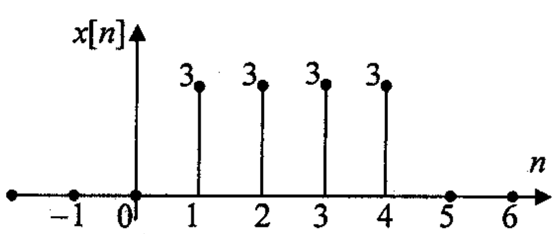
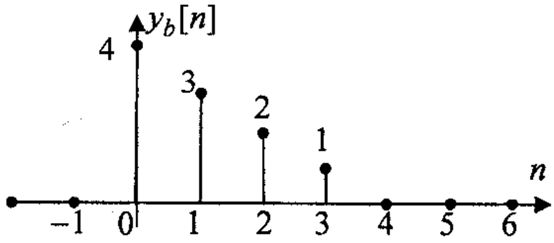
SİNYALLER VE SİSTEMLER ARASINAV SORULARI
Normal Öğretim, 20.11.2006, Süre: 80 dakika

1)





a) Yukarıdaki $x[n]$ sinyalini basamak sinyaller cinsinden yazınız. **(5 puan)**

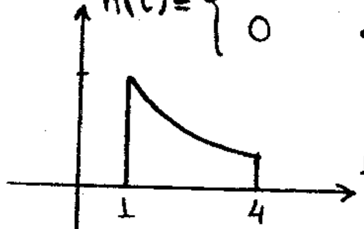
b) Doğrusal zamanla değişmez bir sistemin birim basamak tepkisi yukarıda verilen $y_b[n]$ ise, $x[n]$ girişi için çıkışı çiziniz. **(15 puan)**

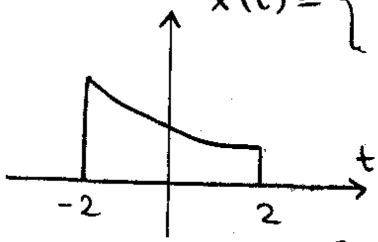
c) Bu sistemin birim darbe tepkisini çiziniz. **(10 puan)**

2) Giriş(x) çıkış(y) ilişkisi $y(t) = \int_0^t x(\tau)\,d\tau + 2x(t)$ ile verilen bir sistem doğrusal mıdır, bellekli midir, nedensel midir, kararlı mıdır, zamanla değişen midir? **(5×3=15 puan)**

3) Aşağıdaki konvolüsyon işlemlerinden istediğiniz birini yapınız ($\alpha \neq \beta$). **(30 puan)**

a) $h(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t} & 1 \le t < 4 \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$ $\quad x(t) = \begin{cases} e^{-\beta t} & -2 \le t < 2 \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$



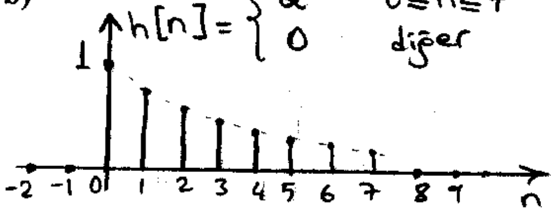


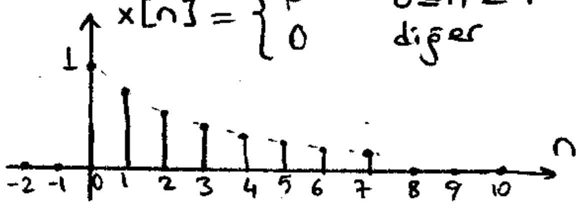
$\alpha > 0, \quad \beta > 0$

$y(t) = x(t) * h(t) = ?$

b) $h[n] = \begin{cases} \alpha^n & 0 \le n \le 7 \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$ $\quad x[n] = \begin{cases} \beta^n & 0 \le n \le 7 \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$

$0 < \alpha < 1$
$0 < \beta < 1$





$y[n] = x[n] * h[n] = ?$

4) Giriş(x) çıkış(y) ilişkisi

$$2\dot{y}(t) - 2y(t) = 4x(t)$$

ile verilen <u>nedensel</u> sistemin birim darbe tepkisini bulunuz. **(25 puan)** Bu sistem kararlı mıdır? **(5 puan)**

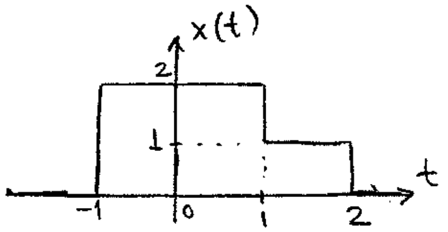
BAŞARILAR ...

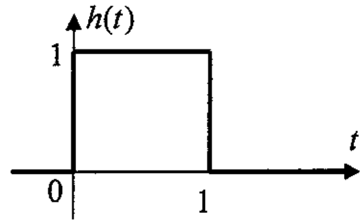
Yrd. Doç. Dr. Ata Sevinç

SİNYALLER VE SİSTEMLER ARASINAV SORULARI

İkinci Öğretim, 20.11.2006, Süre: 80 dakika

1)





a) Yukarıdaki $x(t)$ sinyalini basamak sinyaller cinsinden yazınız. **(5 puan)**

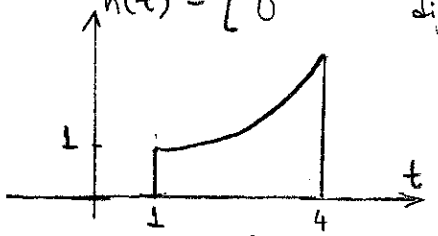
b) Doğrusal zamanla değişmez bir sistemin birim darbe tepkisi yukarıda verilen $h(t)$ ise, sistemin birim basamak tepkisini ($y_b(t)$) çiziniz. **(10 puan)**

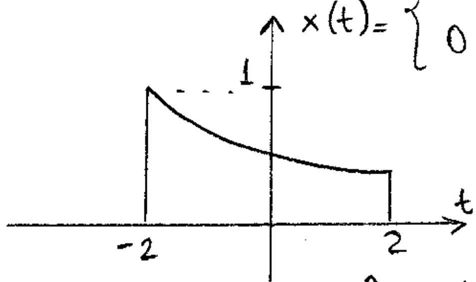
c) Bu sistemin çıkışını ($y(t)$) verilen $x(t)$ girişi için çiziniz. **(15 puan)**

2) Giriş(x) çıkış(y) ilişkisi $y[n]=\sum_{k=0}^{n} x[k]+x[n]\cdot x[n-1]$ ile verilen bir sistem doğrusal mıdır, bellekli midir, nedensel midir, kararlı mıdır, zamanla değişen midir? **(5×3=15 puan)**

3) Aşağıdaki konvolüsyon işlemlerinden istediğiniz birini yapınız ($\alpha \neq \beta$). **(30 puan)**

a) $h(t)=\begin{cases} e^{\alpha(t-1)} & 1\le t<4 \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$ $\quad x(t)=\begin{cases} e^{-\beta(t+2)} & -2\le t<2 \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$

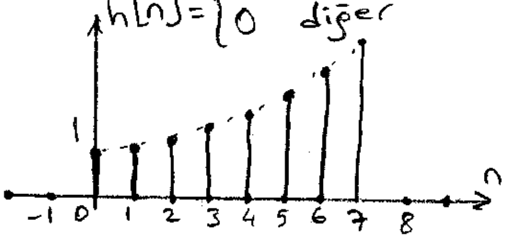


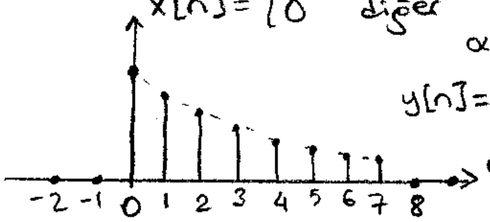


$\alpha>0,\ \beta>0$

$y(t)=x(t)*h(t)=?$

b) $h[n]=\begin{cases} \alpha^n & 0\le n\le 7 \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$ $\quad x[n]=\begin{cases} \beta^n & 0\le n\le 7 \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$





$\alpha>1,\ 0<\beta<1$

$y[n]=x[n]*h[n]=?$

4) Giriş(x) çıkış(y) ilişkisi

$$2\dot{y}(t)+2y(t)=4x(t)$$

ile verilen <u>nedensel</u> sistemin birim darbe tepkisini bulunuz. **(25 puan)**

BAŞARILAR ...

Yrd. Doç. Dr. Ata Sevinç

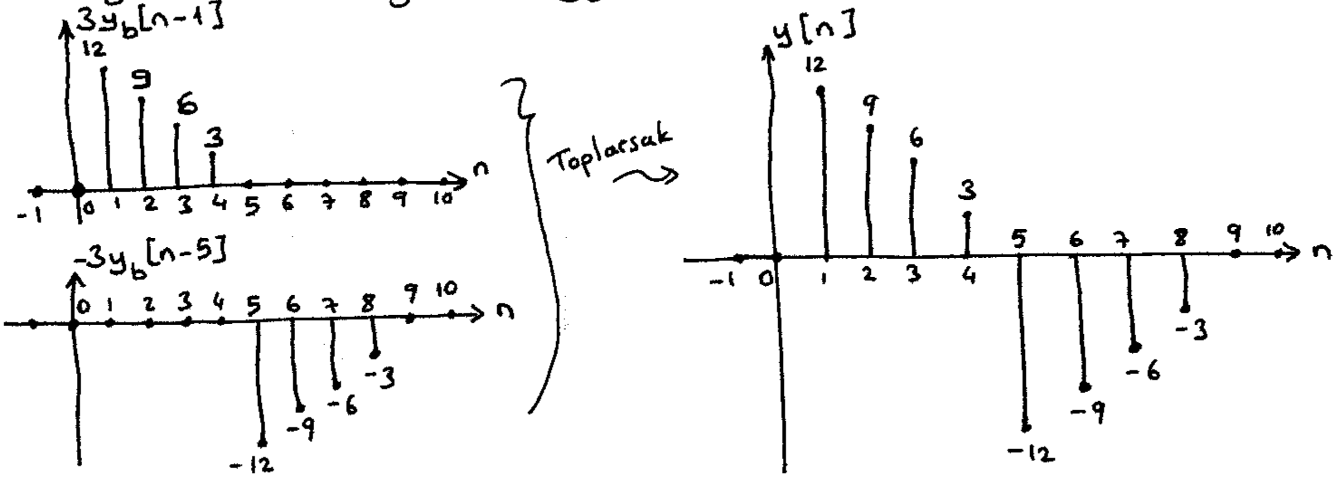
SİNYALLER VE SİSTEMLER ARASINAV CEVAP ANAHTARI

20.11.2006 Normal Öğretim

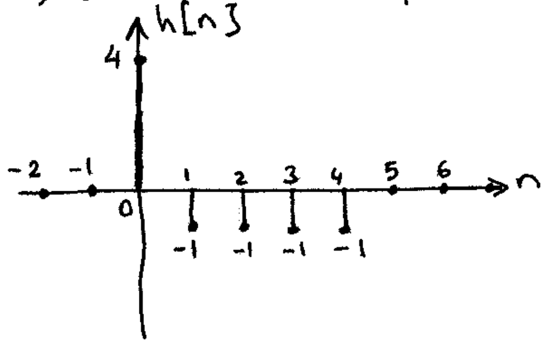
1) a) $x[n] = 3u[n-1] - 3u[n-5]$

b) $x[n]$'in $u[n]$ cinsinden ifadesinde $u \longrightarrow y_b$, $x \longrightarrow y$

yazılarak $y[n] = 3y_b[n-1] - 3y_b[n-5]$ bulunur.



c) Birim darbe tepkisi : $h[n] = y_b[n] - y_b[n-1]$



$n \leq -1 \Rightarrow h[n] = 0-0 = 0$

$n = 0 \Rightarrow h[0] = 4-0 = 4$

$h[1] = 3-4 = -1$

$h[2] = 2-3 = -1$

$h[3] = 1-2 = -1$

$n = 4 \Rightarrow h[4] = 0-1 = -1$

$n \geq 5 \Rightarrow h[n] = 0-0 = 0$

2) <u>Doğrusaldır.</u> İntegral doğrusallığı bozmaz.

<u>Belleklidir.</u> İntegral için $[0,t]$ aralığındaki giriş bilgisi gerekiyor.

<u>Nedensel değildir.</u> Çünkü $t<0$ olsa bile $x(0)$ bilgisi gerekiyor.

Ancak $t \geq 0$ bölgesi için çalışıldığı kabul ediliyorsa nedenseldir.

<u>Kararsızdır.</u> Çünkü $x(t) = u(t)$ örnek girişi (sonlu) uygulanırsa $t \geq 0$ için integral $= t$ olur ki bu da $t \to \infty$ için sonsuzdur, sınırlanamaz.

$x(t-t_0)$ için çıkış $= \int_0^t x(\underbrace{\tau - t_0}_{p \text{ olsun}})\,d\tau + 2x(t-t_0) = \int_{p=-t_0}^{t-t_0} x(p)\,dp + 2x(t-t_0)$

Diğer yandan $y(t-t_0) = \int_{\tau=0}^{t-t_0} x(\tau)\,d\tau + 2x(t-t_0)$ $\neq$

<u>Zamanla değişendir.</u>

3) **a)**

$$y(t)=\begin{cases} 0 & \longrightarrow \quad t<-1 \text{ ise} \\ \dfrac{e^{2\beta-\alpha}}{\alpha-\beta}\left(e^{-\beta(t+1)}-e^{-\alpha(t+1)}\right) & -1\leq t<2 \text{ ise} \\ \left(\dfrac{e^{-\alpha-\beta}-e^{2\beta-4\alpha}}{\alpha-\beta}\right)e^{-\beta(t-2)} & 2\leq t<3 \text{ ise} \\ \dfrac{e^{-\alpha-2\beta}}{\alpha-\beta}\cdot e^{-\alpha(t-3)}-\dfrac{e^{\beta-4\alpha}}{\alpha-\beta}\cdot e^{-\beta(t-3)} & \longrightarrow \quad 3\leq t<6 \text{ ise} \\ 0 & \longrightarrow \quad t\geq 6 \text{ ise} \end{cases}$$

b)

$$y[n]=\begin{cases} 0 & \longrightarrow \quad n<0 \text{ ise} \\ \dfrac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta} & 0\leq n\leq 7 \text{ ise} \\ \dfrac{\alpha\cdot\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^7\cdot\beta^n-\beta\cdot\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^7\cdot\alpha^n}{\alpha-\beta} & \longrightarrow \quad 7\leq n\leq 14 \text{ ise} \\ 0 & \longrightarrow \quad n>14 \text{ ise} \end{cases}$$

Bu sorunun ayrıntılı çözümü 3. sayfadan itibaren gösterilmiştir.

4) Nedensellikten dolayı $t<0$ için $h(t)=0$

$t>0$ için $\quad 2\ddot{h}(t)-2h(t)=0\ , \quad h(0^+)=0\ , \quad \dot{h}(0^+)=\frac{4}{2}=2$

$2\lambda^2-2=0 \ \rightarrow\ \lambda^2=1 \ \rightarrow\ \lambda_1=-1\ , \quad \lambda_2=+1$

$h(t)=A_1e^{-t}+A_2e^{t}$

$$\left.\begin{aligned} h(0^+) &= A_1+A_2=0 \\ \dot{h}(0^+) &= -A_1+A_2=2 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &-A_1=A_2 \\ &2A_2=2 \ \rightarrow\ A_2=1\ , \quad A_1=-1 \end{aligned}$$

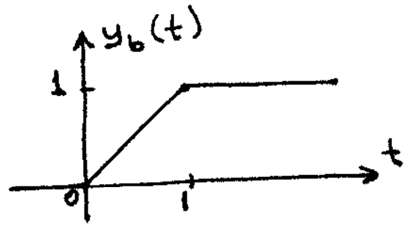
$h(t)=-e^{-t}+e^{t}$

Genel olarak ise $\boxed{h(t)=\left(e^{t}-e^{-t}\right)u(t)}$ → Tüm zamanlar için

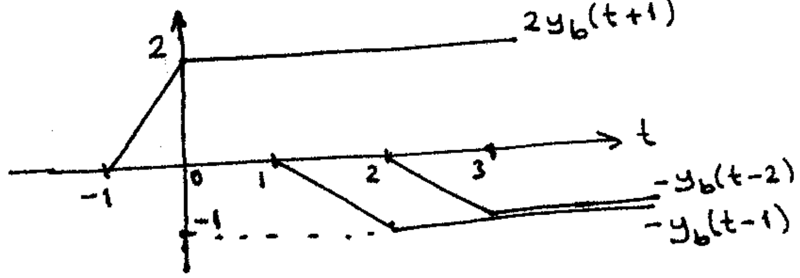
SİNYALLER VE SİSTEMLER ARASINAV CEVAP ANAHTARI
20.11.2006 İkinci Öğretim

1) a) $x(t) = 2u(t+1) - u(t-1) - u(t-2)$

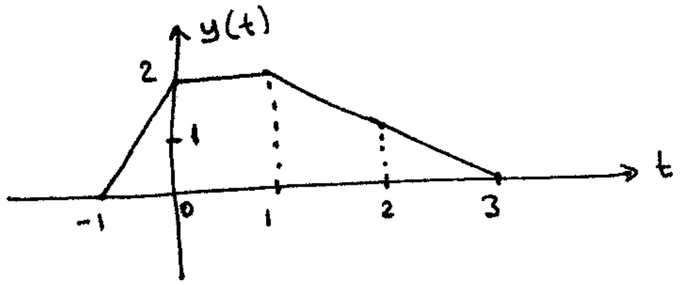
b) $y_b(t) = \int_{-\infty}^{t} h(\tau)\, d\tau$ Yani $h(t)$'nin integralini alacağız.



c) $y(t) = 2y_b(t+1) - y_b(t-1) - y_b(t-2)$ → x yerine y, u yerine y_b yazdık.



Bu üç bileşeni toplayarak $y(t)$ bulunur.



2) <u>Doğrusal değildir</u>, çünkü $x[n]x[n-1]$ çarpımı var.
<u>Belleklidir</u>.
<u>Nedensel değildir</u>. Çünkü $n<0$ için de $x[0]$ değerine bağlı. Ancak $n \geq 0$ bölgesi için çalışıldığı kabul ediliyorsa nedensel kabul edilebilir.
Sistem <u>kararsızdır</u>. Çünkü $x[n] = u[n]$ alınırsa $n \geq 0$ için toplam $n+1$ olur ve $n \to \infty$'a giderken $y[n] \to \infty$'a gider.

$\underbrace{x[n-n_0]}_{=v[n] \text{ diyelim}}$ için

$$\text{çıkış} = \sum_{k=0}^{n} v[k] + v[n]v[n-1]$$
$$= v[0] + \ldots + v[n] + v[n]v[n-1]$$
$$= x[-n_0] + \ldots + x[n-n_0] + x[n-n_0] \cdot x[n-n_0-1]$$

Diğer yandan, $y[n-n_0] = x[0] + \ldots + x[n-n_0] + x[n-n_0] \cdot x[n-n_0-1]$

Son iki ifade eşit olmadığından sistem <u>zamanla değişendir</u>.

3) a)

$$y(t)=\begin{cases} 0 & \longrightarrow \quad t<-1 \text{ ise} \\ \dfrac{1}{\alpha+\beta}\left(e^{\alpha(t+1)}-e^{-\beta(t+1)}\right) & -1\leq t<2 \text{ ise} \\ \dfrac{e^{3\alpha}-e^{-3\beta}}{\alpha+\beta}\cdot e^{-\beta(t-2)} & 2\leq t<3 \text{ ise} \\ \dfrac{e^{-\beta+3\alpha}}{\alpha+\beta}\cdot e^{-\beta(t-3)}-\dfrac{e^{-4\beta}}{\alpha+\beta}\cdot e^{\alpha(t-3)} & \longrightarrow \quad 3\leq t<6 \text{ ise} \\ 0 & \longrightarrow \quad t\geq 6 \text{ ise} \end{cases}$$

b)

$$y[n]=\begin{cases} 0 & \longrightarrow \quad n<0 \text{ ise} \\ \dfrac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta} & 0\leq n\leq 7 \text{ ise} \\ \dfrac{\alpha\cdot\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{7}\cdot\beta^{n}-\beta\cdot\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{7}\cdot\alpha^{n}}{\alpha-\beta} & \longrightarrow \quad 7\leq n\leq 14 \text{ ise} \\ 0 & \longrightarrow \quad n>14 \text{ ise} \end{cases}$$

Bu sorunun ayrıntılı çözümü 3. sayfadan itibaren gösterilmiştir.

4) $t<0$ için $h(t)=0$

$t>0$ için $2\ddot{h}(t)+2h(t)=0$, $h(0)=0$, $\dot{h}(0)=\frac{4}{2}=2$

$2\lambda^2+2=0 \rightarrow \lambda_{1,2}=\mp j \rightarrow h(t)=A_1\cos t+A_2\sin t$

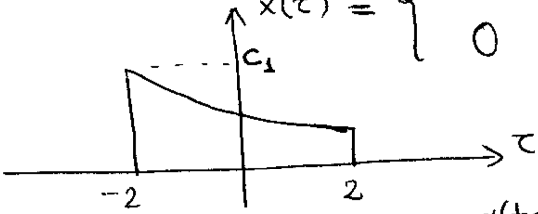
$\dot{h}(t)=-A_1\sin t+A_2\cos t$

$h(0^+)=h(0)=A_1=0$

$\dot{h}(0^+)=2=-A_1\cdot 0+A_2=2 \rightarrow h(t)=2\sin t \quad t>0$ için

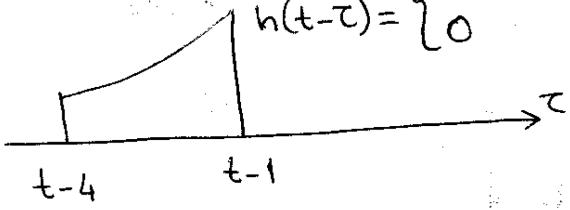
Genel olarak ise $\boxed{h(t)=(2\sin t)u(t)}$

3) a) $y(t) = x(t) * h(t) = \underbrace{\int_{\tau=-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau}_{1.\text{ yol}} = \underbrace{\int_{\tau=-\infty}^{+\infty} h(\tau) x(t-\tau) d\tau}_{2.\text{ yol}}$



$$x(\tau) = \begin{cases} c_1 e^{-\beta(\tau+2)} & -2 \leq \tau < 2 \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$$

Normal öğretim sorusunda $c_1 = e^{2\beta}$
İkinci öğretim sorusunda $c_1 = 1$



$$h(t-\tau) = \begin{cases} e^{-\alpha(t-\tau)} & 1 \leq t-\tau < 4 \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$$

$\rightarrow$ Normal öğretim sorusuna göre alalım. İleride α yerine $-\alpha$ yazarak İkinci Öğretim sorusunun cevabına dönüştürülebilir.

Düzenlenirse

$$h(t-\tau) = \begin{cases} e^{\alpha(\tau-t)} & t-4 < \tau \leq t-1 \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$$

$t-1 \geq -2$ ve $t-4 < -2$
yani $\underline{-1 \leq t < 2}$ için

$$x(\tau)h(t-\tau) = \begin{cases} c_1 e^{-\beta(\tau+2)} \cdot e^{\alpha(\tau-t)} & -2 \leq \tau \leq t-1 \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$$

$$x(\tau)h(t-\tau) = \begin{cases} c_1 e^{-2\beta-\alpha t} \cdot e^{(\alpha-\beta)\tau} & -2 \leq \tau \leq t-1 \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$$

$$c_1 e^{-2\beta-\alpha t} \int_{\tau=-2}^{t-1} e^{(\alpha-\beta)\tau} d\tau = \frac{c_1}{\alpha-\beta} e^{-2\beta-\alpha t} \cdot e^{(\alpha-\beta)\tau} \Big|_{\tau=-2}^{t-1}$$

$$y(t) = \frac{c_1}{\alpha-\beta} e^{-2\beta-\alpha t} \left(e^{(\alpha-\beta)(t-1)} - e^{2\beta-2\alpha} \right)$$

$$y(t) = e^{-\beta(t+1)} \cdot \left(\frac{c_1}{\alpha-\beta} e^{-\alpha} \right) - e^{-\alpha(t+1)} \cdot \left(\frac{c_1}{\alpha-\beta} e^{-\alpha} \right)$$

$$y(t) = \frac{c_1}{\alpha-\beta} e^{-\alpha} \cdot \left[e^{-\beta(t+1)} - e^{-\alpha(t+1)} \right] \quad \rightarrow \quad -1 \leq t < 2 \text{ ise}$$

$t-1<2$ ve $t-4 \geqslant -2$

yani $\underline{2 \leq t < 3}$ için :

Buna benzer sorularda bu ifade aynı kalıyor, yalnız geçerli olduğu τ aralığı değişiyor

$$x(\tau)h(t-\tau) = \begin{cases} c_1 e^{-2\beta-\alpha t} \cdot e^{(\alpha-\beta)\tau} & t-4 \leq \tau \leq t-1 \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$$

$$y(t) = c_1 e^{-2\beta-\alpha t} \int_{\tau=t-4}^{t-1} e^{(\alpha-\beta)\tau} d\tau = \frac{c_1}{\alpha-\beta} e^{-2\beta-\alpha t} \cdot e^{(\alpha-\beta)\tau} \Big|_{\tau=t-4}^{t-1}$$

belirsiz integral da sonucu aynı ama sınırlar değişiyor

$$y(t) = \frac{c_1}{\alpha-\beta} e^{-2\beta-\alpha t} \cdot \left(e^{(\alpha-\beta)(t-1)} - e^{(\alpha-\beta)(t-4)} \right)$$

$$y(t) = e^{-\beta(t-2)} \cdot \frac{c_1}{\alpha-\beta} \cdot \left(e^{-\alpha-3\beta} - e^{-4\alpha} \right) \rightarrow 2 \leq t < 3 \text{ ise.}$$

$t-4<2$ ve $t-1 \geqslant 2$ yani $\underline{3 \leq t < 6}$ için :

$$x(\tau)h(t-\tau) = \begin{cases} c_1 e^{-2\beta-\alpha t} \cdot e^{(\alpha-\beta)\tau} & t-4 \leq \tau \leq 2 \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$$

$$y(t) = \int_{\tau=t-4}^{2} \cdots = \frac{c_1}{\alpha-\beta} e^{-2\beta-\alpha t} \cdot e^{(\alpha-\beta)\tau} \Big|_{\tau=t-4}^{2}$$

$$y(t) = \frac{c_1}{\alpha-\beta} e^{-2\beta-\alpha t} \left(e^{2\alpha-2\beta} - e^{(\alpha-\beta)(t-4)} \right)$$

$$y(t) = e^{-\alpha(t-3)} \left(\frac{c_1}{\alpha-\beta} e^{-4\beta-\alpha} \right) - e^{-\beta(t-3)} \left(\frac{c_1}{\alpha-\beta} e^{-\beta-4\alpha} \right)$$

$\rightarrow 3 \leq t < 6$ ise

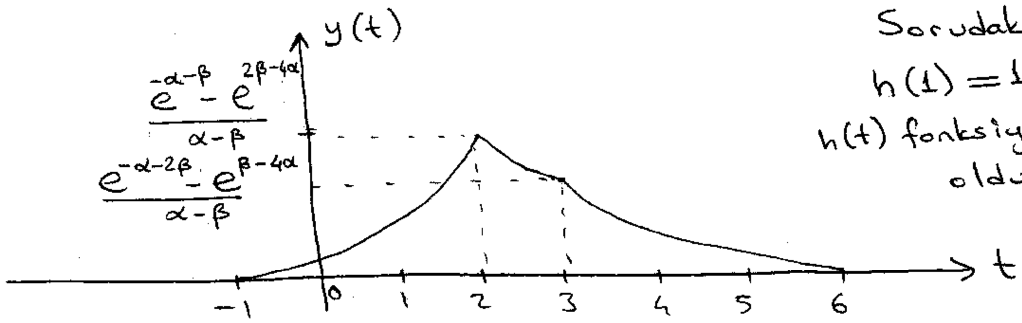
$t-1<-2$ yani $\underline{t<-1}$ veya $t-4 \geqslant 2$ yani $\underline{t \geqslant 6}$ için

$x(\tau)h(t-\tau) = 0$ her τ için.

$$y(t) = \int_{\tau=-\infty}^{+\infty} 0 \cdot d\tau = 0$$

Normal Öğretim sorusu için sonuç:

$$
y(t) = \begin{cases}
0 & t < -1 \text{ ise} \\[2mm]
\dfrac{e^{2\beta-\alpha}}{\alpha-\beta}\left(e^{-\beta(t+1)} - e^{-\alpha(t+1)}\right) & -1 \leq t < 2 \text{ ise} \\[2mm]
\left(\dfrac{e^{-\alpha-\beta} - e^{2\beta-4\alpha}}{\alpha-\beta}\right) e^{-\beta(t-2)} & 2 \leq t < 3 \text{ ise} \\[2mm]
\dfrac{e^{-\alpha-2\beta}}{\alpha-\beta} \cdot e^{-\alpha(t-3)} - \dfrac{e^{\beta-4\alpha}}{\alpha-\beta} \cdot e^{-\beta(t-3)} & 3 \leq t < 6 \text{ ise} \\[2mm]
0 & t \geq 6 \text{ ise}
\end{cases}
$$



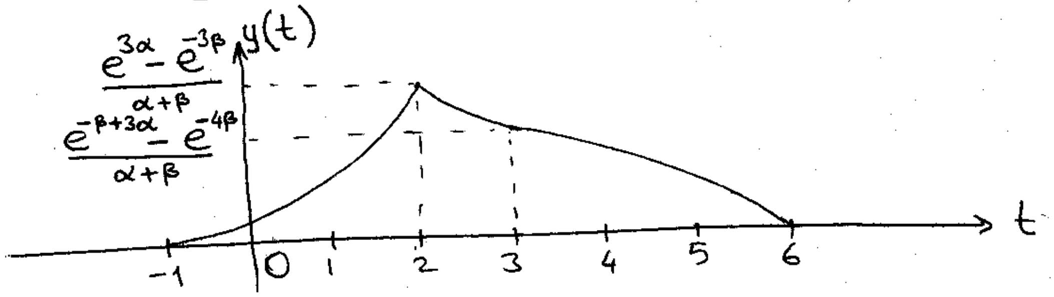
Sorudaki şekilde $h(1)=1$ bilgisinin yanlış, $h(t)$ fonksiyonunun doğru olduğu kabul edildi.

Eğer $h(1)=1$ bilgisi doğru, $h(t)$ fonksiyonunun yanlış yazıldığı ve doğrusunun ikinci öğretim sorusundaki ifadenin α yerine $-\alpha$ yazılanı olduğu kabul edilseydi, $y(t)$ bu bulunanın e^{α} katı olurdu.

İkinci Öğretim sorusu için sonuç:
N.Ö. için bulunan sonuçta önce bütün α'lar $-\alpha$ ile değiştirilir. Bundan sonra da sonuç $e^{-\alpha}$ ile çarpılır.

