Makine Mühendisliği Bölümü
SİSTEM MODELLEME VE OTOMATİK KONTROL ARASINAV SORULARI
14.11.2014 Süre: 80 dakika

1) Transfer fonksiyonu $T(s) = \dfrac{K(s-1)}{(s+2)\left(s^2+6s+13\right)}$ olan sistem için,

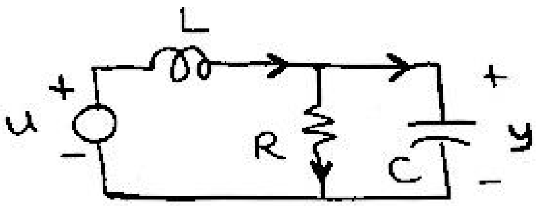
a) Kutup ve sıfırları karmaşık "s" düzleminde gösteriniz. **(7 puan)**

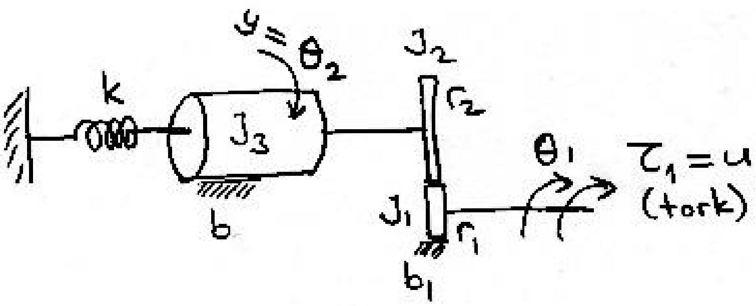
b) Giriş sinyalinin frekansı sıfıra doğru azaltıldıkça sistemin kazancı mutlak değerce 2'ye yakınsıyor. $K > 0$ olduğuna göre K kaçtır? **(5 puan)**

c) Sistem kararlı mıdır? **(5 puan)**

d) Sistemin giriş(u)-çıkış(y) ilişkisini gösteren diferansiyel denklemi yazınız. **(8 puan)**

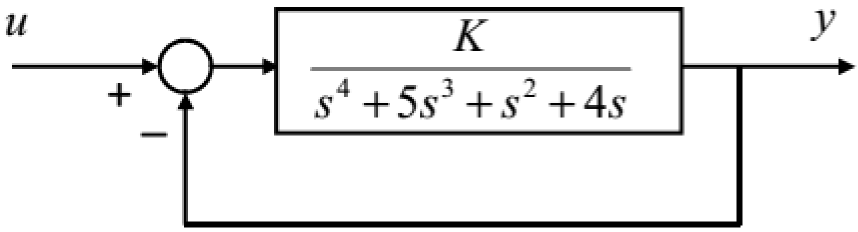
2) Aşağıdaki iki sistemden istediğiniz birinin, önce giriş(u)-çıkış(y) ilişkisini gösteren diferansiyel denklemi bulunuz, sonra $G(s) = Y(s)/U(s)$ transfer fonksiyonunu çıkartınız. **(25 puan)**





3) Birinci mertebeden doğrusal zamanla değişmez bir sistemin birim basamak tepkisi $y_b(t) = 5 - 4e^{-3t}$ olduğuna göre sistemin transfer fonksiyonunu yazınız **(15 puan)**. Birim basamak tepkisi $y_b(t)$ 'yi çiziniz. Çizimde $y_b(0^+)$ ve $y_b(\infty)$ değerleri belli olsun **(5 puan).** Giriş frekansı sonsuza doğru yükseltilirken sistem kazancı kaça yakınsar **(5 puan)**?

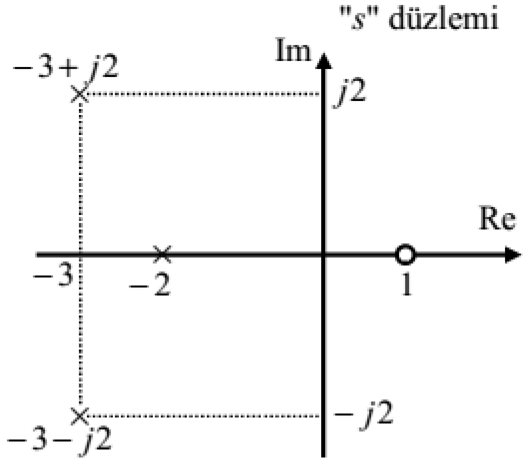
4) Aşağıda verilen sistem K 'nın hangi değer aralığında kararlıdır? **(25 puan)**



BAŞARILAR … **Yard. Doç. Ata SEVİNÇ**

Makine Mühendisliği Bölümü
SİSTEM MODELLEME VE OTOMATİK KONTROL ARASINAV CEVAP ANAHTARI
14.11.2014

1) a) Payın tek kökü, yani bir tane sıfır vardır: $z = 1$. Paydanın ise 3 kökü, yani 3 kutbu vardır: $p_1 = -2$, $p_{2,3} = -3 \mp j2$. Yanda "s" düzleminde gösterilmiştir.



b) Giriş sinyalinin frekansı ω için mutlak değerce kazanç $s = j\omega$ transfer fonksiyonda yazılıp $|T(j\omega)|$ şeklinde bulunur. $\omega \to 0$ için $s \to 0$ olacağından sistemin kazancı

$$|T(0)| = \lim_{s\to 0} \left| \frac{K(s-1)}{(s+2)(s^2+6s+13)} \right| = \left| \frac{-K}{26} \right| = 2$$

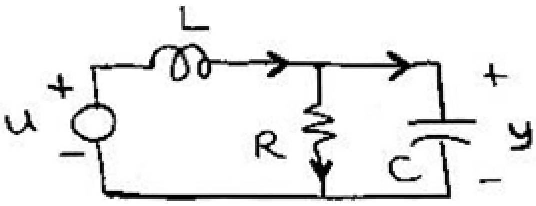
ve $K > 0$ olduğuna göre $\boxed{K = 52}$

c) Sistem kararlıdır, çünkü bütün kutuplar negatif reel kısımlıdır, yani sol yarı bölgededir. Sağ yarı bölgede sıfır olmasının kararlılığa zararı yoktur.

d) $T(s) = \dfrac{Y(s)}{U(s)} = \dfrac{Ks - K}{s^3 + 8s^2 + 25s + 26}$ $\quad \to \quad$ $(s^3 + 8s^2 + 25s + 26)Y(s) = (Ks - K)U(s)$

s çarpanı zaman uzayında türeve karşılık gelir: $\boxed{\dddot{y}(t) + 8\ddot{y}(t) + 25\dot{y}(t) + 26y(t) = K\dot{u}(t) - Ku(t)}$

2)



Her türevsel eleman için bir denklem yazılır. L üzerindeki akıma i dersek:

