. Ayrıca 1. harmonik teriminden başka sinüslü terim yoktur. Çünkü yine aşağıdaki şekilden görüldüğü gibi 1. harmonik çıkartılınca kalan kısım $y(t)$ çifttir.

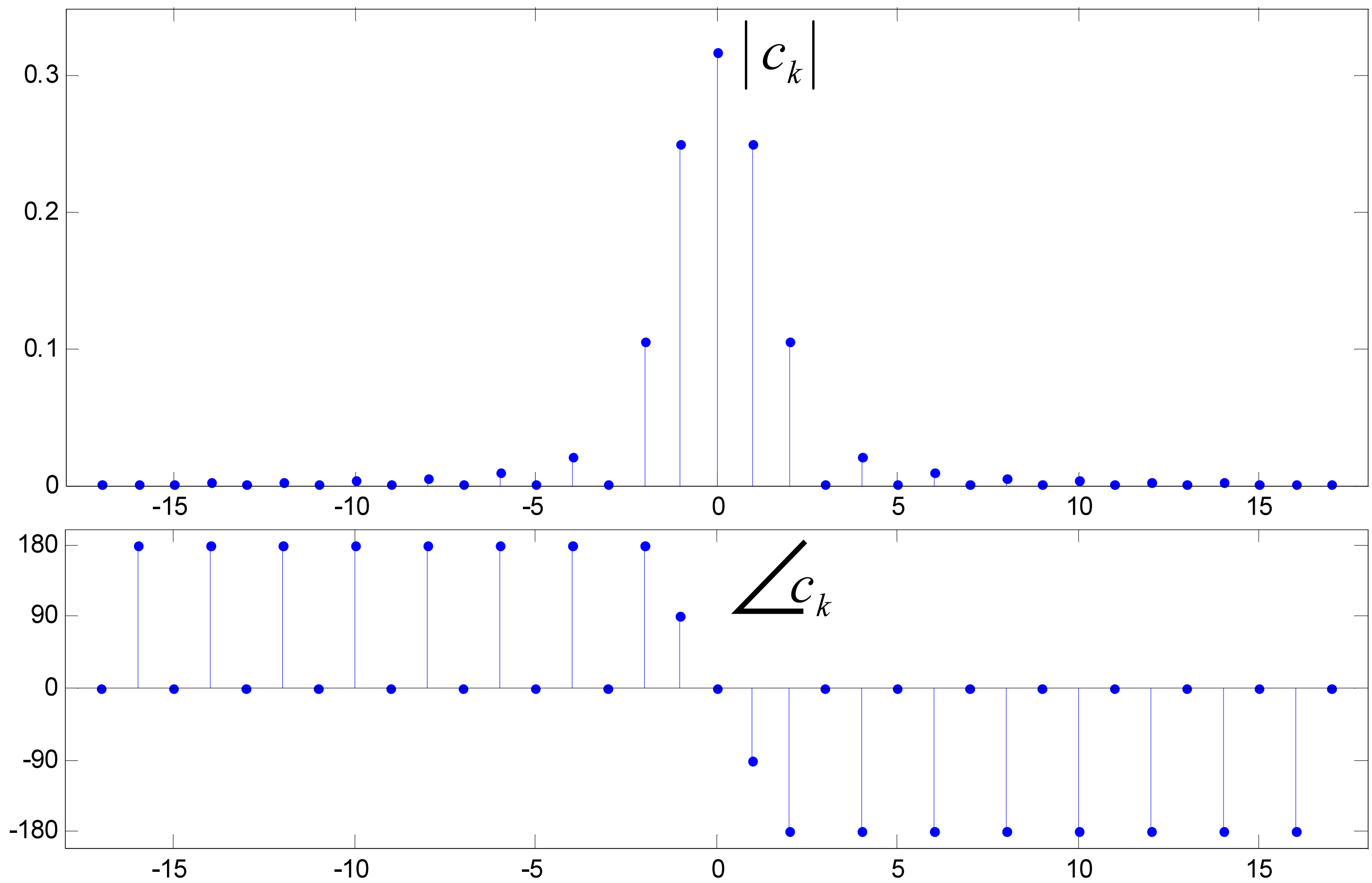


Çift harmonik simetrisi, periyodun ana periyodun 2 katı alınmasıyla aynı anlama gelmektedir. Böylece ana frekansın hep çift katlarında harmonikler varmış gibi düşünülür. Çift harmonik simetrisi bu yüzden karışıklığa yol açar ve bundan pek bahsedilmez; ancak bu örnekteki gibi bir sinyalin bileşeni olarak anlamı vardır.