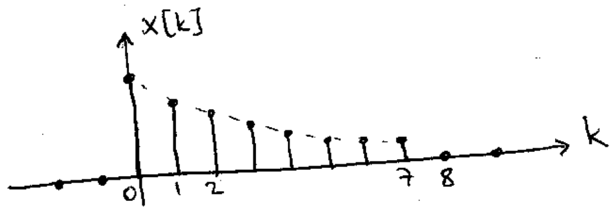
Ayrıca N.Ö. için $e^{2\beta}$ alınan c_1 burada 1 olduğundan sonuç ayrıca $e^{-2\beta}$ ile çarpılır:

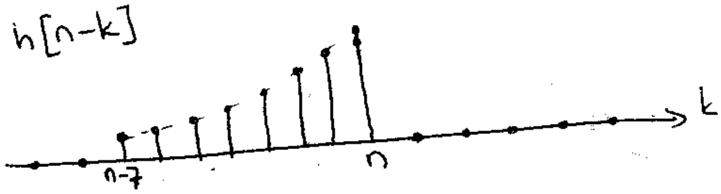
$$y(t)=\begin{cases} 0 & t<-1 \text{ ise} \\ \dfrac{1}{\alpha+\beta}\left(e^{\alpha(t+1)}-e^{-\beta(t+1)}\right) & -1\leq t<2 \text{ ise} \\ \dfrac{e^{3\alpha}-e^{-3\beta}}{\alpha+\beta}\cdot e^{-\beta(t-2)} & 2\leq t<3 \text{ ise} \\ \dfrac{e^{-\beta+3\alpha}}{\alpha+\beta}\cdot e^{-\beta(t-3)}-\dfrac{e^{-4\beta}}{\alpha+\beta}\cdot e^{\alpha(t-3)} & 3\leq t<6 \text{ ise} \\ 0 & t\geq 6 \text{ ise} \end{cases}$$



b) Fonksiyonların ifadesi N.Ö. ve İ.Ö. sorularında aynıdır. Buna göre α'nın 1'den büyük veya küçük olması sonuç ifadeleri değil, yalnız çizimi etkiler. Çizimleri N.Ö. sorusuna göre yapalım.

$$y[n]=x[n]*h[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]h[n-k]$$





$\underline{n<0}$ ve

$n-7>7$ yani $\underline{n>14}$

için her k için

$x[k]h[n-k]=0$

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}0=0$$

$0 \leq n \leq 7$ için :

$$x[k]h[n-k] = \begin{cases} \beta^k \alpha^{n-k} & 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$$

$$y[n] = \left(\sum_{k=0}^{n} (\beta/\alpha)^k \right) \cdot \alpha^n = \alpha^n \frac{1-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n+1}}{1-\frac{\beta}{\alpha}} = \frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta} = y[n]$$

$7 \leq n \leq 14$ için :

$$x[k]h[n-k] = \begin{cases} \beta^k \cdot \alpha^{n-k} & n-7 \leq k \leq 7 \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$$

$$y[n] = \alpha^n \cdot \sum_{k=n-7}^{7} (\beta/\alpha)^k \longrightarrow \begin{array}{l} m = k+7-n \Longrightarrow k = m+n-7 \\ k=n-7 \Longrightarrow m=0 \\ k=7 \Longrightarrow m=14-n \end{array}$$

$$y[n] = \alpha^n \cdot \sum_{m=0}^{14-n} (\beta/\alpha)^{m+n-7} = \alpha^n \cdot \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n-7} \cdot \sum_{m=0}^{14-n} (\beta/\alpha)^m$$

$$y[n] = \alpha^{+7} \cdot \beta^{n-7} \frac{1-(\beta/\alpha)^{15-n}}{1-\frac{\beta}{\alpha}} = \frac{\alpha^{+8} \cdot \beta^{n-7} - \alpha^{+8} \cdot \beta^{n-7} \cdot \beta^{15-n} \cdot \alpha^{n-15}}{\alpha-\beta}$$

$$y[n] = \frac{\alpha \cdot (\alpha/\beta)^7 \cdot \beta^n - \beta \cdot (\beta/\alpha)^7 \cdot \alpha^n}{\alpha-\beta} \longrightarrow 7 \leq n \leq 14 \text{ için}$$

Sonuç :

$$y[n] = \begin{cases} 0 & \longrightarrow n<0 \text{ ise} \\ \dfrac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta} & 0 \leq n \leq 7 \text{ ise} \\ \dfrac{\alpha \cdot \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^7 \cdot \beta^n - \beta \cdot \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^7 \cdot \alpha^n}{\alpha-\beta} & \longrightarrow 7 \leq n \leq 14 \text{ ise} \\ 0 & \longrightarrow n>14 \text{ ise} \end{cases}$$

SİNYALLER VE SİSTEMLER SINAV SORULARI
18.01.2007 Süre: 75 dakika

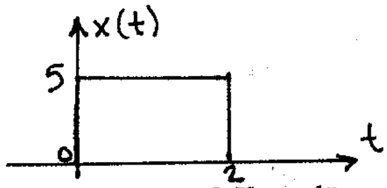
3. ve 4. soru mecburi* diğerleri seçmelidir. Toplam olarak yalnızca 5 soru cevaplayınız.
*2004-2005 öğretim yılı veya daha öncesinde açılan Sinyaller ve Sistemler-1 dersini almış ve devamsız olmamış olanlar (dersten ister geçsin ister kalsın) için 3. soru da seçmelidir. Yerine başka soru yapabilirler. Her soru eşit (20) puanlıdır.

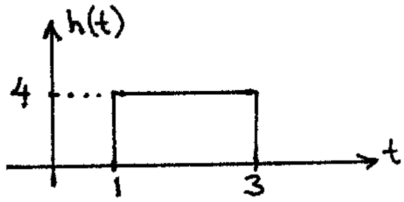
1) $x(t) = 2u(t+2) + 2u(t-1) - 4u(t-2)$ sinyalini
a) Çiziniz. **(5 puan)** b) Tek ve çift bileşenlerine ayırınız. **(15 puan)**

2) a) Giriş(x) çıkış(y) ilişkisi $y[n+1] = n \cdot x[n] + 1$ ile verilen bir sistem doğrusal mıdır, bellekli midir, nedensel midir, zamanla değişen midir, kararlı mıdır? **(5x3 = 15 puan)**

b) $v[n] = \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{n}{4}\right)$ kesikli zaman sinyali periyodik midir? Periyodik ise periyodu nedir? **(5 puan)**

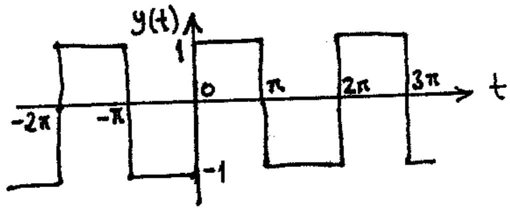
3)





$y(t) = x(t) * h(t) = ?$ Konvolüsyon işlemiyle bulunuz. (Başka yolla tam doğru çözmek 10 puandır.)

4) Şekilde verilen $y(t)$ sinyalini bir Fourier serisi biçiminde yazınız. (Gerçel veya karmaşık olabilir.)



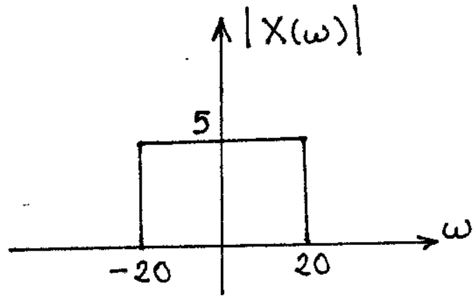
5) Giriş(x) çıkış(y) ilişkisi aşağıda verilen iki sistemden yalnız birisinin transfer fonksiyonunu ve birim darbe tepkisini bulunuz. Sistemler nedenseldir.

a) $y[n+2] - 1{,}2y[n+1] + 0{,}35y[n] = x[n+1] - x[n]$

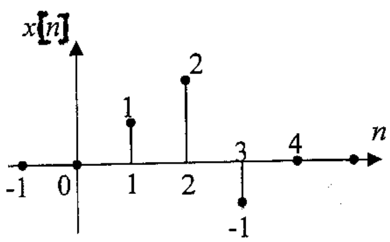
b) $\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 2y(t) = \dot{x}(t) - 3x(t)$

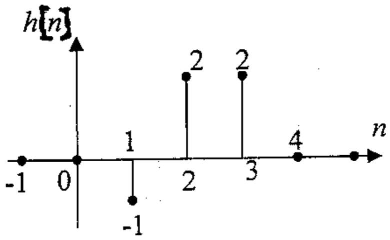
6) Spektrumu ($|X(\omega)|$) şekildeki gibi olan bir $x(t)$ sinyali, $y(t) = x(t)\cos(100t)$ biçiminde modüle ediliyor.
a) Modüleli sinyalin spektrumunu ($|Y(\omega)|$) çiziniz. **(10 puan)**

b) $\int_{-\infty}^{+\infty} |y(t)|^2 dt = ?$ **(10 puan)**



7)





$y[n] = x[n] * h[n] = ?$ İstediğiniz yöntemle bulunuz.

BAŞARILAR ... **Yrd. Doç. Dr. Ata SEVİNÇ**

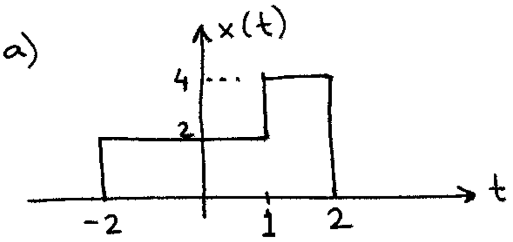
SİNYALLER VE SİSTEMLER FİNAL CEVAP ANAHTARI: 18.01.2007

1) a)

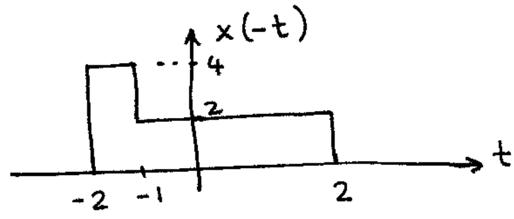
$$x_T(t) = \frac{x(t) - x(-t)}{2}$$

$$x_ç(t) = \frac{x(t) + x(-t)}{2}$$

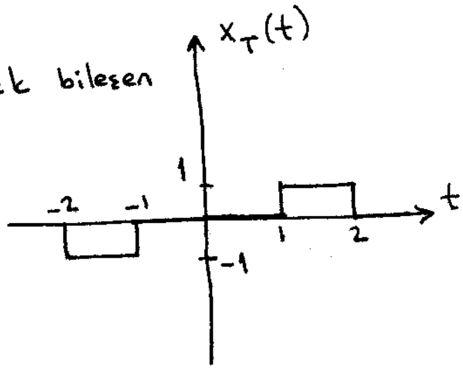
a)

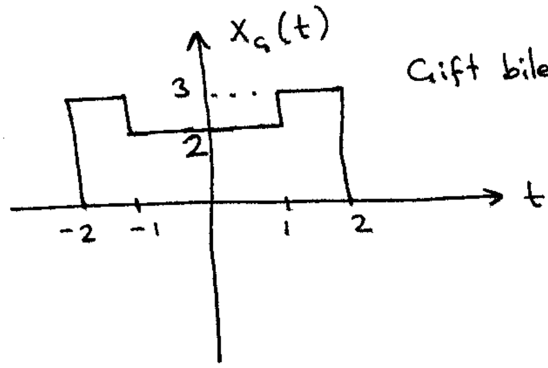


b)



Tek bileşen





Çift bileşen

2) a) $y[n] = (n-1)\,x[n-1] + 1$ olur.

Doğrusal değildir. 1 sabiti doğrusallığı bozuyor.

Belleklidir. $y[n]$, $x[n-1]$'e bağlı.

Nedenseldir.

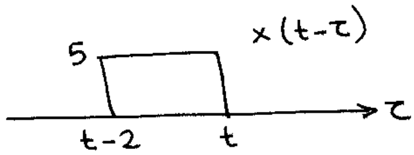
Zamanla değişendir. ($(n-1)$ katsayısından dolayı)

Kararsızdır. Giriş sabit (>0) olsa bile çıkış $(n-1)$ ile birlikte sınırlanamaz biçimde artıyor.

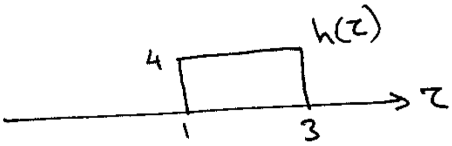
b) $\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \rightarrow N_1 = 4$ ile periyodik. Ancak,

$\sin\left(\frac{n}{4}\right) \rightarrow$ periyodik olmadığından v[n] periyodik değildir.

3) $$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{\tau=-\infty}^{+\infty} x(t-\tau)\,h(\tau)\,d\tau$$



$t < 1$ veya $t-2 > 3$ $(t > 5)$ ise



her τ için $x(t-\tau)h(\tau) = 0$ olacağından,

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} 0 \cdot d\tau = 0$$ olur.

$1 \leq t < 3$ ise :

$$x(t-\tau)h(\tau) = \begin{cases} 20 & 1 \leq \tau \leq t \\ 0 & \text{diğer} \end{cases} \rightarrow y(t) = \int_1^t 20\, d\tau = 20\tau \Big|_{\tau=1}^{t}$$

$$y(t) = 20(t-1)$$

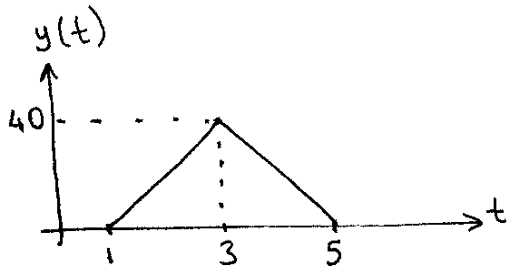
$1 \leq t-2 \leq 3$ yani $3 \leq t \leq 5$ ise :

$$x(t-\tau)h(\tau) = \begin{cases} 20 & t-2 \leq \tau \leq 3 \\ 0 & \text{diğer} \end{cases} \rightarrow y(t) = \int_{t-2}^{3} 20 \cdot d\tau = 20\tau \Big|_{t-2}^{3}$$

$$y(t) = 20 \times 3 - 20 \times (t-2) = 60 - 20(t-2) = y(t) = 100 - 20t$$

Genel olarak:

$$y(t) = \begin{cases} 0 & t < 1 \text{ ise} \\ 20(t-1) & 1 \leq t < 3 \text{ ise} \\ 60 - 20(t-2) & 3 \leq t \leq 5 \text{ ise} \\ 0 & t > 5 \text{ ise} \end{cases}$$



4) $y(t) = -y(-t) \rightarrow$ Tek sinyal $\rightarrow a_0 = a_k = 0$

$T_0 = 2\pi \qquad -\pi < t < \pi$ için $y(t) = \begin{cases} -1 & -\pi < t < 0 \\ +1 & 0 < t < \pi \end{cases}$

$$b_k = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} y(t) \sin k\omega_0 t \, dt \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 1$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} y(t) \sin kt\, dt = -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} \sin kt\, dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin kt\, dt$$

veya kısaca $b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin kt\, dt = \frac{-2}{k\pi} \cos kt \Big|_0^{\pi} = \frac{2}{k\pi}(1 - \underbrace{\cos k\pi}_{(-1)^k})$

$$b_k = \frac{2}{k\pi}\left(1 - (-1)^k\right) \longrightarrow b_k = \begin{cases} 4/k\pi & k \text{ tekse} \\ 0 & k \text{ çiftse} \end{cases}$$

$$y(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin kt$$

$$y(t) = \frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin t}{1} + \frac{\sin 3t}{3} + \frac{\sin 5t}{5} + \cdots\right)$$

SS-F-2007-CA-3

Karmasık seriye açsaydık:

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} \qquad c_0 = 0 \quad (\text{Tek sinyal}), \quad \omega_0 = 1, \; T_0 = 2\pi$$

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} y(t) e^{-jkt} dt = \frac{-1}{2\pi} \int_{-\pi}^{0} e^{-jkt} dt + \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\pi} e^{-jkt} dt$$

T_0 $\int$

$$c_k = \frac{1}{j2k\pi} \left(e^{-jkt} \right)\Big|_{-\pi}^{0} - \frac{1}{j2k\pi} \left(e^{-jkt} \right)\Big|_{0}^{\pi}$$

$$c_k = \frac{e^0 - e^{jk\pi} - e^{-jk\pi} + e^0}{j2k\pi} \qquad e^{\mp jk\pi} = (-1)^k$$

$$c_k = \frac{2}{j2k\pi}\left(1 - (-1)^k\right) = \quad c_k = \begin{cases} \dfrac{-j2}{k\pi} & k \text{ tekse} \\ 0 & k \text{ çiftse} \end{cases}$$

$$y(t) = \dots + j\frac{2}{3\pi} e^{-j3t} + j\frac{2}{\pi} e^{-jt} - j\frac{2}{\pi} e^{jt} - j\frac{2}{3\pi} e^{j3t} - \dots$$

5) a) $\mathcal{Z}\{ y[n+2] - 1{,}2\, y[n+1] + 0{,}35\, y[n] \} = \mathcal{Z}\{ x[n+1] - x[n] \}$

$$(z^2 - 1{,}2z + 0{,}35) Y(z) = (z-1) X(z)$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = H(z) = \frac{z-1}{z^2 - 1{,}2z + 0{,}35} = \frac{z-1}{(z-0{,}7)(z-0{,}5)} \quad : \text{Transfer fonksiyon}$$

Yakınsama bölgesi nedensellikten dolayı : $|z| > 0{,}7$
(en dış çemberin dışı)

$$H(z) = \frac{A}{z-0{,}7} + \frac{B}{z-0{,}5} \longrightarrow A = \frac{z-1}{z-0{,}5}\Big|_{z=0{,}7} = \frac{0{,}7-1}{0{,}7-0{,}5} = \frac{-3}{2} = A$$

$$B = \frac{z-1}{z-0{,}7}\Big|_{z=0{,}5} = \frac{0{,}5-1}{0{,}5-0{,}7} = \frac{5}{2} = B$$

$$H(z) = -\frac{3}{2} z^{-1} \cdot \underbrace{\frac{z}{z-0{,}7}}_{\mathcal{Z}\{0{,}7^n u[n]\}} + \frac{5}{2} z^{-1} \overbrace{\frac{z}{z-0{,}5}}^{\mathcal{Z}\{0{,}5^n u[n]\}}$$

$YB_1 : |z| > 0{,}7$

$YB_2 : |z| > 0{,}5$
kabul edebiliriz, çünkü $YB_1 \cap YB_2 = YB$

$$h[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{H(z)\} = \left[-\frac{3}{2}(0{,}7)^{n-1} + \frac{5}{2}(0{,}5)^{n-1} \right] u[n-1] \rightarrow \text{birim darbe tepkisi}$$

b) $\mathcal{F}\{\ddot{y}(t)+3\dot{y}(t)+2y(t)\} = \mathcal{F}\{\dot{x}(t)-3x(t)\}$

$$\left[(j\omega)^2+3(j\omega)+2\right]Y(\omega) = \left[(j\omega)-3\right]X(\omega)$$

$$\frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = H(\omega) = \frac{j\omega-3}{(j\omega)^2+3(j\omega)+2} = \frac{j\omega-3}{(1+j\omega)(2+j\omega)}$$: Transfer fonksiyon

Birim darbe tepkisi: $h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H(\omega)\}$

$$H(\omega) = \frac{A}{1+j\omega} + \frac{B}{2+j\omega} \longrightarrow A = \left.\frac{j\omega-3}{2+j\omega}\right|_{j\omega=-1} = \frac{-1-3}{2-1} = -4 = A$$

$$B = \left.\frac{j\omega-3}{1+j\omega}\right|_{j\omega=-2} = \frac{-2-3}{1+(-2)} = 5 = B$$

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{-4}{1+j\omega}\right\} + \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{5}{2+j\omega}\right\} = \left(-4e^{-t}+5e^{-2t}\right)u(t) = h(t)$$

6) $Y(\omega) = \frac{1}{2\pi}X(\omega) * \mathcal{F}\{\cos 100t\}$

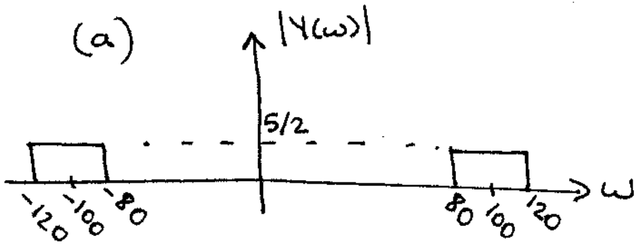
$\hookrightarrow \dfrac{e^{j100t}+e^{-j100t}}{2}$

$$\mathcal{F}\{\cos 100t\} = \frac{1}{2}\left(2\pi\,\delta(\omega-100)+2\pi\,\delta(\omega+100)\right) = \pi\left(\delta(\omega-100)+\delta(\omega+100)\right)$$

$$Y(\omega) = \frac{1}{2}X(\omega)*\delta(\omega-100) + \frac{1}{2}X(\omega)*\delta(\omega+100)$$

$$Y(\omega) = \frac{X(\omega-100)+X(\omega+100)}{2}$$

(a)



(b) $$\int_{-\infty}^{+\infty}|y(t)|^2dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|Y(\omega)|^2d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-120}^{-80}(5/2)^2d\omega + \frac{1}{2\pi}\int_{80}^{120}(5/2)^2d\omega$$ veya kısaca $$= \frac{2}{2\pi}\int_{80}^{120}(5/2)^2d\omega$$

$$= \frac{1}{\pi}\cdot\frac{25}{4}\,\omega\Big|_{80}^{120} = \frac{25}{4\pi}(120-80) = \boxed{\frac{250}{\pi} = \int_{-\infty}^{+\infty}|y(t)|^2dt}$$

7) $y[n] = x[n] * h[n] \xrightarrow{\mathcal{Z}} Y(z) = X(z)H(z) \xrightarrow{\mathcal{Z}^{-1}} y[n]$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n} = 1\cdot z^{-1} + 2\cdot z^{-2} - 1\cdot z^{-3}$$

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n] z^{-n} = -1\cdot z^{-1} + 2\cdot z^{-2} + 2z^{-3}$$

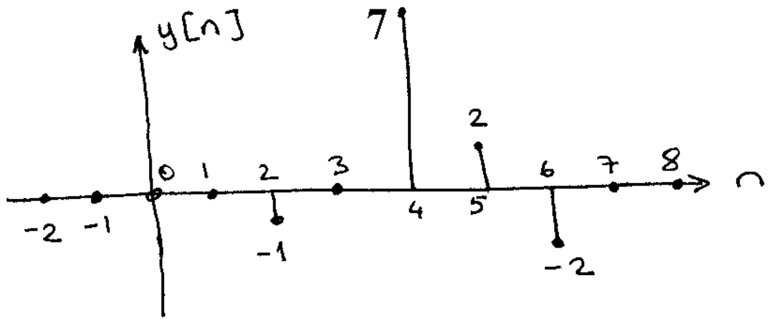
$$Y(z) = (1\cdot z^{-1} + 2z^{-2} - 1\cdot z^{-3})(-1\cdot z^{-1} + 2\cdot z^{-2} + 2z^{-3})$$

$$= z^{-2}\cdot(1\cdot(-1)) + z^{-3}(1\,2 - 2\cdot 1) + z^{-4}(1\cdot 2 + 2\cdot 2 + (-1)(-1))$$

$$+ z^{-5}(2\cdot 2 - 1\cdot 2) + z^{-6}\cdot(-1\cdot 2)$$

$$Y(z) = \underset{y[2]}{\underbrace{-1\cdot z^{-2}}} + \underset{y[3]}{\underbrace{0\cdot z^{-3}}} + \underset{y[4]}{\underbrace{7z^{-4}}} + \underset{y[5]}{\underbrace{2z^{-5}}} \underset{y[6]}{\underbrace{-2z^{-6}}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[n] z^{-n}$$

diğer n'ler için $y[n] = 0$ olur.



SİNYALLER VE SİSTEMLER BÜTÜNLEME SINAVI SORULARI
01.02.2007 Süre: 75 dakika

3. ve 4. soru mecburi* diğerleri seçmelidir. Toplam olarak yalnızca 4 soru cevaplayınız.
*2004-2005 öğretim yılı veya daha öncesinde açılan Sinyaller ve Sistemler-**1** dersini almış ve devamsız olmamış olanlar (dersten ister geçsin ister kalsın) için 3. soru da seçmelidir. Yerine başka soru yapabilirler. Her soru eşit (20) puanlıdır.

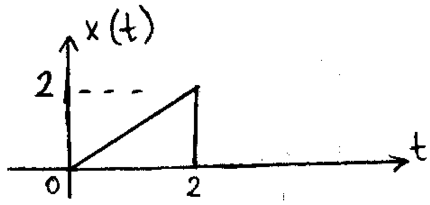
1) $x[n] = 4u[n+2] - 2u[n-1]$ sinyalini
a) Çiziniz. **(5 puan)** **b)** Tek ve çift bileşenlerine ayırınız. **(20 puan)**

2) a) Giriş(x) çıkış(y) ilişkisi $y(t) = \int_{\tau=-\infty}^{t+1} x(\tau)d\tau$ ile verilen bir sistem doğrusal mıdır, bellekli midir, nedensel midir, zamanla değişen midir, kararlı mıdır? **(5x3 = 15 puan)**

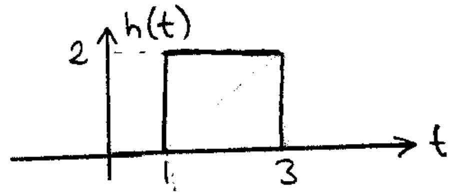
b) $v[n] = \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{n}{7}\right)$ kesikli zaman sinyali periyodik midir? Periyodik ise periyodu nedir? **(5 puan)**

c) $x(t) = \sin\left(\sqrt{2}\,t\right) + \cos 2t$ sürekli zaman sinyali periyodik midir? Periyodik ise periyodu nedir? **(5 puan)**

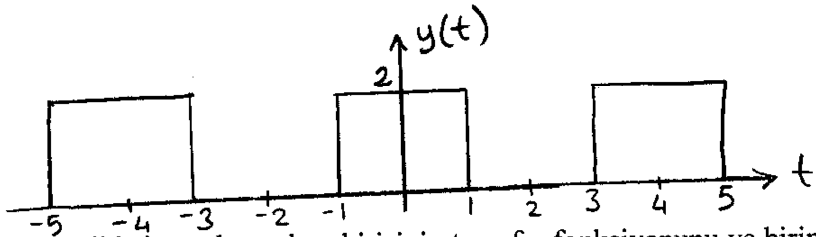
3)



$y(t) = x(t) * h(t) = ?$



4) Şekilde verilen $y(t)$ sinyalini bir Fourier serisi biçiminde yazınız. (Gerçel veya karmaşık olabilir.)

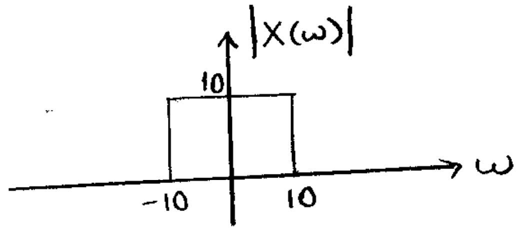


5) Giriş(x) çıkış(y) ilişkisi aşağıda verilen iki sistemden yalnız birisinin transfer fonksiyonunu ve birim darbe tepkisini bulunuz.

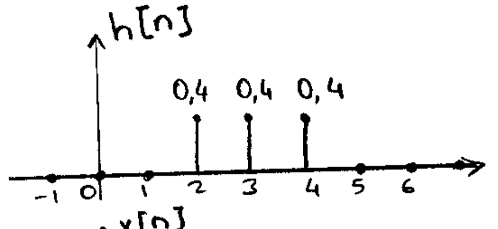
a) $y[n+2] + 0{,}5y[n+1] - 0{,}5y[n] = x[n+1] - 0{,}6x[n]$ **b)** $\ddot{y}(t) + 6\dot{y}(t) + 8y(t) = \dot{x}(t) - x(t)$

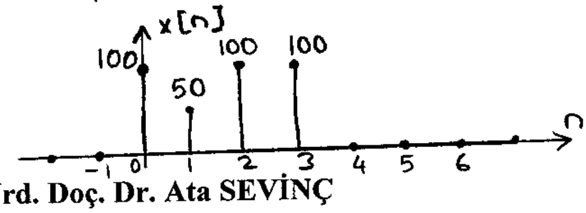
6) Spektrumu ($|X(\omega)|$) şekildeki gibi olan bir $x(t)$ sinyali, $y(t) = x(t)\cos(100t)$ biçiminde modüle ediliyor.
a) Modüleli sinyalin spektrumunu ($|Y(\omega)|$) çiziniz. **(12 puan)**

b) $\int_{-\infty}^{+\infty} |y(t)|^2 dt = ?$ **(13 puan)**



7) Bir kişi taksitli alışverişlerini şöyle bir sisteme göre yapıyor: Aldığı malın peşin fiyatının 1,2 katını, 2 ay sonra başlayan 3 eşit taksitle ödüyor. Yani aylara göre aldığı malın peşin fiyatını giriş, ödeme planını çıkış olarak gösterirsek sistemin birim darbe tepkisi şekildeki $h[n]$ 'dir. Bu kişinin bu sisteme göre aylık alışverişleri şekildeki $x[n]$ ile verildiğine göre ödeme planı ($y[n]$) ne olur? İstediğiniz yolla bulunuz.





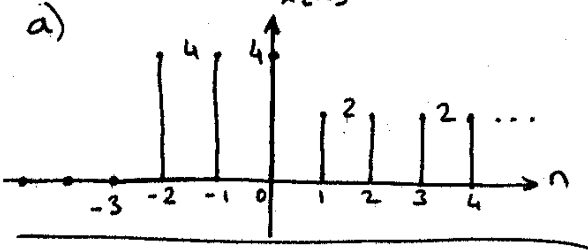
BAŞARILAR ...

