Darbe Sinyali Özellikleri

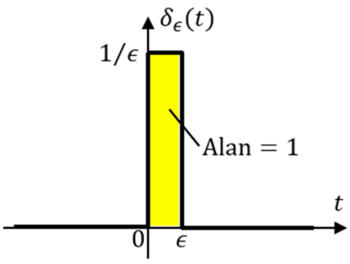
1) Çift sinyaldir.

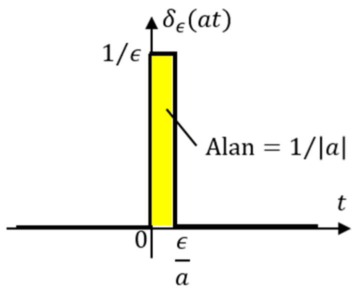
$$\delta[-n]=\delta[n] \quad , \quad \delta(-t)=\delta(t)$$

(Sürekli zaman birim darbe sinyalini limit ile tanımlarken görmezden gelinen bir noktalık kayma düzeltilmiş oluyor.)

2) $\delta[an]=\delta[n] \quad , \quad \delta(at)=\frac{1}{|a|}\delta(t)\,,\ a\neq 0$

Ayrık zamanlıda sadece $n=0$ için sıfırdan farklı değer (1) aldığı için bu iddianın doğruluğu açıkça görülmektedir. Sürekli zamanlıda ise limit yaklaşımıyla sağda gösterildiği gibi alan $1/|a|$





olmaktadır ($a<0$ olsa da yatay eksenin üstündeki alan artı olduğu için). Limit $\epsilon\to 0$ için darbe katsayısı alanı ifade ettiği için katsayı $1/|a|$ olur.

3)

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta[n-n_0]=1 \quad , \quad \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-t_0)dt=1$$

$$n_1\le n_0 \text{ ve } n_2\ge n_0 \Rightarrow \sum_{n=n_1}^{n_2}\delta[n-n_0]=1 \quad , \quad t_1<t_0 \text{ ve } t_2>t_0 \Rightarrow \int_{t_1}^{t_2}\delta(t-t_0)dt=1$$

$$n_0\notin[n_1,n_2] \Rightarrow \sum_{n=n_1}^{n_2}\delta[n-n_0]=0 \quad , \quad t_0\notin[t_1,t_2] \Rightarrow \int_{t_1}^{t_2}\delta(t-t_0)dt=0$$

4)

$$\sum_{k=-\infty}^{n}\delta[k]=u[n] \quad , \quad \int_{\tau=-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau=u(t)$$

Çünkü; toplam ya da integralin üst sınırı negatif ise darbenin sıfırdan farklı kısmı kapsama girmediği için sonuç sıfırdır, üst sınır negatif değilse sıfırdan farklı kısım da kapsanır ve bunun toplamı ya da alanı 1 olur. Negatif anlarda sıfır, negatif olmayan anlarda 1 değerini veren sinyal ise birim basamaktır.

5)

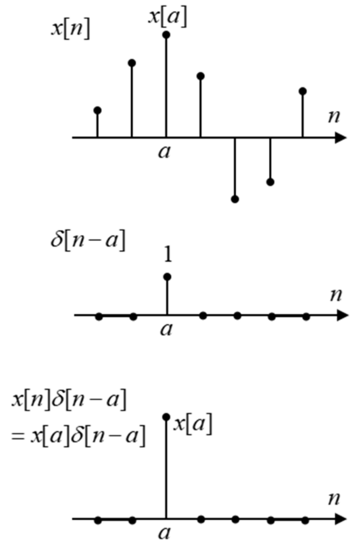
$$\sum_{k=0}^{+\infty}\delta[n-k]=u[n] \quad , \quad \int_{\tau=0}^{+\infty}\delta(t-\tau)dt=u(t)$$

İspatı "Bir Sinyalin Darbe Toplamı/İntegrali Halinde İfadesi" konusunun örneği olacaktır.