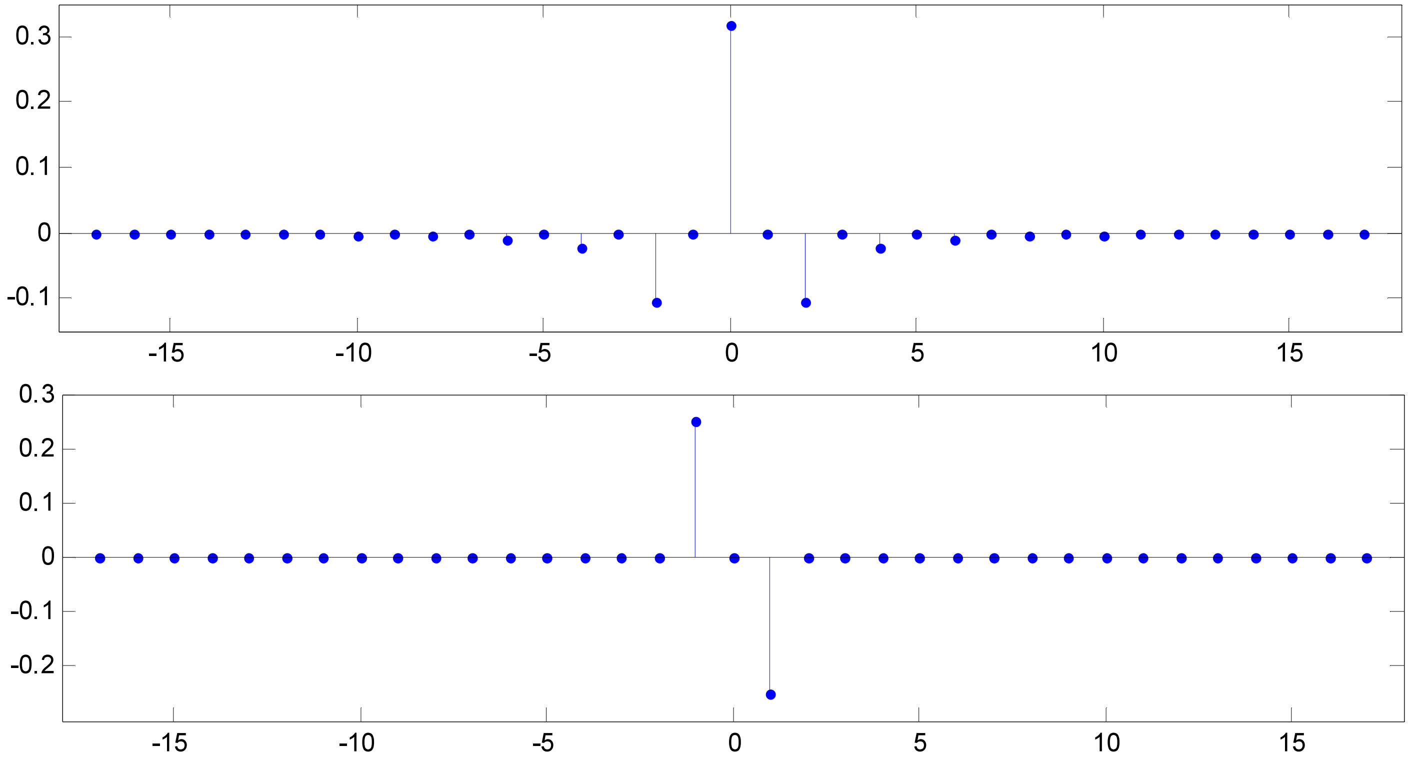
İstenirse her bir harmoniğin genliği olan $\sqrt{a_k^2 + b_k^2}$ değerlerini de k 'ya karşı çizebiliriz.