Yrd. Doç. Dr. Ata SEVİNÇ

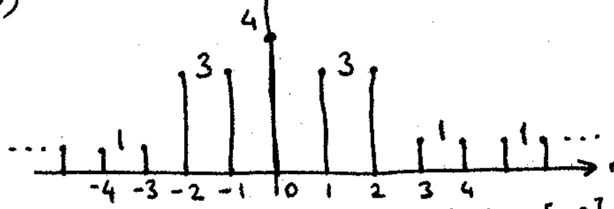
SİNYALLER VE SİSTEMLER BÜTÜNLEME CEVAP ANAHTARI
01.02.2007

1)

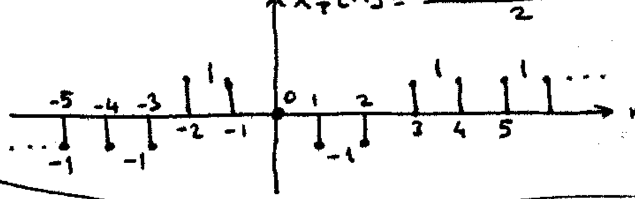
a)



b) $x_e[n] = \dfrac{x[n] + x[-n]}{2}$



$x_o[n] = \dfrac{x[n] - x[-n]}{2}$

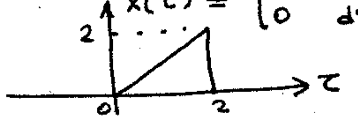


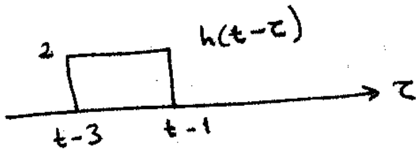
2) a) Doğrusal, bellekli, nedensel değil, zamanla değişmez, kararsız.

b) Periyodik değil

c) Periyodik değil.
Çünkü bileşenlerinin periyodları oranı irrasyonel

$x(\tau) = \begin{cases} \tau & 0 \le \tau \le 2 \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$





3) $y(t) = x(t) * h(t) = \int_{\tau=-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t-\tau)\, d\tau$

$t-1 < 0$ yani $\underline{t < 1}$ ise $x(\tau)h(t-\tau) = 0$

$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} 0 \cdot d\tau = 0$

$0 \le t-1 < 2$ yani $\underline{1 \le t < 3}$ ise

$x(\tau)h(t-\tau) = \begin{cases} 2\tau & 0 \le \tau \le t-1 \\ 0 & \text{diğer} \end{cases} \longrightarrow y(t) = \int_0^{t-1} 2\tau\, d\tau = \tau^2 \Big|_0^{t-1} = (t-1)^2$

$0 \le t-3 < 2$ yani $\underline{3 \le t < 5}$ ise

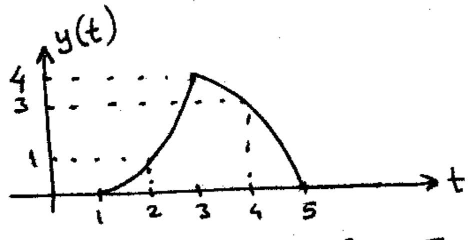
$x(\tau)h(t-\tau) = \begin{cases} 2\tau & t-3 \le \tau \le 2 \\ 0 & \text{diğer} \end{cases} \longrightarrow y(t) = \int_{t-3}^{2} 2\tau\, d\tau = \tau^2 \Big|_{t-3}^{2} = 4 - (t-3)^2$

$2 \le t-3$ yani $\underline{t \ge 5}$ ise

$x(\tau)h(t-\tau) = 0 \longrightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} 0 \cdot d\tau = 0$

<u>Sonuç:</u>

$y(t) = \begin{cases} 0 & t < 1 \text{ ise} \\ (t-1)^2 & 1 \le t < 3 \text{ ise} \\ 4-(t-3)^2 & 3 \le t < 5 \text{ ise} \\ 0 & 5 \le t \text{ ise} \end{cases}$



4) $y(t) = \dfrac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos k\omega_0 t + b_k \sin k\omega_0 t)$

$T_0 = 4 \qquad \omega_0 = \dfrac{2\pi}{T_0} = \dfrac{\pi}{2}$

Çift sinyal olduğundan, $b_k = 0$

$a_0 = \dfrac{4}{T_0} \int_0^2 y(t)\,dt = \dfrac{4}{4} \int_0^1 2 \cdot dt = \underline{\underline{2 = a_0}}$

$k \neq 0$ için

$a_k = \dfrac{4}{T_0} \int_0^2 y(t) \cos k\omega_0 t\, dt = \dfrac{4}{4} \int_0^1 2\cos\left(\dfrac{k\pi}{2} t\right) dt = \dfrac{4}{k\pi} \sin\left(\dfrac{k\pi}{2} t\right)\Big|_0^1 = \dfrac{4}{k\pi} \sin\dfrac{k\pi}{2} - 0$

$a_k = \begin{cases} (-1)^{\frac{k-1}{2}} \cdot 4/k\pi & k \text{ tekse} \\ 0 & k \text{ çiftse } (k \neq 0) \end{cases}$

$a_1 = 4/\pi \qquad a_3 = -4/3\pi$

$a_5 = 4/5\pi \qquad a_7 = -4/7\pi$

Sonuç: $y(t) = 1 + \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{1}\cos\frac{\pi t}{2} - \frac{1}{3}\cos\frac{3\pi t}{2} + \frac{1}{5}\cos\frac{5\pi t}{2} - + \dots\right)$

Karmaşık seri ise:

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} \qquad c_k = \frac{1}{T_0}\int_{-2}^{2} y(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} 2 e^{-jk\frac{\pi}{2}t} dt$$

$k \neq 0$ için

$$c_k = \frac{1/2}{-jk\pi/2} e^{-jk\frac{\pi}{2}t}\Big|_{-1}^{1} = \frac{j}{k\pi}\left(e^{-jk\frac{\pi}{2}} - e^{jk\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{2}{k\pi}\left(\frac{e^{jk\frac{\pi}{2}} - e^{-jk\frac{\pi}{2}}}{j2}\right) = \frac{2}{k\pi}\sin\frac{k\pi}{2}$$

$$c_0 = \text{ortalama değer} = \frac{2\cdot[1-(-1)]}{T_0} = 1$$

$$c_k = \begin{cases} 1 & k=0 \text{ ise} \\ 0 & k \text{ çiftse } (\neq 0) \\ (-1)^{\frac{k-1}{2}} \cdot \frac{2}{k\pi} & k \text{ tekse} \end{cases} \longrightarrow \quad c_1 = \frac{2}{\pi} \quad c_{-1} = -\frac{2}{\pi} \quad c_3 = \frac{-2}{3\pi} \quad c_{-3} = \frac{2}{3\pi} \quad \dots$$

$$y(t) = \dots + \frac{2}{3\pi} e^{-j3\frac{\pi}{2}t} - \frac{2}{\pi} e^{-j\frac{\pi}{2}t} + 1 + \frac{2}{\pi} e^{j\frac{\pi}{2}t} - \frac{2}{3\pi} e^{j3\frac{\pi}{2}t} + - \dots$$

5) a) $\mathcal{Z}\{y[n+2] + 0{,}5y[n+1] - 0{,}5y[n]\} = \mathcal{Z}\{x[n+1] - 0{,}6x[n]\}$

$$(z^2 + 0{,}5z - 0{,}5)Y(z) = (z - 0{,}6)X(z)$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = H(z) = \frac{z-0{,}6}{z^2+0{,}5z-0{,}5} = \frac{z-0{,}6}{(z+1)(z-0{,}5)} = \text{Transfer fonksiyon}$$

Birim darbe tepkisi $= h[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{H(z)\}$

$$H(z) = \frac{A}{z+1} + \frac{B}{z-0{,}5} \qquad A = \frac{(-1)-0{,}6}{(-1)-0{,}5} = \frac{16}{15}$$

$$B = \frac{0{,}5-0{,}6}{0{,}5+1} = \frac{-1}{15} \longrightarrow H(z) = z^{-1}\left(\frac{16}{15}\cdot\underbrace{\frac{z}{z-(-1)}}_{\mathcal{F}\{(-1)^n u[n]\}} - \frac{1}{15}\cdot\underbrace{\frac{z}{z-0{,}5}}_{\mathcal{F}\{0{,}5^n u[n]\}}\right)$$

$$h[n] = \left[(-1)^{n-1}\cdot\frac{16}{15} - \frac{1}{15}(0{,}5)^{n-1}\right]u[n-1]$$

b) $\mathcal{F}\{\ddot{y}(t) + 6\dot{y}(t) + 8y(t)\} = \mathcal{F}\{\dot{x}(t) - x(t)\}$

$$\left((j\omega)^2 + 6(j\omega) + 8\right)Y(\omega) = \left((j\omega) - 1\right)X(\omega)$$

$$\frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = H(\omega) = \frac{(j\omega)-1}{(j\omega)^2+6(j\omega)+8} = \frac{(j\omega)-1}{(j\omega+4)(j\omega+2)} = \text{Transfer fonksiyon}$$

$$H(\omega) = \frac{A}{j\omega+2} + \frac{B}{j\omega+4} \qquad A = \frac{(-2)-1}{(-2)+4} = -\frac{3}{2} \qquad B = \frac{(-4)-1}{(-4)+2} = \frac{5}{2}$$

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H(\omega)\} = -\frac{3}{2}\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{j\omega+2}\right\} + \frac{5}{2}\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{j\omega+4}\right\}$$

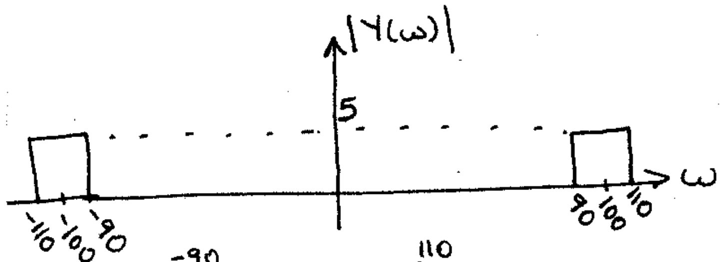
$$h(t) = \left(-\frac{3}{2}e^{-2t} + \frac{5}{2}e^{-4t}\right)u(t)$$: Birim darbe tepkisi

6) a) $$Y(\omega) = \mathcal{F}\{y(t)\} = \mathcal{F}\{x(t)\cos(100t)\} = \frac{1}{2\pi}X(\omega) * \mathcal{F}\{\cos(100t)\}$$

$$\cos 100t = \frac{1}{2}e^{j100t} + \frac{1}{2}e^{-j100t} \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2}\left(2\pi\,\delta(\omega-100) + 2\pi\,\delta(\omega+100)\right)$$
$$= \pi\left(\delta(\omega-100) + \delta(\omega+100)\right)$$

$$Y(\omega) = \frac{\pi}{2\pi}X(\omega) * \delta(\omega-100) + \frac{\pi}{2\pi}X(\omega) * \delta(\omega+100)$$

$$Y(\omega) = \frac{X(\omega-100) + X(\omega+100)}{2}$$



b) $$\int_{-\infty}^{+\infty}|y(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|Y(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-110}^{-90}5^2 d\omega + \frac{1}{2\pi}\int_{90}^{110}5^2 d\omega$$

$$= \left(25\omega\Big|_{-110}^{-90} + 25\omega\Big|_{90}^{110}\right)\cdot\frac{1}{2\pi} = \frac{500}{\pi}$$

7) $$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\,\delta[n-k] \longrightarrow y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\,h[n-k] = x[n]*h[n]$$

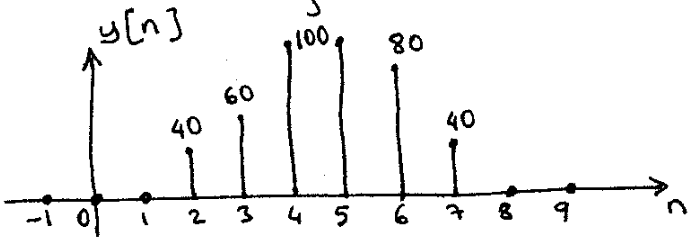
$$Y(z) = X(z).H(z)$$

$$X(z) = \sum_{k=0}^{3} x[k]\,z^{-k} = 100 + 50z^{-1} + 100z^{-2} + 100z^{-3}$$

$$H(z) = \sum_{k=2}^{4} h[k]\,z^{-k} = 0{,}4\,z^{-2} + 0{,}4\,z^{-3} + 0{,}4\,z^{-4}$$

$$Y(z) = X(z)H(z) = \underbrace{40z^{-2}}_{y[2]} + \underbrace{60z^{-3}}_{y[3]} + \underbrace{100z^{-4}}_{y[4]} + \underbrace{100z^{-5}}_{y[5]} + \underbrace{80z^{-6}}_{y[6]} + \underbrace{40z^{-7}}_{y[7]}$$

$$Y(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} y[k]\,z^{-k} \Longrightarrow$$ Diğer k'lar için $y[k] = 0$

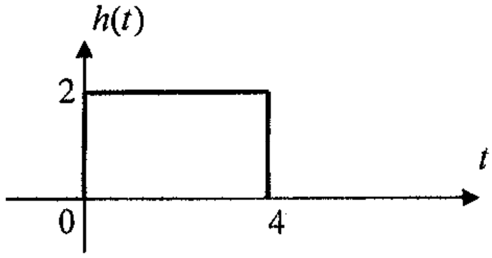


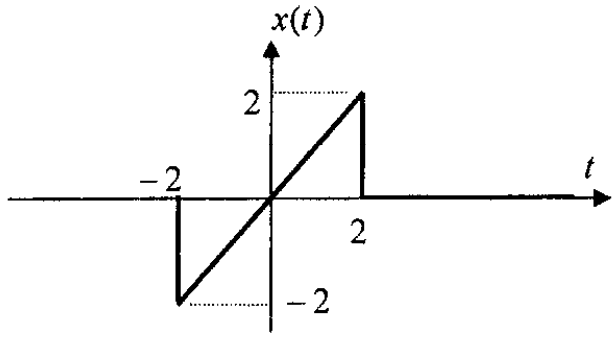
SİNYALLER VE SİSTEMLER ARASINAV SORULARI
26.11.2007 Süre:90 dakika

1) $y(t) = 2u(t+1) - 4u(t-2) + 2u(t-3)$ sinyalinin tek ve çift bileşenlerini çiziniz. **(15 puan)**

2) Giriş ve **çıkışı sürekli** sinyal olan bir sistem, düzenli olarak T periyotlarla girişten ölçüm alarak çıkışta en son alınan ölçümü veriyor (T pozitif bir sabittir). Bu sistem doğrusal mıdır, bellekli midir, nedensel midir, zamanla değişen midir, kararlı mıdır? **(5x3 = 15 puan)**

3) Birim darbe tepkisi $h(t)$ ve girişi $x(t)$ şekillerde verilen doğrusal zamanla değişmez sistemin çıkışını hesaplayınız. **(25 puan)**



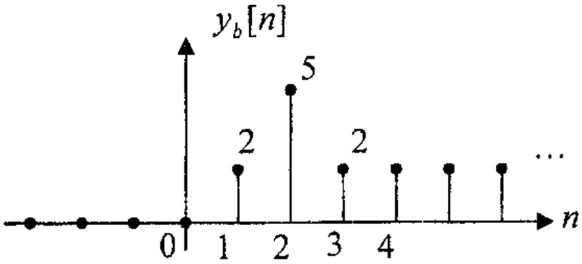


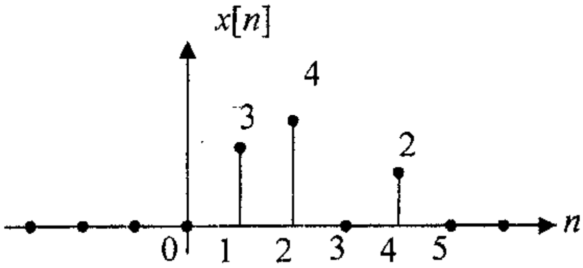
4) Giriş (x) çıkış (y) ilişkisi aşağıdaki fark denklemiyle verilen nedensel sistemin birim darbe tepkisini hesaplayınız. **(20 puan)**

$$y[n+2] - \sqrt{3}\,y[n+1] + y[n] = 2x[n]$$

5. ve 6. sorulardan yalnız birini cevaplamanız beklenmektedir. İkisini de cevaplarsanız, daha düşük puan aldığınız soru hesaba katılmayacaktır.

5) Birim basamak tepkisi $y_b[n]$ şekilde verilen doğrusal zamanla değişmez sistemin birim darbe tepkisini hesaplayınız **(8 puan)**. Bu sistemin girişine şekilde verilen $x[n]$ sinyali uygulanırsa çıkış $y[n]$ ne olur? Bulunuz ve çiziniz **(17 puan)**.





6) Giriş (x) çıkış (y) ilişkisi aşağıdaki diferansiyel denklemle verilen sistemin çıkışını $x(t) = e^{-2t}\,u(t)$ girişi ve $y(0) = 1$, $\dot{y}(0) = 1$ başlangıç şartları için hesaplayınız. **(25 puan)**

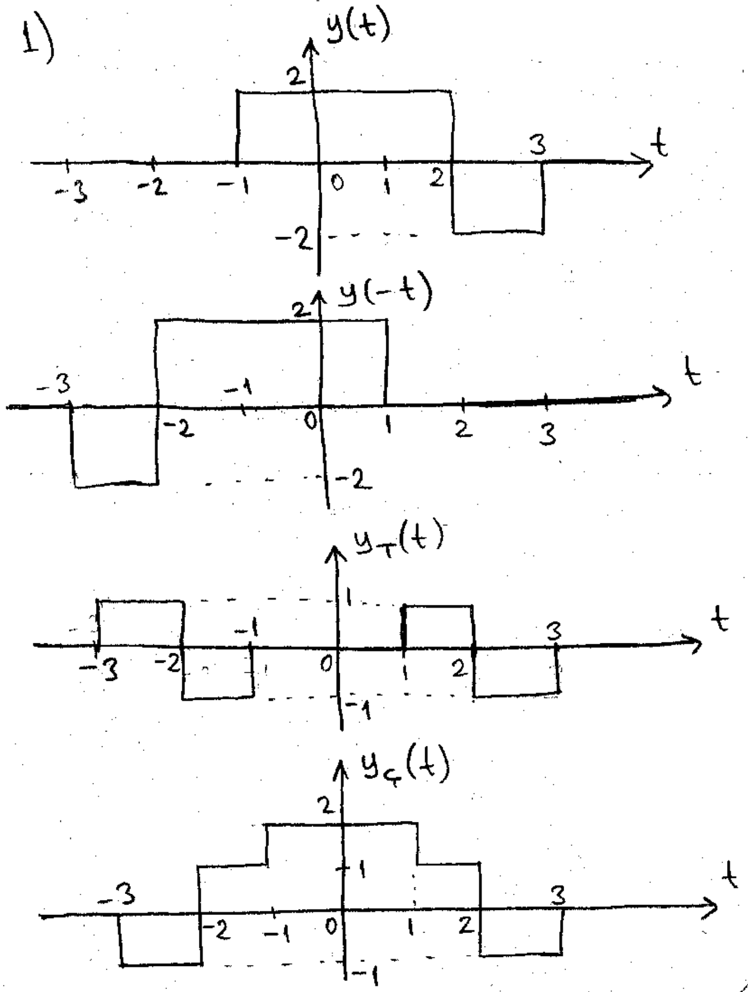
$$\ddot{y}(t) + 4\dot{y}(t) + 4y(t) = 4x(t)$$

BAŞARILAR ...

Yard. Doç. Dr. Ata SEVİNÇ

SİNYALLER VE SİSTEMLER ARASINAV CEVAP ANAHTARI:
26.11.2007

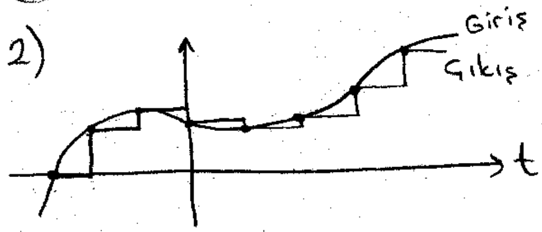
1)



Tek bileşen $= y_T(t) = \dfrac{y(t) - y(-t)}{2}$

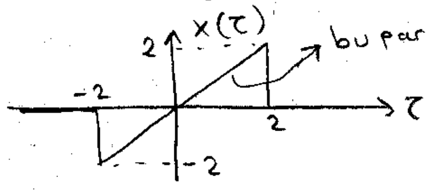
Çift bileşen $= y_Ç(t) = \dfrac{y(t) + y(-t)}{2}$

2)

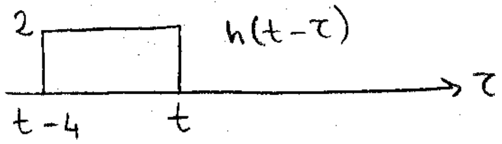


Bellekli
Doğrusal
Nedensel
Zamanla değişen
Kararlı

3) Çıkış $= y(t) = x(t) * h(t) = h(t) * x(t) = \displaystyle\int_{\tau=-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$



bu parçanın fonksiyonu: τ



<u>$t < -2$ ise:</u>

$x(\tau)h(t-\tau) = 0 \quad \forall\tau$

$y(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} 0 \cdot d\tau = 0$

<u>$-2 \le t < 2$ ise:</u> $\quad x(\tau)h(t-\tau) = \begin{cases} 2\cdot\tau & -2 \le \tau \le t \text{ ise} \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$

$y(t) = \displaystyle\int_{\tau=-2}^{t} 2\tau\, d\tau = \tau^2\Big|_{-2}^{t} = t^2 - 4$

$-2 \le t-4 < 2 \rightarrow$ yani: <u>$2 \le t < 6$ ise:</u>

$x(\tau)h(t-\tau) = \begin{cases} 2\tau & t-4 \le \tau \le 2 \text{ ise} \\ 0 & \text{diğer} \end{cases} \rightarrow y(t) = \displaystyle\int_{\tau=t-4}^{2} 2\tau\, d\tau = \tau^2\Big|_{t-4}^{2}$

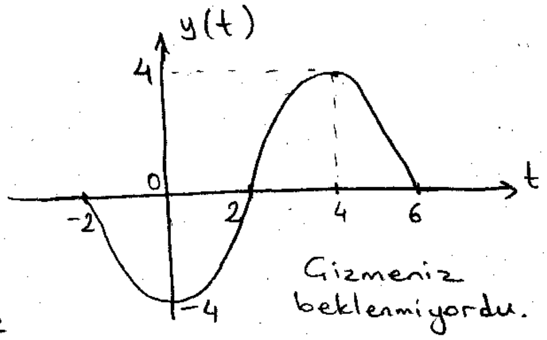
$y(t) = 4 - (t-4)^2 = -t^2 + 8t - 12$

$t-4 \geq 2$ yani $\underline{t \geq 6 \text{ ise}:}$

$$x(\tau)h(t-\tau) = 0 \quad \forall \tau \quad \rightarrow \quad y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} 0 \cdot d\tau = 0$$

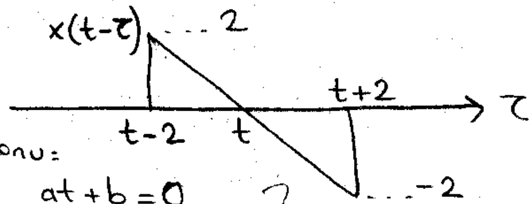
Sonuç:

$$y(t) = \begin{cases} 0 & t < -2 \text{ ise} \\ t^2-4 & -2 \leq t < 2 \text{ ise} \\ -t^2+8t-12 & 2 \leq t < 6 \text{ ise} \\ 0 & t \geq 6 \text{ ise} \end{cases}$$



Çizmeniz beklenmiyordu.

Dikkat: $y(t) = \int_{\tau=-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$ formülüyle



yapanlar için:

Doğru parçasının fonksiyonu:

$a\tau + b \rightarrow \tau = t$ için $at+b=0$

$\hookrightarrow \tau = t-2$ için $at-2a+b=2$ $\Big\}$ Buradan $a=-1$, $b=t$

Yani $t-2 \leq \tau \leq t+2$ için $x(t-\tau) = t-\tau$. Aynı aralık için

belirsiz integral: $\int h(\tau)x(t-\tau)d\tau = \int 2(t-\tau)d\tau = -(t-\tau)^2 = -(\tau-t)^2$ olur.

4) $n>0$ için:

$$h[n+2] - \sqrt{3}\,h[n+1] + h[n] = 0$$

$$h[1] = 0 \qquad h[2] = 2/1 = 2$$

$$\lambda^2 - \sqrt{3}\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{\sqrt{3} \mp \sqrt{3-4\cdot 1}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \mp j\frac{1}{2} = 1 \cdot e^{\mp j30^\circ}$$

$$h[n] = A \cdot 1^n \cos(n \times 30^\circ) + B \cdot 1^n \sin(n \times 30^\circ)$$

$$h[1] = A\cos 30^\circ + B \sin 30^\circ = 0 = \frac{\sqrt{3}}{2}A + \frac{1}{2}B$$

$$h[2] = A\cos 60^\circ + B\sin 60^\circ = 2 = \frac{1}{2}A + \frac{\sqrt{3}}{2}B$$

$\Big\}$ $B = -\sqrt{3}A$, $4 = (1-3)A$, $A=-2$, $B = 2\sqrt{3}$

$$h[n] = \left[-2\cos(n \times 30^\circ) + 2\sqrt{3}\sin(n \times 30^\circ)\right]u[n-2]$$

$\hookrightarrow$ sıfırdan farklı ilk nokta $n=2$ 'de

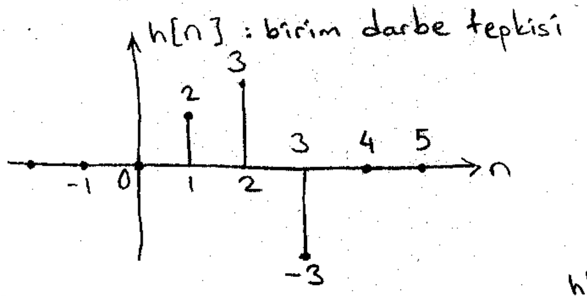
Diğer bazı çözümler ise:

$$h[n] = 4\left[\sin([n-1] \times 30^\circ)\right]u[n-2]$$

$$h[n] = \left[2\cos([n-2]\cdot 30^\circ) + 2\sqrt{3}\sin([n-2]\cdot 30^\circ)\right]\cdot u[n-2]$$

Buradaki $u[n-2]$ yerine $u[n-1]$ de yazılabilir; çünkü $n=1$ için büyük parantez $[\ldots]$ içi zaten sıfır çıkacak şekilde katsayılar belirlendi.

5) $h[n] = y_b[n] - y_b[n-1]$ (Çünkü $\delta[n] = u[n] - u[n-1]$)



$y[n] = x[n] * h[n]$

her ikisi de sonlu adet noktada sıfırdan farklı.

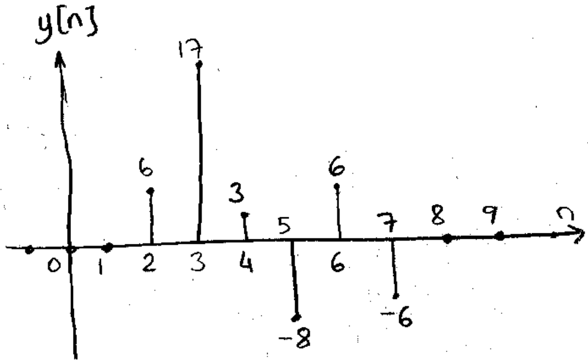
$x[1]$ — $x[4]$ — $h[1]$ — $h[3]$

$$\begin{array}{r} (3)(4)(0)(2) \\ \times \quad (2)(3)(-3) \\ \hline (-9)(-12)(0)(-6) \\ (9)(12)(0)(6) \\ +\ (6)(8)(0)(4) \\ \hline (6)(17)(3)(-8)(6)(-6) \end{array}$$

Elde aktarımı yapmıyoruz.

$y[1+1] = y[2]$ — $y[4+3] = y[7]$

Öncesinde ve sonrasında sıfır.



6) $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0 \rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -2$

$t<0$ için denklem homojen. $\rightarrow y = y_h = A_1 e^{-2t} + A_2 t e^{-2t}$

Sağda darbe bulunmadığı için, $y(0^-) = y(0) = A_1 = 1$
$\dot{y}(0^-) = \dot{y}(0) = -2A_1 + A_2 = 1$ $\Big\}$ $A_1 = 1$, $A_2 = 3$

$$y(t) = e^{-2t}(1+3t) \qquad t<0 \text{ için.}$$

$t \geq 0$ için $\quad y_h(t) = B_1 e^{-2t} + B_2 t e^{-2t}$

Sağda $4e^{-2t}$ var. $-2 = \lambda_1 = \lambda_2$: iki katlı özdeğer olduğu için:

$$y_ö(t) = ct^2 e^{-2t} \rightarrow \dot{y}_ö = 2ct \cdot e^{-2t} - 2ct^2 e^{-2t}$$

$$\ddot{y}_ö = 2c e^{-2t} - 8ct e^{-2t} + 4ct^2 e^{-2t}$$

$$\ddot{y}_ö + 4\dot{y}_ö + 4y_ö = 4e^{-2t} = e^{-2t}\left([4-8+4]ct^2 + [-8+8]ct + 2c\right)$$

$$2c = 4 \rightarrow c = 2 \rightarrow y_ö(t) = 2t^2 e^{-2t}$$

$y = y_h + y_ö = (B_1 + B_2 t + 2t^2)\, e^{-2t}$

$\dot{y}(t) = \left[(B_2 + 4t) - 2(B_1 + B_2 t + 2t^2)\right] e^{-2t}$

$y(0) = 1 = B_1$
$\dot{y}(0) = 1 = B_2 - 2B_1$ $\Big\}$ $\rightarrow B_1 = 1,\ B_2 = 3$

Sonuç:

$$y(t) = \begin{cases} (1+3t)\, e^{-2t} & t<0 \text{ ise} \\ (1+3t+2t^2)\, e^{-2t} & t \geq 0 \text{ ise} \end{cases}$$

SİNYALLER VE SİSTEMLER SINAV SORULARI
09.01.2008 Süre: 80 dakika

3. soru mecburidir*. 4. ve 5. sorudan istediğiniz birisi zorunludur. Diğer sorular (ve isterseniz 4. ve 5. sorunun diğeri de) seçmelidir. Toplam olarak yalnızca 5 soru cevaplayınız. Her soru eşit (20) puanlıdır.
*2004-2005 öğretim yılı veya daha öncesinde açılan Sinyaller ve Sistemler-**1** dersini almış ve devamsız olmamış olanlar (dersten ister geçsin ister kalsın) için 3. soru da seçmelidir. Yerine başka soru yapabilirler.

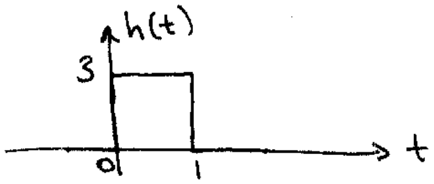
1) $x(t) = 2u(t) + 2u(t-1) - 6u(t-2)$ sinyalini

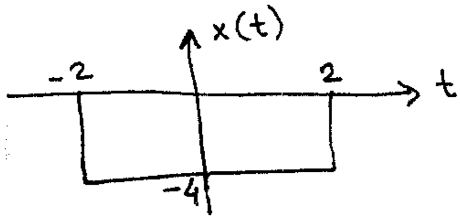
a) Çiziniz. **(5 puan)** **b)** Tek ve çift bileşenlerine ayırınız. **(15 puan)**

2) a) Giriş(x) çıkış(y) ilişkisi $y(t) = x(t) + \dfrac{dx(t)}{dt}$ ile verilen bir sistem doğrusal mıdır, bellekli midir, nedensel midir, zamanla değişen midir, kararlı mıdır? **(5x3 = 15 puan)**

b) $v[n] = \cos\left(\dfrac{n\pi}{4}\right) + \sin\left(\dfrac{n\pi}{7}\right)$ kesikli zaman sinyali periyodik midir? Periyodikse periyodu nedir? **(5 puan)**

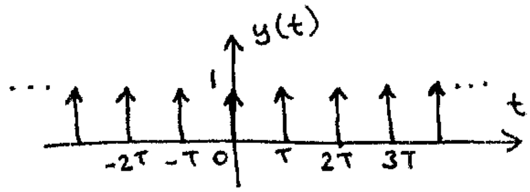
3)





$y(t) = x(t) * h(t) = ?$ (Çizmenize gerek yoktur.)

4) a) Şekilde verilen $y(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(t - mT)$ sinyalinin karmaşık Fourier serisinin $y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \dfrac{1}{T} e^{j\frac{2k\pi}{T}t}$ olduğunu gösteriniz. **(15 puan)**



b)Bu sinyalin gerçel Fourier serisinde; dc bileşen, sinüslü terimler, kosinüslü terimler, tek harmonikler, çift harmoniklerden hangileri **sıfırdır?** **(5 puan)**

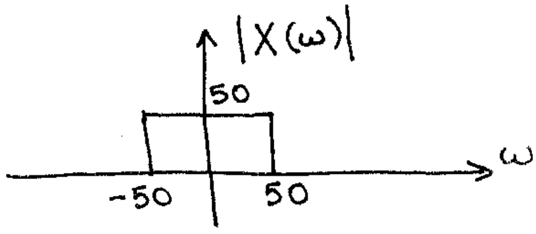
5) 4. soruda verilen sinyalin Fourier dönüşümünün yine bir darbe treni olduğunu gösteriniz. Dönüşümü tam olarak bulunuz. (**Yol gösterme:** Verilen karmaşık Fourier **serisini** kullanınız.)