6) ***Bir Sinyalin Bir Darbe ile Çarpımı***

$$\boxed{x[n]\delta[n-a]=x[a]\delta[n-a]} \quad , \quad \boxed{x(t)\delta(t-a)=x(a)\delta(t-a)}$$

Dikkat edilirse eşitliklerin sol taraflarında değişken olan darbe katsayıları, darbenin sıfırdan farklı olduğu an değerleriyle sabit olarak yazılabilmektedir. Çünkü diğer anlardaki katsayı, zaten darbenin sıfır olan değeriyle çarpıldığından eşitliği bozmamaktadır. Diğer bir ispatı sürekli zamanlıdaki limit hesabına girmemek için sadece ayrık zamanlıda yandaki gibi gösterebiliriz.



Bu formüller, çok karmaşık gibi görünen ve darbe içeren toplam ya da integrallerin kolayca hesaplanmasına yarar.

Örnek:

$$\int_0^5 t^2\cos(\ln 5t)\,\delta(t-2)dt = \int_0^5 2^2\cos(\ln 10)\,\delta(t-2)dt$$

$$= 4\cos(\ln 10)\underbrace{\int_0^5 \delta(t-2)dt}_{1} = 4\cos(\ln 10)$$

İntegral sınırları darbenin sıfırdan farklı olduğu anı kapsamasaydı, mesela 3'ten 7'ye olsaydı integral sıfıra eşit olurdu.

Burada çok yapılan bir çift hata şudur:

$$\int_0^5 t^2\cos(\ln 5t)\,\delta(t-2)dt \xcancel{= \int_0^5 2^2\cos(\ln 10)\,dt} \xcancel{= 4\cos(\ln 10)}$$

Birinci hata, darbeyi yazmamaktır. İkinci hata ise sabitin integralini doğrudan o sabite eşitlemektir (İntegral sınırları farkı ile o sabitin çarpımı olmalıydı). Sonuç doğru olsa da aslında bu iki yanlışlı bir cevaptır.

Örnek:

$$\sum_{n=2}^{6} 2^n \tan\left[\frac{\pi n}{6}\right]\delta[n-4] = \sum_{n=2}^{6} 2^4 \tan\left(\frac{4\pi}{6}\right)\delta[n-4]$$

$$= 16\tan\left(\frac{2\pi}{3}\right)\underbrace{\sum_{n=2}^{6}\delta[n-4]}_{1} = -16\sqrt{3}$$

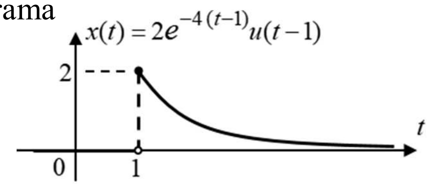
Toplam sınırları darbenin sıfırdan farklı olduğu anı kapsamasaydı, mesela 0'dan 3'e olsaydı toplam sıfıra eşit olurdu.

Toplam sınırları darbenin sıfırdan farklı olduğu anı kapsamasaydı, mesela 0'dan 3'e olsaydı toplam sıfıra eşit olurdu.

7) Aşağıdaki özellik, sadece listenin eksik kalmaması için buraya yazılmıştır. "Konvolüsyon" konusu görülürken anlatılacaktır ve buradaki "*" işareti çarpma değil konvolüsyon işaretidir. Bir sinyalin bir darbeyle konvolüsyonu:

$$\boxed{x[n]*\delta[n-a] = x[n-a]} \quad , \quad \boxed{x(t)*\delta(t-a) = x(t-a)}$$

8) Parçalı sürekli bir sinyalin türevinde, sıfırdan farklı değerini sıçrama noktasında alan ve katsayısı sıçrama miktarı olan bir darbe ortaya çıkar.



Örnek: $x(t) = 2e^{-4(t-1)}u(t-1) \quad \Rightarrow \quad dx(t)/dt = ?$

Çözüm:

$$\frac{dx(t)}{dt} = -8e^{-4(t-1)}u(t-1) + \underbrace{2e^{-4(t-1)}\delta(t-1)}_{2e^{-4(1-1)}\delta(t-1)}$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = -8e^{-4(t-1)}u(t-1) + 2\delta(t-1)$$