$u - y = L\dfrac{di}{dt}$ $\qquad$ i 'den direnç akımını çıkartırsak

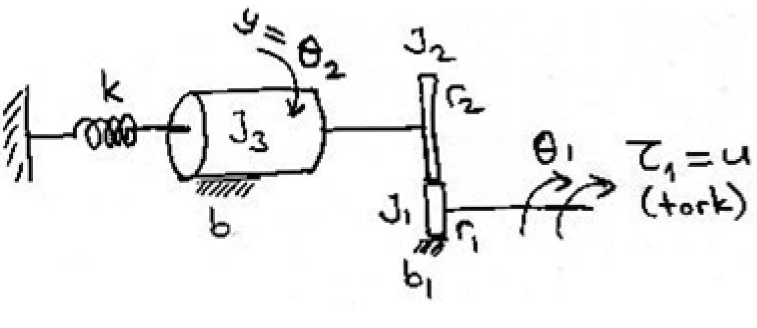
C 'nin akımını buluruz: $\quad i - \dfrac{y}{R} = C\dfrac{dy}{dt}$ $\quad$ Her iki denklemin de Laplace dönüşümü alınıp düzenlenerek

$U(s) - Y(s) = sL\,I(s)$ $\qquad$ ve $\qquad$ $I(s) = \left(\dfrac{1}{R} + sC\right)Y(s)$ $\qquad$ bulunur. $I(s)$ 'i diğerinde yerine yazalım:

$$U(s) - Y(s) = \left(\frac{sL}{R} + s^2LC\right)Y(s) \quad \to \quad \left(1 + \frac{sL}{R} + s^2LC\right)Y(s) = U(s)$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = \frac{1}{s^2LC + \dfrac{sL}{R} + 1} = \frac{\dfrac{1}{LC}}{s^2 + \dfrac{1}{RC}s + \dfrac{1}{LC}}$$ bulunur.

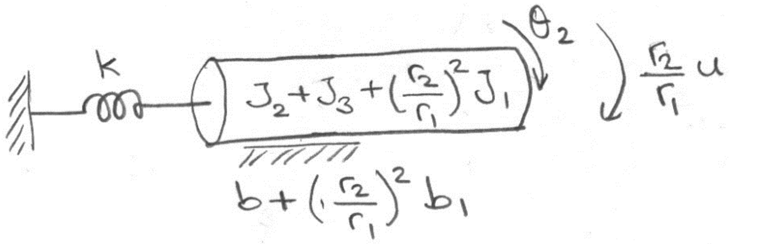
Yandaki sistemde $r_1\theta_1 = r_2\theta_2$ ve $\dfrac{\tau_1}{r_1} = \dfrac{\tau_2}{r_2}$



(τ_1 'in yansıtılmışına τ_2 dedik). Buna göre 1. eksendeki u torku, 2. eksende $\dfrac{r_2}{r_1}u$ olarak görülür. Diğer yandan,

$J_1\ddot{\theta}_1 = J_1\dfrac{r_2}{r_1}\ddot{\theta}_2$ ve $b_1\dot{\theta}_1 = b_1\dfrac{r_2}{r_1}\dot{\theta}_2$

yazılabilir. Bunlar 1. taraftaki tork değerine maruz kalan bileşenlerdir. Bunları 2. taraftaki torka maruz kalır gibi



ve θ_2 'ye göre kullanacaksak katsayılarını bir kez daha r_2/r_1 ile çarparak kullanmalıyız. Böylece yukarıdaki eşdeğer şekli elde ederiz. Buna göre dinamik denklemi yazarsak

$$\left(J_2 + J_3 + \left[\frac{r_2^2}{r_1^2}\right]J_1\right)\ddot{\theta}_2 = \frac{r_2}{r_1}u - \left(b + \left[\frac{r_2^2}{r_1^2}\right]b_1\right)\dot{\theta}_2 - k\theta_2$$ Düzenlenip $y = \theta_2$ yazılarak Laplace dönüşümünü alınırsa,

$$\left\{\left(J_2 + J_3 + \left[\frac{r_2^2}{r_1^2}\right]J_1\right)s^2 + \left(b + \left[\frac{r_2^2}{r_1^2}\right]b_1\right)s + k\right\}Y(s) = \frac{r_2}{r_1}U(s)$$ Buradan da transfer fonksiyon şöyle bulunur:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = \frac{r_2/r_1}{\left(J_2 + J_3 + \left[\frac{r_2^2}{r_1^2}\right]J_1\right)s^2 + \left(b + \left[\frac{r_2^2}{r_1^2}\right]b_1\right)s + k}$$

İstenseydi herşey 1. tarafa yansıtılarak da işlem yapılabilirdi. O zaman payın ve paydanın r_1^2/r_2^2 ile çarpılmışı olan, yani yukardakine eşit şu ifade bulunurdu:

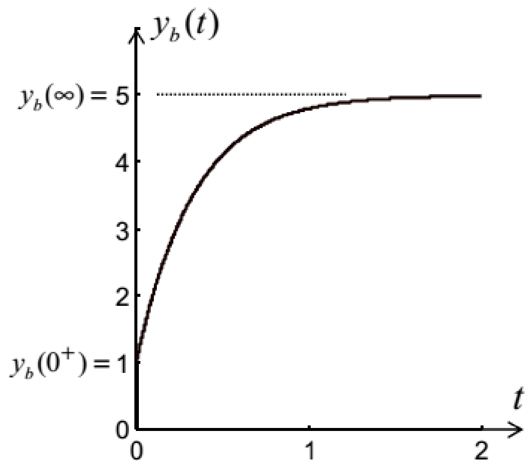
$$G(s) = \frac{r_1/r_2}{\left(J_1 + \left[\frac{r_1^2}{r_2^2}\right](J_2 + J_3)\right)s^2 + \left(b_1 + \left[\frac{r_1^2}{r_2^2}\right]b\right)s + \left[\frac{r_1^2}{r_2^2}\right]k}$$

3) $y_b(t) = 5 - 4e^{-3t} \quad \rightarrow \; Y_b(s) = \dfrac{5}{s} - \dfrac{4}{s+3} = T(s)U(s) = T(s)\cdot\dfrac{1}{s}$

$$\rightarrow \; T(s) = 5 - \frac{4s}{s+3} = \frac{5s + 15 - 4s}{s+3} \quad \rightarrow \quad \boxed{T(s) = \frac{s+15}{s+3}}$$

$s = j\omega$ yazılarak $\lim\limits_{s\to j\infty}|T(s)| = \lim\limits_{s\to j\infty}\left|\dfrac{s+15}{s+3}\right| = 1$

Sonsuz yüksek frekans kazancı 1 bulunur.