6) Giriş(x) çıkış(y) ilişkisi aşağıda verilen iki sistemden yalnız birisinin transfer fonksiyonunu ve birim darbe tepkisini bulunuz.

a) $y[n+2] - 1{,}5y[n+1] + 0{,}5y[n] = x[n+1] - 2x[n]$

b) $\ddot{y}(t) + 5\dot{y}(t) + 4y(t) = \dot{x}(t) - 2x(t)$

7) Spektrumu ($|X(\omega)|$) şekildeki gibi olan bir $x(t)$ sinyali, $y(t) = x(t)\cos(200t)$ biçiminde modüle ediliyor.



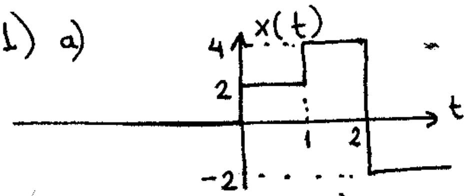
a) Modüleli sinyalin spektrumunu ($|Y(\omega)|$) çiziniz. **(10 puan)**

b) $\int_{-\infty}^{+\infty} |y(t)|^2 \, dt = ?$ **(10 puan)**

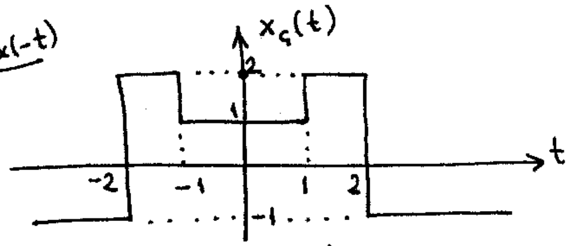
BAŞARILAR ... **Yrd. Doç. Dr. Ata SEVİNÇ**

SİNYALLER VE SİSTEMLER FİNAL CEVAP ANAHTARI.
09. 01. 2008

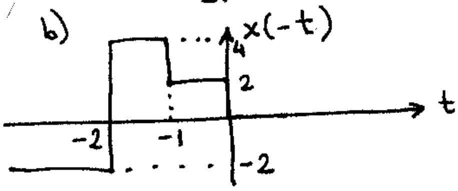
1) a)



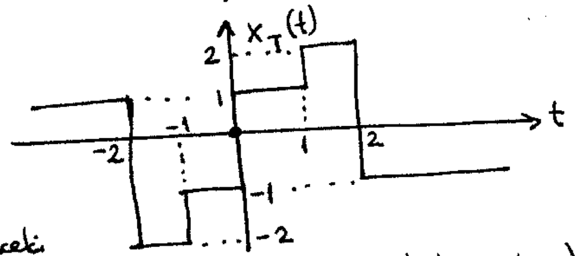
Çift bileşen: $x_ç(t) = \frac{x(t)+x(-t)}{2}$



b)



Tek bileşen $x_T(t) = \frac{x(t)-x(-t)}{2}$



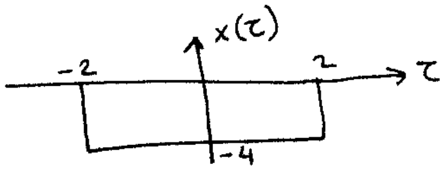
2) a) Doğrusaldır (türev de doğrusal bir işlemdir)
Belleklidir (fakat çıkış yalnız o anki ve bir an önceki giriş değerlerine bağlı) sonuçta bir anlık da olsa bellek gerekiyor)
Nedenseldir
Zamanla değişmez ve kararsızdır. Çünkü kendisi sonlu ama türevi sonsuza gidebilen sinyaller vardır. Örneğin $x(t)=u(t) \Rightarrow y(t)=u(t)+\delta(t)$ olur, yani $t=0$ için $y(t)\to\infty$.

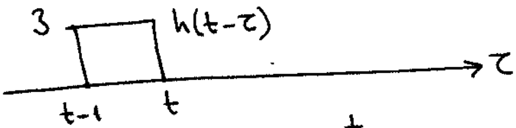
b) $\cos\frac{n\pi}{4} = \cos\left([n+N_1]\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow N_1\frac{\pi}{4} = 2\overset{\text{tamsayı}}{k}\pi$ en küçük pozitif $N_1 = 8$

$\sin\frac{n\pi}{7} = \sin\left([n+N_2]\frac{\pi}{7}\right) \Rightarrow N_2\frac{\pi}{7} = 2k\pi$ en küçük pozitif $N_2 = 14$

v[n] 'in her iki bileşeni de periyodik ve bileşenlerin periyodlarının ~~OKEK~~ ortak bir katı mevcut
OKEK(8, 14) = N = 56 ile periyodiktir.

3) $y(t) = x(t) * h(t) = \int_{\tau=-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau$





$t<-2 \Rightarrow x(\tau)h(t-\tau)=0$ her τ için

$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} 0 \cdot d\tau = 0$

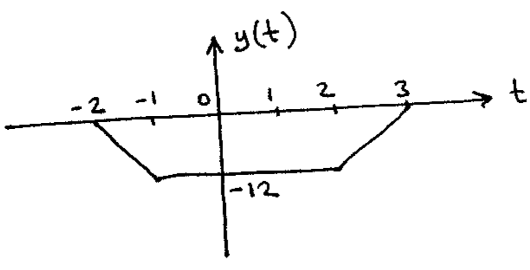
$-2 \le t < -1 \Rightarrow x(\tau)h(t-\tau) = \begin{cases} -3 \times 4 & -2 \le \tau \le t \\ 0 & \text{diğer} \end{cases} \Rightarrow y(t) = \int_{\tau=-2}^{t} -12\,d\tau = -12(t+2)$

$-1 \le t < 2 \Rightarrow x(\tau)h(t-\tau) = \begin{cases} -4 \times 3 & t-1 \le \tau \le t \\ 0 & \text{diğer} \end{cases} \rightarrow y(t) = \int_{\tau=t-1}^{t} -12\,d\tau = -12$

$2 \le t < 3 \Rightarrow x(\tau)h(t-\tau) = \begin{cases} -4 \times 3 & t-1 \le \tau \le 2 \\ 0 & \text{diğer} \end{cases} \rightarrow y(t) = \int_{\tau=t-1}^{2} -12\,d\tau = -12(3-t)$

$3 \le t \Rightarrow x(\tau)h(t-\tau) = 0$ her τ için

$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} 0 \cdot d\tau = 0$



Sonuç:

$$y(t) = \begin{cases} 0 & t<-2 \text{ ise} \\ -12(t+2) & -2 \le t < -1 \text{ ise} \\ -12 & -1 \le t < 2 \text{ ise} \\ -12(3-t) & 2 \le t < 3 \text{ ise} \\ 0 & 3 \le t \text{ ise} \end{cases}$$

4) a) $y(t)$, T ile periyodik, $\omega_0 = 2\pi / T$

$-T/2 < t < \frac{T}{2}$ için $y(t) = \delta(t)$

$$c_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} y(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \underbrace{\delta(t)\cdot e^{-jk\omega_0 t}}_{\delta(t)\cdot e^{0}}\, dt = \frac{1}{T}\underbrace{\int_{-T/2}^{T/2}\delta(t)dt}_{1} = \frac{1}{T} = c_k$$

$$\rightarrow y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} = \boxed{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T}\cdot e^{jk\cdot\frac{2\pi}{T}t} = y(t)}$$

b) Sinyal çift olduğundan sinüslü terimler sıfırdır, kosinüslüler vardır.
Tek harmonik simetrisi yoktur. Yani hem tek hem çift harmonikler vardır.
Ortalaması = dc bileşen sıfırdan farklıdır, çünkü hiç negatif olmamaktadır.

Sonuç: Yalnız sinüslü terimler sıfırdır.

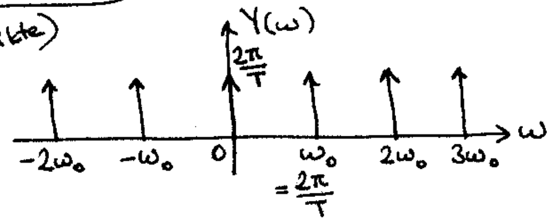
5) $$e^{j\omega_0 t} \xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi\,\delta(\omega-\omega_0)$$

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{T}e^{jk\omega_0 t} \xrightarrow{\mathcal{F}} Y(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{2\pi}{T}\delta(\omega - k\omega_0) \rightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$= \boxed{\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\delta(t-mT) \xrightarrow{\mathcal{F}} Y(\omega) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty}\frac{2\pi}{T}\delta\left(\omega - \frac{2m\pi}{T}\right)}$$

→ Toplamı m ya da k değişkenine göre yazmak farketmez.

Not: Bu sonuca ileride Haberleşme dersinde "örnekleme" konusunda ihtiyaç duyacaksınız. (4. ve 5. soruların cevaplarına birlikte)



Zaman uzayındaki periyod (T) azaltılırsa frekans uzayındaki periyod ($\omega_0 = 2\pi/T$) artar.

6) a) $y[n+2] - 1{,}5\,y[n+1] + 0{,}5\,y[n] = x[n+1] - 2x[n]$

z-dönüşümü alınırsa $Y(z)(z^2 - 1{,}5z + 0{,}5) = X(z)(z-2)$

Transfer fonksiyon: $$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z-2}{z^2 - 1{,}5z + 0{,}5} = \frac{z-2}{(z-1)(z-0{,}5)}$$

Nedensel olduğu için YB: $|z|>1$

$$H(z) = \underbrace{\frac{A}{z-1}}_{H_1(z)} + \underbrace{\frac{B}{z-0{,}5}}_{H_2(z)} ; \quad A = (z-1)H(z)\Big|_{z=1} = \frac{1-2}{1-0{,}5} = -2$$

$B = (z-0{,}5)H(z)\Big|_{z=0{,}5}$

$$B = \frac{0{,}5-2}{0{,}5-1} = 3$$

YB_1: $|z|>1$

YB_2: $|z|>0{,}5$ dememizde bir sakınca yoktur. Çünkü $YB_1 \cap YB_2 = YB$ değişmedi

$$h[n] = \mathcal{Z}^{-1}\left\{z^{-1}\cdot\frac{-2z}{z-1}\right\} + \mathcal{Z}^{-1}\left\{z^{-1}\cdot\frac{3z}{z-0{,}5}\right\} = -2\times 1^{n-1}u[n-1] + 3\times(0{,}5)^{n-1}u[n-1]$$

~~h[n] = -2u[n]~~ $\boxed{h[n] = \left(3\times(0{,}5)^{n-1} - 2\right)u[n-1]}$

6) b) $\ddot{y}(t)+5\dot{y}(t)+4y(t)=\dot{x}(t)-2x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} Y(\omega)\left((j\omega)^2+5j\omega+4\right)=X(\omega)(j\omega-2)$

Transfer fonksiyon : $H(\omega)=\dfrac{Y(\omega)}{X(\omega)}=\dfrac{(j\omega)-2}{(j\omega)^2+5(j\omega)+4}=\dfrac{(j\omega-2)}{(j\omega+1)(j\omega+4)}$

$$H(\omega)=\frac{A}{j\omega+1}+\frac{B}{j\omega+4}$$

$$A=(j\omega+1)H(\omega)\Big|_{j\omega=-1}=\frac{-1-2}{-1+4}=-1=A$$

$$B=(j\omega+4)H(\omega)\Big|_{j\omega=-4}=\frac{-4-2}{-4+1}=2=B$$

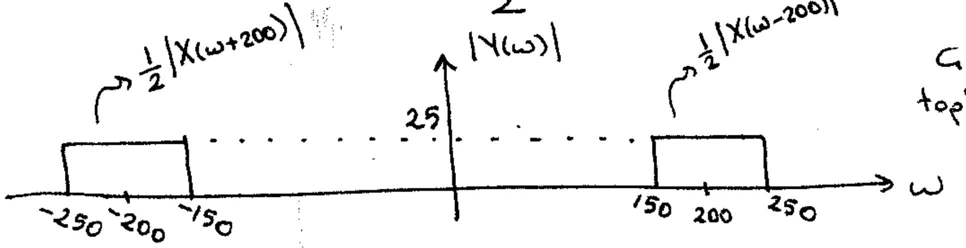
$$h(t)=\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{-1}{j\omega+1}\right\}+\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{2}{j\omega+4}\right\}=-e^{-t}u(t)+2e^{-4t}u(t)$$

$$\boxed{h(t)=\left(2e^{-4t}-e^{-t}\right)u(t)}$$

7) a) $y(t)=x(t)\cos 200t \xrightarrow{\mathcal{F}} Y(\omega)=\dfrac{1}{2\pi}X(\omega)*\mathcal{F}\Big\{\underbrace{\dfrac{e^{j200t}+e^{-j200t}}{2}}_{\cos 200t}\Big\}$

$$Y(\omega)=\frac{1}{4\pi}X(\omega)*\left(2\pi\delta(\omega-200)+2\pi\delta(\omega+200)\right)$$

$$Y(\omega)=\frac{X(\omega)*\delta(\omega-200)+X(\omega)*\delta(\omega+200)}{2}=\frac{X(\omega-200)+X(\omega+200)}{2}$$



Çakışma olmadığı için toplamın mutlak değeri = mutlak değerlerin toplamı

b) $$\int_{-\infty}^{+\infty}|y(t)|^2\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|Y(\omega)|^2\,d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-250}^{-150}25^2\,d\omega+\frac{1}{2\pi}\int_{150}^{250}25^2\,d\omega$$

$$=\frac{625}{2\pi}(-150+250)+\frac{625}{2\pi}(250-150)=\frac{62500}{\pi}$$

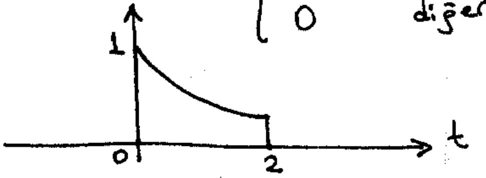
SİNYALLER VE SİSTEMLER BÜTÜNLEME SINAV SORULARI
23.01.2008 Süre: 80 dakika

3. soru mecburidir*. 4. ve 5. sorudan istediğiniz birisi zorunludur. Diğer sorular (ve isterseniz 4. ve 5. sorunun diğeri de) seçmelidir. Toplam olarak yalnızca 5 soru cevaplayınız. Her soru eşit (20) puanlıdır.
*2004-2005 öğretim yılı veya daha öncesinde açılan Sinyaller ve Sistemler-1 dersini almış ve devamsız olmamış olanlar (dersten ister geçsin ister kalsın) için 3. soru da seçmelidir. Yerine başka soru yapabilirler.

1) Doğrusal zamanla değişmez bir sistemin birim darbe tepkisi $h(t) = -2u(t+1) + 6u(t) - 4u(t-1)$ 'dir.
a) $h(t)$ 'yi çiziniz. **(5 puan)** **b)** Sistemin birim basamak tepkisini çiziniz. **(15 puan)**

2) a) 1. soruda verilen sistem nedensel midir, kararlı mıdır? Nedenleriyle birlikte yazınız. **(8 puan)**
b) 1. soruda verilen $h(t)$ 'yi tek ve çift bileşenlerine ayırınız. **(12 puan)**

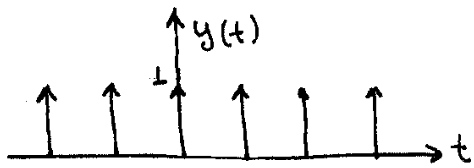
3) $h(t) = \begin{cases} e^{-t} & 0 \le t < 2 \text{ ise} \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$



$x(t) = -h(t)$

$y(t) = x(t) * h(t) = ?$ (Çizmenize gerek yoktur.)

4) a) Şekilde verilen $y(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(t-m)$ sinyalinin karmaşık Fourier serisinin $y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{j2k\pi t}$ olduğunu gösteriniz. **(15 puan)**



b)Bu sinyalin gerçel Fourier serisinde; dc bileşen, sinüslü terimler, kosinüslü terimler, tek harmonikler, çift harmoniklerden hangileri **sıfırdır? (5 puan)**

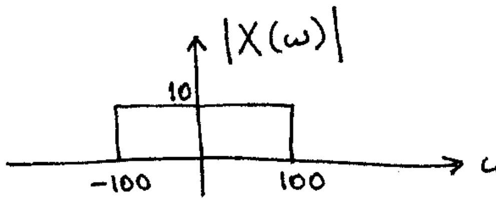
5) 4. soruda verilen sinyalin Fourier dönüşümünün yine bir darbe treni olduğunu gösteriniz. Dönüşümü tam olarak bulunuz. **(Yol gösterme:** Verilen karmaşık Fourier serisini kullanınız.)

6) Giriş(x) çıkış(y) ilişkisi aşağıda verilen iki sistemden yalnız birisinin transfer fonksiyonunu ve birim darbe tepkisini bulunuz.

a) $y[n+2] - y[n+1] + 0{,}24y[n] = x[n+1] - x[n]$

b) $\ddot{y}(t) + 6\dot{y}(t) + 5y(t) = \dot{x}(t) + 3x(t)$

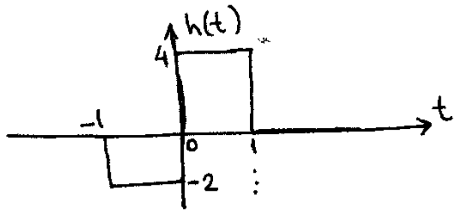
7) Spektrumu ($|X(\omega)|$) şekildeki gibi olan bir $x(t)$ sinyali, $y(t) = x(t)\cos(100t)$ biçiminde modüle ediliyor.
a) Modüleli sinyalin spektrumunu ($|Y(\omega)|$) çiziniz. **(10 puan)**
b) $\int_{-\infty}^{+\infty} |y(t)|^2 dt = ?$ **(10 puan)**



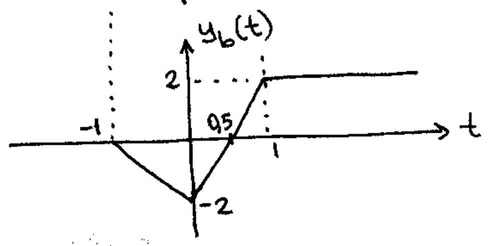
BAŞARILAR ... **Yrd. Doç. Dr. Ata SEVİNÇ**

SİNYALLER VE SİSTEMLER BÜTÜNLEME CEVAP ANAHTARI:
23.01.2008

1) a)



b)



Birim basamak tepkisi:

$$y_b(t) = \int_{\tau=-\infty}^{t} h(\tau)\,d\tau$$

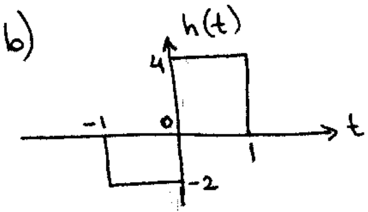
Çünkü $u(t) = \int_{\tau=-\infty}^{t} \delta(\tau)\,d\tau$

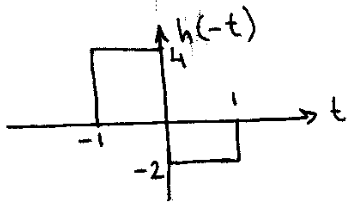
ve sistem doğrusal zamanla değişmez.

2) a) Bazı $t<0$ için $h(t) \neq 0$ olduğu için nedensel değildir.

$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|\,dt$ = sonlu bir değer olduğu için kararlıdır.

b)





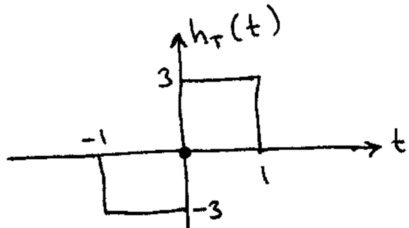
Tek bileşen $h_T(t) = \dfrac{h(t)-h(-t)}{2}$

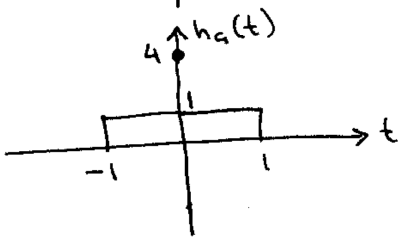
$h_T(0) = 0$

Çift bileşen

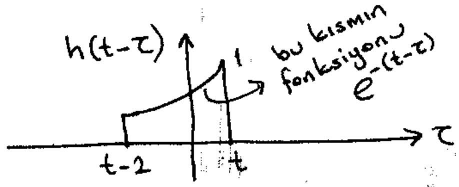
$h_ç(t) = \dfrac{h(t)+h(-t)}{2}$

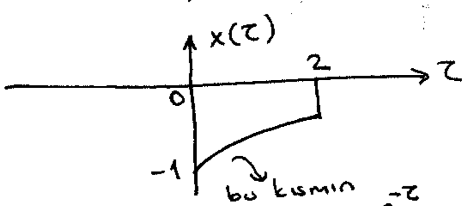
$h_ç(0) = h(0) = -2+6+0 = 4$





3)





$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{\tau=-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau$$

<u>$t<0$ ise:</u>

Her τ için $x(\tau)h(t-\tau) = 0$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} 0 \cdot d\tau = 0$$

<u>$0 \leq t < 2$ ise:</u>

$$x(\tau)h(t-\tau) = \begin{cases} -e^{-\tau} \cdot e^{-(t-\tau)} = -e^{-t} & 0 \leq \tau \leq t \text{ ise} \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$$

$$\rightarrow y(t) = \int_{\tau=0}^{t} -e^{-t}\,d\tau = -e^{-t} \cdot \tau \Big|_{\tau=0}^{t} = -te^{-t} = y(t)$$

$\downarrow$ τ'ya göre sabit

<u>$2 \leq t < 4$ ise:</u>

$$x(\tau)h(t-\tau) = \begin{cases} -e^{-\tau} \cdot e^{-(t-\tau)} = -e^{-t} & t-2 \leq \tau \leq 2 \text{ ise} \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$$

$$y(t) = \int_{\tau=t-2}^{2} -e^{-t}\,d\tau = -e^{-t}\int_{t-2}^{2} d\tau = -e^{-t}\big(2-(t-2)\big) = (t-4)e^{-t}$$

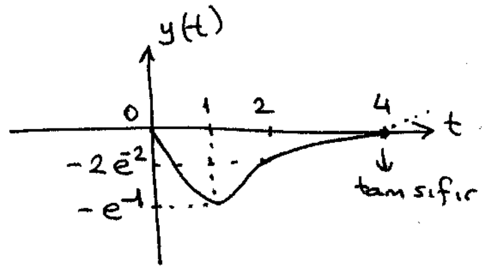
$t \geq 4$ ise :

Her τ için $x(\tau)h(t-\tau)=0$

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} 0 \cdot d\tau = 0$$

Sonuç:

$$y(t)=\begin{cases} 0 & t<0 \text{ ise} \\ -te^{-t} & 0\leq t<2 \text{ ise} \\ (t-4)e^{-t} & 2\leq t<4 \text{ ise} \\ 0 & 4\leq t \text{ ise} \end{cases}$$



4) a) $-\frac{1}{2}\leq t<\frac{1}{2}$ için $y(t)=\delta(t)$

ve $T_0=1$ ile periyodik $\rightarrow \omega_0=\frac{2\pi}{T_0}=2\pi$

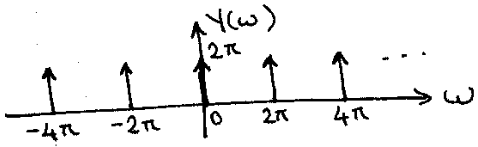
$$y(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} \quad ; \quad c_k=\underbrace{\frac{1}{T_0}}_{1}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} y(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

$$c_k=\int_{-1/2}^{1/2}\underbrace{\delta(t)e^{-jk\cdot 2\pi t}}_{=\delta(t)\cdot e^0}dt=\int_{-1/2}^{1/2}\delta(t)dt=1 \rightarrow \boxed{y(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}1\cdot e^{jk2\pi t}}$$

b) $c_0=1\neq 0$, tek harmonik simetrisi yok. Sinyal çift. Dolayısıyla yalnız sinüslü terimler sıfırdır.

5) $e^{jW_0 t} \xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi\delta(\omega-\omega_0)$ formülünü ω_0 yerine $2k\pi$ için kullanırsak, doğrusallıkla birlikte,

$$y(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}e^{j2k\pi t} \xrightarrow{\mathcal{F}} Y(\omega)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}2\pi\delta(\omega-2k\pi)$$



$\rightarrow$ Bu da bir darbe trenidir.

6) a) $y[n+2]-y[n+1]+0{,}24y[n]=x[n+1]-x[n] \xrightarrow{\mathcal{Z}} Y(z)(z^2-z+0{,}24)=X(z)(z-1)$

Transfer fonksiyon: $H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{z-1}{z^2-z+0{,}24}=\frac{z-1}{(z-0{,}4)(z-0{,}6)}$

$$H(z)=\frac{A_1}{z-0{,}4}+\frac{A_2}{z-0{,}6} \quad ; \quad A_1=\left.\frac{z-1}{z-0{,}6}\right|_{z=0{,}4}=\frac{0{,}4-1}{0{,}4-0{,}6}=3$$

$$A_2=\left.\frac{z-1}{z-0{,}4}\right|_{z=0{,}6}=\frac{0{,}6-1}{0{,}6-0{,}4}=-2$$

$$\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{z-a}\right\}=a^n u[n]$$

(Nedensellikten dolayı sağ taraflı çözümle ilgileniyoruz)

$$H(z)=3z^{-1}\cdot\frac{z}{z-0{,}4}-2z^{-1}\frac{z}{z-0{,}6}$$

zamanda öteleme yapar

$h[n]=\left[3\times(0{,}4)^{n-1}-2\times(0{,}6)^{n-1}\right]u[n-1] \rightarrow$ Sistem nedensel ise birim darbe tepkisi

SS-B-2008-CA-3

6) b) $\ddot{y}(t)+6\dot{y}(t)+5y(t)=\dot{x}(t)+3x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} Y(\omega)\left((j\omega)^2+6j\omega+5\right)=X(\omega)\left(j\omega+3\right)$

Transfer fonksiyon: $H(\omega)=\dfrac{Y(\omega)}{X(\omega)}=\dfrac{(j\omega)+3}{(j\omega)^2+6(j\omega)+5}$

$$H(\omega)=\frac{j\omega+3}{(j\omega+1)(j\omega+5)}=\frac{B_1}{j\omega+1}+\frac{B_2}{j\omega+5}$$

$$B_1=\left.\frac{j\omega+3}{j\omega+5}\right|_{j\omega=-1}=\frac{-1+3}{-1+5}=\frac{1}{2}=B_1$$

$$B_2=\left.\frac{j\omega+3}{j\omega+1}\right|_{j\omega=-5}=\frac{-5+3}{-5+1}=\frac{1}{2}=B_2$$

$$h(t)=\mathcal{F}^{-1}\{H(\omega)\}=\frac{1}{2}\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{j\omega+1}\right\}+\frac{1}{2}\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{j\omega+5}\right\}$$

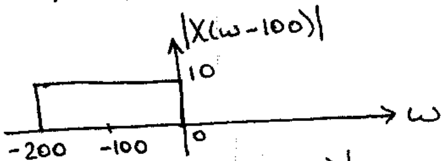
$h(t)=\frac{1}{2}\left(e^{-t}+e^{-5t}\right)u(t) \rightarrow$ Sistem nedensel ise birim darbe tepkisi

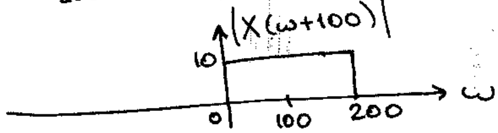
7) a) $y(t)=x(t)\cos 100t \xrightarrow{\mathcal{F}} Y(\omega)=\dfrac{1}{2\pi}X(\omega)*\mathcal{F}\{\cos 100t\}$

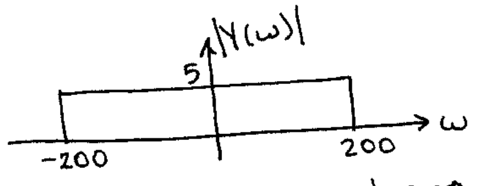
$$\cos 100t=\frac{e^{j100t}+e^{-j100t}}{2} \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{2\pi\delta(\omega-100)+2\pi\delta(\omega+100)}{2}$$

$$Y(\omega)=\frac{1}{2\pi}X(\omega)*\left[\pi\delta(\omega-100)+\pi\delta(\omega+100)\right]$$

$X(\omega)*\delta(\omega-\omega_0)=X(\omega-\omega_0)$ olduğundan, $Y(\omega)=\dfrac{X(\omega-100)+X(\omega+100)}{2}$







ω=0 noktası hariç çakışma olmadığı için mutlak değerler toplamı = toplamın mutlak değeri.

~~ω=0 'da~~

b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}|y(t)|^2dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|Y(\omega)|^2d\omega$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-200}^{200}5^2d\omega=\left.\frac{25\omega}{2\pi}\right|_{-200}^{200}$$

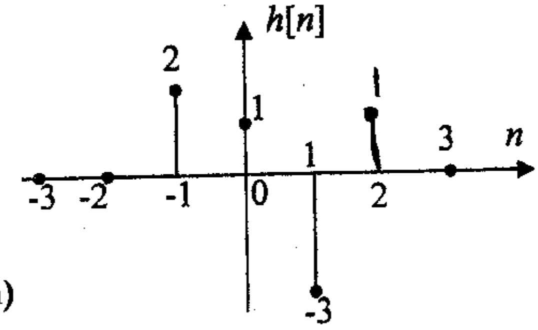
$$=\frac{25\times 400}{2\pi}=\boxed{\frac{5000}{\pi}=\int_{-\infty}^{+\infty}|y(t)|^2dt}$$

ω=0 'daki çakışmayla ilgilenmedik ama çakışmadan dolayı $|Y(0)|\neq 5$ olsaydı bile bu, integralin sonucunu etkilemezdi, tek nokta olduğu için.

SİNYALLER VE SİSTEMLER ARASINAV SORULARI

24.11.2008 Süre: 80 dakika

1) a) Yanda görülen $h[n]$ sinyalinin tek ve çift bileşenlerini çiziniz.**(12 puan).**
b) Eğer $h[n]$, doğrusal zamanla değişmez bir sistemin birim darbe tepkisi ise o sistem nedensel midir, kararlı mıdır? **(2×3 = 6 puan)**
c) O sistemin birim basamak tepkisini çiziniz. **(10 puan)**



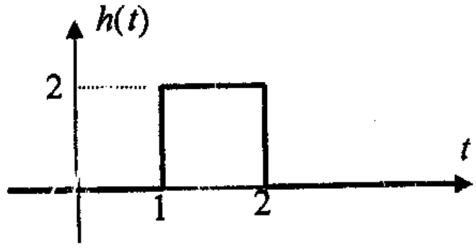
2) Giriş(x) – çıkış (y) ilişkisi $y(t) = x(t+1)\cdot u(t-2) + t^2 \dfrac{dx(t)}{dt}$ olan bir sistem, doğrusal mıdır, zamanla değişen midir, nedensel midir, bellekli midir, kararlı mıdır? **(5×3 = 15 puan)**

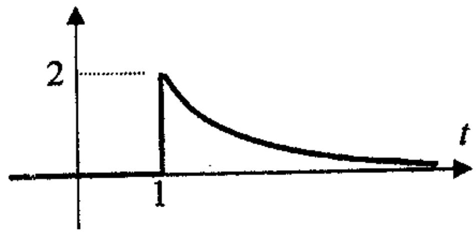
3) Aşağıdaki sinyallerin herbirinin periyodik olup olmadığını, periyodik iseler ana periyotlarının ne olduğunu yazınız. **(9 puan)**

a) $h[n] = \sin\left(\dfrac{\pi n}{5}\right) + (-1)^n$ **b)** $x(t) = \sin\left(\dfrac{\pi t}{5}\right) + \cos 5t$

4) Birim darbe tepkisi $h(t)$ ve girişi $x(t)$ şekillerde verilen doğrusal zamanla değişmez bir sistemin çıkışını hesaplayınız. **(25 puan)**

$x(t) = 2e^{-(t-1)}u(t-1)$





5) Giriş(x) – çıkış (y) ilişkisi

$$\ddot{y}(t) + 5\dot{y}(t) + 6y(t) = x(t-1)$$

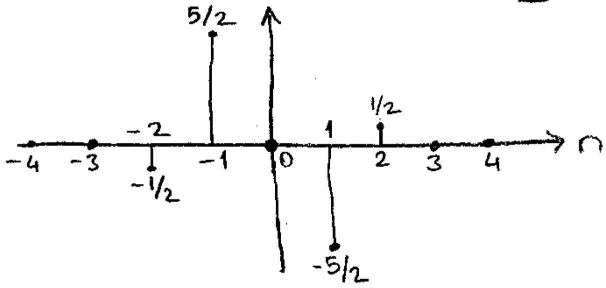
ile verilen nedensel sistemin birim darbe tepkisini bulunuz. **(23 puan)**

BAŞARILAR ...

