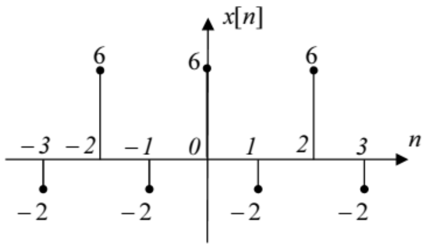
Soru 1)

Şekilde verilen N = 2 ile periyodik $x[n]$ sinyalini Fourier serisine açınız.



Çözüm: $\omega_o = \frac{2\pi}{N} = \pi$ olmak üzere $x[n] = \sum_{\mathbf{k}=0}^{N-1} c_{\mathbf{k}} e^{j\mathbf{k}\omega_o n} = \sum_{\mathbf{k}=0}^{1} c_{\mathbf{k}} e^{j\mathbf{k}\pi n}$

Fourier serisidir. Sadece periyot kadar (N = 2 adet) terimi vardır. Katsayılar şöyle bulunur:

$$c_{\mathbf{k}} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\mathbf{k}\omega_o n} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{1} x[n] e^{j\mathbf{k}\pi n}$$

Ortalama değer: $c_0 = \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \underbrace{e^{-j\mathbf{0}\omega_o n}}_{1} = \frac{x[0]+x[1]}{2} = \frac{6+(-2)}{2} = 2 = c_0$

$$c_1 = \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\mathbf{1}\omega_o n} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{1} x[n] e^{-j\mathbf{1}\pi n} = \frac{x[0]\overbrace{e^{-j\mathbf{1}\pi 0}}^{1} + x[1]\overbrace{e^{-j\mathbf{1}\pi 1}}^{-1}}{2} = \frac{x[0]-x[1]}{2} = \frac{6-(-2)}{2} = 4 = c_1$$

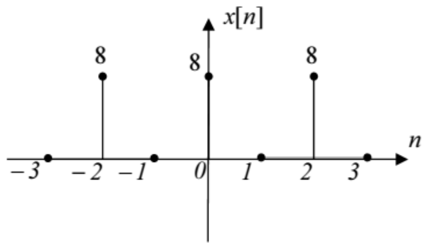
Tüm katsayıları Fourier serisinde yerine yazalım:

$$x[n] = \sum_{\mathbf{k}=0}^{1} c_{\mathbf{k}} e^{j\mathbf{k}\pi n} = c_0 e^{j\mathbf{0}\pi n} + c_1 e^{j\mathbf{1}\pi n} = \boxed{x[n] = 2 + 4e^{j\pi n}}$$

(Açıklama yapıldığı için çözüm uzun gibi görünüyor. $N=2$ için aslında 1-2 satırla çözüm de yapılabilir. Görebilen önce basitçe $x[n] = 2 + 4\cdot(-1)^n$ yazıp sonra $(-1)^n$ yerine $e^{j\pi n}$ yazarak yukarıdaki ifadeyi yazsa da olur.)

Soru 2)

Şekilde verilen N = 2 ile periyodik $x[n]$ sinyalini Fourier serisine açınız.



Çözüm: $\omega_o = \frac{2\pi}{N} = \pi$ olmak üzere $x[n] = \sum_{\mathbf{k}=0}^{N-1} c_{\mathbf{k}} e^{j\mathbf{k}\omega_o n} = c_0 + c_1 e^{j\pi n}$

Fourier serisidir. Sadece periyot kadar (N = 2 adet) terimi vardır. Katsayılar şöyle bulunur:

$$c_{\mathbf{k}} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\mathbf{k}\omega_o n} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{1} x[n] e^{j\mathbf{k}\pi n}$$

Ortalama değer: $c_0 = \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \underbrace{e^{-j\mathbf{0}\omega_o n}}_{1} = \frac{x[0]+x[1]}{2} = \frac{8+0}{2} = 4 = c_0$

