Makine Mühendisliği Bölümü

SİSTEM MODELLEME VE OTOMATİK KONTROL FİNAL SINAVI SORULARI

07.01.2015 Süre: 75 dakika

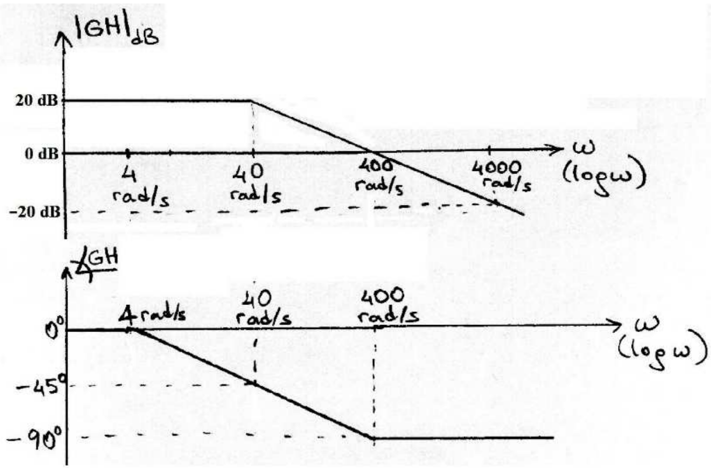
Yalnızca 4 soru çözmeniz beklenmektedir. 5 soruyla uğraşırsanız, en düşük puanlı cevabınız sayılmayacaktır.

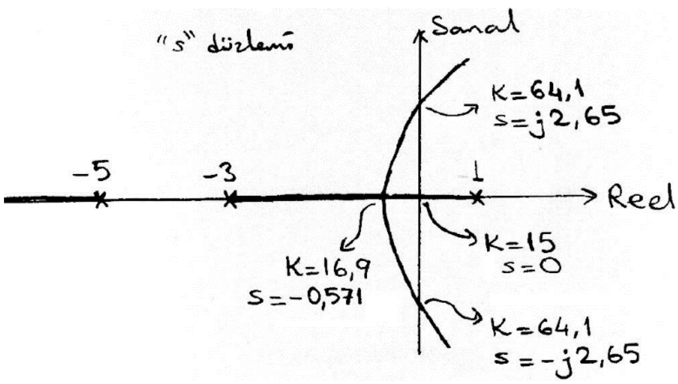
1) Transfer fonksiyonu $1/(s^2 + 2s - 8)$ olan bir sistemin çıkışını, istenen r değerine getirmek için gereken u değerini PI kontrol ile uygulamak için gereken düzenlemeyi blok şema ile gösteriniz. PI kazançları K_P ve K_I hangi şartları sağlamalıdır? Bu şartları sağlayan keyfi bir takım K_P ve K_I kazanç değerleri atayınız. **(25 puan)**

2) Bir sistemin açık döngü transfer fonksiyonuna ilişkin Bode genlik(dB) ve açı eğrileri doğrusallaştırılmış yaklaşık parçalar halinde aşağıda solda verilmiştir. Karmaşık açık döngü kutup veya sıfır yoktur.

a) Sistemin açık döngü transfer fonksiyonunu (*GH*) bulunuz. **(18 puan)**

b) Sistemin kararlı olup olmadığını, grafiklerden nasıl anlaşıldığını belirterek söyleyiniz. **(7 puan)**





3) Bir sistemin kapalı döngü transfer fonksiyonunun paydasını sıfır yapan köklerin, K 'nın $[0,+\infty)$ aralığındaki değişimine göre yerlerini gösteren kök-yer eğrisi yukarıda sağdaki şekilde verilmiştir (Üç adet açık döngü kutup var, açık döngü sıfır yok). Özel bazı noktalarda K değerleri yaklaşık olarak verilmiştir.

a) K 'nın negatif olmayan hangi değerleri için sistem kararlıdır? **(15 puan)**

b) En sağdaki kapalı döngü kutbun veya kutup çiftinin mümkün olduğunca solda olmasını istiyorsak K ne seçilmelidir ve bu seçim için en sağdaki kapalı döngü kutup(lar) ne olur? **(10 puan)**