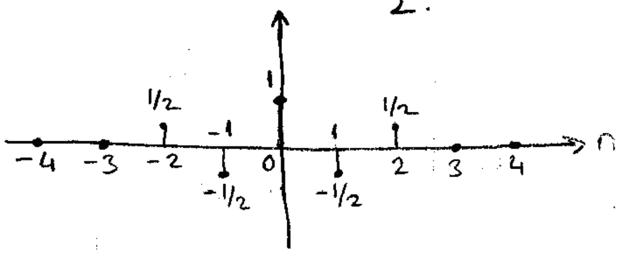
Yard. Doç. Dr. Ata SEVİNÇ

SİNYALLER VE SİSTEMLER ARASINAV CEVAP ANAHTARI
24.11.2008

1) a) Tek bileşen : $h_T[n] = \dfrac{h[n]-h[-n]}{2}$



Çift bileşen : $h_Ç[n] = \dfrac{h[n]+h[-n]}{2}$



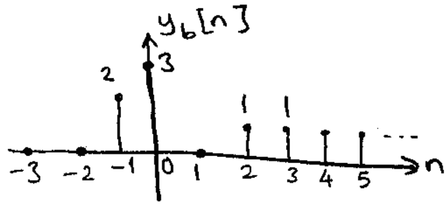
b) Nedensel DEĞİLDİR.

Çünkü bazı $n<0$ $(n=-1)$ için $h[n] \neq 0$

KARARLIDIR. Çünkü

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| = \text{sonlu} \ (=7)$$

c) $y_b[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} h[k]$



2) Doğrusaldır.

Zamanla değişendir; çünkü x( ) parantezinin dışında t bağımlılığı var.

Nedensel değildir; çünkü $t \geq 2$ için gelecekteki giriş $(x(t+1))$ bilgisi gerekiyor.

Belleklidir (hem türevden, hem $x(t+1)$'den dolayı).

Kararsızdır (hem türevden, hem t^2'den dolayı).

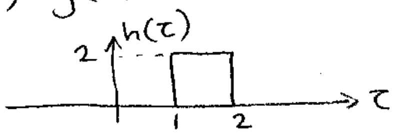
3) a) $\sin\left(\frac{\pi n}{5}\right) \longrightarrow N_1 = 10$ ile periyodik
$(-1)^n \longrightarrow N_2 = 2$ ile periyodik

} Ortak tam katlarının en küçüğü $N=10$ ile $h[n]$ periyodiktir.

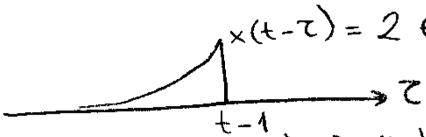
b) $\sin\left(\frac{\pi t}{5}\right) \rightarrow T_1 = 10$ ile periyodik
$\cos 5t \longrightarrow T_2 = \frac{2\pi}{5}$ ile periyodik

} T_1/T_2 : irrasyonel, ortak tam kat yok $x(t)$ periyodik DEĞİL.

4) $y(t) = x(t) * h(t) = \int_{\tau=-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)\,d\tau \longrightarrow$ çıkış



$x(t-\tau) = 2e^{-(t-\tau-1)}u(t-\tau-1)$



$\longrightarrow$ çünkü $t-\tau = 1 \Rightarrow \tau = t-1$

} $h(\tau)x(t-\tau)$ çarpımının yazılış biçimi $t-1<1$, $1 \leq t-1 < 2$ ve $2 \leq t-1$ için farklı olduğundan, 4 (devamı)

$t-1<1$ yani $\underline{t<2 \text{ için:}}$

$$h(\tau)x(t-\tau)=0 \quad \forall\tau \quad \longrightarrow y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} 0 \cdot d\tau = 0$$

$1 \leq t-1 < 2$ yani $\underline{2 \leq t < 3 \text{ için:}}$

$$h(\tau)x(t-\tau)=\begin{cases} 2 \times 2 \times e^{-(t-\tau-1)} & 1 \leq \tau \leq t-1 \text{ ise} \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$$

$$y(t)=\int_{\tau=1}^{t-1} 4e^{-(t-\tau-1)}d\tau = 4e^{-(t-1)}\int_{\tau=1}^{t-1} e^{\tau}d\tau = 4e^{-(t-1)}\left[e^{\tau}\right]_1^{t-1}$$

$$=4e^{-(t-1)}\left[e^{(t-1)}-e\right] = y(t)=4-4e^{-(t-2)}$$

$2 \leq t-1$ yani $\underline{t \geq 3 \text{ için:}}$

$$h(\tau)x(t-\tau)=\begin{cases} 4e^{-(t-\tau-1)} & 1 \leq \tau \leq 2 \text{ ise} \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$$

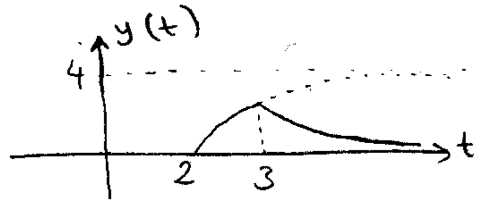
$$y(t)=\int_{\tau=1}^{2} 4e^{-(t-\tau-1)}d\tau = 4e^{-(t-1)}\left[e^{\tau}\right]_1^{2} = 4e^{-(t-1)}(e^2-e)$$

$$= y(t) = 4e^{-(t-3)}(1-e^{-1}) = 4e^{-t}(e^3-e^2)$$

veya

Sonuç:

$$y(t)=\begin{cases} 0 & t<2 \text{ ise} \\ 4-4e^{-(t-2)} & 2 \leq t < 3 \text{ ise} \\ 4e^{-(t-3)}(1-e^{-1}) & 3 \leq t \text{ ise} \end{cases}$$



5) $\underline{t>1 \text{ için:}}$ $\ddot{h}(t)+5\dot{h}(t)+6h(t)=0$, $h(1)=0$, $\dot{h}(1)=\frac{1}{1}=1$

$$\lambda^2+5\lambda+6=0 \longrightarrow \lambda_1=-2, \ \lambda_2=-3 \longrightarrow h(t)=A_1e^{-2(t-1)}+A_2e^{-3(t-1)}$$

$$\left.\begin{aligned} h(1) &= A_1+A_2=0 \\ \dot{h}(1) &= -2A_1-3A_2=1 \end{aligned}\right\} -A_2=1 \longrightarrow \begin{aligned} A_2 &= -1 \\ A_1 &= 1 \end{aligned}$$

Tüm zamanlar için yazılırsa:

$$h(t)=\left[e^{-2\cdot(t-1)}-e^{-3\cdot(t-1)}\right]\cdot u(t-1)$$

SİNYALLER VE SİSTEMLER FİNAL SINAVI SORULARI
07.01.2009 Süre 80 dakika

1) Bir mağaza, müşterilerinin alışverişlerini şöyle bir ayrık zamanlı sistemle taksitlendiriyor:

Alımdan önceki iki ayın herbirinde peşin fiyatının %10'u,

Alım ayında ve ondan sonraki 4 ayın her birinde peşin fiyatının %20'si ödenmektedir.

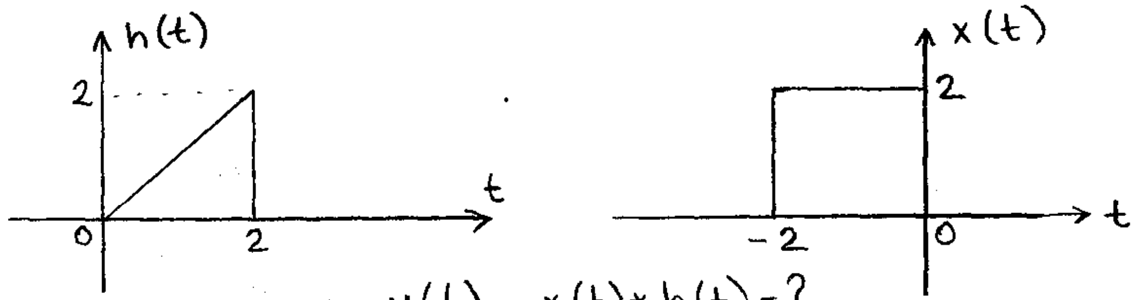
Sistemin girişi alınan malın peşin fiyatı, çıkışı ödeme planı olmak üzere

a) Sistemin birim darbe tepkisini çiziniz. **(8 puan)**

b) Sistem nedensel midir, kararlı mıdır? **(2x3=6 puan)**

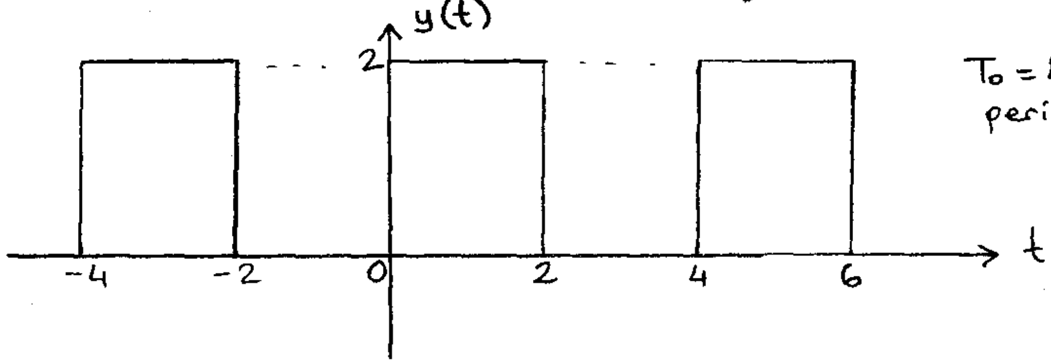
c) 0. aydan itibaren her ay peşin fiyatıyla 1 birimlik alım yapan müşterinin bu sisteme göre taksitlendirilmiş ödeme planını çiziniz. **(11 puan)**

2)



$y(t) = x(t) * h(t) = ?$ Hesaplayınız. (25 puan)

3) Şekilde verilen sinyali Fourier serisine açınız. (25 puan)



$T_0 = 4$ ile periyodik

4) Giriş(x) – çıkış(y) ilişkisi aşağıda verilen nedensel sistemin transfer fonksiyonunu**(5 puan)**, birim darbe tepkisini**(7 puan)** ve $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 0$ olmak üzere $x(t) = e^{-2t}u(t)$ girişi için çıkışını **(13 puan)** hesaplayınız.

$$\ddot{y}(t) + 4\dot{y}(t) + 3y(t) = \dot{x}(t) + x(t)$$

5) Giriş(x) – çıkış(y) ilişkisi aşağıda verilen nedensel sistemin transfer fonksiyonunu**(7 puan)**, ve birim darbe tepkisini**(18 puan)** hesaplayınız.

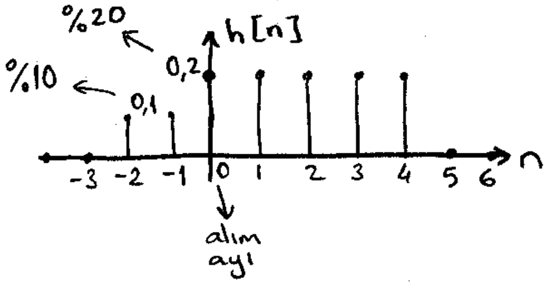
$$y[n+2] + 3y[n+1] + 2y[n] = x[n+2] - x[n+1]$$

BAŞARILAR ... **Yard. Doç. Dr. Ata SEVİNÇ**

TOPLAM 4 SORU CEVAPLAMANIZ YETERLİDİR.
5 SORUYU DA CEVAPLARSANIZ, EN DÜŞÜK PUANLISI SAYILMAYACAKTIR.

SİNYALLER VE SİSTEMLER FİNAL CEVAP ANAHTARI
07.01.2009

1) a) Giriş $\delta[n]$ demek yalnız 0. ayda 1 birim (peşin fiyatı) alım yapılmasıdır. $h[n]$ ise bu alımın taksitli ödeme planıdır.



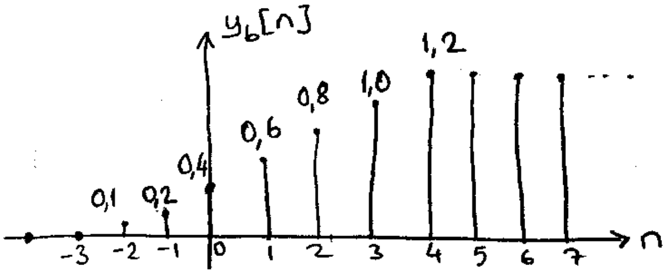
b) Bazı $n<0$ ($n=-1$ ve $n=-2$) için $h[n] \neq 0 \rightarrow$ Nedensel Değil.

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| = \sum_{n=-2}^{4} |h[n]| = 1{,}2 < \infty$$

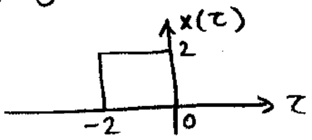
Kararlı

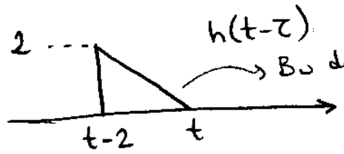
c) Giriş birim basamak denilmek isteniyor. Çıkış da birim basamak tepkisi ($y_b[n]$) olur.

$$y_b[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} h[k]$$



2) $y(t) = x(t) * h(t) = \int_{\tau=-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$





Bu doğru parçasının denklemi: $a\tau + b$

$a = -2/2 = -1$

$\rightarrow b - \tau \Big|_{\tau=t} = 0 \rightarrow b = t$

Yani denklemi $(t-\tau)$

$t \leq -2$ için:

$x(\tau)h(t-\tau) = 0 \quad \forall \tau$

$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} 0 \cdot d\tau = 0$

$-2 < t \leq 0$ için:

$$x(\tau)h(t-\tau) = \begin{cases} 2\cdot(t-\tau) & -2 \leq \tau \leq t \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$$

$$y(t) = \int_{\tau=-2}^{t} 2\cdot\underbrace{(t-\tau)}_{p}\underbrace{d\tau}_{-dp} = \underbrace{-(t-\tau)^2}_{-p^2}\Big|_{\tau=-2}^{t} = (t+2)^2 = y(t)$$

$0 < t \leq 2$ için:

$$x(\tau)h(t-\tau) = \begin{cases} 2\cdot(t-\tau) & t-2 \leq \tau \leq 0 \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$$

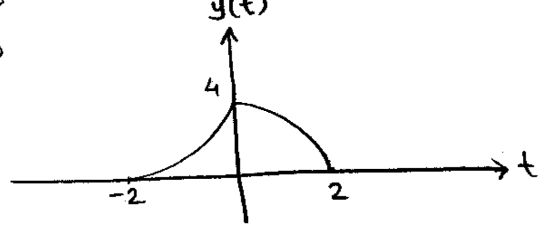
$$\rightarrow y(t) = \int_{\tau=t-2}^{0} 2(t-\tau)d\tau = -(t-\tau)^2\Big|_{\tau=t-2}^{0}$$

$y(t) = 4 - t^2$

$t > 2$ için: $x(\tau)h(t-\tau) = 0 \quad \forall \tau$

$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} 0 \cdot d\tau = 0$

$$\rightarrow \quad \text{Sonuç: } y(t) = \begin{cases} 0 & t \leq -2 \\ (t+2)^2 & -2 < t \leq 0 \\ 4-t^2 & 0 < t \leq 2 \\ 0 & t > 2 \end{cases}$$



3) $\omega_0 = 2\pi/T_0 = \pi/2$

Dikkat edilirse $y(t) - 1$ 'in tek sinyal olduğu görülür. Yani

$$y(t) = \underbrace{1}_{a_0/2} + \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin(k\tfrac{\pi}{2}t)$$

$a_0/2 \longrightarrow a_0 = 2, \quad a_k = 0 \ (k \neq 0)$

$$b_k = \frac{2}{4}\int_{-2}^{2} y(t)\sin(k\tfrac{\pi}{2}t)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^2 2\sin\frac{k\pi t}{2}\,dt = \frac{-2}{k\pi}\cos(k\pi\tfrac{t}{2})\Big|_0^2 = \frac{-2}{k\pi}(\underbrace{\cos k\pi}_{(-1)^k}-1)$$

$b_k = \frac{4}{k\pi}$ k tekse ; $b_k = 0$ k çiftse (Zaten $y(t)-1$ 'in tek harmonik simetrisine sahip olduğu görülüyor.)

$b_1 = \frac{4}{\pi}$, $b_3 = \frac{4}{3\pi}$, $b_5 = \frac{4}{5\pi}$, ...

Sonuç: $y(t) = 1 + \frac{4}{\pi}\left(\sin(\frac{\pi}{2}t) + \frac{1}{3}\sin(\frac{3\pi}{2}t) + \frac{1}{5}\sin(\frac{5\pi}{2}t) + \dots\right)$

Karmaşık seriye açılsaydı: $y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{jk\frac{\pi}{2}t}$ $\rightarrow$ $c_0 = \frac{a_0}{2} = 1$

Tek k'lar için:

$c_k = \frac{a_k - jb_k}{2} = -j\frac{2}{k\pi} = c_k$ $(k>0)$ ve $c_{-k} = \frac{a_k + jb_k}{2} = j\frac{2}{k\pi}$ (yine $k>0$)

veya $c_k = -j\frac{2}{k\pi}$ $(k<0)$ Yani genel olarak

$$c_k = \begin{cases} 1 & k=0 \text{ ise} \\ 0 & k \text{ çift } (\neq 0) \text{ ise} \\ -j\frac{2}{k\pi} & k \text{ tekse} \end{cases}$$

4) $Y(\omega)\big(\underbrace{(j\omega)^2 + 4(j\omega) + 3}_{(j\omega+1)(j\omega+3)}\big) = X(\omega)(j\omega+1)$

$\boxed{H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{1}{j\omega+3}}$: Transfer fonksiyon.

Birim darbe tepkisi $h(t) = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{j\omega+3}\right\} = \boxed{e^{-3t}u(t) = h(t)}$

$X(\omega) = \mathcal{F}\{e^{-2t}u(t)\} = \frac{1}{j\omega+2}$ $\rightarrow$ $Y(\omega) = H(\omega)X(\omega) = \frac{1}{(j\omega+3)(j\omega+2)}$

$Y(\omega) = \frac{A}{j\omega+3} + \frac{B}{j\omega+2}$ $\rightarrow$ $A = \frac{1}{-3+2} = -1$, $B = \frac{1}{-2+3} = 1$

$y(t) = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{+1}{j\omega+2} - \frac{1}{j\omega+3}\right\} = \boxed{(e^{-2t} - e^{-3t})u(t) = y(t)}$: çıkış

5) $Y(z)(z^2+3z+2) = X(z)(z^2-z)$ $\rightarrow$ $\boxed{H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z(z-1)}{(z+1)(z+2)}}$: transf fnk

$\frac{H(z)}{z} = \frac{A_1}{z+1} + \frac{A_2}{z+2} = \frac{z-1}{(z+1)(z+2)}$ $\rightarrow$ $A_1 = \frac{-1-1}{-1+2} = -2$

$A_2 = \frac{-2-1}{-2+1} = 3$ $\rightarrow$ $H(z) = -2\frac{z}{z-(-1)} + 3\frac{z}{z-(-2)}$

Birim darbe tepkisi : $\boxed{h[n] = \left[-2\times(-1)^n + 3\times(-2)^n\right]u[n]}$

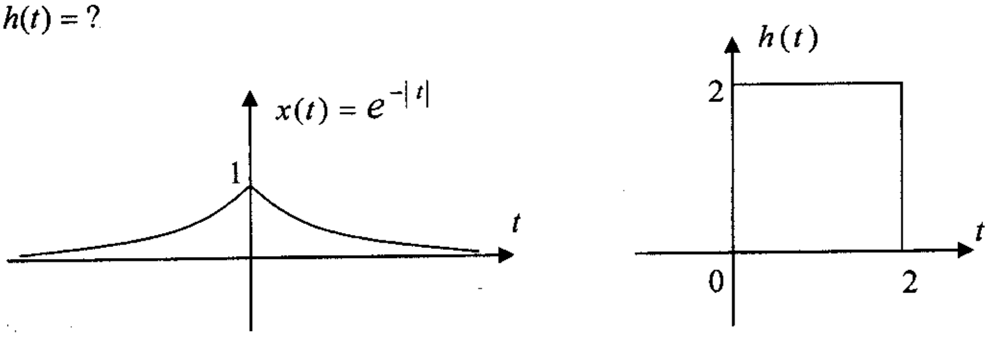
Dikkat: $H(z) = 1 - \frac{4z+2}{(z+1)(z+2)} = 1 + \frac{2}{z+1} - \frac{6}{z+2} = 1 + 2z^{-1}\frac{z}{z-(-1)} - 6z^{-1}\frac{z}{z-(-2)}$

yoluyla bulunan $\boxed{h[n] = \delta[n] + 2\times(-1)^{n-1}u[n-1] - 6\times(-2)^{n-1}u[n-1]}$ çözümü de görünümü farklı olsa da aynıdır.

SİNYALLER VE SİSTEMLER BÜTÜNLEME SINAVI SORULARI
21.01.2009 Süre 80 dakika

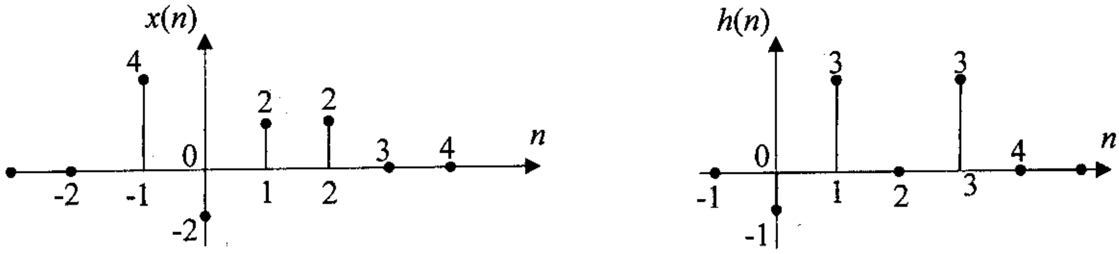
Aşağıdaki sorulardan 4 tanesini çözünüz. Fazla soru cevaplanması halinde en yüksek puanlı 4 tanesi dikkate alınacaktır. Her soru 25 puandır.

1) $y(t) = x(t) * h(t) = ?$

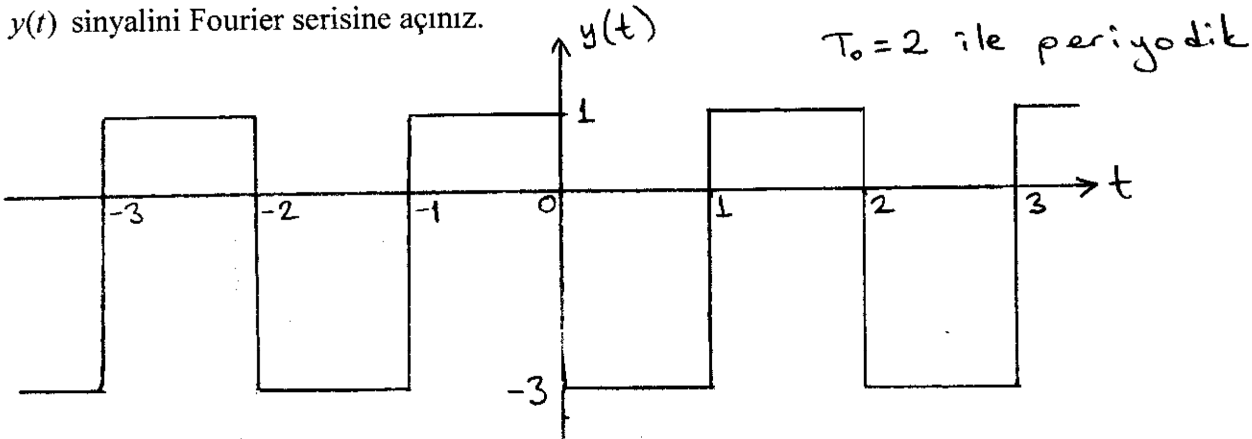


2) a) $y[n] = x[n] * h[n]$ sinyalini çiziniz. **(13 puan)**

b) $x[n]$ sinyalinin tek ve çift bileşenlerini çiziniz. **(12 puan)**



3) $y(t)$ sinyalini Fourier serisine açınız.



4) a) $t\,x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} j\dfrac{dX(\omega)}{d\omega}$ olduğunu gösteriniz. **(12 puan)**

b) Bu özelliği kullanarak $\mathcal{F}\{t\,e^{-3t}u(t)\} = ?$ bulunuz. **(13 puan)**

5) Giriş (x) – çıkış (y) ilişkileri aşağıda verilen denklemlerle tanımlı doğrusal zamanla değişmez ve nedensel sistemlerden **yalnız birisinin** transfer fonksiyonunu **(5 puan)**, birim darbe tepkisini **(6 puan)** ve verilen giriş için çıkışını (Sıfır anındaki standart biçimdeki başlangıç şartları sıfır iken) **(14 puan)** hesaplayınız.

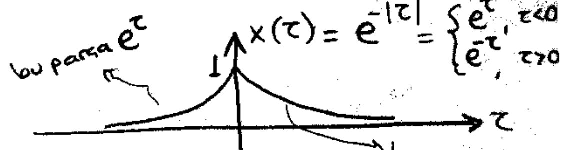
a)
$$\ddot{y}(t) + 6\dot{y}(t) + 8y(t) = 2\dot{x}(t) + 4x(t)$$
$$x(t) = e^{-3t}u(t)$$

b)
$$y[n+2] - 0{,}7y[n+1] + 0{,}01y[n] = 2x[n+1] - x[n]$$
$$x[n] = (0{,}4)^n u[n]$$

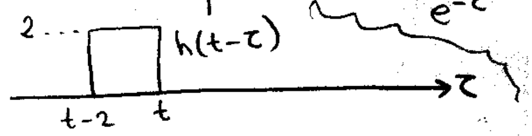
BAŞARILAR...

Yard. Doç. Dr. Ata SEVİNÇ

SİNYALLER VE SİSTEMLER BÜTÜNLEME CEVAP ANAHTARI:
21.01.2009



1) $y(t) = x(t) * h(t) = \int_{\tau=-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau$



<u>$t<0$ ise:</u> $x(\tau)h(t-\tau) = \begin{cases} 2e^{\tau} & t-2 \le \tau \le t \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$

$$y(t) = \int_{\tau=t-2}^{t} 2e^{\tau} d\tau = 2e^{\tau}\Big|_{t-2}^{t} = 2e^{t} - 2e^{t-2}$$

$$\boxed{y(t) = 2e^{t}(1-e^{-2}) \qquad t<0 \text{ ise}}$$

<u>$0 \le t < 2$ ise:</u> $x(\tau)h(t-\tau) = \begin{cases} 2e^{\tau} & t-2 \le \tau < 0 \\ 2e^{-\tau} & 0 \le \tau \le t \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$

$$y(t) = \int_{\tau=t-2}^{0} 2e^{\tau} d\tau + \int_{0}^{t} 2e^{-\tau} d\tau$$

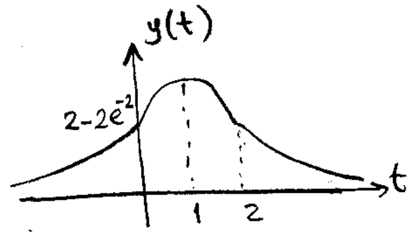
$$y(t) = 2e^{\tau}\Big|_{t-2}^{0} + (-2e^{-\tau})\Big|_{0}^{t} = 2 - 2e^{t-2} - 2e^{-t} + 2 = \boxed{y(t) = 4 - 2e^{t-2} - 2e^{-t} \quad 0 \le t < 2 \text{ ise}}$$

<u>$t \ge 2$ ise:</u> $x(\tau)h(t-\tau) = \begin{cases} 2e^{-\tau} & t-2 \le \tau \le t \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$

$$y(t) = \int_{t-2}^{t} 2e^{-\tau} d\tau = -2e^{-\tau}\Big|_{t-2}^{t} = \boxed{y(t) = 2e^{-(t-2)} - 2e^{-t} \qquad t \ge 2 \text{ ise}}$$

Sonuç:

$$y(t) = \begin{cases} 2e^{t}(1-e^{-2}) & t<0 \text{ ise} \\ 4 - 2e^{t-2} - 2e^{-t} & 0 \le t < 2 \text{ ise} \\ 2e^{-t}(e^{2}-1) & t \ge 2 \text{ ise} \end{cases}$$



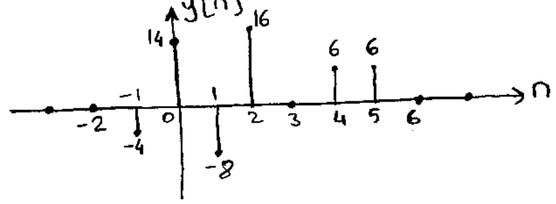
2) a)

$h[0] \quad x[-1] \qquad x[2] \quad h[3]$

```
        4 / -2 / 2 / 2
  x    -1 /  3 / 0 / 3
  ------------------------
           12 / -6 / 6 / 6
        0 /  0 /  0 / 0
   12 / -6 /  6 / 6
-4 / 2 / -2 / -2
+
------------------------------
-4 / 14 / -8 / 16 / 0 / 6 / 6
```

$y[-1+0] = y[-1]$ $\qquad y[2+3] = y[5]$

Elde aktarımı yapmadan her değeri bir rakam gibi düşünerek klasik çarpma benzeri işlem yapıyoruz. En soldaki değer, iki sinyalin en soldaki değerlerinin anları toplamı anına, en sağdaki değer de iki sinyalin en sağdaki değerlerinin anları toplamı anına karşılık getirilir. Diğer kısımlarda ise sıfırdır.



b) $x_T[n] = \dfrac{x[n] - x[-n]}{2}$: Tek bileşen

$x_Ç[n] = \dfrac{x[n] + x[-n]}{2}$: Çift bileşen

$|n| \ge 3$ için $x_T[n] = x_Ç[n] = 0$

$x_T[0]=0$ → Daima böyledir.