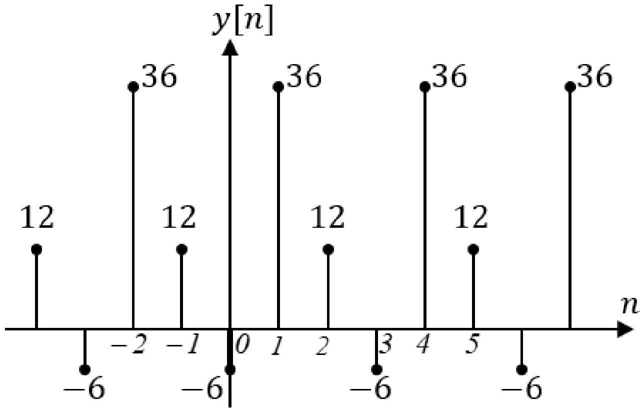
$$c_1 = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{1} x[n] e^{-j\mathbf{1}\pi n} = \frac{x[0]\overbrace{e^{-j\mathbf{1}\pi 0}}^{1} + x[1]\overbrace{e^{-j\mathbf{1}\pi 1}}^{-1}}{2} = \frac{x[0]-x[1]}{2} = \frac{8-0}{2} = 4 = c_1$$

Tüm katsayıları Fourier serisinde yerine yazalım:

$$x[n] = \sum_{\mathbf{k}=0}^{1} c_k e^{j\mathbf{k}\pi n} = c_0 e^{j\mathbf{0}\pi n} + c_1 e^{j\mathbf{1}\pi n} = \boxed{x[n] = 4 + 4e^{j\pi n}}$$

(Açıklama yapıldığı için çözüm uzun gibi görünüyor. $N=2$ için aslında 1-2 satırla çözüm de yapılabilir. Görebilen önce basitçe $x[n] = 4 + 4\cdot(-1)^n$ yazıp sonra $(-1)^n$ yerine $e^{j\pi n}$ yazarak yukarıdaki ifadeyi yazsa da olur.)

Soru 3) Şekilde verilen $N = 3$ ile periyodik $y[n]$ sinyalini Fourier serisine açınız.



Çözüm: $\omega_0 = 2\pi/N = 2\pi/3$ olmak üzere,

$$y[n] = \sum_{\mathbf{k}=0}^{N-1} c_{\mathbf{k}} e^{j\mathbf{k}\omega_0 n} = \sum_{\mathbf{k}=0}^{2} c_{\mathbf{k}} e^{j\mathbf{k}2\pi n/3}$$

Fourier serisidir. Sadece periyot kadar ($N = 3$ adet) terimi vardır. Katsayılar şöyle bulunur:

$$c_{\mathbf{k}} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} y[n] e^{-j\mathbf{k}\omega_0 n} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{2} y[n] e^{-j\mathbf{k}2\pi n/3}$$

$y[n]$ gerçel olduğundan $c_{\mathbf{N-k}} = c_{\mathbf{k}}^*$, yani $c_{\mathbf{2}} = c_{\mathbf{1}}^*$

$$c_{\mathbf{0}} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} y[n] \underbrace{e^{-j\mathbf{0}\omega_0 n}}_{1} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{2} y[n] = \text{ortalama değer} = \frac{1}{3}(-6+36+12) = 14 = c_{\mathbf{0}}$$

$$c_{\mathbf{1}} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} y[n] \underbrace{e^{-j\mathbf{1}\omega_0 n}}_{1} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{2} y[n] \underbrace{e^{-j\mathbf{1}\cdot(2\pi n/3)}}_{1\angle(-n\cdot 120^\circ)} = \frac{y[0]e^{-j\mathbf{1}\cdot(2\pi 0/3)} + y[1]e^{-j\mathbf{1}\cdot(2\pi 1/3)} + y[2]e^{-j\mathbf{1}\cdot(2\pi 2/3)}}{3}$$

$$= \frac{-6\angle 0^\circ + 36\angle(-120^\circ) + 12\angle(-240^\circ)}{3} = \frac{-6-18-j18\sqrt{3}-6+j6\sqrt{3}}{3} = -10 - j4\sqrt{3} = c_{\mathbf{1}}$$