4) Kutu içini $G(s)$, ve $H(s) = 1$ alarak $T(s) = \dfrac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} = \dfrac{K}{s^4 + 5s^3 + s^2 + 4s + K}$ bulunur. Kararlılık için paydanın köklerinin hiçbiri sağ yarı bölgede olmamalı, bunun için de Routh-Hurwitz testinde ilk sütun hep aynı işaretli olmalıdır:

s^4	**1**	**1**	***K***	**0**
s^3	**5**	**4**	**0**	**0**
s^2	$1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$	K	0	
s^1	$4 - \frac{5K}{1/5} = 4 - 25K$	0	0	
s^0	K	0		

İlk sütun artıyla başladığı için hep artı olmalıdır. Yani $K > 0$ ve $4 - 25K > 0$ olmalıdır. Yani $\boxed{0 < K < \frac{4}{25}}$

Makine Mühendisliği Bölümü

SİSTEM MODELLEME VE OTOMATİK KONTROL FİNAL SINAVI SORULARI

07.01.2015 Süre: 75 dakika

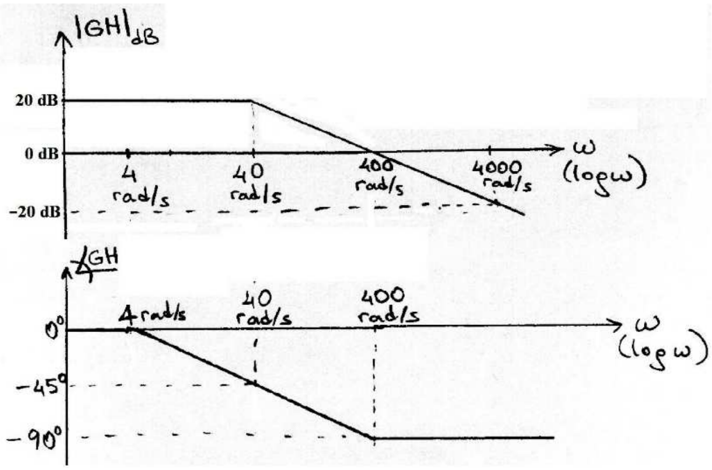
Yalnızca 4 soru çözmeniz beklenmektedir. 5 soruyla uğraşırsanız, en düşük puanlı cevabınız sayılmayacaktır.

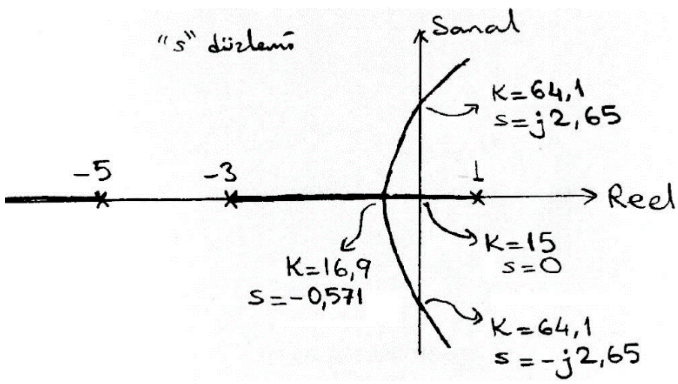
1) Transfer fonksiyonu $1/(s^2+2s-8)$ olan bir sistemin çıkışını, istenen r değerine getirmek için gereken u değerini PI kontrol ile uygulamak için gereken düzenlemeyi blok şema ile gösteriniz. PI kazançları K_P ve K_I hangi şartları sağlamalıdır? Bu şartları sağlayan keyfi bir takım K_P ve K_I kazanç değerleri atayınız. **(25 puan)**

2) Bir sistemin açık döngü transfer fonksiyonuna ilişkin Bode genlik(dB) ve açı eğrileri doğrusallaştırılmış yaklaşık parçalar halinde aşağıda <u>solda</u> verilmiştir. Karmaşık açık döngü kutup veya sıfır yoktur.

a) Sistemin açık döngü transfer fonksiyonunu (GH) bulunuz. **(18 puan)**

b) Sistemin kararlı olup olmadığını, grafiklerden nasıl anlaşıldığını belirterek söyleyiniz. **(7 puan)**





3) Bir sistemin kapalı döngü transfer fonksiyonunun paydasını sıfır yapan köklerin, K 'nın $[0,+\infty)$ aralığındaki değişimine göre yerlerini gösteren kök-yer eğrisi yukarıda <u>sağdaki</u> şekilde verilmiştir (Üç adet açık döngü kutup var, açık döngü sıfır yok). Özel bazı noktalarda K değerleri yaklaşık olarak verilmiştir.

a) K 'nın negatif olmayan hangi değerleri için sistem kararlıdır? **(15 puan)**

b) En sağdaki kapalı döngü kutbun veya kutup çiftinin mümkün olduğunca solda olmasını istiyorsak K ne seçilmelidir ve bu seçim için en sağdaki kapalı döngü kutup(lar) ne olur? **(10 puan)**

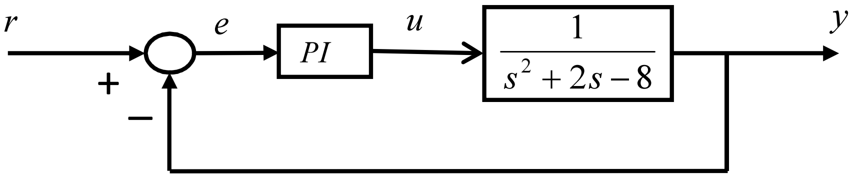
4) Transfer fonksiyonu $\dfrac{Y(s)}{U(s)} = \dfrac{5}{s^2+3s+2}$ ile verilen sistem için uygun durum değişkenleri tanımlayarak bir durum uzayı modeli elde ediniz. **(25 puan)**

5) $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -7 & -9 \end{bmatrix}$ için e^{At} matrisini istediğiniz yolla bulunuz. **(25 puan)**

BAŞARILAR … **Yard. Doç. Dr. Ata SEVİNÇ**

Makine Mühendisliği Bölümü
SİSTEM MODELLEME VE OTOMATİK KONTROL FİNAL SINAVI CEVAP ANAHTARI
07.01.2015

1)



PI kontrolörün (denetleyicinin) transfer fonksiyonu $K_P + \frac{K_I}{s} = \frac{K_P s + K_I}{s}$ olup bütün sistemin transfer fonksiyonu:

$$\frac{\dfrac{K_P s + K_I}{s(s^2+2s-8)}}{1 + \dfrac{K_P s + K_I}{s(s^2+2s-8)}} = \frac{K_P s + K_I}{s^3 + 2s^2 + (K_P - 8)s + K_I}$$

Hatanın (e) hep sıfıra gitmesi ancak ve eğer (⟺) tüm sistem kararlı ise olur. Bütün sistemin transfer fonksiyonunun paydasına Routh-Hurwitz testi uygulayarak kararlılık şartlarını bulalım:

s^3	1	$(K_P - 8)$	0
s^2	2	K_I	0
s^1	$K_P - 8 - (K_I/2)$	0	
s^0	K_I		

Kararlılık için ilk sütunda işaret değişikliği olmamalıdır. Yani
$K_I > 0$ ve $K_P - 8 - (K_I/2) > 0$ olmalıdır. Diğer bir ifadeyle $0 < K_I < 2K_P - 16$ olmalıdır. Meselâ, $K_P = 10$, $K_I = 2$ olabilir.