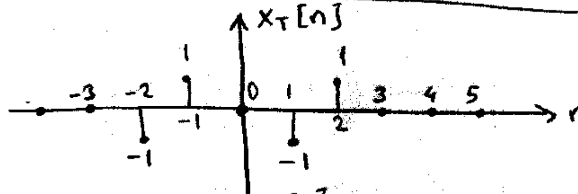
$x_T[1]=(2-4)/2=-1$

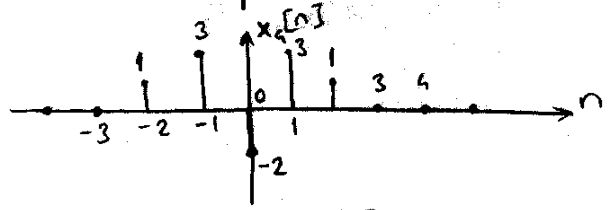
$x_T[2]=(2-0)/2=1$

$x_G[0]=x[0]=-2$

$x_G[1]=(2+4)/2=3$

$x_G[2]=(2+0)/2=1$





3) $y(t)+1$ tek sinyal olduğundan a_0 hariç $\boxed{a_k=0}$ ← kosinüslülerin katsayıları

$$y(t) = \underbrace{-1}_{a_0/2} + \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin k\omega_0 t$$

$a_0/2 \to \boxed{a_0=-2}$ $\qquad T_0=2 \to \omega_0 = 2\pi/T_0=\pi$

$$b_k = \frac{2}{T_0}\int_{-1}^{0} 1\cdot \sin k\pi t\,dt + \frac{2}{T_0}\int_0^1 -3\cdot\sin k\pi t\,dt$$

$$b_k = \frac{1}{k\pi}(-\cos k\pi t)\Big|_{-1}^{0} - \frac{3}{k\pi}(-\cos k\pi t)\Big|_0^1 = \frac{1}{k\pi}\{-1+\cos(-k\pi)+3\cos k\pi -3\}$$

$$b_k = \frac{-4}{k\pi}\left(1-(-1)^k\right) = \begin{cases}0 & k \text{ çiftse}\\ -8/k\pi & k \text{ tekse}\end{cases}$$

Sonuç: $$\boxed{y(t) = -1 - \frac{8}{\pi}\left(\frac{\sin\pi t}{1}+\frac{\sin 3\pi t}{3}+\frac{\sin 5\pi t}{5}+\dots\right)}$$

Karmaşık seriye açılırsa: $y(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{jk\pi t} \to \boxed{c_0=-1}$

$$c_k = \frac{1}{\underset{T_0}{2}}\int_{-1}^0 1\cdot e^{-jk\pi t}dt + \frac12\int_0^1 -3\cdot e^{-jk\pi t}dt = \frac{-1}{j2k\pi}e^{-jk\pi t}\Big|_{-1}^0 + \frac{3}{j2k\pi}e^{-jk\pi t}\Big|_0^1$$

$$c_k = \frac{1}{j2k\pi}\left\{-1+e^{+jk\pi}+3e^{-jk\pi}-3\right\} = c_k = \frac{-4}{j2k\pi}\left(1-(-1)^k\right)$$

$$\boxed{c_k = \begin{cases} 0 & k\text{ çiftse } (k\neq 0)\\ -\frac{4}{jk\pi} & k \text{ tekse}\end{cases}}$$

$$\boxed{y(t) = \dots + \frac{4}{j3\pi}e^{-j3\pi t} + \frac{4}{j\pi}e^{-j\pi t} - 1 - \frac{4}{j\pi}e^{j\pi t} - \frac{4}{j3\pi}e^{j3\pi t} - \dots}$$

4) a) $$X(\omega)=\mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{t=-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$$ → çünkü yalnız burada ω var.

$$dX(\omega)/d\omega = \int_{t=-\infty}^{+\infty} x(t)\cdot\frac{d}{d\omega}\{e^{-j\omega t}\}\cdot dt$$

$$j\,dX(\omega)/d\omega = \underset{\text{dersek}}{Y(\omega)} = j\cdot\int_{t=-\infty}^{+\infty} -jt\,x(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{t=-\infty}^{+\infty} \underbrace{t\,x(t)}_{y(t)} e^{-j\omega t}dt$$ olur.

b) $x(t)=e^{-3t}u(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega)=\dfrac{1}{j\omega+3}$

$y(t)=t\,e^{-3t}u(t)=t\,x(t)$ dersek $\xrightarrow{\mathcal{F}} Y(\omega)=j\dfrac{d}{d\omega}\left(\dfrac{1}{j\omega+3}\right)$

$$Y(\omega)=-j(j\omega+3)^{-2}\cdot j = \boxed{\mathcal{F}\{t e^{-3t}u(t)\}=\frac{1}{(j\omega+3)^2}}$$

5) a) $Y(\omega)\left((j\omega)^2+6(j\omega)+8\right)=\left(2\cdot(j\omega)+4\right)X(\omega)$

$$\frac{Y(\omega)}{X(\omega)}=H(\omega)=\frac{2\cdot[j\omega+2]}{\underbrace{(j\omega)^2+6\cdot j\omega+8}_{(j\omega+2)(j\omega+4)}}=\boxed{\frac{2}{j\omega+4}=H(\omega)}$$ Transfer fonksiyon

$$h(t)=\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{2}{j\omega+4}\right\}=\boxed{2e^{-4t}u(t)=h(t)}$$ Birim darbe tepkisi

$x(t)=e^{-3t}u(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega)=\dfrac{1}{j\omega+3}$ $\qquad Y(\omega)=H(\omega)X(\omega)$

$$Y(\omega)=\frac{2}{(j\omega+4)(j\omega+3)}=\frac{A}{j\omega+4}+\frac{B}{j\omega+3}$$

$\longrightarrow A=\dfrac{2}{-4+3}=-2$

$B=\dfrac{2}{-3+4}=2$

$$\boxed{y(t)=2\left(e^{-3t}-e^{-4t}\right)u(t)}$$

b) $Y(z)\left(z^2-0{,}7z+0{,}01\right)=(2z-1)X(z)$

$$\frac{Y(z)}{X(z)}=\boxed{H(z)=\frac{2z-1}{z^2-0{,}7z+0{,}01}}=\frac{A}{z-(0{,}35+\sqrt{0{,}1125})}+\frac{B}{z-(0{,}35-\sqrt{0{,}1125})}$$

kökleri $0{,}35\mp\sqrt{0{,}1125}$

$Az-A\cdot(0{,}35-\sqrt{0{,}1125})+Bz-B\cdot(0{,}35+\sqrt{0{,}1125})=2z-1$

$A+B=2 \longrightarrow B=2-A \longrightarrow A\cdot(0{,}35-\sqrt{0{,}1125})+(2-A)\cdot(0{,}35+\sqrt{0{,}1125})=1$

$-2A\cdot\sqrt{0{,}1125}=0{,}3-2\sqrt{0{,}1125} \rightarrow \boxed{A=\dfrac{-0{,}15}{\sqrt{0{,}1125}}+1}$ $\quad \boxed{B=1+\dfrac{0{,}15}{\sqrt{0{,}1125}}}$

$$\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{a}{z-b}\right\}=\mathcal{Z}^{-1}\left\{z^{-1}\cdot\frac{az}{z-b}\right\}=a\cdot b^{n-1}u[n-1]$$ olduğu için

z^{-1} → zamanda 1 birim geciktirir

$$\boxed{h[n]=\left[A\cdot(0{,}35+\sqrt{0{,}1125})^{n-1}+B\cdot(0{,}35-\sqrt{0{,}1125})^{n-1}\right]u[n-1]}$$ Birim darbe tepkisi

SS-B-2009-CA-4

$$x[n] = (0,4)^n u[n] \xrightarrow{\mathcal{Z}} X(z) = \frac{z}{z-0,4}$$

$$Y(z) = H(z)X(z) = \frac{z(2z-1)}{(z^2-0,7z+0,01)(z-0,4)}$$

$$Y(z) = \frac{A_1}{z-(0,35+\sqrt{0,1125})} + \frac{A_2}{z-(0,35-\sqrt{0,1125})} + \frac{A_3}{z-0,4}$$

$$A_1 = \frac{(0,35+\sqrt{0,1125})(2\cdot[0,35+\sqrt{0,1125}]-1)}{[(0,35+\sqrt{0,1125})-(0,35-\sqrt{0,1125})][0,35+\sqrt{0,1125}-0,4]}$$

$$A_2 = \frac{(0,35-\sqrt{0,1125})(2\cdot[0,35-\sqrt{0,1125}]-1)}{[(0,35-\sqrt{0,1125})-(0,35+\sqrt{0,1125})][0,35-\sqrt{0,1125}-0,4]}$$

$$A_3 = \frac{0,4\times(2\times 0,4-1)}{0,4^2-0,7\times 0,4+0,01} = \frac{-0,08}{0,16-0,28+0,01} = 8/11$$

$$y[n] = \left[A_1\cdot(0,35+\sqrt{0,1125})^{n-1} + A_2\cdot(0,35-\sqrt{0,1125})^{n-1} + \frac{8}{11}(0,4)^{n-1}\right]u[n-1]$$

Bu sorudaki kökler biraz zor olmuş. Bu durum değerlendirmede öğrenci lehine dikkate alınır.

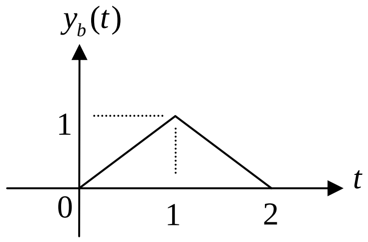
SİNYALLER VE SİSTEMLER ARASINAV SORULARI
07 Aralık 2009   Süre: 80 dakika

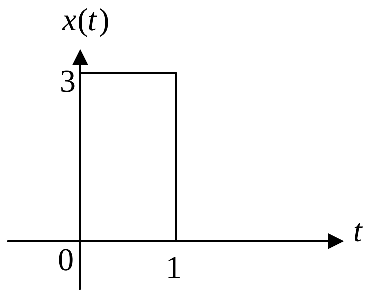
1) Giriş(x) – çıkış(y) ilişkisi

$$y[n] = \begin{cases} x[n] & n \geq 0 \text{ ise} \\ 0 & n < 0 \text{ ise} \end{cases}$$

ile verilen sistem doğrusal mıdır, bellekli midir, nedensel midir, kararlı mıdır, zamanla değişen midir? (Açıklama yapmanız beklenmemektedir, birer veya ikişer kelimelik cevaplar yeterlidir.) **(5x3 = 15 puan)**

2)





Birim **basamak** tepkisi $y_b(t)$ ve girişi $x(t)$ şekildeki gibi olan sistemin çıkışını çiziniz**(10 puan)**. Ayrıca birim **darbe** tepkisini çiziniz**(10 puan)**.

3) Aşağıdaki konvolüsyon işlemlerinden yalnızca istediğiniz birisini yapınız ve sonucu (y) çiziniz. **(25 puan)** (İkisini de yapmaya çalışırsanız yalnızca yüksek puanlı birisinden puanınız sayılacaktır.)

a) $x(t) = e^{-2t}u(t)$, $h(t) = e^{-3t}u(t)$, $y(t) = x(t) * h(t) = ?$

b) $x[n] = (0{,}9)^n u[n]$, $h[n] = (0{,}7)^n u[n]$, $y[n] = x[n] * h[n] = ?$

4) Giriş(x) – çıkış(y) ilişkisi

$$y[n+2] - y[n+1] + \frac{y[n]}{4} = 5x[n]$$

ile verilen nedensel sistemin birim darbe tepkisini bulunuz. **(15 puan)**

5) Giriş(x) – çıkış(y) ilişkisi

$$\ddot{y}(t) + 4y(t) = x(t)$$

ile verilen sitemin tüm zamanlardaki çıkışını $y(0) = 1$, $\dot{y}(0) = 1$ başlangıç şartları ve $x(t) = u(t)$ için bulunuz. **(25 puan)**

BAŞARILAR ...   **Yard. Doç.Dr. Ata SEVİNÇ**

SİNYALLER VE SİSTEMLER ARASINAV CEVAP ANAHTARI:
07 Aralık 2009

1) Doğrusaldır; çünkü çıkış ya sıfır ya girişin aynısı ve bunun şartı girişin değerinden bağımsız. (Bu şart n'e değil de $x[n]$'e bağlı olsaydı doğrusal olmazdı.)

Belleksizdir; çünkü $y[n]$, n'den başka bir anki girişe bağlı değil.

Nedenseldir; çünkü $y[n]$, n'den sonraki bir anki girişe bağlı değil. Zaten tüm belleksiz sistemler nedenseldir.

Kararlıdır. Giriş sınırlı ise çıkışın da sınırlı olduğu açıktır.

Zamanla değişendir; çünkü:

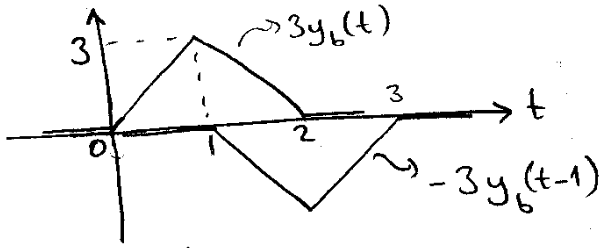
$$x[n-n_0] \text{ için çıkış} = \begin{cases} x[n-n_0] & n \geq 0 \text{ ise} \\ 0 & n<0 \text{ ise} \end{cases}$$

Fakat
$$y[n-n_0] = \begin{cases} x[n-n_0] & n-n_0 \geq 0 \text{ ise} \\ 0 & n-n_0<0 \text{ ise} \end{cases}$$

Farklı

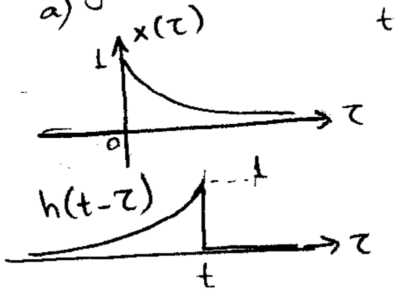
2) $x(t) = 3u(t) - 3u(t-1)$

$\rightarrow y(t) = 3y_b(t) - 3y_b(t-1)$: Çıkış



3) $y(t) = x(t) * h(t) = \displaystyle\int_{\tau=-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$

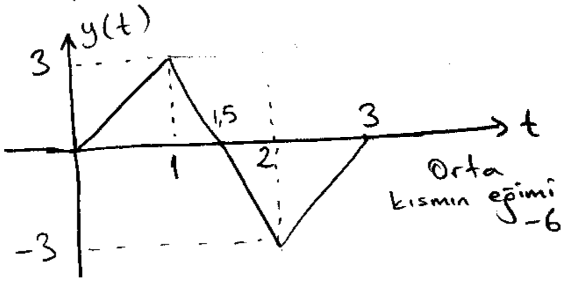
a)



$\underline{t<0 \text{ ise:}}$

$x(\tau)h(t-\tau) = 0 \quad \forall\tau$

$y(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} 0 \cdot d\tau = 0$



$\underline{t \geq 0 \text{ ise:}}$
$$x(\tau)h(t-\tau) = \begin{cases} e^{-2\tau} \cdot e^{-3(t-\tau)} & 0 \leq \tau \leq t \text{ ise} \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$$

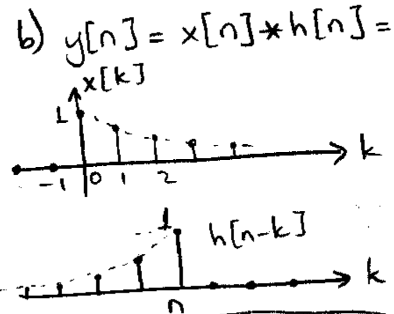
$$y(t) = \int_{\tau=0}^{t} \underset{\substack{\downarrow \\ \text{sabit sayılır}}}{e^{-3t}} \cdot e^{\tau} d\tau = e^{-3t}\left(e^{\tau}\right)\Big|_0^t = e^{-3t}\left(e^{t}-1\right) = e^{-2t} - e^{-3t}$$

Sonuç: $y(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \text{ ise} \\ e^{-2t} - e^{-3t} & t \geq 0 \text{ ise} \end{cases}$

b) $y[n] = x[n] * h[n] = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]$

$\underline{n<0 \Rightarrow} \; x[k]h[n-k] = 0 \quad \forall k$

$y[n] = \displaystyle\sum_{-\infty}^{+\infty} 0 = 0 \quad (n<0 \text{ için})$



$\underline{n \geq 0 \text{ ise:}}$ $x[k]h[n-k] = \begin{cases} 0{,}9^k \times 0{,}7^{n-k} & 0 \leq k \leq n \text{ ise} \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$

$$y[n] = 0{,}7^n \sum_{k=0}^{n} (0{,}9/0{,}7)^k = 0{,}7^n \frac{1-(9/7)^{n+1}}{1-(9/7)}$$

$$\frac{0{,}7^n - \frac{9}{7}0{,}9^n}{1-(9/7)} = \frac{9}{2} \times 0{,}9^n - \frac{7}{2} \times 0{,}7^n = y[n]$$

Sonuç: $y[n] = \begin{cases} 0 & n<0 \text{ ise} \\ \frac{9}{2} \times 0{,}9^n - \frac{7}{2} \times 0{,}7^n & n \geq 0 \text{ ise} \end{cases}$

2. sorudaki *h*(*t*) ve 3. sorudaki *y* çizimleri sonraki sayfanın en sonundadır.

SS-V-2009-CA-2

4) $n>0$ için: $h[n+2]-h[n+1]+\frac{1}{4}h[n]=0$

$$h[1]=0 \quad , \quad h[2]=5/1=5$$

$$\lambda^2-\lambda+\frac{1}{4}=0 \rightarrow \lambda_1=\lambda_2=\frac{1}{2} \rightarrow h[n]=(A_1+A_2 n)\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\left.\begin{array}{l} h[1]=\frac{1}{2}A_1+\frac{1}{2}A_2=0 \\ h[2]=\frac{1}{4}A_1+\frac{2}{4}A_2=5 \end{array}\right\} \rightarrow -\frac{1}{4}A_1=5 \rightarrow A_1=-20, \quad A_2=-A_1=20$$

Tüm zamanlar için: $\boxed{h[n]=20(n-1)\times\frac{1}{2^n}\times\underbrace{u[n-1]}_{\text{veya } u[n-2]}}$

5) $\ddot{y}(t)+4y(t)=u(t)=\begin{cases}0 & t<0 \text{ ise}\\ 1 & t\geqslant 0 \text{ ise}\end{cases}$

$$\lambda^2+4=0 \rightarrow \lambda_{1,2}=\mp j2$$

$t<0$ için $\quad y(t)=y_h(t)=A_1\cos 2t+A_2\sin 2t$

Sağda darbe yok $\rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} y(0^-)=y(0)=1=A_1 \\ \dot{y}(0^-)=\dot{y}(0)=1=2A_2 \end{array}\right\}$ $A_1=1, \quad A_2=\frac{1}{2}$

$t\geqslant 0$ için $\quad y_h(t)=B_1\cos 2t+B_2\sin 2t$

Sağda $\quad \underset{\sim}{1}=1\times e^{0.t}$ için, $\quad 0\notin\{\lambda_1,\lambda_2\} \rightarrow y_ö(t)=c\,e^{0.t}=c$

$$1=c(0^2+4) \rightarrow c=1/4 \rightarrow y_ö(t)=1/4$$

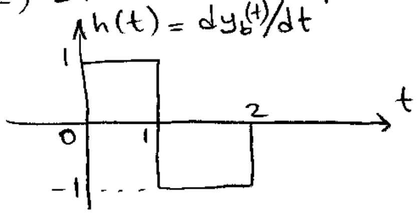
$$y(t)=B_1\cos 2t+B_2\sin 2t+\frac{1}{4}$$

$$\left.\begin{array}{l} y(0)=B_1+\frac{1}{4}=1 \\ \dot{y}(0)=2B_2=1 \end{array}\right\} \quad B_1=\frac{3}{4}, \quad B_2=\frac{1}{2}$$

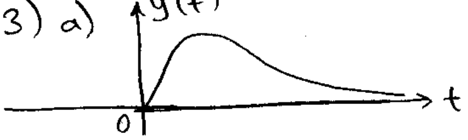
Sonuç: $$y(t)=\begin{cases}\cos 2t+\frac{1}{2}\sin 2t & t<0 \text{ ise}\\ \frac{3}{4}\cos 2t+\frac{1}{2}\sin 2t+\frac{1}{4} & t\geqslant 0 \text{ ise}\end{cases}$$

Önceki iki sorunun cevaplarındaki eksikler:

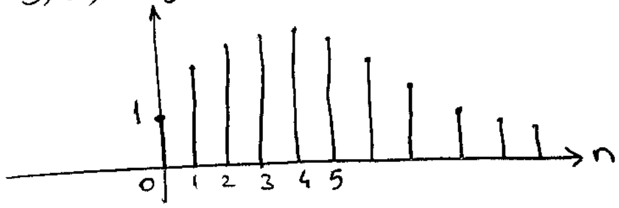
2) Birim darbe tepkisi



3) a)



3) b)



SİNYALLER VE SİSTEMLER FİNAL SINAVI SORULARI

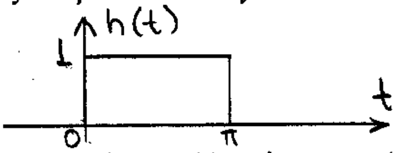
13.01.2010 Süre: 80 dakika

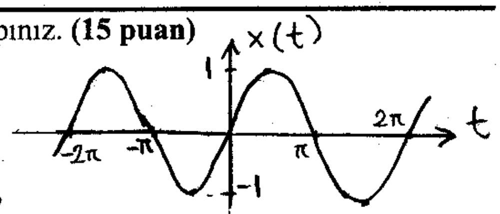
Her bir soru numarasından ya A ya da B ile gösterileni yapınız. Her ikisini de yapmaya çalışırsanız (ki zaman kaybetmeniz tavsiye edilmez) hangisini seçtiğinizi belirtiniz. Aksi halde **yalnız A** sorusuna verdiğiniz cevap dikkate alınacaktır.

1-A) Giriş(x) – çıkış(y) ilişkisi $y(t) = x(t)e^{t+1} + x(0)$
ile verilen sistem doğrusal mıdır, bellekli midir, nedensel midir, kararlı mıdır, zamanla değişen midir? (Açıklama yapmanız beklenmemektedir, birer veya ikişer kelimelik cevaplar yeterlidir.) **(5x3 = 15 puan)**

1-B) $x[n] = 2u[n+3] + 2u[n-2]$ sinyali ile tek ve çift bileşenlerini çiziniz. **(3 + 6 + 6 = 15 puan)**

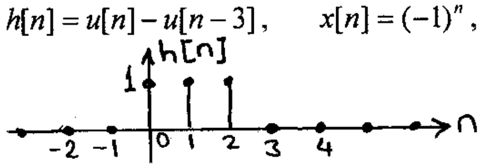
2- Aşağıdaki konvolüsyon işlemlerinden yalnızca istediğiniz birisini yapınız. **(15 puan)**

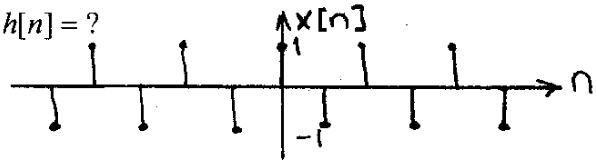




A) $h(t) = u(t) - u(t-\pi)$, $x(t) = \sin t$, $y(t) = x(t) * h(t) = ?$

B) $h[n] = u[n] - u[n-3]$, $x[n] = (-1)^n$, $y[n] = x[n] * h[n] = ?$

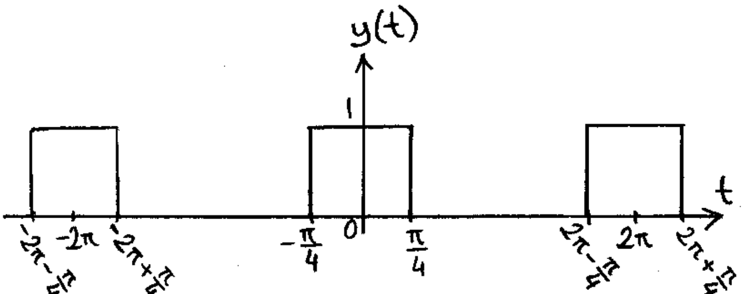




3-A) $y(t)$ sinyali $T_0 = 2\pi$ ile periyodik olup $-\pi < t < \pi$ aralığında

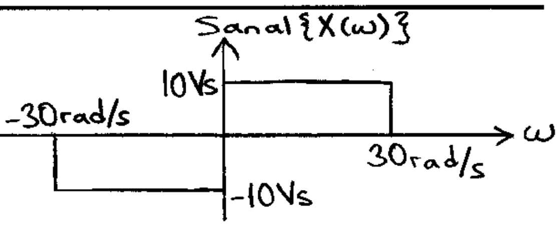
$$y(t) = \begin{cases} 1 & -\frac{\pi}{4} < t < \frac{\pi}{4} \text{ ise} \\ 0 & \text{diger} \end{cases}$$

olduğunda göre $y(t)$ sinyalini Fourier serisine açınız. *Sıfırdan farklı* en az 5 terimini seride açıkça yazınız. **(25 puan)**



3-B) Tek sinyallerin gerçel gösterimli Fourier serisinde cosinüslü terimlerin katsayılarının (a_k) sıfır olduğunu ispatlayınız. **(25 puan)**

4-A) $R = 100\Omega$'luk bir direnç üzerindeki gerilim sinyalinin Fourier dönüşümü $X(\omega)$ sırf sanal olup, bunun j katsayısı atılırsa şekildeki grafiğe sahip olmaktadır. Bu direnç üzerinde (-∞,+∞) zaman aralığında harcanan toplam enerji nedir? **(20 puan)**



4-B) $X(\omega) = \Im\{x(t)\}$ ise $j^n \frac{d^n}{d\omega^n}(X(\omega)) = \Im\{tx(t)\}$ olduğunu ispatlayınız. **(20 puan)**

5-A) Giriş(x) – çıkış(y) ilişkisi

$$\ddot{y}(t) + 4\dot{y}(t) + 3y(t) = \dot{x}(t) + 2x(t)$$

ile verilen nedensel sistemin transfer fonksiyonunu**(5puan)**, birim darbe tepkisini**(9 puan)** ve $x(t) = e^{-2(t-4)}u(t-4)$ girişi için enerjisiz başlangıç şartlı çıkışını **(11 puan)** bulunuz.

5-B) Giriş(x) – çıkış(y) ilişkisi

$$y[n+2] + 0{,}3y[n+1] + 0{,}02y[n] = x[n+1] - 0{,}3x[n]$$

ile verilen nedensel sistemin transfer fonksiyonunu**(5puan)**, birim darbe tepkisini**(9 puan)** ve $x[n] = (0{,}3)^{(n-4)}u(n-4)$ girişi için enerjisiz başlangıç şartlı çıkışını **(11 puan)** bulunuz.

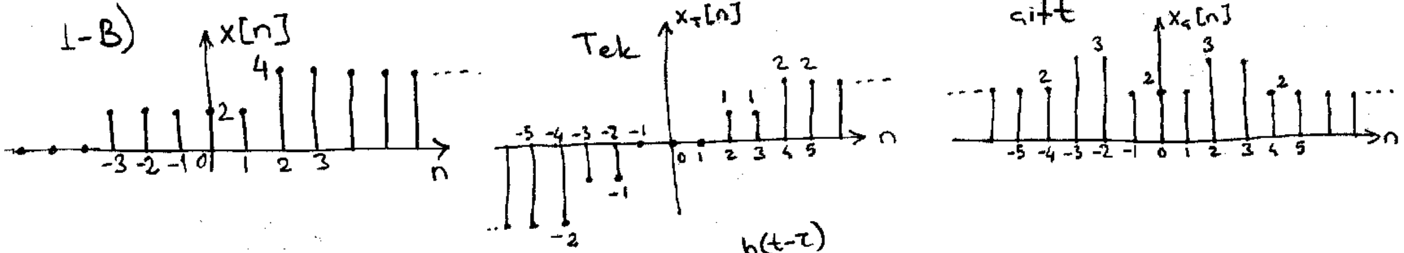
BAŞARILAR ...

Yard. Doç. Dr. Ata SEVİNÇ

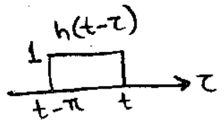
SİNYALLER VE SİSTEMLER FİNAL CEVAP ANAHTARI
13 Ocak 2010

1-A) Doğrusal, bellekli ($x(0)$ için), nedensel değil (çünkü $t<0$ iken gelecekteki $x(0)$ girişi gerekiyor), kararsız (çünkü $t\to\infty$ için $e^{t+1}\to\infty$), zamanla değişen.