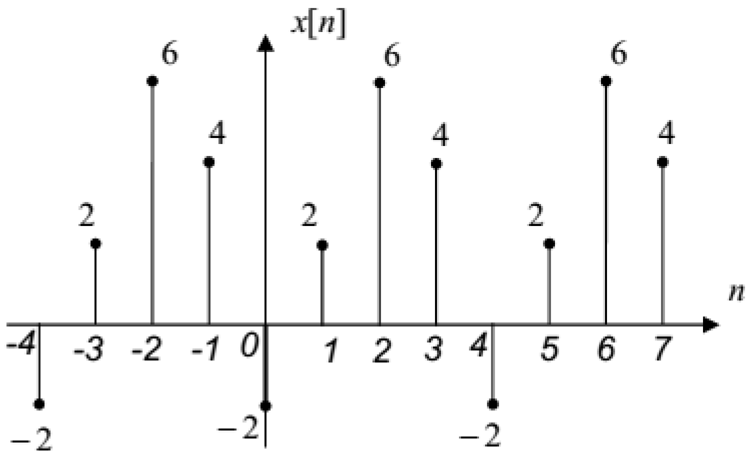
$$c_{\mathbf{2}} = c_{\mathbf{1}}^* = -10 + j4\sqrt{3} = c_{\mathbf{2}}$$

$$y[n] = \sum_{\mathbf{k}=0}^{2} c_{\mathbf{k}} e^{j\mathbf{k}2\pi n/3} = c_{\mathbf{0}} e^{j\mathbf{0}\cdot(2\pi n/3)} + c_{\mathbf{1}} e^{j\mathbf{1}\cdot(2\pi n/3)} + c_{\mathbf{2}} e^{j\mathbf{2}\cdot(2\pi n/3)}$$

$$y[n] = 14 + (-10 - j4\sqrt{3})e^{j(2\pi n/3)} + (-10 + j4\sqrt{3})e^{\overbrace{j(4\pi n/3)}^{\equiv -j2\pi n/3}}$$

Soru 4)

Şekilde verilen $N = 4$ ile periyodik $x[n]$ sinyalini Fourier serisine açınız.



Çözüm: $\omega_o = \dfrac{2\pi}{N} = \dfrac{\pi}{2}$ olmak üzere $x[n] = \sum_{\mathbf{k}=0}^{N-1} c_{\mathbf{k}} e^{j\mathbf{k}\omega_o n} = \sum_{\mathbf{k}=0}^{3} c_{\mathbf{k}} e^{j\mathbf{k}\pi n/2}$ Fourier serisidir. Sadece periyot kadar ($N = 4$ adet) terimi vardır. Katsayılar şöyle bulunur:

$$c_{\mathbf{k}} = \frac{1}{N}\cdot\sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\mathbf{k}\omega_o n} = \frac{1}{4}\cdot\sum_{n=0}^{3} x[n] e^{-j\mathbf{k}\pi n/2}$$

Ayrıca $x[n]$ reel ise $c_{\mathbf{N-k}} = c_{\mathbf{k}}^*$ formülü ile bazı katsayılar daha kolay hesaplanabilir. Meselâ burada $c_3 = c_1^*$

Ortalama değer: $c_0 = \frac{1}{N}\cdot\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\underbrace{e^{-j\mathbf{0}\omega_o n}}_{1} = \frac{1}{4}\cdot\sum_{n=0}^{3} x[n] = \frac{x[0]+x[1]+x[2]+x[3]}{4} = \frac{-2+2+6+4}{4} = 2{,}5 = c_0$

$$c_1 = \frac{1}{N}\cdot\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\mathbf{1}\omega_o n} = \frac{1}{4}\cdot\sum_{n=0}^{3} x[n]e^{-j\mathbf{1}\pi n/2} = \frac{x[0]\overbrace{e^{-j\mathbf{1}\pi\cdot 0/2}}^{1} + x[1]\overbrace{e^{-j\mathbf{1}\pi\cdot 1/2}}^{-j} + x[2]\overbrace{e^{-j\mathbf{1}\pi\cdot 2/2}}^{-1} + x[3]\overbrace{e^{-j\mathbf{1}\pi\cdot 3/2}}^{j}}{4}$$