Ya da $|c_k|$ ve $\angle$ açısı (derece) çizilirse:



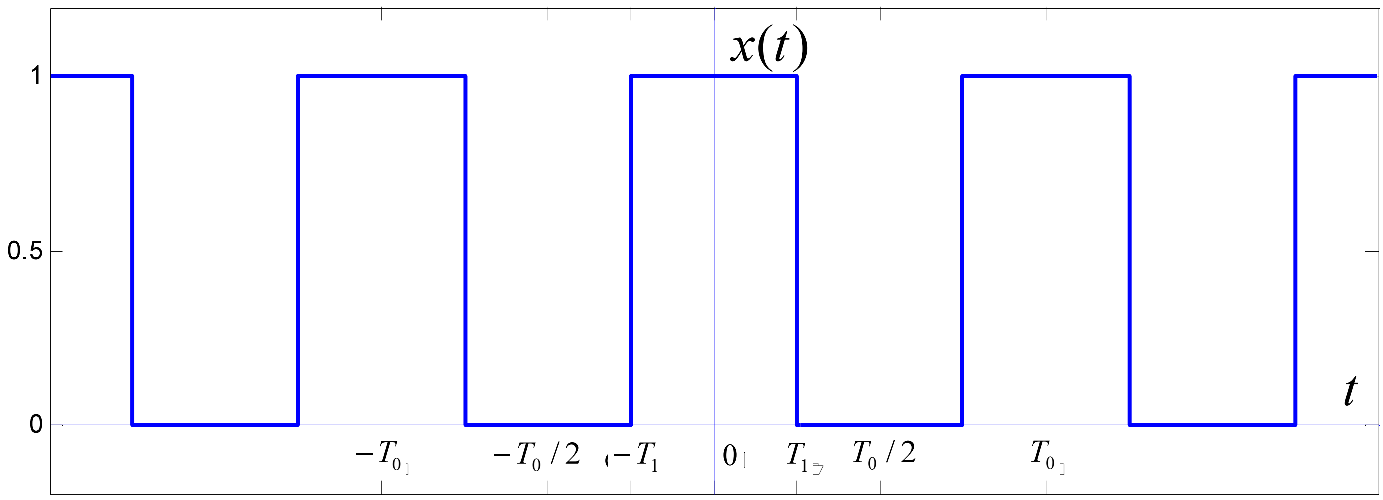
c_k'nın gerçel ve sanal kısımları da çizilebilir:



Sanal kısım sıfır ise tek bir çizimle c_k çizilebilir. Bunu gelecek örnek üzerinde gösterelim:

FOURIER SERİSİYLE FOURIER DÖNÜŞÜMÜ ARASINDAKİ İLİŞKİ:

Örnek 2:

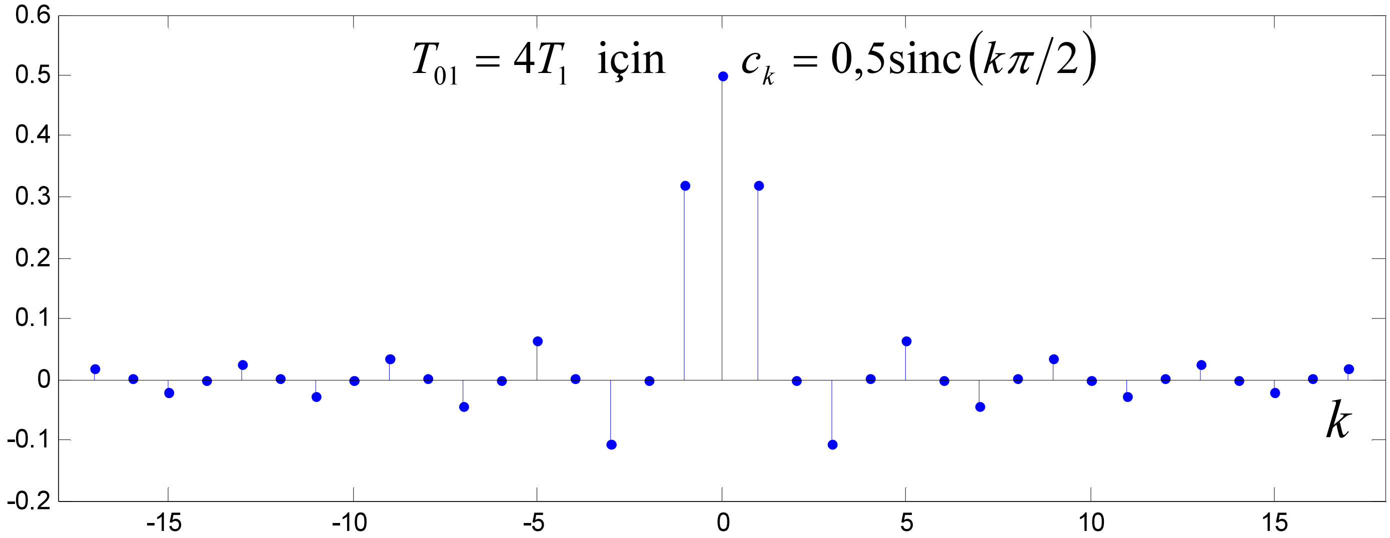


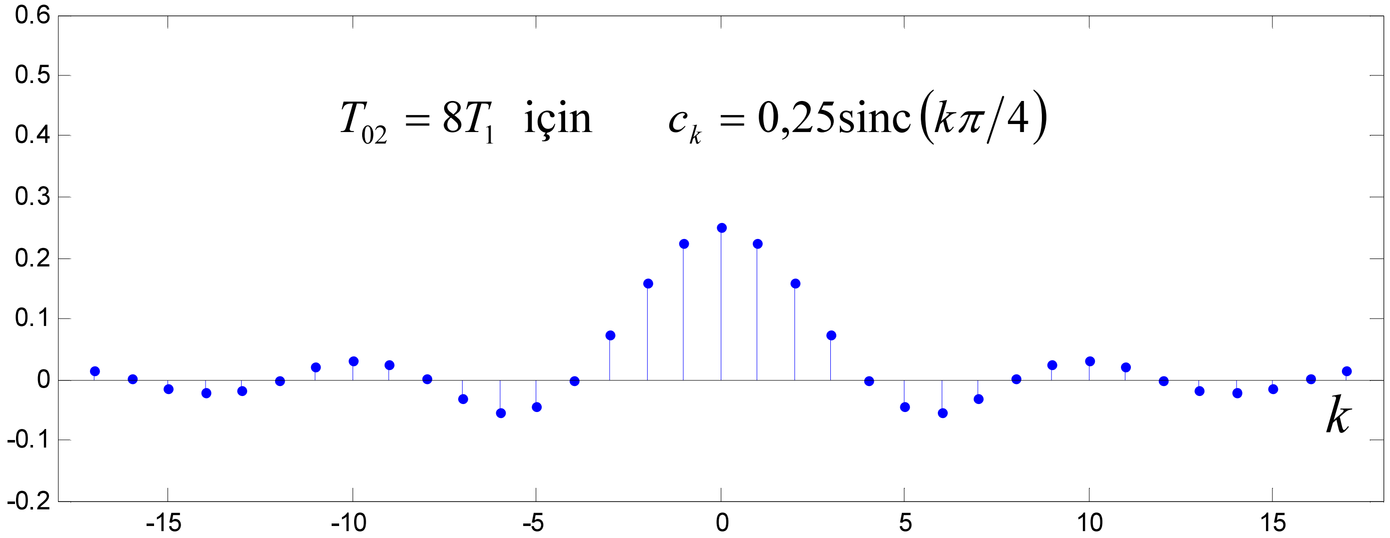
Bu sinyalin karmaşık Fourier serisi:

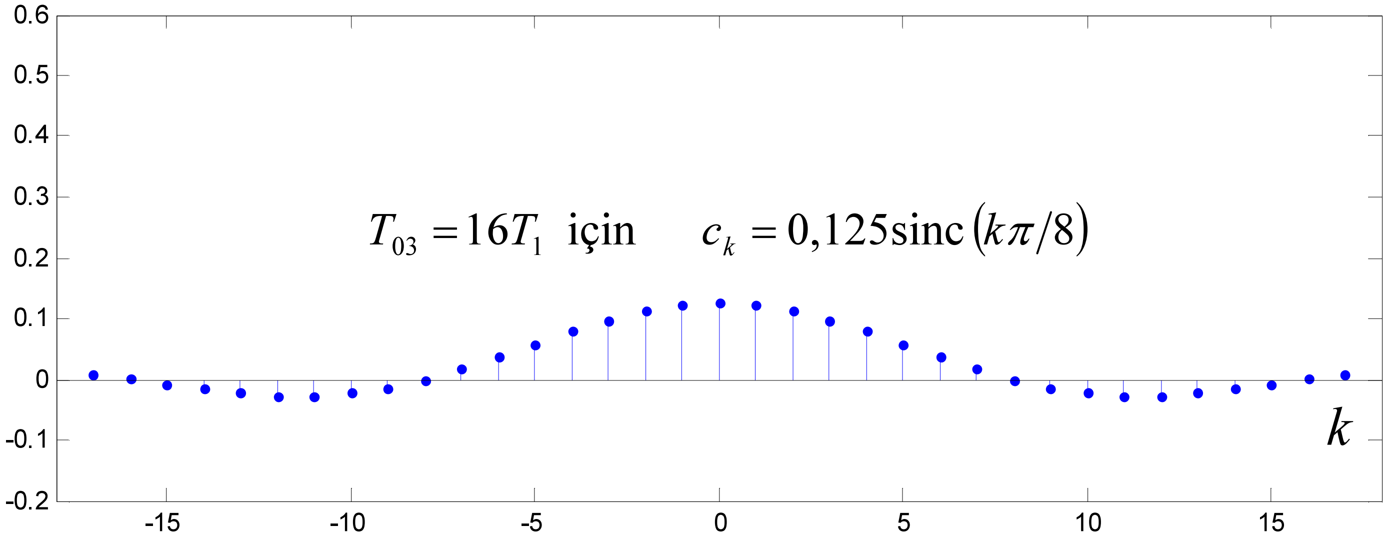
$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} \qquad ; \qquad c_k = \frac{2T_1}{T_0}\operatorname{sinc}\left(2k\pi\, T_1/T_0\right)$$

Gerçel olduğu için c_k katsayılarının spektrumu tek bir çizimle gösterilebilir.

Ancak biz şimdi aynı T_1, farklı T_0 değerleri için bu spektrumun nasıl değiştiğine bakalım. Sırasıyla $T_{01} = 4T_1$, $T_{02} = 8T_1$ ve $T_{03} = 16T_1$ için c_k spektrumunu k değerlerine karşı çizersek:





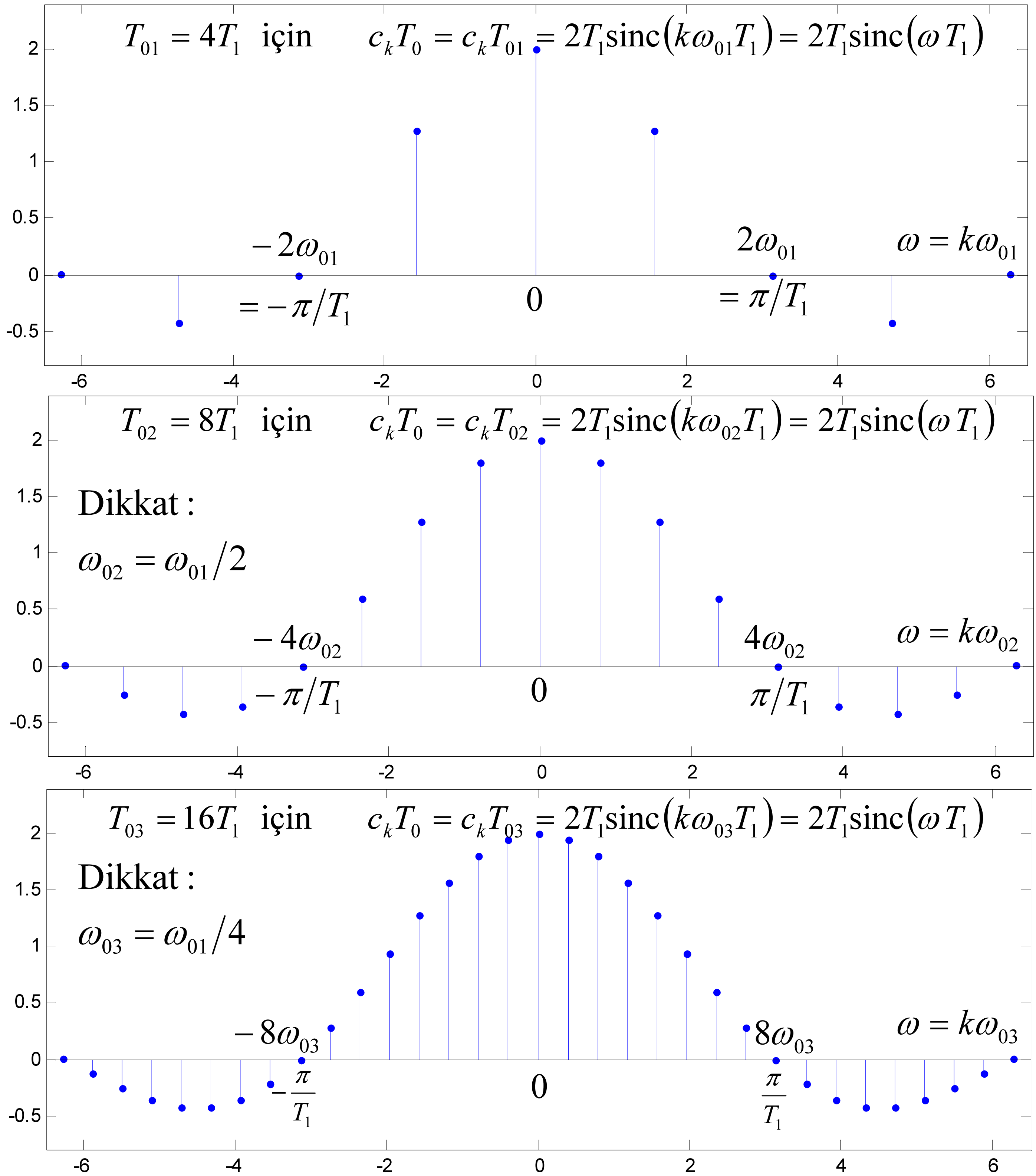


Görüldüğü gibi T_0 artarken genlik azalmakta ve spektrum yüksek harmonik numaralarına doğru genişleyerek yayılmaktadır.

Şimdi de bu üç spektrumu yatay ve düşey eksenleri farklı ölçeklerle çizelim. Düşey eksen $c_k T_0$, yatay eksen ise $\omega = k\omega_0$ diye adlandıracağımız yeni bir büyüklük olsun. Çizimler arasında T_0 değişirken ω_0 da değişecek fakat T_1 değişmeyecektir. Bu yüzden T_1 değerine göre büyüklükleri karşılaştırmak yerinde olacaktır. Önceki üç ve sonraki üç grafikteki eksenlerdeki sayısal değerler $T_1 = 1$ içindir.

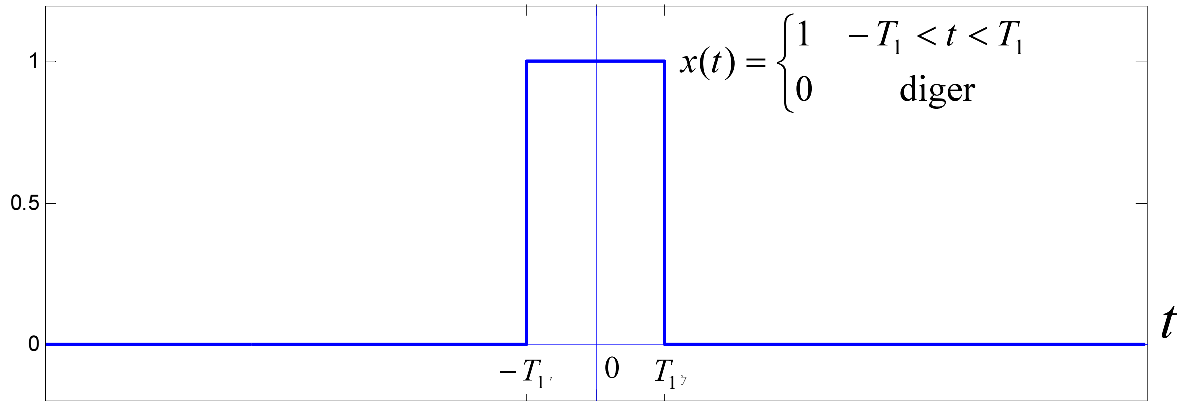
$c_k T_0 = 2T_1 \mathrm{sinc}(2k\pi T_1/T_0) = 2T_1 \mathrm{sinc}(k\omega_0 T_1) = 2T_1 \mathrm{sinc}(\omega T_1)$ olacaktır.