1-B)



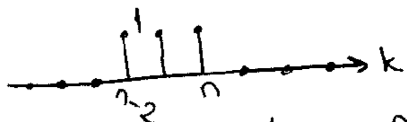
2-A) $h(t-\tau)=\begin{cases}1 & t-\pi\le\tau<t\\ 0 & \text{diğer}\end{cases}$



$$y(t)=\int_{\tau=-\infty}^{+\infty}x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau=\int_{\tau=t-\pi}^{t}1\cdot\sin\tau\cdot d\tau=-\cos\tau\Big|_{t-\pi}^{t}=\underbrace{\cos(t-\pi)}_{=-\cos t}-\cos t$$

$$\boxed{y(t)=-2\cos t}$$

2-B) $h[n-k]=\begin{cases}1 & n-2\le k\le n\\ 0 & \text{diğer}\end{cases}$



$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]h[n-k]=\sum_{k=n-2}^{n}(-1)^k\cdot 1=\underbrace{(-1)^{n-2}+(-1)^{n-1}}_{\text{sıfır (biri }-1\text{ diğeri }+1)}+(-1)^n$$

Sonuç: $\boxed{y[n]=(-1)^n}$

3-A) $\omega_0=2\pi/T_0=1$, $y(t)$ çift $\to$ $y(t)=\dfrac{a_0}{2}+\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos kt$

Ortalama değer $=\dfrac{a_0}{2}=\dfrac{1\times\left(\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)}{2\pi}=\dfrac{\pi/2}{2\pi}=\dfrac{1}{4}\Rightarrow\boxed{a_0=\dfrac{1}{2}}$

$$a_k=\frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}y(t)\cos kt\,dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi/4}^{\pi/4}1\cdot\cos kt\,dt=\frac{1}{k\pi}\sin kt\Big|_{-\pi/4}^{\pi/4}$$

$$a_k=\frac{1}{k\pi}\left(\sin\frac{k\pi}{4}-\sin\left(-\frac{k\pi}{4}\right)\right)=\boxed{\frac{2}{k\pi}\sin\frac{k\pi}{4}=a_k}$$

Diğer yol:

$$a_k=\frac{4}{2\pi}\int_{0}^{\pi}y(t)\cos kt\,dt=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi/4}1\cdot\cos kt\,dt=\frac{2}{k\pi}\sin kt\Big|_{0}^{\pi/4}$$

$$a_k=\frac{2}{k\pi}\left(\sin k\frac{\pi}{4}-0\right)=\frac{2}{k\pi}\sin k\frac{\pi}{4}=a_k$$

$a_1=\dfrac{2}{\pi}\cdot\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{\pi}$ $\quad a_2=\dfrac{2}{2\pi}\sin\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{1}{\pi}$ $\quad a_3=\dfrac{2}{3\pi}\sin\dfrac{3\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{3\pi}$

$a_4=\dfrac{2}{4\pi}\sin\pi=0$ $\quad a_5=\dfrac{2}{5\pi}\sin\dfrac{5\pi}{4}=-\dfrac{\sqrt{2}}{5\pi}$ $\quad a_6=\dfrac{2}{6\pi}\sin\dfrac{3\pi}{2}=-\dfrac{1}{3\pi}$ ...

$$\boxed{y(t)=\frac{1}{4}+\frac{1}{\pi}\left\{\sqrt{2}\cos t+\cos 2t+\frac{\sqrt{2}}{3}\cos 3t-\frac{\sqrt{2}}{5}\cos 5t-\frac{1}{3}\cos 6t\ldots\right\}}$$

Karmaşık seri istenirse: $y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{jkt}$

$c_0 = \frac{1}{4}$ (ortalama değer)

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} y(t)\, e^{-jkt}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} 1\cdot e^{-jkt}\,dt$$

$$c_k = \frac{-1}{j2k\pi} e^{-jkt}\Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} = \frac{-1}{j2k\pi}\left(e^{-jk\frac{\pi}{4}} - e^{jk\frac{\pi}{4}}\right) = \frac{1}{k\pi}\left(\frac{e^{jk\pi/4} - e^{-jk\pi/4}}{j2}\right)$$

$$\boxed{c_k = \frac{1}{k\pi}\sin k\frac{\pi}{4}} \qquad c_1 = c_{-1} = \frac{1}{\pi}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}\,\pi} \qquad c_2 = c_{-2} = \frac{1}{2\pi}\sin\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2\pi}$$

- - - -

$$\boxed{y(t) = \dots + \frac{1}{2\pi}e^{-j2t} + \frac{1}{\sqrt{2}\,\pi}e^{-jt} + \frac{1}{4} + \frac{1}{\sqrt{2}\,\pi}e^{jt} + \frac{1}{2\pi}e^{j2t} + \dots}$$

3-B) Cosinüslü terimlerin katsayısı $= a_k = \frac{2}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)\cos k\omega_0 t\,dt$

$$a_k = \frac{2}{T_0}\int_{-T_0/2}^{0} \underbrace{x(t)\cdot\cos k\omega_0 t\cdot dt}_{\text{Burada } \tau=-t \text{ olsun.}} + \frac{2}{T_0}\int_{0}^{T_0/2} x(t)\cos k\omega_0 t\,dt$$

$dt = -d\tau$

$t = -T_0/2 \Rightarrow \tau = T_0/2$

$t = 0 \Rightarrow \tau = 0$ olur.

$$a_k = \frac{2}{T_0}\int_{T_0/2}^{0} \underbrace{x(-\tau)}_{=-x(\tau)}\cos(-k\omega_0\tau)(-d\tau) \rightarrow \text{Tek sinyal öz.}$$

$$+ \frac{2}{T_0}\int_{0}^{T_0/2} x(t)\cos k\omega_0 t\,dt$$

$$a_k = \frac{2}{T_0}\int_{0}^{T_0/2} -x(\tau)\underbrace{\cos k\omega_0\tau}_{=\cos(-k\omega_0\tau)}\cdot d\tau + \frac{2}{T_0}\int_{0}^{T_0/2} x(t)\cos k\omega_0 t\,dt = 0$$

(−) işaretiyle sınırlar çevrildi.

aynı integralin (+) işaretlisi. Değişkenin t veya τ olması farketmez.

4-A) Enerji $= E = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{R}|x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi R}\int_{-\infty}^{+\infty}|X(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{200\pi}\left(\int_{-30}^{0}10^2 d\omega + \int_{0}^{30}10^2 d\omega\right)$ Js

$$E = \frac{1}{2\pi}\,\omega\Big|_{-30}^{30} \text{Js} = \frac{60}{2\pi}\,\text{J} = \boxed{\frac{30}{\pi}\,\text{J} = E}$$

4B) $X(\omega) = \int_{t=-\infty}^{+\infty} x(t)\,e^{-j\omega t} \Rightarrow \frac{dX(\omega)}{d\omega} = \int_{t=-\infty} x(t)(-jt)\,e^{-j\omega t}\,dt$

... benzer şekilde tekrarlanırsa: $\frac{d^nX(\omega)}{d\omega^n} = \int_{t=-\infty}^{+\infty}(-jt)^n x(t)\,e^{-j\omega t}\,dt$

$$\rightarrow j^n\frac{d^nX(\omega)}{d\omega^n} = \int_{t=-\infty}^{+\infty}(-jt\cdot j)^n x(t)\,e^{-j\omega t}\,dt = \int_{t=-\infty}^{+\infty}[t^n x(t)]\,e^{-j\omega t}\,dt = \mathcal{F}\{t^n x(t)\}$$

$$5\text{-}A)\ \left[(j\omega)^2+4(j\omega)+3\right]Y(\omega)=X(\omega)\left[(j\omega)+2\right]$$

$$H(\omega)=\frac{Y(\omega)}{X(\omega)}=\frac{(j\omega)+2}{(j\omega)^2+4(j\omega)+3}=\frac{j\omega+2}{(j\omega+1)(j\omega+3)}$$: Transfer fonksiyon.

$$H(\omega)=\frac{A}{j\omega+1}+\frac{B}{j\omega+3} \qquad A=\left.\frac{j\omega+2}{j\omega+3}\right|_{j\omega=-1}=\frac{-1+2}{-1+3}=\frac{1}{2}=A$$

$$B=\left.\frac{j\omega+2}{j\omega+1}\right|_{j\omega=-3}=\frac{-3+2}{-3+1}=\frac{1}{2}B \rightarrow h(t)=\frac{1}{2}e^{-t}u(t)+\frac{1}{2}e^{-3t}u(t)$$

↳ birim darbe tepkisi

$p(t)=e^{-2t}u(t)$ dersek $P(\omega)=\frac{1}{j\omega+2}$

$$x(t)=p(t-4) \longrightarrow X(\omega)=e^{-j4\omega}P(\omega)=\frac{e^{-j4\omega}}{j\omega+2}$$

$$Y(\omega)=H(\omega)X(\omega)=\frac{\cancel{(j\omega+2)}}{(j\omega+1)(j\omega+3)}\cdot\frac{e^{-j4\omega}}{\cancel{(j\omega+2)}}=e^{-j4\omega}\cdot\underbrace{\frac{1}{(j\omega+1)(j\omega+3)}}_{F(\omega)\text{ olsun.}}$$

$$Y(\omega)=e^{-j4\omega}F(\omega) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} y(t)=f(t-4)$$

$$F(\omega)=\frac{a}{j\omega+1}+\frac{b}{j\omega+3} \qquad a=\left.\frac{1}{j\omega+3}\right|_{j\omega=-1}=\frac{1}{2}\cdot \quad b=\left.\frac{1}{j\omega+1}\right|_{j\omega=-3}=\frac{-1}{2}$$

$$f(t)=\frac{1}{2}e^{-t}u(t)-\frac{1}{2}e^{-3t}u(t) \rightarrow \boxed{y(t)=\frac{1}{2}\left(e^{-(t-4)}-e^{-3(t-4)}\right)u(t-4)}$$

$$5\text{-}B)\ Y(z)\left[z^2+0{,}3z+0{,}02\right]=X(z)\left[z-0{,}3\right]$$

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{z-0{,}3}{(z+0{,}1)(z+0{,}2)}\ ;\ YB:\ |z|>0{,}2$$

↳ Transfer fonksiyon

$$H(z)=\frac{A}{z+0{,}1}+\frac{B}{z+0{,}2} \qquad A=\frac{-0{,}1-0{,}3}{-0{,}1+0{,}2}=-4 \qquad B=\frac{-0{,}2-0{,}3}{-0{,}2+0{,}1}=5$$

$$zH(z)=-4\cdot\frac{z}{z-(-0{,}1)}+5\cdot\frac{z}{z-(-0{,}2)}\ ;\ |z|>0{,}2$$

Burada $|z|>0{,}1$ alınabilir.

Birim darbe tepkisi:

$$h[n+1]=-4\times(-0{,}1)^n u[n]+5\times(-0{,}2)^n u[n] \rightarrow h[n]=\left(-4\times(-0{,}1)^{n-1}+5\times(-0{,}2)^{n-1}\right)u[n-1]$$

$p[n]=0{,}3^n u[n]$ dersek $x[n]=p[n-4]$ $\qquad X(z)=z^{-4}P(z)=z^{-4}\frac{z}{z-0{,}3}$

$|z|>0{,}3$

$$Y(z)=X(z)H(z)=\frac{\cancel{(z-0{,}3)}}{(z+0{,}1)(z+0{,}2)}\cdot\frac{z^{-3}}{\cancel{(z-0{,}3)}}\ ;\ |z|>0{,}2$$

$$z^3Y(z)=\frac{a}{z+0{,}1}+\frac{b}{z+0{,}2} \qquad a=\frac{1}{-0{,}1+0{,}2}=10 \qquad b=\frac{1}{-0{,}2+0{,}1}=-10$$

$$\underbrace{z^4Y(z)=F(z)}_{\text{diyelim}}=\frac{10z}{z+0{,}1}-\frac{10z}{z+0{,}2} \rightarrow f[n]=10\times(-0{,}1)^n u[n]-10\cdot(-0{,}2)^n u[n]$$

$$f[n]=y[n+4] \longrightarrow \boxed{y[n]=10\times\left((-0{,}1)^{n-4}-(-0{,}2)^{n-4}\right)u[n-4]}$$

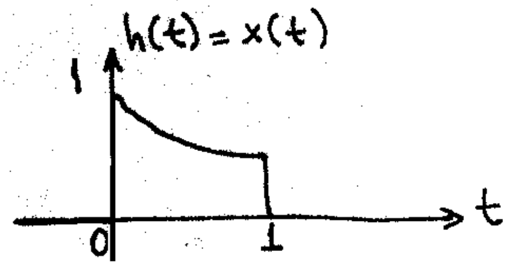
SİNYALLER VE SİSTEMLER BÜTÜNLEME SINAVI SORULARI

27 Ocak 2010 Süre: 90 dakika

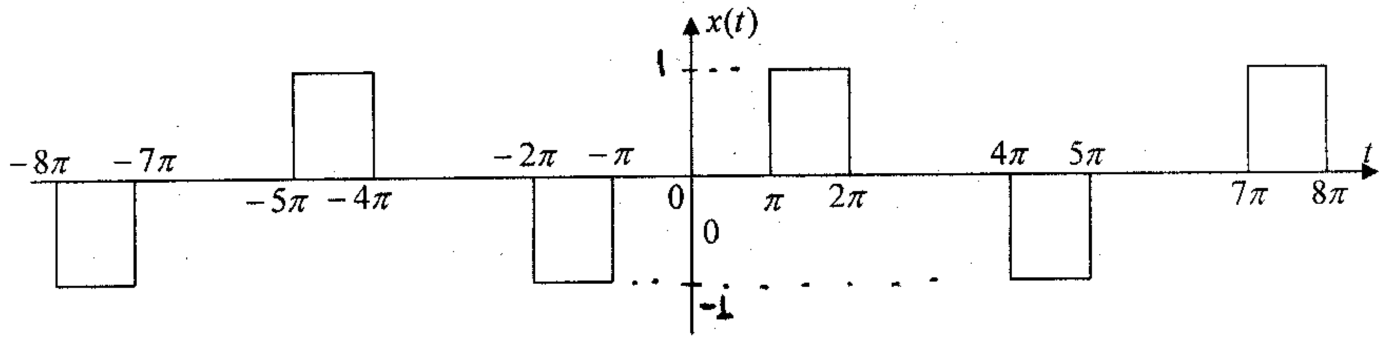
1) $x[n]=3n+2n^2+\sin(n/6)-\cos(n/9)$ sinyalinin tek ve çift bileşenlerini yazınız. (Çizim beklenmemektedir.) **(10 puan)**

2) Birim darbe tepkisi ve girişi $h(t)=x(t)=\begin{cases} e^{-t} & 0\le t<1 \\ 0 & diger \end{cases}$

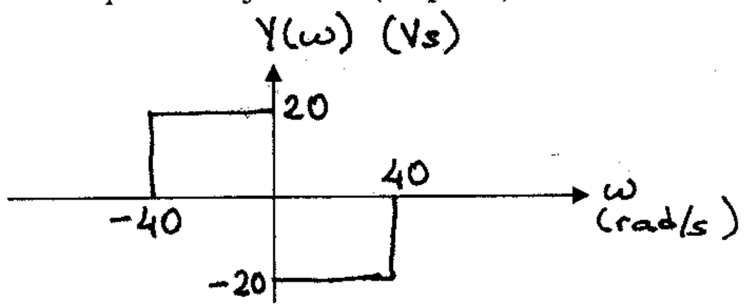
olan sistemin çıkışını hesaplayınız.
(Çizim beklenmemektedir.) **(20 puan)**



3) Şekilde verilen $T_0=6\pi$ periyotlu sinyali gerçel ya da karmaşık (yalnız birisi) Fourier serisine açınız. Bulduğunuz katsayılardan sıfırdan farklı olan en az 4 tanesini sayısal değerlerini bularak seride yerine yazınız. (Temel açıların trigonometrik fonksiyonlarının sayısal değerlerini hesap makinesi kullanmadan yazabilmelisiniz.) **(25 puan)**



4) $R=100\Omega$'luk bir direnç üzerindeki gerilim sinyalinin Fourier dönüşümü $Y(\omega)$ sırf sanal olup, bunun j katsayısı atılırsa şekildeki grafiğe sahip olmaktadır. Bu direnç üzerinde $(-\infty,+\infty)$ zaman aralığında harcanan toplam enerji nedir? **(20 puan)**



5) Giriş(x) – çıkış(y) ilişkisi

$$y[n+2]-0{,}6y[n+1]+0{,}08y[n]=x[n+1]-0{,}5x[n]$$

ile verilen nedensel sistemin transfer fonksiyonunu**(5puan)**, birim darbe tepkisini**(9 puan)** ve $x[n]=(0{,}5)^{(n-4)}u(n-4)$ girişi için enerjisiz başlangıç şartlı çıkışını **(11 puan)** bulunuz.

BAŞARILAR ...

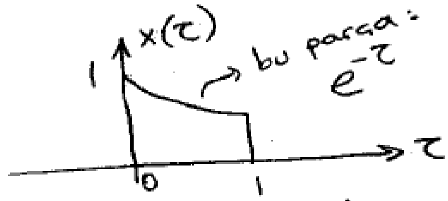
Yard. Doç.Dr. Ata SEVİNÇ

SİNYALLER VE SİSTEMLER BÜTÜNLEME
CEVAP ANAHTARI 27 Ocak 2010

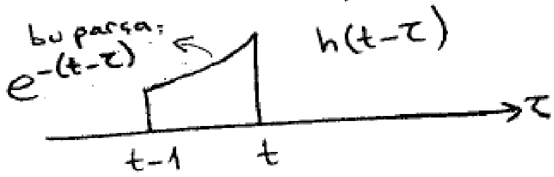
1) $x_T[n] = \dfrac{x[n]-x[-n]}{2} = 3n + \sin(n/6)$ → Tek bileşen

$x_Ç[n] = \dfrac{x[n]+x[-n]}{2} = 2n^2 - \cos(n/9)$ → Çift bileşen

($x[n]$ içindeki $3n$ ve $\sin(n/6)$ terimleri tek olduğu için tek bileşende, $2n^2$ ve $-\cos(n/9)$ terimleri çift olduğu için çift bileşende yer aldı. Başka terim olmadığı için sonuçlar böyle oldu.)



2) $y(t) = x(t) * h(t) = \int_{\tau=-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau$



$t<0$ ve $t-1>1$ yani $t \geqslant 2$ için

$x(\tau)h(t-\tau) = 0 \quad \forall\tau$

$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} 0 \cdot d\tau = 0$

$0 \leq t < 1$ için:

$$x(\tau)h(t-\tau) = \begin{cases} \underbrace{e^{-\tau}\cdot e^{-(t-\tau)}}_{=e^{-t}} & 0 \leq \tau \leq t \text{ ise} \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$$

$$y(t) = \int_{\tau=0}^{t} e^{-t}\,d\tau = e^{-t}\int_{\tau=0}^{t} d\tau = e^{-t}\cdot\tau\Big|_{\tau=0}^{t} = e^{-t}(t-0) = te^{-t}$$

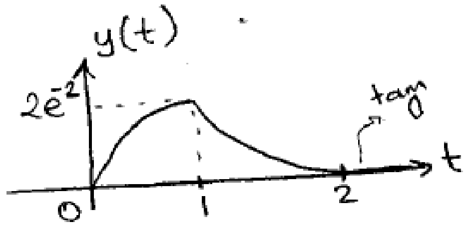
$0 \leq t-1 < 1$ yani $1 \leq t < 2$ için:

$$x(\tau)h(t-\tau) = \begin{cases} \underbrace{e^{-\tau}\cdot e^{-(t-\tau)}}_{=e^{-t}} & t-1 \leq \tau \leq 1 \text{ ise} \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$$

$$y(t) = \int_{\tau=t-1}^{1} e^{-t}\,d\tau = e^{-t}\cdot\tau\Big|_{\tau=t-1}^{1} = e^{-t}(1-t+1) = (2-t)e^{-t}$$

Sonuç:

$$y(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \text{ ise} \\ te^{-t} & 0 \leq t < 1 \text{ ise} \\ (2-t)e^{-t} & 1 \leq t < 2 \text{ ise} \\ 0 & t \geqslant 2 \text{ ise} \end{cases}$$



3) $\omega_0 = 2\pi/T_0 = 1/3$

Genel ifadeli seri: $x(t) = \dfrac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\left(\frac{kt}{3}\right) + b_k\sin\left(\frac{kt}{3}\right)\right)$

Sinyal tek olduğu için: $a_0 = a_k = 0$ (her k için)

Yine sinyal tek olduğu için: $b_k = \frac{4}{T_0}\int_0^{T_0/2} x(t)\sin(\frac{kt}{3})dt$

$b_k = \frac{4}{6\pi}\int_{\pi}^{2\pi} 1\cdot\sin(\frac{kt}{3})dt = \frac{2}{3\pi}\cdot\frac{3}{k}\left(-\cos(kt/3)\right)\Big|_{t=\pi}^{2\pi}$

$b_k = \frac{2}{k\pi}\left(\cos(\frac{k\pi}{3}) - \cos(\frac{2k\pi}{3})\right)$ → k çiftse $b_k = 0$ olduğu, sinyalin tek harmonik simetrisine sahip olmasından da bellidir. ($x(t+\frac{T_0}{2}) = -x(t)$ → Sinyalin tekliğinden ayrı bir özellik.)

$k=1 \Rightarrow b_1 = \frac{2}{\pi}\left(\cos\frac{\pi}{3} - \cos\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{2} - \frac{-1}{2}\right) = \frac{2}{\pi} = b_1$

$k=3 \Rightarrow b_3 = \frac{2}{3\pi}(\cos\pi - \cos 2\pi) = \frac{2}{3\pi}(-1-1) = \frac{-4}{3\pi} = b_3$

$k=5 \Rightarrow b_5 = \frac{2}{5\pi}\left(\cos\frac{5\pi}{3} - \cos\frac{10\pi}{3}\right) = \frac{2}{5\pi}\left(\cos(-\frac{\pi}{3}) - \cos(-\frac{2\pi}{3})\right) = \frac{2}{5\pi} = b_5$

$k=7 \Rightarrow b_7 = \frac{2}{7\pi}\left(\cos\frac{7\pi}{3} - \cos\frac{14\pi}{3}\right) = \frac{2}{7\pi}\left(\cos\frac{\pi}{3} - \cos\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{2}{7\pi} = b_7$

$x(t) = \frac{2}{\pi}\sin\frac{t}{3} - \frac{4}{3\pi}\sin t + \frac{2}{5\pi}\sin\frac{5t}{3} + \frac{2}{7\pi}\sin\frac{7t}{3} - + \dots$

Karmaşık ifadeli seri: $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{j\frac{kt}{3}}$

$c_k = \frac{1}{6\pi}\int_{-3\pi}^{3\pi} x(t)e^{-j\frac{kt}{3}}dt = \frac{1}{6\pi}\int_{-2\pi}^{-\pi} -1\cdot e^{-jkt/3}dt + \frac{1}{6\pi}\int_{\pi}^{2\pi} 1\cdot e^{-jkt/3}dt$

$c_k = \frac{3}{jk6\pi}e^{-jkt/3}\Big|_{-2\pi}^{-\pi} - \frac{3}{jk\cdot 6\pi}e^{-jkt/3}\Big|_{\pi}^{2\pi} = \frac{1}{j2k\pi}\left\{e^{j\frac{k\pi}{3}} - e^{j\frac{2k\pi}{3}} - e^{-j\frac{2k\pi}{3}} + e^{-j\frac{k\pi}{3}}\right\}$

$c_k = \frac{1}{jk\pi}\left(\frac{e^{jk\frac{\pi}{3}} + e^{-jk\frac{\pi}{3}}}{2}\right) - \frac{1}{jk\pi}\left(\frac{e^{j2\frac{k\pi}{3}} + e^{-j\frac{2k\pi}{3}}}{2}\right)$

$c_k = -\frac{j}{k\pi}\left[\cos(\frac{k\pi}{3}) - \cos(\frac{2k\pi}{3})\right]$ → $k>0$ için $c_k = -\frac{j}{2}b_k$

Ayrıca sinyal tek olduğundan $c_{-k} = -c_k$ ve $c_0 = 0$

Yukarıdaki b_k'lara benzer olarak hesaplanırsa:

$c_1 = -\frac{j}{2}\cdot\frac{2}{\pi} = -\frac{j}{\pi}$ → $c_{-1} = \frac{j}{\pi}$

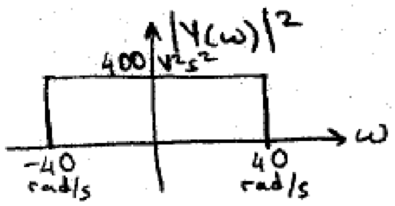
$c_3 = -\frac{j}{2}\cdot\frac{-4}{3\pi} = j\frac{2}{3\pi}$ → $c_{-3} = \frac{-j2}{3\pi}$

k çiftse $c_k = 0$ (Tek harmonik simetrisi)

Sonuç:

$x(t) = \dots - \frac{j2}{3\pi}e^{-jt} + \frac{j}{\pi}e^{-j\frac{t}{3}} - \frac{j}{\pi}e^{j\frac{t}{3}} + \frac{j2}{3\pi}e^{jt} + \dots$

4) $\text{Enerji} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{R}\cdot |y(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi R}\int_{-\infty}^{+\infty} |Y(\omega)|^2 d\omega$



$$E = \frac{1}{200\pi\,\Omega}\int_{-40\,rad/s}^{40\,rad/s} 400 V^2 s^2 \cdot d\omega = \frac{400\cdot 80\, V^2 s}{200\pi\,\Omega}$$

$$\boxed{E = \frac{160}{\pi}\, J}$$

5) $Y(z)\left[z^2 - 0{,}6z + 0{,}08\right] = X(z)\left[z - 0{,}5\right]$

$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z-0{,}5}{z^2 - 0{,}6z + 0{,}08} = \frac{z-0{,}5}{(z-0{,}2)(z-0{,}4)}$: Transfer fonk.
YB: $|z| > 0{,}4$

$H(z) = \frac{A}{z-0{,}2} + \frac{B}{z-0{,}4}$ $\quad A = \frac{0{,}2-0{,}5}{0{,}2-0{,}4} = \frac{3}{2}$ $\quad B = \frac{0{,}4-0{,}5}{0{,}4-0{,}2} = \frac{-1}{2}$

$H(z)\cdot z = \frac{3}{2}\cdot\frac{z}{z-0{,}2} - \frac{1}{2}\frac{z}{z-0{,}4} = \mathcal{Z}\{h[n+1]\}$

$|z| > 0{,}2$ diyebiliriz $\quad$ ↳ $|z| > 0{,}4$

$h[n+1] = \frac{3}{2}\times 0{,}2^n u[n] - \frac{1}{2}0{,}4^n u[n] \rightsquigarrow h[n] = \left(\frac{3}{2}\times 0{,}2^{n-1} - \frac{1}{2}0{,}4^{n-1}\right)u[n-1]$

↳ Birim darbe tepkisi

$X(\omega) = z^{-4}\cdot\frac{z}{z-0{,}5} \qquad |z| > 0{,}5$

$Y(\omega) = \frac{\cancel{z-0{,}5}}{(z-0{,}2)(z-0{,}4)}\cdot\frac{z^{-3}}{\cancel{(z-0{,}5)}} \longrightarrow z^3 Y(z) = \frac{1}{(z-0{,}2)(z-0{,}4)}$

$z^3 Y(z) = \frac{a}{z-0{,}2} + \frac{b}{z-0{,}4} \qquad a = \frac{1}{0{,}2-0{,}4} = -5 \qquad b = \frac{1}{0{,}4-0{,}2} = 5$

$z^4 Y(z) = \mathcal{Z}\{y[n+4]\} = -5\frac{z}{z-0{,}2} + 5\cdot\frac{z}{z-0{,}4}$

↳ $|z| > 0{,}2$ $\quad$ ↳ $|z| > 0{,}4$ denebilir.

$y[n+4] = -5\times 0{,}2^n u[n] + 5\times 0{,}4^n u[n]$

$y[n] = \left[-5\times 0{,}2^{n-4} + 5\times 0{,}4^{n-4}\right]u[n-4]$: Enerjisiz başlangıç şartlı çıkış

SİNYALLER VE SİSTEMLER ARASINAV SORULARI
29 Kasım 2010 Süre: 90 dakika

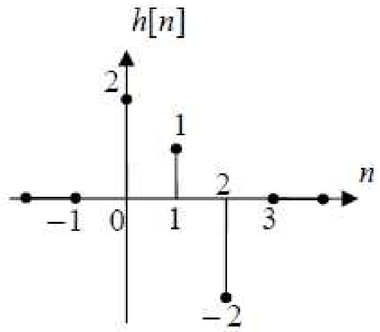
1) Giriş(x) – çıkış(y) ilişkisi

$$y[n] = \sum_{k=0}^{+\infty} k x[n-k]$$

ile verilen sistem doğrusal mıdır, bellekli midir, nedensel midir, kararlı mıdır, zamanla değişen midir? (Açıklama yapmanız beklenmemektedir, birer veya ikişer kelimelik cevaplar yeterlidir.) **(5x3 = 15 puan)**

2) $x(t) = 2u(t+2) + 2u(t-2)$ sinyalinin tek ve çift bileşenlerini <u>çiziniz</u>. **(10 puan)**

3) Doğrusal zamanla değişmez bir sistemin birim darbe tepkisi $h[n]$ yandaki şekilde verilmiştir. Sistem girişi $x[n] = 2u[n] - u[n-3]$ ise sistem çıkışı $y[n]$ ne olur? Çizerek gösteriniz. İstediğiniz yolla yapabilirsiniz. **(25 puan)**



4. ve 5. sorularda tam puan almak için (a) seçeneklerini çözmeniz beklenmektedir. Ancak bu zor geliyorsa ve <u>daha düşük puan almaya razıysanız</u> (b) seçeneklerini yapabilirsiniz. Aynı soruda hem (a) hem (b) için işlem yaparsanız hangisinin değerlendirilmesini istediğinizi belirtiniz; aksi halde yalnız (a) seçeneğiniz değerlendirilecektir.

4) **(a)** Doğrusal zamanla değişmez bir sistemin birim darbe tepkisi $h(t) = u(t) - u(t-1)$, girişi

ise $x(t) = \begin{cases} 0 & t < -1 \text{ ise} \\ 1+t & -1 \le t < 0 \text{ ise} \\ 1\text{-}t & 0 \le t < 1 \text{ ise} \\ 0 & t \ge 1 \text{ ise} \end{cases}$

olduğuna göre sistem çıkışını ($y(t)$) bulunuz. Çizmeniz beklenmemektedir. **(25 puan)**

(b) Doğrusal zamanla değişmez bir sistemin birim darbe tepkisi $h[n] = n \cdot \left(u[n] - u[n-4]\right)$, girişi ise $x[n] = u[n] - u[n-4]$ olduğuna göre sistem çıkışını ($y[n]$) çiziniz. **(17 puan)**

5) **(a)** Giriş(x) – çıkış(y) ilişkisi

$$\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) = x(t)$$

ile verilen sistemin bütün zamanlar için çıkışını $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 0$ başlangıç şartları ve $x(t) = (1 - e^{-t})u(t)$ girişi için bulunuz. **(25 puan)**

(b) Giriş(x) – çıkış(y) ilişkisi

$$\ddot{y}(t) + 4y(t) = 3x(t)$$

ile verilen nedensel sistemin birim darbe tepkisini tüm zamanlar için bulunuz. **(18 puan)**

BAŞARILAR ... **Yard. Doç.Dr. Ata SEVİNÇ**

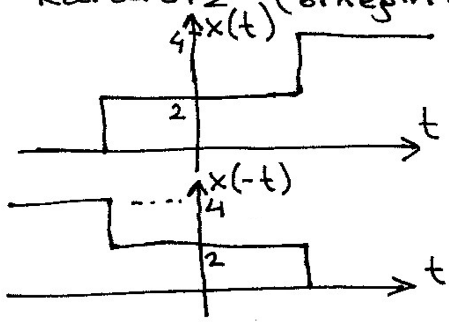
SİNYALLER VE SİSTEMLER ARASINAV CEVAP ANAHTARI:

29 Kasım 2010

1) $y[n]=\sum_{k=0}^{+\infty} k\,x[n-k] = x[n-1]+2x[n-2]+3x[n-3]+4x[n-4]+\dots$

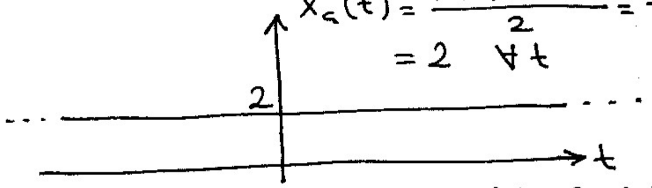
Doğrusal, bellekli, nedensel (açılımdan açıkça görülüyor), zamanla değişmez (x'lerin katsayıları sabit), kararsız (örneğin sabit giriş için çıkış sonsuza gidiyor).

2)

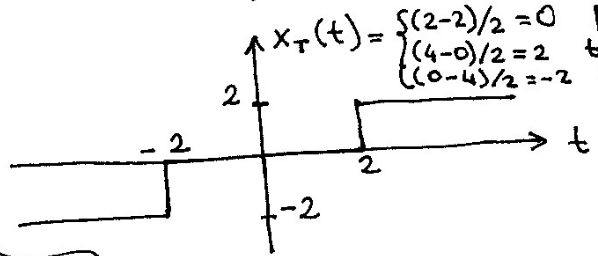


$x_e(t) = \frac{x(t)+x(-t)}{2} = \frac{4}{2}$

$= 2 \quad \forall t$



$x_o(t) = \begin{cases} (2-2)/2 = 0 & |t|<2 \\ (4-0)/2 = 2 & t>2 \\ (0-4)/2 = -2 & t<-2 \end{cases}$



3) 1. yol: $y[n]=h[n]*x[n]$

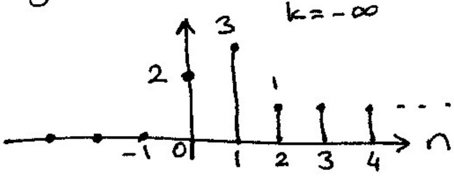
$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n-k] = 2x[n]+x[n-1]-2x[n-2]$

$= 4u[n]-2u[n-3]+2u[n-1]-u[n-4]-4u[n-2]+2u[n-5]$

$y[n] = 4u[n]+2u[n-1]-4u[n-2]-2u[n-3]-u[n-4]+2u[n-5]$

çizilerek çözüm tamamlanır.