2) a) Genlik(dB) eğrisindeki tek köşe frekansı 40 rad/s = 1/τ , yani = 25ms'dir. Köşe frekansının solundan sağına eğim -20dB/dekad değiştiği için paydada (1+sτ) terimi vardır. Açı eğrisindeki köşelerin 4 rad/s ve 400 rad/s frekanslarda (1 dekad öncesi ve 1 dekad sonrası) olması ve aradaki eğimin -45°/dekad olması da bunu doğrular. Köşe frekansından önce (en sol tarafta) genlik(dB) eğrisinin eğimi sıfır olduğundan s çarpanı bulunmamaktadır. Başkaca bir köşe olmamasından anlarız ki açık döngü transfer fonksiyon: $GH = \frac{K}{(1+s\tau)}$

K'yı bulmak için dB değeri bilinen özel bir frekansta meselâ ω < 40 rad/s'de

Genlik(dB) = $|K|_{dB} + \left|\frac{1}{1+s\tau}\right|_{dB} = 20\ dB$ olduğu görülmektedir. Bu yaklaşık çizim yönteminde köşe frekansında $\left|\frac{1}{1+s\tau}\right|_{dB} = 0\ dB$ kabul edilmektedir. Dolayısıyla $|K|_{dB} = 20\ dB \;\rightarrow\; K = 10^{20/20} = 10$ bulunur.
Sonuç: $GH = \frac{10}{(1+0{,}025\cdot s)}$

b) Bode açık döngü eğrilerinde, açının -180° olduğu frekansta genlik kazancı ≥ 0dB ise, ya da genlik kazancının 0dB olduğu frekansta açı -180° veya daha aşağıda ise, kapalı döngü sistem kararsızdır. Burada açı hiç -180° olmamaktadır. Genlik kazancı 0dB iken de açı -180°'nin üzerindedir. Kararsızlık durumlarının ikisi de olmadığı için sistem kararlıdır.

3) × ile gösterilen açık döngü kutuplarda K = 0'dır. Kök yer eğrisi boyunca bu noktalardan uzaklaşıldıkça K artmaktadır. K > 15 olmaya başlayınca sağda hiç kök kalmamakta, K = 16,9 olunca köklerden ikisi s = -0,571'de çakışmaktadır. K biraz daha artırılınca köklerin ikisi karmaşık (eşlenik çift) olmakta, ve nihayet K > 64,1 için eşlenik çift olan iki kök sağ yarı bölgeye geçmektedir. K 'nın tüm bu değişimi sırasında üçüncü kök -5'in daha daha sol tarafına doğru reel kalarak kaymaktadır. Buna göre,

a) Yalnızca 15 < K < 64,1 için köklerin üçü de sol yarı bölgede olduğu için sistem negatif olmayan sadece bu K değer aralığı için kararlıdır.

b) En sağdaki kökün geldiği en sol nokta ayrılma noktasıdır. Bu noktada $K = 16{,}9$ ve en sağdaki (çakışan) iki kök $s = -0{,}571$ olmaktadır. (Kök-yer eğrisindeki kökler, o noktadaki K değeri için kapalı döngü kutuptur.)

4) $(s^2 + 3s + 2)Y = 5U \quad \rightarrow \quad \ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = 5u$

$x_1 = y$, $\quad x_2 = \dot{x}_1 = \dot{y}$. Ana denklemde yerine yazılırsa

$$\dot{x}_2 = -3x_2 - 2x_1 + 5u$$

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}}_{A} x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}}_{B} u$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{C} x + \underbrace{0}_{D} \cdot u$$

5) $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -7 & -9 \end{bmatrix}$ için e^{At} matrisini bulunuz.

Çözüm: <u>1. Yol:</u> $|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -5 \\ 7 & \lambda + 9 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 6\lambda + 8 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda_1 = -2\,,\ \lambda_2 = -4\,.$

$$e^{-2t} = c_0 + c_1 \cdot (-2)$$
$$e^{-4t} = c_0 + c_1 \cdot (-4)$$

$c_1 = \frac{1}{2}e^{-2t} - \frac{1}{2}e^{-4t}$ ve $c_0 = 2e^{-2t} - e^{-4t}$ bulunur.

$$e^{At} = c_0 I + c_1 A = (2e^{-2t} - e^{-4t}) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \left(\frac{1}{2}e^{-2t} - \frac{1}{2}e^{-4t}\right) \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -7 & -9 \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 3{,}5e^{-2t} - 2{,}5e^{-4t} & 2{,}5e^{-2t} - 2{,}5e^{-4t} \\ -3{,}5e^{-2t} + 3{,}5e^{-4t} & -2{,}5e^{-2t} + 3{,}5e^{-4t} \end{bmatrix}$$

Sağlaması, $t = 0$ için $e^{At} = I$.

<u>2. yol:</u> $e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\}$ $\qquad sI - A = \begin{bmatrix} s - 3 & -5 \\ 7 & s + 9 \end{bmatrix}$

$$|sI - A| = s^2 + 6s + 8 = (s + 2)(s + 4)$$

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{(s + 2)(s + 4)} \begin{bmatrix} s + 9 & 5 \\ -7 & s - 3 \end{bmatrix}$$

Her bir eleman basit kesirlere ayrılır. (Bildiğiniz için burada atlandı)

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{7/2}{s + 2} - \frac{5/2}{s + 4} & \frac{5/2}{s + 2} - \frac{5/2}{s + 4} \\ \frac{-7/2}{s + 2} + \frac{7/2}{s + 4} & \frac{-5/2}{s + 2} + \frac{7/2}{s + 4} \end{bmatrix}$$

Ters Laplace dönüşümü alınınca önceki yönteminkiyle aynı sonuç bulunur:

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 3{,}5e^{-2t} - 2{,}5e^{-4t} & 2{,}5e^{-2t} - 2{,}5e^{-4t} \\ -3{,}5e^{-2t} + 3{,}5e^{-4t} & -2{,}5e^{-2t} + 3{,}5e^{-4t} \end{bmatrix}$$

Makine Mühendisliği Bölümü
SİSTEM MODELLEME VE OTOMATİK KONTROL BÜTÜNLEME SINAVI SORULARI
28.01.2015 Süre: 75 dakika

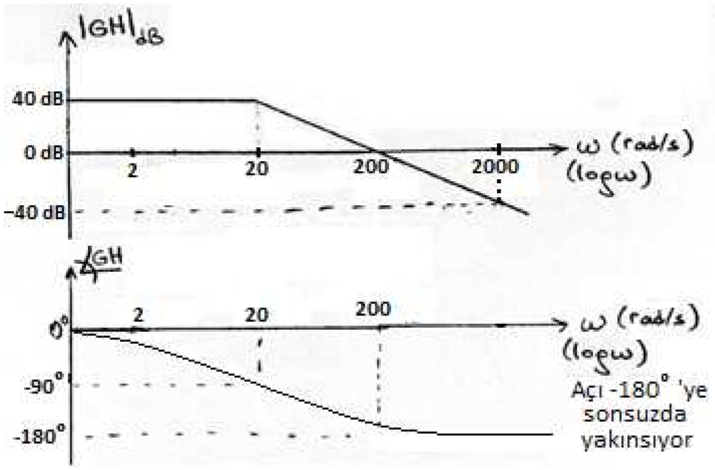
Yalnızca 4 soru çözmeniz beklenmektedir. 5 soruyla uğraşırsanız, en düşük puanlı cevabınız sayılmayacaktır.