$$c_1 = \frac{-2-j2-6+j4}{4} = -2+j0{,}5 = c_1 \quad\rightarrow\quad c_1^* = c_3 = -2-j0{,}5$$

$$c_2 = \frac{1}{N}\cdot\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\mathbf{2}\omega_o n} = \frac{1}{4}\cdot\sum_{n=0}^{3} x[n]e^{-j\mathbf{2}\pi n/2} = \frac{x[0]\overbrace{e^{-j\mathbf{2}\pi\cdot 0/2}}^{1} + x[1]\overbrace{e^{-j\mathbf{2}\pi\cdot 1/2}}^{-1} + x[2]\overbrace{e^{-j\mathbf{2}\pi\cdot 2/2}}^{1} + x[3]\overbrace{e^{-j\mathbf{2}\pi\cdot 3/2}}^{-1}}{4}$$

$$c_2 = \frac{-2-2+6-4}{4} = -0{,}5 = c_2$$

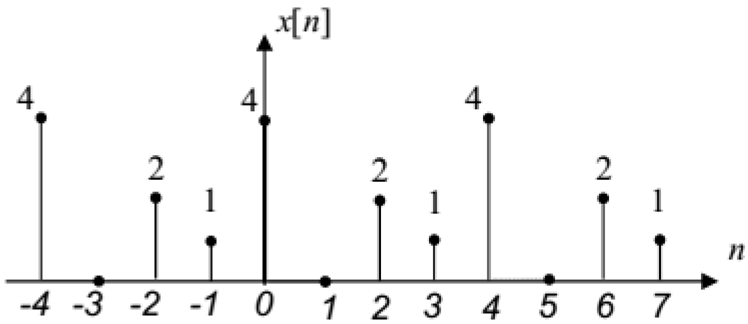
Tüm katsayıları Fourier serisinde yerine yazalım:

$$x[n] = \sum_{\mathbf{k}=0}^{3} c_k e^{j\mathbf{k}\pi n/2} = c_0 e^{j\mathbf{0}\pi n/2} + c_1 e^{j\mathbf{1}\pi n/2} + c_2 e^{j\mathbf{2}\pi n/2} + c_3 e^{\overbrace{j\mathbf{3}\pi n/2}^{\equiv -j\pi n/2}}$$

$$\boxed{x[n] = 2{,}5 + (-2+j0{,}5)e^{j\pi n/2} - 0{,}5e^{j\pi n} + (-2-j0{,}5)e^{-j\pi n/2}}$$

Soru 5)

Şekilde verilen $N = 4$ ile periyodik $x[n]$ sinyalini Fourier serisine açınız.



Çözüm: $\omega_o = \frac{2\pi}{N} = \frac{\pi}{2}$ olmak üzere $x[n] = \sum_{\mathbf{k}=0}^{3} c_{\mathbf{k}} e^{j\mathbf{k}\pi n/2}$ Fourier serisidir. Katsayılar şöyle bulunur:

$$c_{\mathbf{k}} = \frac{1}{4}\cdot\sum_{n=0}^{3} x[n]e^{-j\mathbf{k}\pi n/2}$$

Ortalama değer: $c_0 = \frac{x[0]+x[1]+x[2]+x[3]}{4} = \frac{4+0+2+1}{4} = 1{,}75 = c_0$

$$c_1 = \frac{1}{4}\cdot\sum_{n=0}^{3} x[n]e^{-j\mathbf{1}\pi n/2} = \frac{x[0]\overbrace{e^{-j\mathbf{1}\pi\cdot 0/2}}^{1} + x[1]\overbrace{e^{-j\mathbf{1}\pi\cdot 1/2}}^{-j} + x[2]\overbrace{e^{-j\mathbf{1}\pi\cdot 2/2}}^{-1} + x[3]\overbrace{e^{-j\mathbf{1}\pi\cdot 3/2}}^{j}}{4}$$

$$c_1 = \frac{4 - j0 - 2 + j1}{4} = 0{,}5 + j0{,}25 = c_1 \quad \rightarrow \quad c_1^* = c_3 = 0{,}5 - j0{,}25$$