Çizimler şöyle olur:



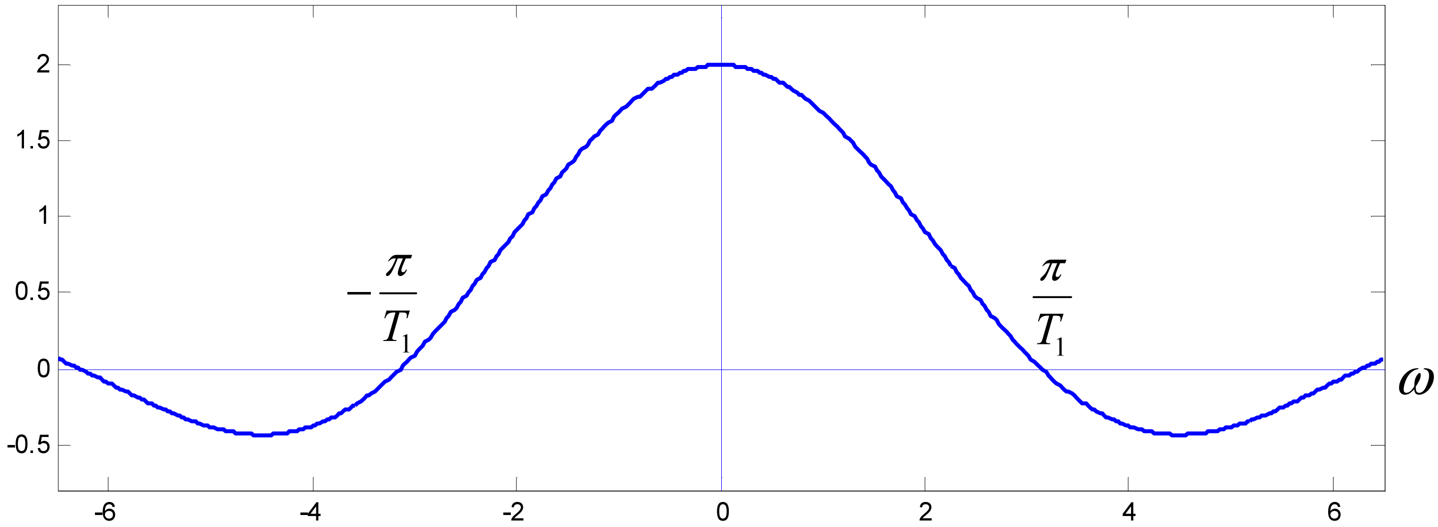
Görüldüğü gibi T_0 artarken $c_k T_0$, genliği ve genişliği aynı olan bir zarf fonksiyonuna yakınsamaktadır. $T_0 \to \infty$ 'a giderken bu kesikli çizim, sürekli bir fonksiyona yakınsar. İşte bu fonksiyon, $T_0 \to \infty$ durumunda artık periyodik olmayan $x(t)$ 'nin Fourier dönüşümü olarak tanımlanır.

Yani şu $x(t)$ sinyalinin:



Fourier dönüşümü:

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = X(\omega) = 2T_1 \operatorname{sinc}(\omega T_1)$$



olur.

<u>Not:</u> Bu anlatımda

$$\operatorname{sinc}(p) = \frac{\sin p}{p}$$

tanımı kullanılmıştır ve bu tanımda $p = 0$ için, limit değeri olan 1 alınmaktadır ($\operatorname{sinc}(0) = 1$).

Haberleşme derslerinde yaygın olarak kullanılan tanım biraz farklıdır:

$$\operatorname{sinc}(p) = \frac{\sin p\pi}{p\pi}$$