1) Transfer fonksiyonu $1/(s^2 + 5s - 2)$ olan bir sistemin çıkışını, istenen r değerine getirmek için gereken u değerini PI kontrol ile uygulamak için gereken düzenlemeyi blok şema ile gösteriniz. PI kazançları K_P ve K_I hangi şartları sağlamalıdır? Bu şartları sağlayan keyfi bir takım K_P ve K_I kazanç değerleri atayınız. **(25 puan)**

2) Bir sistemin açık döngü transfer fonksiyonuna ilişkin Bode genlik(dB) eğrisi doğrusallaştırılmış parçalar halinde ve açı eğrisi yaklaşık olarak aşağıda verilmiştir. Karmaşık açık döngü kutup veya sıfır yoktur.

a) Sistemin açık döngü transfer fonksiyonunu (GH) bulunuz. **(18 puan)**

b) Sistemin kararlı olup olmadığını, grafiklerden nasıl anlaşıldığını belirterek söyleyiniz. **(7 puan)**



3) Açık döngü transfer fonksiyonu $GH = \frac{K}{s(s+6)}$ olan sistemin kapalı döngü kutuplarının, K'nın $[0,+\infty)$ aralığındaki değişimine göre yerlerini gösteren kök-yer eğrisini çiziniz. Sönüm oranı $\xi = 0,5$ isteniyorsa kökler ne olur? Bu kökler için K ne olur? **(25 puan)**

4) Transfer fonksiyonu $\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{4}{s^2 + 7s + 12}$ ile verilen sistem için uygun durum değişkenleri tanımlayarak bir durum uzayı modeli elde ediniz. **(25 puan)**

5) $A = \begin{bmatrix} -4 & 6 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ için e^{At} matrisini istediğiniz yolla bulunuz. **(25 puan)**

BAŞARILAR …

Yard. Doç. Dr. Ata SEVİNÇ

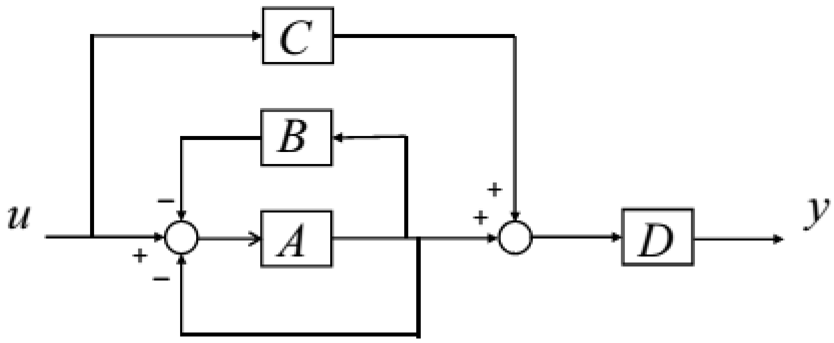
Makine Mühendisliği Bölümü

SİSTEM MODELLEME VE OTOMATİK KONTROL ARASINAV SORULARI

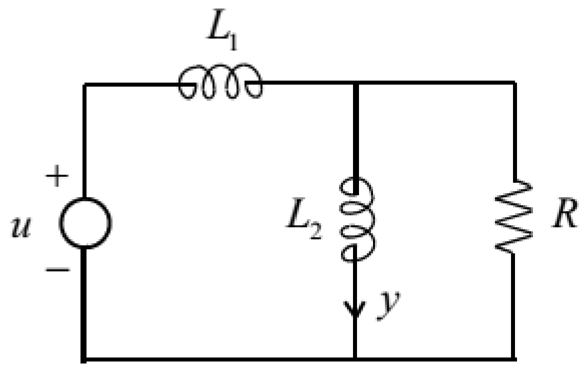
13.11.2015 Süre: 80 dakika

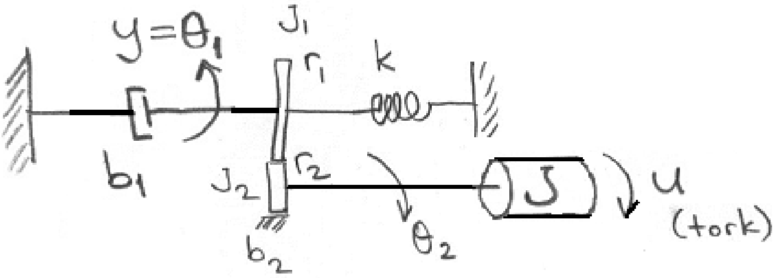
1) Transfer fonksiyonu $T(s)=\dfrac{2s}{s^2+4s+5}$ olan sistem nasıl bir filtreleme yapar (alçak geçiren, yüksek geçiren, band geçiren), neden? Sistem kararlı mıdır? Sistemin giriş(u)-çıkış(y) ilişkisini gösteren diferansiyel denklemi yazınız. **(15 puan)**

2) Aşağıda doğrusal zamanla değişmez (DZD) bir sistemin blok diyagramı verilmiştir. Her alt sistemin transfer fonksiyonu harflerle gösterilmiştir. Bütün sistemin transfer fonksiyonunu A, B, C, D cinsinden bulunuz. (Kesirli terim olursa pay veya paydasında başka kesir kalmasın). **(15 puan)**



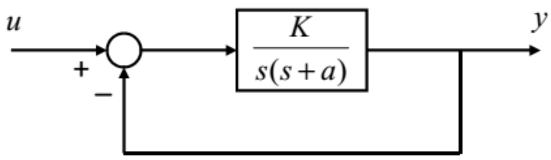
3) Yandaki ya da aşağıdaki sistemin önce giriş(u)-çıkış(y) ilişkisini gösteren diferansiyel denklemi bulunuz, sonra $G(s)=Y(s)/U(s)$ transfer fonksiyonunu çıkartınız. **(25 puan)**





4) Transfer fonksiyonu $T(s)=\dfrac{2s+6}{s+5}$ olan sistemin birim basamak tepkisini ($y_b(t)$) bulunuz ve çiziniz **(12 puan)**. Sistemin alçak frekans ($\lim \omega \to 0$) ve yüksek frekans ($\lim \omega \to \infty$) kazançlarını bulunuz. Bu kazançların $y_b(0^+)$ ve $y_b(+\infty)$ değerleriyle ilişkisini de yazınız. **(8 puan)**

5) Yandaki sistemin birim basamak tepkisinde maksimum aşma M = %10 ve %2'lik durulma zamanı $t_d = 5$ saniye isteniyor. Buna göre K ve a ne olmalıdır? Bu durumda yükselme zamanı t_y, sönüm katsayısı ξ, tepe zamanı (t_p) ne olur? **(25 puan)**



$$M=e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}}=e^{-\alpha\pi/\omega_d} \qquad t_d(\%2)\approx\frac{4}{\alpha} \qquad t_y=\frac{\pi-\phi}{\omega_d}$$

$$t_p=\frac{\pi}{\omega_d} \qquad \cos\phi=\frac{\alpha}{\omega_n}=\xi$$

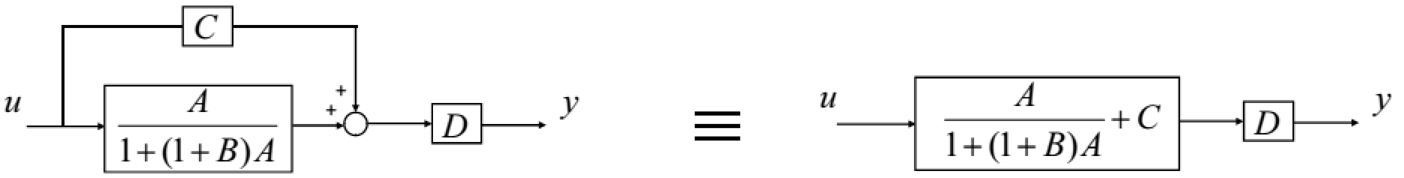
BAŞARILAR … **Yard. Doç. Dr. Ata SEVİNÇ**