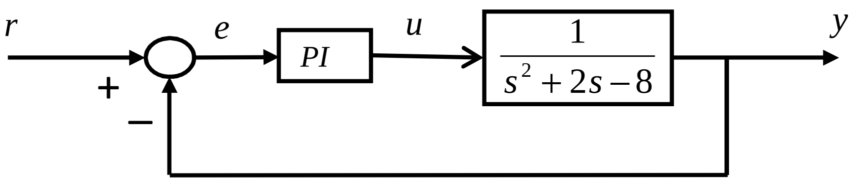
4) Transfer fonksiyonu $\dfrac{Y(s)}{U(s)} = \dfrac{5}{s^2 + 3s + 2}$ ile verilen sistem için uygun durum değişkenleri tanımlayarak bir durum uzayı modeli elde ediniz. **(25 puan)**

5) $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -7 & -9 \end{bmatrix}$ için e^{At} matrisini istediğiniz yolla bulunuz. **(25 puan)**

BAŞARILAR … **Yard. Doç. Dr. Ata SEVİNÇ**

Makine Mühendisliği Bölümü
SİSTEM MODELLEME VE OTOMATİK KONTROL FİNAL SINAVI CEVAP ANAHTARI
07.01.2015

1)



PI kontrolörün (denetleyicinin) transfer fonksiyonu $K_P + \frac{K_I}{s} = \frac{K_P s + K_I}{s}$ olup bütün sistemin transfer fonksiyonu:

$$\frac{\frac{K_P s + K_I}{s(s^2+2s-8)}}{1 + \frac{K_P s + K_I}{s(s^2+2s-8)}} = \frac{K_P s + K_I}{s^3 + 2s^2 + (K_P - 8)s + K_I}$$

Hatanın (e) hep sıfıra gitmesi ancak ve eğer (⟺) tüm sistem kararlı ise olur. Bütün sistemin transfer fonksiyonunun paydasına Routh-Hurwitz testi uygulayarak kararlılık şartlarını bulalım:

s^3	1	$(K_P - 8)$	0
s^2	2	K_I	0
s^1	$K_P - 8 - (K_I/2)$	0	
s^0	K_I		

Kararlılık için ilk sütunda işaret değişikliği olmamalıdır. Yani
$K_I > 0$ ve $K_P - 8 - (K_I/2) > 0$ olmalıdır. Diğer bir ifadeyle $0 < K_I < 2K_P - 16$ olmalıdır. Meselâ, $K_P = 10$, $K_I = 2$ olabilir.

2) a) Genlik(dB) eğrisindeki tek köşe frekansı 40 rad/s = 1/τ , yani = 25ms'dir. Köşe frekansının solundan sağına eğim -20dB/dekad değiştiği için paydada (1+$s\tau$) terimi vardır. Açı eğrisindeki köşelerin 4 rad/s ve 400 rad/s frekanslarda (1 dekad öncesi ve 1 dekad sonrası) olması ve aradaki eğimin -45°/dekad olması da bunu doğrular. Köşe frekansından önce (en sol tarafta) genlik(dB) eğrisinin eğimi sıfır olduğundan s çarpanı bulunmamaktadır. Başkaca bir köşe olmamasından anlarız ki açık döngü transfer fonksiyon: $GH = \frac{K}{(1+s\tau)}$

K'yı bulmak için dB değeri bilinen özel bir frekansta meselâ ω < 40 rad/s'de

Genlik(dB) = $|K|_{dB} + \left|\frac{1}{1+s\tau}\right|_{dB} = 20\ dB$ olduğu görülmektedir. Bu yaklaşık çizim yönteminde köşe frekansında $\left|\frac{1}{1+s\tau}\right|_{dB} = 0\ dB$ kabul edilmektedir. Dolayısıyla $|K|_{dB} = 20\ dB \;\; \rightarrow \; K = 10^{20/20} = 10$ bulunur.
Sonuç: $GH = \frac{10}{(1+0{,}025\cdot s)}$

b) Bode açık döngü eğrilerinde, açının -180° olduğu frekansta genlik kazancı ≥ 0dB ise, ya da genlik kazancının 0dB olduğu frekansta açı -180° veya daha aşağıda ise, kapalı döngü sistem kararsızdır. Burada açı hiç -180° olmamaktadır. Genlik kazancı 0dB iken de açı -180°'nin üzerindedir. Kararsızlık durumlarının ikisi de olmadığı için sistem kararlıdır.