2. yol: $s[n]=\sum_{k=-\infty}^{n} h[k]$: birim basamak tepkisi

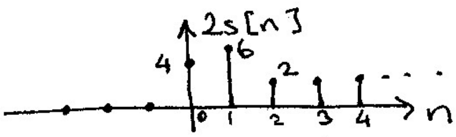


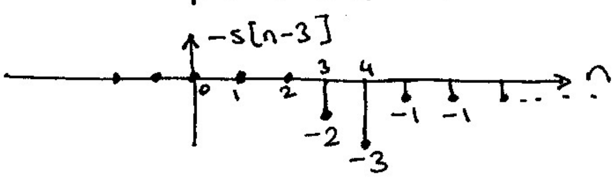
$x[n] = 2u[n]-u[n-3]$

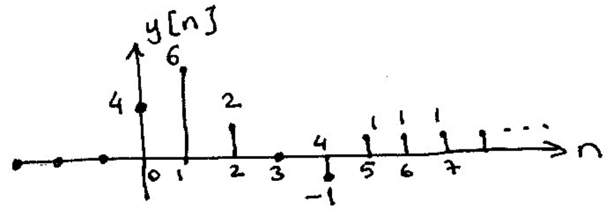
$\downarrow \quad\quad \downarrow \quad\quad \downarrow$

$y \quad\quad s \quad\quad s$

$y[n] = 2s[n]-s[n-3]$

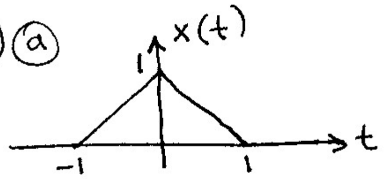


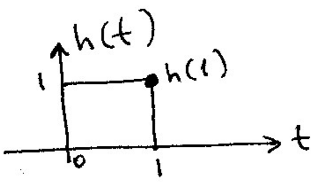




(1. yoldaki katsayılar seviye değişimi olarak alınıp aynı çizim bulunur.)

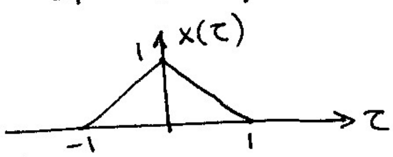
4) a)

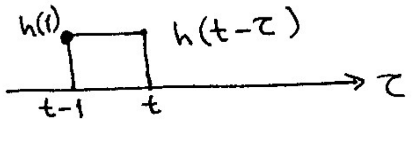




$y(t) = x(t)*h(t)$

$= \int_{\tau=-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$





t<-1 ise:

$x(\tau)h(t-\tau)=0 \quad \forall\tau$

$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} 0 \cdot d\tau = 0$

4) ⓐ (devamı) $t \geq -1$ ve $t-1 < -1$ yani

$-1 \leq t < 0$ ise:

$$x(\tau)h(t-\tau) = \begin{cases} 1\cdot(1+\tau) & -1 \leq \tau \leq t \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$$

$$y(t) = \int_{\tau=-1}^{t} (1+\tau)d\tau = \left(\tau + \tfrac{1}{2}\tau^2\right)\Big|_{\tau=-1}^{t} = t + \tfrac{1}{2}t^2 - \underbrace{\left(-1 + \tfrac{1}{2}[-1]^2\right)}_{-\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{2}t^2 + t + \tfrac{1}{2}$$

$t \geq 0$ ve $t-1 < 0$ yani

$0 \leq t < 1$ ise:

$$x(\tau)h(t-\tau) = \begin{cases} 1\cdot(1+\tau) & t-1 \leq \tau \leq 0 \\ 1\cdot(1-\tau) & 0 \leq \tau \leq t \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$$

$$y(t) = \int_{\tau=t-1}^{0} (1+\tau)d\tau + \int_{\tau=0}^{t} (1-\tau)d\tau = \left[\tau + \tfrac{1}{2}\tau^2\right]_{t-1}^{0} + \left[\tau - \tfrac{1}{2}\tau^2\right]_{0}^{t}$$

$$y(t) = -\left[(t-1) + \tfrac{1}{2}(t^2 - 2t + 1)\right] + \left[t - \tfrac{1}{2}t^2\right] = -t^2 + t + \tfrac{1}{2}$$

$t-1 < 1$ ve $t \geq 1$ yani

$1 \leq t < 2$ ise:

$$x(\tau)h(t-\tau) = \begin{cases} 1\cdot(1-\tau) & t-1 \leq \tau \leq 1 \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$$

$$y(t) = \int_{\tau=t-1}^{1} (1-\tau)d\tau = \left[\tau - \tfrac{1}{2}\tau^2\right]_{t-1}^{1} = 1 - \tfrac{1}{2} - \left[t - 1 - \tfrac{1}{2}(t^2 - 2t + 1)\right]$$

$$= \tfrac{1}{2}t^2 - 2t + 2$$

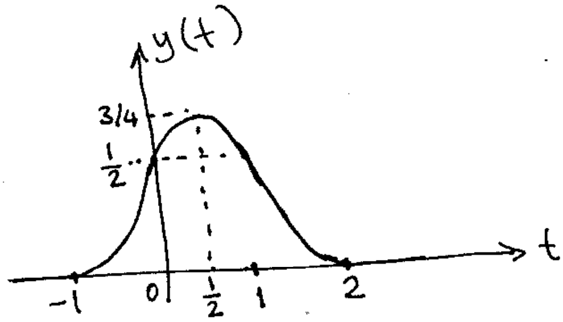
$t-1 \geq 1$ yani

$t \geq 2$ ise:

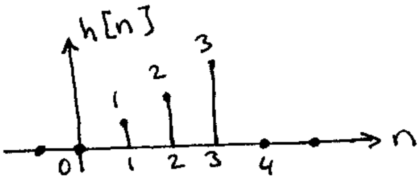
$x(\tau)\,h(t-\tau) = 0 \quad \forall \tau \quad \rightarrow \quad y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} 0 \cdot d\tau = 0$

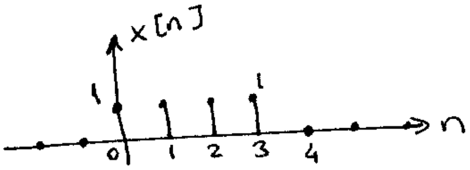
Sonuç:

$$y(t) = \begin{cases} 0 & t < -1 \text{ ise} \\ \frac{1}{2}t^2 + t + \frac{1}{2} & -1 \leq t < 0 \text{ ise} \\ -t^2 + t + \frac{1}{2} & 0 \leq t < 1 \text{ ise} \\ \frac{1}{2}t^2 - 2t + 2 & 1 \leq t < 2 \text{ ise} \\ 0 & 2 \leq t \text{ ise} \end{cases}$$

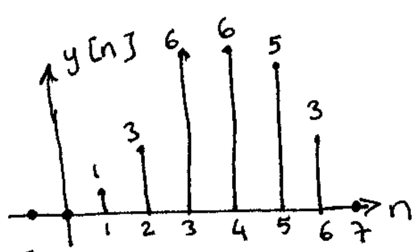


ⓑ






```
        1/1/1/1  → x[3]
x         1/2/3  → h[3]
        ---------
      3/3/3/3
    2/2/2/2
+ 1/1/1/1
-----------------
  1/3/6/6/5/3  → y[6]
  ↓
  y[1]
```



5) a) $t \geq 0 : \Rightarrow \quad \ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) = 1 - e^{-t}$

$\lambda^2 + 2\lambda = 0 \longrightarrow \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -2 \longrightarrow y_h(t) = A_1 + A_2 e^{-2t}$

$1 = 1 \cdot e^{0 \cdot t} \longrightarrow 0 = \lambda_1 \longrightarrow y_{ö1} = c_1 \cdot t \cdot e^{0 \cdot t} = c_1 t$

$\ddot{y}_{ö1} + 2\dot{y}_{ö1} = 1 \longrightarrow 0 + 2c_1 = 1 \longrightarrow c_1 = \frac{1}{2} \longrightarrow y_{ö1} = \frac{1}{2} t$

$-e^{-t} \longrightarrow -1 \notin \{\lambda_1, \lambda_2\} \longrightarrow y_{ö2} = c_2 \cdot e^{-t} \longrightarrow c_2 = \frac{-1}{(-1)^2 + 2 \cdot (-1)} = 1$

$y_{ö2} = e^{-t}$

$y(t) = A_1 + A_2 e^{-2t} + \frac{1}{2} t + e^{-t}$

$$\left.\begin{aligned} y(0) &= A_1 + A_2 + 1 = 0 \\ \dot{y}(0) &= -2A_2 + \frac{1}{2} - 1 = 0 \end{aligned}\right\} \quad A_2 = -\frac{1}{4}, \quad A_1 = -\frac{3}{4}$$

Sonuç: $y(t) = \left[-\frac{3}{4} - \frac{1}{4} e^{-2t} + \frac{1}{2} t + e^{-t}\right] \cdot u(t) \quad \forall t$

b) Nedensellikten $\longrightarrow t < 0 \Rightarrow h(t) = 0$

$t > 0$ için: $\ddot{h}(t) + 4h(t) = 0$

$\dot{h}(0) = 3, \quad h(0) = 0$

$\lambda^2 + 4 = 0 \longrightarrow \lambda_{1,2} = \mp j2 \longrightarrow h(t) = A\cos 2t + B\sin 2t$

$$\left.\begin{aligned} h(0) &= A = 0 \\ \dot{h}(0) &= -2A \cdot \sin 0 + 2B \cdot \cos 0 = 3 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} A &= 0 \\ B &= 3/2 \end{aligned}$$

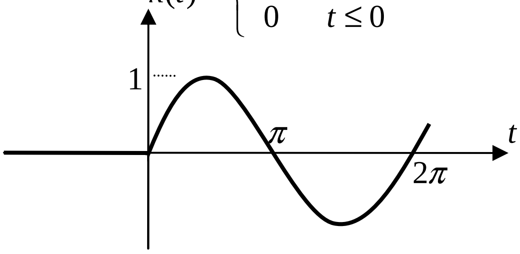
Sonuç: $h(t) = \left(\frac{3}{2} \sin 2t\right) \cdot u(t) \quad \forall t$

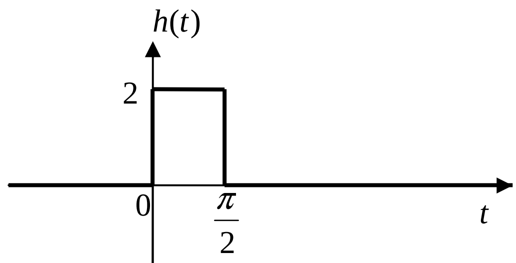
SİNYALLER VE SİSTEMLER FİNAL SINAVI SORULARI
13 Ocak 2011   Süre: 75 dakika

1) $|\alpha| < 1$ olmak üzere birim darbe tepkisi $h[n] = \alpha^{-|n|}$ olan doğrusal zamanla değişmez sistem nedensel midir, kararlı mıdır, bellekli midir? Açıklama ***yapınız***. **(4 + 8 + 3 = 15 puan)**

2) Girişi $x(t)$ ve birim darbe tepkisi $h(t)$ şekillerdeki gibi olan doğrusal zamanla değişmez sistemin çıkışını bulunuz. **(25 puan)** Çizmeniz beklenmiyor.

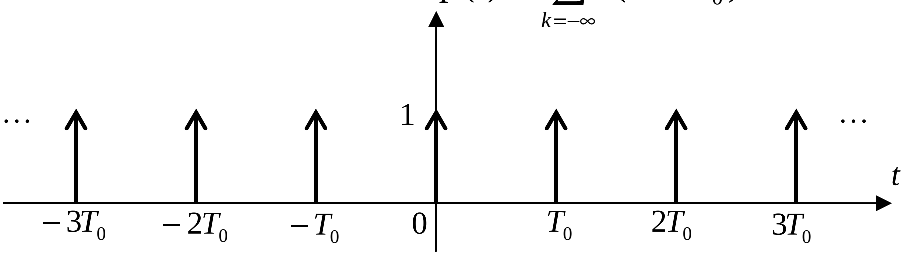
$$x(t) = \begin{cases} \sin t & t > 0 \\ 0 & t \le 0 \end{cases}$$





3) Şekilde verilen darbe treninin Fourier dönüşümünü ($P(\omega)$) bularak bir başka darbe treni olduğunu gösteriniz. **(25 puan)** (Yol gösterme: Önce p(t) 'nin karmaşık Fourier serisini elde ediniz.)

$$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_0)$$



4) Giriş(x) çıkış(y) ilişkisi aşağıda verilen nedensel sistemin transfer fonksiyonunu ve birim darbe tepkisini bulunuz. **(15 puan)**

$$\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 2y(t) = 4\dot{x}(t) + 4x(t)$$

5) Giriş(x) çıkış(y) ilişkisi aşağıda verilen nedensel sistemin transfer fonksiyonunu ve birim darbe tepkisini bulunuz. **(20 puan)**

$$y[n+2] - 5y[n+1] + 6y[n] = x[n+2] - x[n+1]$$

BAŞARILAR …

Yard. Doç. Dr. Ata SEVİNÇ

SİNYALLER VE SİSTEMLER FİNAL CEVAP ANAHTARI

13 Ocak 2011

1) Bazı (hatta her) $n<0$ için $h[n]\neq 0$ olduğu için nedensel değildir.

Bazı $n\neq 0$ için $h[n]\neq 0$ olduğu için belleklidir.

$\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}|h[n]| < \infty$ olduğu gösterilebilirse kararlı olduğu anlaşılır.

$\phantom{\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}|h[n]|} = \infty$ " " kararsız " " .

$\hookrightarrow = -1 + 2\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\alpha^{-n}$ (n=0 dahil sol taraf ile n=0 dahil sağ taraf toplamları aynı, çünkü simetrik. n=0 için iki kere saydığımız için $\alpha^0=1$ çıkardık bir tarafın toplamının iki katından.)

Bu formülü hatırlayan doğrudan yazabilirdi.

$$S=\sum_{n=0}^{k} p^k = 1+p+p^2+\dots+p^k$$

$$pS = p+p^2+\dots+p^k+p^{k+1}$$

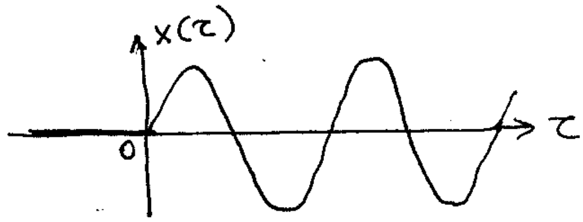
$$S-pS = S(1-p) = 1-p^{k+1} \longrightarrow S=\sum_{n=0}^{k} p^k = \frac{1-p^{k+1}}{1-p}$$

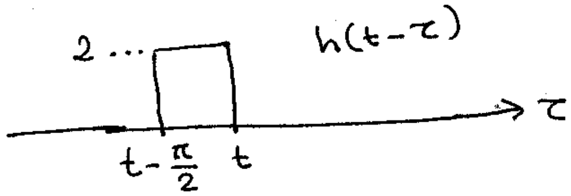
Bu formülü $p=\alpha^{-1}$ için kullanırsak:

$|\alpha|<1$ için $|p|=|\alpha^{-1}|>1$ olur ve $\lim k\to\infty$ için $p^{k+1}=\infty$ olur. Yani $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\alpha^{-n}=\infty \longrightarrow \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}|h[n]|=\infty$

Sistem KARARSIZ.

2) $\text{Çıkış} = y(t) = \int\limits_{\tau=-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau$





$\underline{t<0 \text{ ise:}}$

$x(\tau)h(t-\tau)=0 \quad \forall\tau$

$y(t)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} 0\cdot d\tau = 0$

$t\geq 0$ ve $t-\frac{\pi}{2}<0$ ise

yani $\underline{0\leq t<\frac{\pi}{2} \text{ ise:}}$

$$x(\tau)h(t-\tau)=\begin{cases} 2\sin\tau & 0\leq\tau\leq t \\ 0 & \text{diğer}\end{cases}$$

$$y(t)=\int_0^t 2\sin\tau\, d\tau = -2\cos\tau\Big|_0^t = 2-2\cos t$$

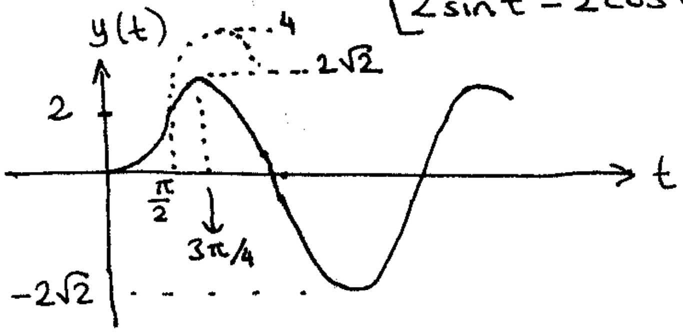
$t-\frac{\pi}{2} \geq 0$ yani $t \geq \frac{\pi}{2}$ ise :

$$x(\tau)h(t-\tau) = \begin{cases} 2\sin\tau & t-\frac{\pi}{2} \leq \tau \leq t \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$$

$$y(t) = \int_{t-\frac{\pi}{2}}^{t} 2\sin\tau \, d\tau = -2\cos\tau \Big|_{t-\frac{\pi}{2}}^{t} = 2\underbrace{\cos\left(t-\frac{\pi}{2}\right)}_{\sin t} - 2\cos t$$

$$y(t) = 2\sin t - 2\cos t$$

Sonuç : $$y(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \text{ ise} \\ 2-2\cos t & 0 \leq t < \frac{\pi}{2} \text{ ise} \\ 2\sin t - 2\cos t & t \geq \frac{\pi}{2} \text{ ise} \end{cases}$$



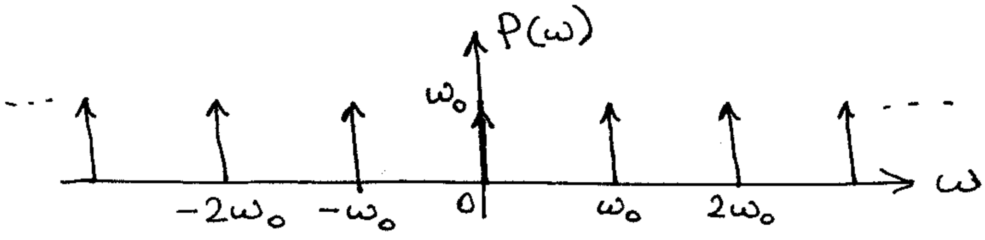
3) $p(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$; $\omega_0 = 2\pi/T_0$

$-\frac{T_0}{2} < t < \frac{T_0}{2}$ aralığında $p(t) = \delta(t)$

$$c_k = \frac{1}{T_0} \underbrace{\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \underbrace{\delta(t)}_{=p(t)} dt}_{1} = \frac{1}{T_0}$$

$\mathcal{F}\{e^{j\omega_0 t}\} = 2\pi\delta(\omega-\omega_0)$ formülü ω_0 yerine $k\omega_0$ için kullanılırsa :

$$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \underbrace{\frac{1}{T_0}}_{c_k} \cdot e^{jk\omega_0 t} \xrightarrow{\mathcal{F}} P(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \overbrace{\frac{2\pi}{T_0}}^{\omega_0} \cdot \delta(\omega - k\omega_0)$$



4) $\left[(j\omega)^2 + 3(j\omega) + 2\right] Y(\omega) = X(\omega)\left[4(j\omega)+4\right]$ (Her iki tarafın F.dönüşümü alındı)

$$\frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = H(\omega) = \frac{4(j\omega+1)}{(j\omega+1)(j\omega+2)} = \boxed{\frac{4}{j\omega+2} = H(\omega)}$$

↳ Transfer fonksiyon

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{4}{j\omega+2}\right\} = \boxed{4 \cdot e^{-2t} u(t) = h(t)}$$ → Birim darbe tepkisi

5) Her iki tarafın $\mathcal{Z}$-dönüşümü alınırsa:

$$\left[z^2 - 5z + 6\right] Y(z) = X(z)\left[z^2 - z\right]$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \boxed{H(z) = \frac{z^2 - z}{z^2 - 5z + 6}}$$ → Transfer fonksiyon.

YB: $|z| > 3$ (nedensellikten)

$h(t) = \mathcal{Z}^{-1}\{H(z)\}$: birim darbe tepkisi

1. yol:

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{z-1}{(z-2)(z-3)} = \frac{A}{z-2} + \frac{B}{z-3}$$

$$A = \frac{2-1}{2-3} = -1$$

$$B = (3-1)/(3-2) = 2$$

$$H(z) = -\frac{z}{z-2} + 2 \cdot \frac{z}{z-3} \xrightarrow{\mathcal{Z}^{-1}} \boxed{h[n] = \left(2 \times 3^n - 2^n\right) u[n]}$$

2. yol:

$$\begin{array}{r|l} z^2 - z & z^2 - 5z + 6 \\ \hline -\,(z^2 - 5z + 6) & 1 \\ \hline 4z - 6 & \end{array}$$

$$H(z) = 1 + \frac{4z-6}{(z-2)(z-3)}$$

$$\frac{4z-6}{(z-2)(z-3)} = \frac{a}{z-2} + \frac{b}{z-3} \longrightarrow \begin{array}{l} a = (4\times 2 - 6)/(2-3) = -2 \\ b = (4\times 3 - 6)/(3-2) = 6 \end{array}$$

$$H(z) = 1 - 2 \cdot z^{-1} \frac{z}{z-2} + 6 z^{-1} \frac{z}{z-3}$$

z^{-1}: bir adım geciktirici

$1 = \mathcal{Z}\{\delta[n]\}$

$$h[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{H(z)\}$$

$$\boxed{h[n] = \delta[n] - 2 \times 2^{n-1} u[n-1] + 6 \times 3^{n-1} u[n-1]}$$

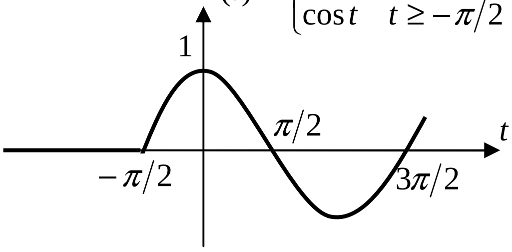
Dikkat edilirse iki çözümün eşit olduğu görülür.

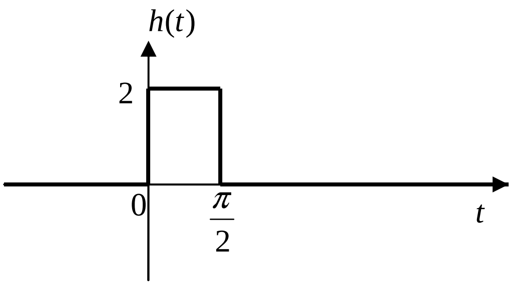
SİNYALLER VE SİSTEMLER BÜTÜNLEME SINAVI SORULARI
27 Ocak 2011 Süre: 75 dakika

1) $0 < |a| < 1$ olmak üzere birim darbe tepkisi $h[n] = a^n u[n]$ olan doğrusal zamanla değişmez sistem nedensel midir, kararlı mıdır, bellekli midir? Açıklama ***yapınız***. **(4 + 8 + 3 = 15 puan)**

2) Girişi $x(t)$ ve birim darbe tepkisi $h(t)$ şekillerdeki gibi olan doğrusal zamanla değişmez sistemin çıkışını bulunuz. **(25 puan)** Çizmeniz beklenmiyor.

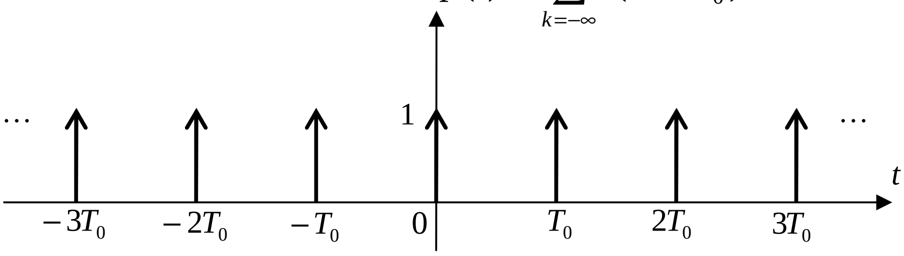
$$x(t) = \begin{cases} 0 & t < -\pi/2 \\ \cos t & t \geq -\pi/2 \end{cases}$$





3) Şekilde verilen darbe treninin Fourier dönüşümünü ($P(\omega)$) bularak bir başka darbe treni olduğunu gösteriniz. **(25 puan)** (Yol gösterme: Önce p(t) ’nin karmaşık Fourier serisini elde ediniz.)

$$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_0)$$



4) Giriş(x) çıkış(y) ilişkisi aşağıda verilen nedensel sistemin transfer fonksiyonunu ve birim darbe tepkisini bulunuz. **(15 puan)**

$$y[n+2] - y[n] = x[n+2] - x[n+1]$$

5) Giriş(x) çıkış(y) ilişkisi aşağıda verilen nedensel sistemin transfer fonksiyonunu ve birim darbe tepkisini bulunuz. **(20 puan)**

$$\ddot{y}(t) + 4\dot{y}(t) + 4y(t) = \dot{x}(t) + x(t)$$

BAŞARILAR … **Yard. Doç. Dr. Ata SEVİNÇ**

SİNYALLER VE SİSTEMLER BÜTÜNLEME CEVAP ANAHTARI:
27 Ocak 2011

1) $\forall n<0$ için $h[n]=0$ olduğu için nedenseldir.

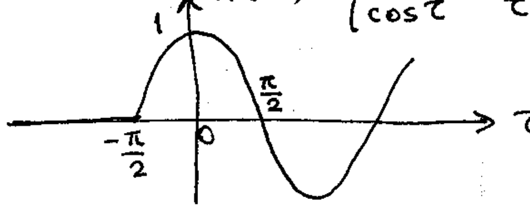
$h[n] \neq K\cdot\delta[n]$ (yani bazı $n\neq 0$ için $h[n]\neq 0$) Bu yüzden bellekli.

Kararlılık için:

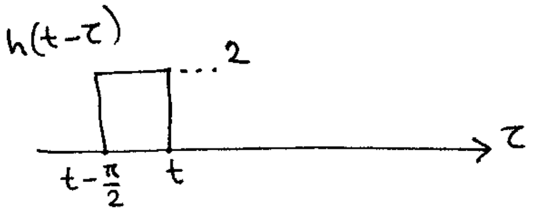
$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| = \sum_{n=0}^{+\infty} |a|^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-|a|^{n+1}}{1-|a|} = \frac{1}{1-|a|} < \infty$$

Bu toplam sonlu olduğu için kararlı.

2) $x(\tau)=\begin{cases} 0 & \tau<-\pi/2 \\ \cos\tau & \tau\geq -\frac{\pi}{2} \end{cases}$



$$y(t)=x(t)*h(t) = \int_{\tau=-\infty}^{+\infty} x(\tau)\,h(t-\tau)\,d\tau$$



$t<-\frac{\pi}{2}$ ise:

$x(\tau)h(t-\tau)=0 \quad \forall\tau$

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} 0\cdot d\tau = 0$$

$-\frac{\pi}{2}\leq t<0$ ise:

$$x(\tau)h(t-\tau)=\begin{cases} 2\cos\tau & -\frac{\pi}{2}\leq\tau\leq t \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$$

$$y(t)=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{t} 2\cos\tau\,d\tau = 2\sin\tau\Big|_{-\pi/2}^{t} = 2\sin t - 2\sin\frac{\pi}{2} = 2+2\sin t$$

$0\leq t$ ise:

$$x(\tau)h(t-\tau)=\begin{cases} 2\cos\tau & t-\frac{\pi}{2}\leq\tau\leq t \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$$

$$y(t)=\int_{\tau=t-\frac{\pi}{2}}^{t} 2\cos\tau\,d\tau = 2\sin\tau\Big|_{t-\frac{\pi}{2}}^{t} = 2\sin t-2\sin\left(t-\frac{\pi}{2}\right) = 2\sin t + 2\underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}_{\cos t}$$

Sonuç:

$$y(t)=\begin{cases} 0 & t<-\frac{\pi}{2} \text{ ise} \\ 2\sin t+2 & -\pi/2\leq t<0 \text{ ise} \\ 2\sin t+2\cos t & 0\leq t \text{ ise} \end{cases}$$

3) $p(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$; $\omega_0=\frac{2\pi}{T_0}$

$$c_k=\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \underbrace{p(t)}_{\substack{\text{bu aralıkta}\\ p(t)=\delta(t)}}\cdot e^{-jk\omega_0 t}\,dt = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \underbrace{\delta(t)\cdot e^{-jk\omega_0 t}}_{\delta(t)\cdot e^{0}}\,dt$$

$$c_k=\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2}\delta(t)\,dt=\frac{1}{T_0} \Rightarrow p(t)=\underbrace{\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{T_0}\cdot e^{jk\omega_0 t}}_{\text{Fourier serisi}}$$

$e^{j\omega_0 t}\xleftrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi\,\delta(\omega-\omega_0)$ formülü ω_0 yerine $k\omega_0$ için kullanırsak ve doğrusallıktan:

$$P(\omega)=\mathcal{F}\left\{\frac{1}{T_0}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{jk\omega_0 t}\right\}=\underbrace{\frac{2\pi}{T_0}}_{=\omega_0}\underbrace{\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-k\omega_0)}_{\text{yine bir darbe trenidir.}}$$

4) $z^2Y(z)-Y(z)=z^2X(z)-zX(z)$

$$\frac{Y(z)}{X(z)}=H(z)=\frac{z^2-z}{z^2-1}=\frac{z(z-1)}{(z-1)(z+1)}=\frac{z}{z+1}\ \text{: Transfer fonksiyon}$$

YB: $|z|>1$ (nedensellikten)

$$h[n]=\mathcal{Z}^{-1}\{H(z)\}=\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{z+1}\right\}=\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{z-(-1)}\right\}=\underbrace{(-1)^n u[n]}_{\text{birim darbe tepkisi}}$$

5)

$$(j\omega)^2Y(\omega)+4(j\omega)Y(\omega)+4Y(\omega)=(j\omega)X(\omega)+X(\omega)$$

$$H(\omega)=\frac{Y(\omega)}{X(\omega)}=\frac{j\omega+1}{(j\omega+2)^2}\ \text{: Transfer fonksiyon.}$$

$$H(\omega)=\frac{(j\omega+2)-1}{(j\omega+2)^2}=\underbrace{\frac{1}{j\omega+2}}_{\mathcal{F}\{e^{-2t}u(t)\}}-\underbrace{\frac{1}{(j\omega+2)^2}}_{\mathcal{F}\{?\}}$$

$\frac{1}{j\omega+2}$ 'nin türeviyle $\frac{1}{(j\omega+2)^2}$ cinsinden birşeyler bulmaya çalışalım.

$j\frac{d}{d\omega}F(\omega)=\mathcal{F}\{t\cdot f(t)\}$ özelliği kullanılacak.

$$j\frac{d}{d\omega}(j\omega+2)^{-1}=-j(j\omega+2)^{-2}\cdot j=\frac{1}{(j\omega+2)^2}=\mathcal{F}\{t\cdot e^{-2t}u(t)\}$$

Yani birim darbe tepkisi:

$$\mathcal{F}^{-1}\{H(\omega)\}=h(t)=e^{-2t}u(t)-t\,e^{-2t}u(t)$$
$$=(1-t)\,e^{-2t}u(t)$$