Makine Mühendisliği Bölümü
SİSTEM MODELLEME VE OTOMATİK KONTROL ARASINAV CEVAP ANAHTARI
13.11.2015

1) $T(j\omega)=\dfrac{2j\omega}{(j\omega)^2+4(j\omega)+5}$ olup $\lim\limits_{\omega\to 0} T(j\omega)=0$ ve $\lim\limits_{\omega\to\infty} T(j\omega)=0$ ve $0<\omega<\infty$ için $T(j\omega)\neq 0$ olduğu için band geçiren filtre olarak davranır.

$$T(s)=\frac{2s}{s^2+4s+5}=\frac{Y(s)}{U(s)} \quad\to\quad \left(s^2+4s+5\right)Y(s)=2sU(s) \quad\to\quad \boxed{\ddot{y}(t)+4\dot{y}(t)+5y(t)=2\dot{u}(t)}$$

2) En alttaki birim geribesleme kolu ile B üzerinden geribesleme paraleldir. ($1+B$) diye negatif geribesleme yönünde birleştirilebilir.



Dolayısıyla transfer fonksiyon: $\boxed{\dfrac{Y(s)}{U(s)}=\dfrac{AD}{1+A+AB}+CD}$

3) Elektrik devresi:

L_1 üzerindeki akıma i_1 diyelim. L_1 ve L_2 üzerindeki gerilimlerin toplamı u olduğu için $u=L_1\dfrac{di_1}{dt}+L_2\dfrac{dy}{dt}$ Ayrıca R üzerindeki akım $\left(L_2\dfrac{dy}{dt}\right)\Big/R$ olduğu için $i_1=y+\dfrac{L_2}{R}\dfrac{dy}{dt} \quad\to\quad I_1(s)=Y(s)+\dfrac{sL_2}{R}Y(s)$

Bunu, ilk denklemin Laplace dönüşümünde yerine yazalım:

$$U(s)=sL_1I_1(s)+sL_2Y(s) \quad\to\quad U(s)=sL_1\left(1+\frac{sL_2}{R}\right)Y(s)+sL_2Y(s)=\left(\frac{L_1L_2}{R}s^2+(L_1+L_2)s\right)Y(s)=U(s)$$

En sağdaki eşitlikten $\boxed{\dfrac{Y(s)}{U(s)}=\dfrac{R}{L_1L_2s^2+R(L_1+L_2)s}}$

Mekanik sistem:

1. yol: Herşeyi 1. eksende düşünürsek, J_2, J ve b_2 'yi r_1^2/r_2^2 ile, giriş torkunu ise r_1/r_2 ile çarparak yansıtırız:

$$\left[J_1+\frac{r_1^2}{r_2^2}\left(J_2+J\right)\right]\ddot{\theta}_1+\left[b_1+\frac{r_1^2}{r_2^2}b_2\right]\dot{\theta}_1+k\theta_1=\frac{r_1}{r_2}u \quad\to\quad \frac{\Theta_1(s)}{U(s)}=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{r_1/r_2}{\left[J_1+\frac{r_1^2}{r_2^2}\left(J_2+J\right)\right]s^2+\left[b_1+\frac{r_1^2}{r_2^2}b_2\right]s+k}$$

2. yol: Herşeyi 2. eksende düşünürsek, J_1, k ve b_1 'i r_2^2/r_1^2 ile çarparak yansıtırız:

$$\left[\frac{r_2^2}{r_1^2}J_1+J_2+J\right]\ddot{\theta}_2+\left[\frac{r_2^2}{r_1^2}b_1+b_2\right]\dot{\theta}_2+\frac{r_2^2}{r_1^2}k\theta_2=u$$

Ayrıca $y=\left(r_2/r_1\right)\theta_2$ olduğundan,

$$\rightarrow \quad \frac{\frac{r_2}{r_1}\cdot\Theta_2(s)}{U(s)}=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{r_2/r_1}{\left[\frac{r_2^2}{r_1^2}J_1+J_2+J\right]s^2+\left[\frac{r_2^2}{r_1^2}b_1+b_2\right]s+\frac{r_2^2}{r_1^2}k}$$

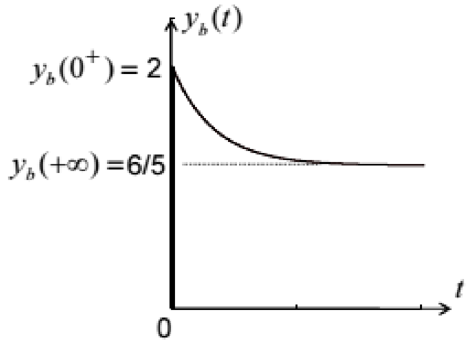
(İki çözümün de aynı sonucu verdiğini görünüz.)

4) Birim basamağın Laplace dönüşümü $1/s$ olduğu için

$$Y_b(s)=\frac{1}{s}T(s)=\frac{2s+6}{s(s+5)}=\frac{a}{s}+\frac{b}{s+5}$$

$$a=\frac{2\cdot 0+6}{0+5}=6/5 \quad \text{ve} \quad b=\frac{2\cdot(-5)+6}{-5}=4/5$$

$$\rightarrow \quad \boxed{y_b(t)=\frac{6}{5}+\frac{4}{5}e^{-5t} \quad , \quad t\geq 0}$$



Alçak frekans kazancı $\lim\limits_{\omega\to 0}T(j\omega)=T(0)=6/5=y_b(+\infty)$

Yüksek frekans kazancı $\lim\limits_{\omega\to\infty}T(j\omega)=T(\infty)=2=y_b(0^+)$

5) Kapalı döngü sistemin transfer fonksiyonu

$$T(s)=\frac{K/(s^2+as)}{1+1\cdot K/(s^2+as)}=\frac{K}{s^2+as+K}$$

Bunu $\dfrac{\omega_n^2}{s^2+2\alpha s+\omega_n^2}$ diye düşünürüz. Yani $K=\omega_n^2$ ve $a=2\alpha$.

(Dikkat: Yukarıdaki "*s*" Laplace dönüşümü değişkenidir. Aşağıdaki ifadelerdeki "*s*" ise saniyedir.)