$$c_2 = \frac{1}{4}\cdot\sum_{n=0}^{3} x[n]e^{-j\mathbf{2}\pi n/2} = \frac{x[0]\overbrace{e^{-j\mathbf{2}\pi\cdot 0/2}}^{1} + x[1]\overbrace{e^{-j\mathbf{2}\pi\cdot 1/2}}^{-1} + x[2]\overbrace{e^{-j\mathbf{2}\pi\cdot 2/2}}^{1} + x[3]\overbrace{e^{-j\mathbf{2}\pi\cdot 3/2}}^{-1}}{4}$$

$$c_2 = \frac{4 - 0 + 2 - 1}{4} = 1{,}25 = c_2$$

Tüm katsayıları Fourier serisinde yerine yazalım:

$$x[n] = \sum_{\mathbf{k}=0}^{3} c_k e^{j\mathbf{k}\pi n/2} = c_0 e^{j\mathbf{0}\pi n/2} + c_1 e^{j\mathbf{1}\pi n/2} + c_2 e^{j\mathbf{2}\pi n/2} + c_3 e^{\overbrace{j\mathbf{3}\pi n/2}^{\equiv -j\pi n/2}}$$

$$\boxed{x[n] = 1{,}75 + (0{,}5 + j0{,}25)\,e^{j\pi n/2} + 1{,}25\,e^{j\pi n} + (0{,}5 - j0{,}25)\,e^{-j\pi n/2}}$$

Soru 6)

$x[0] = 2$, $x[1] = 0$, $x[2] = 4$, $x[3] = 0$ olan ve $N = 4$ ile periyodik $x[n]$ sinyalini Fourier serisine açınız.

Çözüm: $\omega_o = \dfrac{2\pi}{N} = \dfrac{\pi}{2}$ olmak üzere $x[n] = \sum_{\mathbf{k}=0}^{3} c_k e^{j\mathbf{k}\pi n/2}$ Fourier serisidir. Katsayılar şöyle bulunur:

$$c_{\mathbf{k}} = \frac{1}{4}\cdot\sum_{n=0}^{3} x[n]e^{-j\mathbf{k}\pi n/2}$$

Ortalama değer: $c_0 = \dfrac{x[0] + x[1] + x[2] + x[3]}{4} = \dfrac{2 + 0 + 4 + 0}{4} = 1{,}5 = c_0$

$$c_1 = \frac{1}{4}\cdot\sum_{n=0}^{3} x[n]e^{-j\mathbf{1}\pi n/2} = \frac{2\cdot\overbrace{e^{-j\mathbf{1}\pi\cdot 0/2}}^{1} + 4\cdot\overbrace{e^{-j\mathbf{1}\pi\cdot 2/2}}^{-1}}{4} = \frac{2-4}{4} = -0{,}5 = c_1$$

$$\rightarrow \quad c_1^* = c_3 = -0{,}5$$

$$c_2 = \frac{1}{4}\cdot\sum_{n=0}^{3} x[n]e^{-j\mathbf{2}\pi n/2} = \frac{2\overbrace{e^{-j\mathbf{2}\pi\cdot 0/2}}^{1} + 4\overbrace{e^{-j\mathbf{2}\pi\cdot 2/2}}^{1}}{4} = \frac{2+4}{4} = 1{,}5$$

Tüm katsayıları Fourier serisinde yerine yazalım:

$$x[n] = \sum_{\mathbf{k}=0}^{3} c_k e^{j\mathbf{k}\pi n/2} = c_0 e^{j\mathbf{0}\pi n/2} + c_1 e^{j\mathbf{1}\pi n/2} + c_2 e^{j\mathbf{2}\pi n/2} + c_3 e^{\overbrace{j\mathbf{3}\pi n/2}^{\equiv -j\pi n/2}}$$

$$\boxed{x[n] = 1{,}5 - 0{,}5e^{j\pi n/2} + 1{,}5e^{j\pi n} - 0{,}5e^{-j\pi n/2}}$$