3) × ile gösterilen açık döngü kutuplarda K = 0'dır. Kök yer eğrisi boyunca bu noktalardan uzaklaşıldıkça K artmaktadır. K > 15 olmaya başlayınca sağda hiç kök kalmamakta, K = 16,9 olunca köklerden ikisi s = -0,571'de çakışmaktadır. K biraz daha artırılınca köklerin ikisi karmaşık (eşlenik çift) olmakta, ve nihayet K > 64,1 için eşlenik çift olan iki kök sağ yarı bölgeye geçmektedir. K 'nın tüm bu değişimi sırasında üçüncü kök -5'in daha daha sol tarafına doğru reel kalarak kaymaktadır. Buna göre,

a) Yalnızca 15 < K < 64,1 için köklerin üçü de sol yarı bölgede olduğu için sistem negatif olmayan sadece bu K değer aralığı için kararlıdır.

b) En sağdaki kökün geldiği en sol nokta ayrılma noktasıdır. Bu noktada K = 16,9 ve en sağdaki (çakışan) iki kök s = -0,571 olmaktadır. (Kök-yer eğrisindeki kökler, o noktadaki K değeri için kapalı döngü kutuptur.)

4) $(s^2+3s+2)Y = 5U \quad \rightarrow \quad \ddot{y}+3\dot{y}+2y = 5u$

$x_1 = y \;, \quad x_2 = \dot{x}_1 = \dot{y}$. Ana denklemde yerine yazılırsa

$$\dot{x}_2 = -3x_2 - 2x_1 + 5u$$

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}}_{A} x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}}_{B} u$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{C} x + \underbrace{0}_{D} \cdot u$$

5) $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -7 & -9 \end{bmatrix}$ için e^{At} matrisini bulunuz.

Çözüm: <u>1. Yol:</u> $|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-3 & -5 \\ 7 & \lambda+9 \end{vmatrix} = \lambda^2+6\lambda+8 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda_1 = -2\,,\; \lambda_2 = -4$.

$$e^{-2t} = c_0 + c_1\cdot(-2)$$
$$e^{-4t} = c_0 + c_1\cdot(-4)$$

$c_1 = \frac{1}{2}e^{-2t} - \frac{1}{2}e^{-4t}$ ve $c_0 = 2e^{-2t} - e^{-4t}$ bulunur.

$$e^{At} = c_0 I + c_1 A = (2e^{-2t}-e^{-4t})\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \left(\frac{1}{2}e^{-2t} - \frac{1}{2}e^{-4t}\right)\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -7 & -9 \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 3{,}5e^{-2t} - 2{,}5e^{-4t} & 2{,}5e^{-2t} - 2{,}5e^{-4t} \\ -3{,}5e^{-2t} + 3{,}5e^{-4t} & -2{,}5e^{-2t} + 3{,}5e^{-4t} \end{bmatrix}$$

Sağlaması, t = 0 için $e^{At} = I$.

<u>2. yol:</u> $e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\{(sI-A)^{-1}\}$ $\qquad sI - A = \begin{bmatrix} s-3 & -5 \\ 7 & s+9 \end{bmatrix}$

$$|sI - A| = s^2+6s+8 = (s+2)(s+4)$$

$$(sI-A)^{-1} = \frac{1}{(s+2)(s+4)}\begin{bmatrix} s+9 & 5 \\ -7 & s-3 \end{bmatrix}$$

Her bir eleman basit kesirlere ayrılır. (Bildiğiniz için burada atlandı)

$$(sI-A)^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{7/2}{s+2} - \dfrac{5/2}{s+4} & \dfrac{5/2}{s+2} - \dfrac{5/2}{s+4} \\ \dfrac{-7/2}{s+2} + \dfrac{7/2}{s+4} & \dfrac{-5/2}{s+2} + \dfrac{7/2}{s+4} \end{bmatrix}$$

Ters Laplace dönüşümü alınınca önceki yönteminkiyle aynı sonuç bulunur:

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 3{,}5e^{-2t} - 2{,}5e^{-4t} & 2{,}5e^{-2t} - 2{,}5e^{-4t} \\ -3{,}5e^{-2t} + 3{,}5e^{-4t} & -2{,}5e^{-2t} + 3{,}5e^{-4t} \end{bmatrix}$$