Durulma zamanından $\alpha=4/t_d=4/(5s)=0{,}8s^{-1} \rightarrow \quad a=2\alpha=\boxed{a=1{,}6\ s^{-1}}$

$$-\ln M=\alpha\pi/\omega_d \quad \rightarrow \omega_d=\frac{0{,}8\cdot\pi}{-\ln 0{,}10}rad/s=1{,}09\,rad/s$$

$$K=\omega_n^2=\alpha^2+\omega_d^2=\left(0{,}8^2+1{,}09^2\right)rad^2/s^2=\boxed{K=1{,}83\,rad^2/s^2}$$

$$\sqrt{K}=\sqrt{1{,}83}\ rad/s=\omega_n=1{,}35\,rad/s \quad \rightarrow \quad \xi=\alpha/\omega_n=0{,}8/1{,}35=\boxed{\xi=0{,}59}$$

$$\rightarrow \quad \xi=0{,}59=\cos\phi \quad \rightarrow \quad \phi=53{,}8^\circ=53{,}8\cdot\frac{\pi}{180}\ rad=0{,}938\,rad=\phi$$

$$t_y=\frac{\pi-0{,}938}{1{,}09}s=\boxed{t_y=2{,}02s} \qquad\qquad t_p=\frac{\pi}{1{,}09}s=\boxed{t_p=2{,}88s}$$

Makine Mühendisliği Bölümü

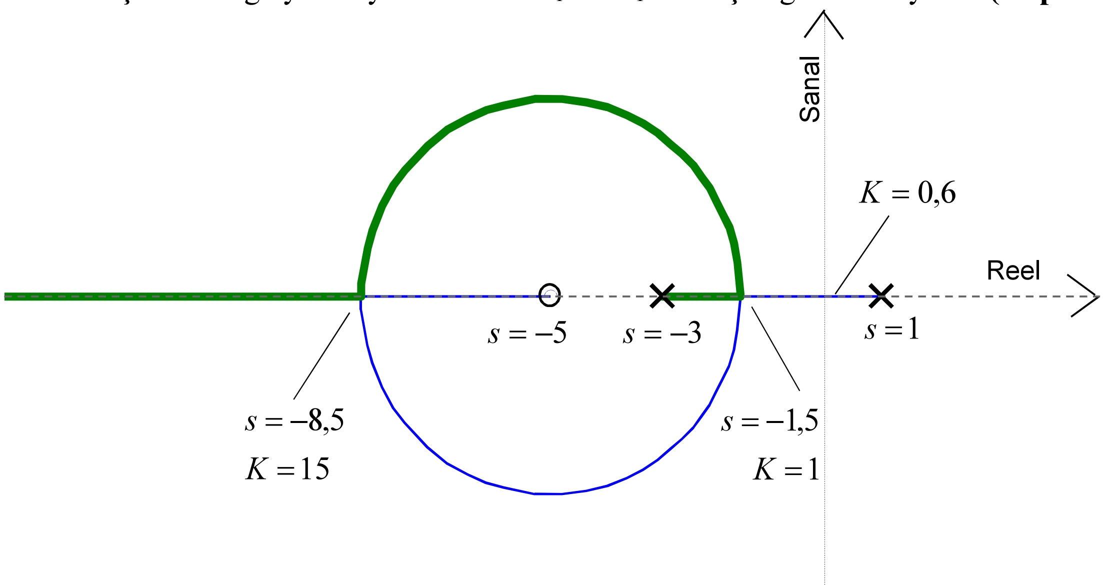
SİSTEM MODELLEME VE OTOMATİK KONTROL FİNAL SINAVI SORULARI

06.01.2016 Süre: 75 dakika

Sorulardan istediğiniz 4 tanesini cevaplayınız. Fazla cevaplarsanız en iyi dördü dikkate alınır.

1) Transfer fonksiyonu $1/(s^2+3s-6)$ olan bir sistemin çıkışını, istenen r değerine getirmek için gereken u değerini PI kontrol ile uygulamak için gereken düzenlemeyi blok şema ile gösteriniz. PI kazançları K_P ve K_I hangi şartları sağlamalıdır? Bu şartları sağlayan keyfi bir takım K_P ve K_I kazanç değerleri atayınız. **(25 puan)**

2)



Bir sistemin kapalı döngü transfer fonksiyonunun paydasını sıfır yapan köklerin, K 'nın $[0,+\infty)$ aralığındaki değişimine göre yerlerini gösteren kök-yer eğrisi yukarıdaki şekilde verilmiştir. Köklerden biri kalın düz, diğeri ince düz, reel ve sanal eksenler ise kesikli çizgilerle gösterilmiştir. Özel bazı noktalarda K değerleri yaklaşık olarak verilmiştir.

a) Açık döngü sıfır ve açık döngü kutupların değerlerini ve kök-yer eğrisinde bu noktalarda K 'nın değerlerini belirtiniz. **(7 puan)**

b) K 'nın negatif olmayan hangi değerleri için sistem kararlıdır? **(8 puan)**

c) En sağdaki kapalı döngü kutbun veya kutup çiftinin mümkün olduğunca solda olmasını istiyorsak K ne seçilmelidir ve bu seçim için en sağdaki kapalı döngü kutup(lar) ne olur? **(10 puan)**

3) Transfer fonksiyonu $\dfrac{Y(s)}{U(s)} = \dfrac{2}{s^2+3s+5}$ ile verilen sistem için uygun durum değişkenleri tanımlayarak bir durum uzayı modeli elde ediniz. **(25 puan)**

4) $A = \begin{bmatrix} -8 & -6 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ için e^{At} matrisini istediğiniz yolla bulunuz. **(25 puan)**

5) $\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad , \qquad y = \underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 3 \end{bmatrix}}_{C} x$

ile verilen sistemde y çıkışının, y^* sabit referans (talep) değerine, -8 ve -10 özdeğerleriyle yakınsaması, durum geribeslemeli kontrol uygulanarak isteniyor. Bunun için u girişi ne olmalıdır? **(25 puan)**

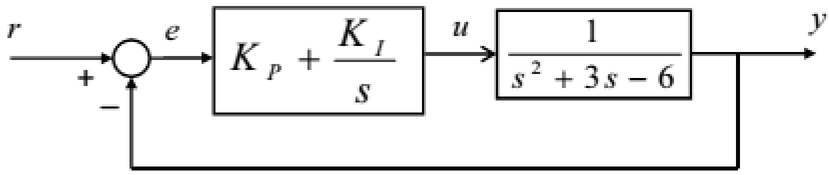
Yardımcı formül: Tek girişli tek çıkışlı denetleyici kanonik biçimli sistem için $C_{11} \neq 0$ şartıyla, $\boxed{K_r = \dfrac{\alpha_0}{C_{11}}}$

(α_0 istenen karakteristik polinomun sabit terimi)

BAŞARILAR … **Yard. Doç. Dr. Ata SEVİNÇ**

Makine Mühendisliği Bölümü
SİSTEM MODELLEME VE OTOMATİK KONTROL FİNAL SINAVI CEVAP ANAHTARI
06.01.2016

1)



PI kontrolörün (denetleyicinin) transfer fonksiyonu $K_P + \frac{K_I}{s} = \frac{K_P s + K_I}{s}$ ve birim geribeslemeli olduğundan, bütün sistemin transfer fonksiyonu:

$$\frac{\dfrac{K_P s + K_I}{s(s^2+3s-6)}}{1 + \dfrac{K_P s + K_I}{s(s^2+3s-6)} \cdot 1} = \frac{K_P s + K_I}{s^3 + 3s^2 + (K_P - 6)s + K_I}$$

Hatanın (e) hep sıfıra gitmesi ancak ve eğer (⇔) tüm sistem kararlı ise olur. Bütün sistemin transfer fonksiyonunun paydasına Routh-Hurwitz testi uygulayarak kararlılık şartlarını bulalım:

s^3	1	$(K_P - 6)$	0
s^2	3	K_I	0
s^1	$K_P - 6 - (K_I/3)$	0	
s^0	K_I		

Kararlılık için ilk sütunda işaret değişikliği olmamalıdır. Yani
$K_I > 0$ ve $K_P - 6 - (K_I/3) > 0$ olmalıdır. Diğer bir ifadeyle $0 < K_I < 3K_P - 18$ olmalıdır. Meselâ, $K_P = 8$, $K_I = 4$ olabilir.

2) a) x ile işaretli olanlar açık döngü kutup, o ile işaretli olan açık döngü sıfırdır. Açık döngü kutuplarda $K = 0$, açık döngü sıfırlarda ise $K = +\infty$ 'dur. Yani,

$s = 1$'de ve $s = -3$ 'te açık döngü kutup olup $K = 0$,

$s = -5$ 'te açık döngü sıfır olup $K = +\infty$.

b) $K = 0$ 'dan itibaren artırılırken, kapalı döngü kutupların (köklerin) biri $s = 1$'de, diğeri ve $s = -3$ 'te yer almaya başlar, K arttıkça birbirine yaklaşırlar. $K > 0{,}6$ olduğunda sağdaki kök sol yarı bölgeye geçer. $K > 0{,}6$ için her iki kök de sol yarı bölgede olduğundan ve başka kök (kapalı döngü kutup) olmadığından sistem kararlıdır ve aksi halde kararsızdır. Yani kararlılık için $K > 0{,}6$ olmalıdır ve bu yeterlidir.

c) Az önce birbirine yaklaştığından bahsettiğimiz iki kök, $K = 1$ olunca $s = -1{,}5$ 'te birleşirler ve K daha da artırılınca karmaşık eşlenik çift olarak birbirinden ayrılırlar. K daha da artırılınca çember üzerinde ilerleyerek $K = 15$ olunca tekrar birleşirler. K daha da artırılınca bu kez reel eksen üzerinde biri sağa, biri sola doğru ayrılırlar. Buna göre en sağdaki kapalı döngü kutbun, yani kökün, en solda olduğu durum, $K = 15$ ikendir ve her iki kök de $s_1 = s_2 = -8{,}5$ olur.

3) Sayısız farklı biçimde model elde edilebilir. Başlıca yollardan ikisini verelim.

1. yol: Denetleyici kanonik biçimi için durum değişkenlerini s uzayında şöyle tanımlayalım:

$$X_1(s) = \frac{1}{s^2+3s+5} U(s) \quad , \qquad X_2(s) = sX_1(s)$$

Buna göre $s^2X_1(s) + 3sX_1(s) + 5X_1(s) = U(s)$. Düzenlenirse $sX_2(s) + 3X_2(s) + 5X_1(s) = U(s)$.

Ayrıca çıkış $Y(s) = 2X_1(s)$ olur. İkinci ve son iki denklemleri sırasıyla zaman uzayında yazarsak:

$x_2 = \dot{x}_1$, $\dot{x}_2 + 3x_2 + 5x_1 = u$, $y = 2x_1$

Bunları matris biçiminde yazarak denetleyici kanonik biçimli durum uzayı modelini elde ederiz:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -3 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B} u \qquad y = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix}}_{C} x \qquad (\ D = 0\ )$$

2. yol: Gözleyici kanonik biçim için transfer fonksiyondan giriş-çıkış diferansiyel denklemini yazalım:

$$\ddot{y} + 3\dot{y} + 5y = 2u$$

$x_2 = y$,

$x_1 = \dot{x}_2 + 3y \qquad (= \dot{y} + 3y)$,

$0 = \dot{x}_1 + 5y - 2u$

Son iki denklemden $\dot{x}_1$ ve $\dot{x}_2$ çekilerek ve $y = x_2$ yazılarak,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -5 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}}_{B} u \qquad y = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}}_{C} x + \underbrace{0}_{D} \cdot u$$

gözleyici kanonik biçimi bulunur. Buradaki giriş ve çıkış hariç semboller, diğer yoldakinden farklı tanımlanmıştır.

4) 1. yol: $|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda + 8 & 6 \\ -3 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 7\lambda + 10 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda_1 = -2\,,\ \lambda_2 = -5\,.$

$$e^{-2t} = c_0 + c_1 \cdot (-2)$$
$$e^{-5t} = c_0 + c_1 \cdot (-5)$$

Bu iki denklemin farkı $e^{-2t} - e^{-5t} = 3c_1$ olduğundan $c_1 = \frac{1}{3}e^{-2t} - \frac{1}{3}e^{-5t}$ bulunur.

$c_0 = e^{-2t} + 2c_1$ olduğundan $c_0 = \frac{5}{3}e^{-2t} - \frac{2}{3}e^{-5t}$ bulunur.

$$e^{At} = c_0 I + c_1 A = \left(\frac{5}{3}e^{-2t} - \frac{2}{3}e^{-5t}\right)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \left(\frac{1}{3}e^{-2t} - \frac{1}{3}e^{-5t}\right)\begin{bmatrix} -8 & -6 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} -e^{-2t} + 2e^{-5t} & -2e^{-2t} + 2e^{-5t} \\ e^{-2t} - e^{-5t} & 2e^{-2t} - e^{-5t} \end{bmatrix}$$

Sağlaması, $t = 0$ için $e^{At} = I$ olduğunu görebiliriz.

2. yol: $e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\}$ $\qquad sI - A = \begin{bmatrix} s + 8 & 6 \\ -3 & s - 1 \end{bmatrix}$

$$|sI - A| = s^2 + 7s + 10 = (s + 2)(s + 5)$$

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{(s + 2)(s + 5)}\begin{bmatrix} s - 1 & -6 \\ 3 & s + 8 \end{bmatrix}$$

Her bir eleman basit kesirlere ayrılır. (Bildiğiniz için burada atlandı ama sınavda gösterilmesi istenir.)

$$(sI-A)^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{-1}{s+2}+\dfrac{2}{s+5} & \dfrac{-2}{s+2}+\dfrac{2}{s+5} \\ \dfrac{1}{s+2}-\dfrac{1}{s+5} & \dfrac{2}{s+2}-\dfrac{1}{s+5} \end{bmatrix}$$

Ters Laplace dönüşümü alınınca önceki yönteminkiyle aynı sonuç bulunur:

$$e^{At} = \begin{bmatrix} -e^{-2t}+2e^{-5t} & -2e^{-2t}+2e^{-5t} \\ e^{-2t}-e^{-5t} & 2e^{-2t}-e^{-5t} \end{bmatrix}$$

5) Sistem denetleyici kanonik biçimde verilmiştir. İstenen özdeğerler için karakteristik polinom: $(\lambda+8)(\lambda+10)=\lambda^2+18\lambda+80$

$k_1 = 80-1 = \boxed{k_1 = 79}$

$k_2 = 18-2 = \boxed{k_2 = 16}$

Sağlaması: $A-BK = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 79 & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1-79 & -2-16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -80 & -18 \end{bmatrix} = A_c$

$$\det(\lambda I - A_c) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 80 & \lambda+18 \end{vmatrix} = \lambda^2+18\lambda+80 \ \checkmark$$

$\alpha_0 = 80 \qquad K_r = \dfrac{\alpha_0}{C_{11}} = \dfrac{80}{4} = \boxed{K_r = 20}$

Sonuç: $u = -Kx + K_r y^* = \boxed{u = -79x_1 - 16x_2 + 20y^*}$ olmalıdır.