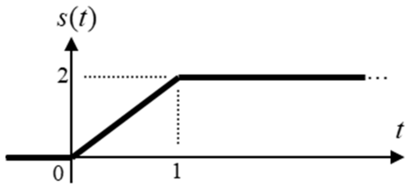
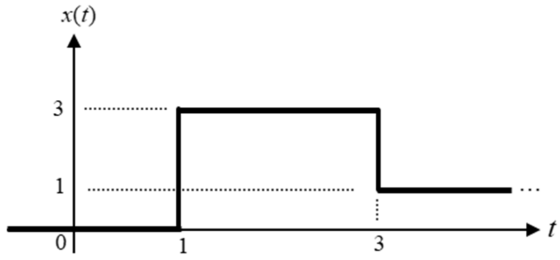
SİNYALLER VE SİSTEMLER BÜTÜNLEME SINAVI SORULARI

23.01.2020 Süre: 75 dakika

1. ve 2. sorular zorunlu, diğerleri seçmelidir. Üçten fazla seçmeli cevaplarsanız en iyi üçü dikkate alınır.

1)

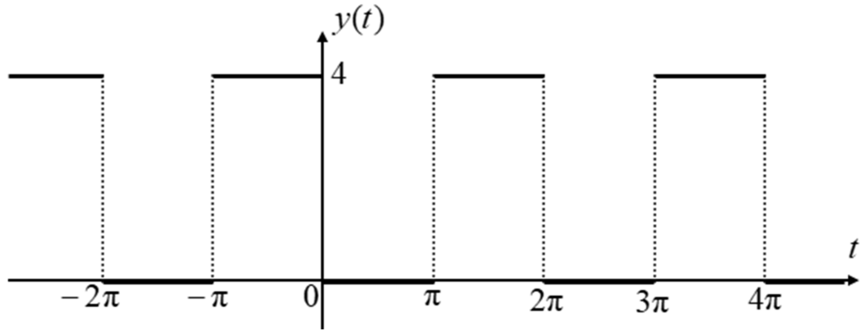




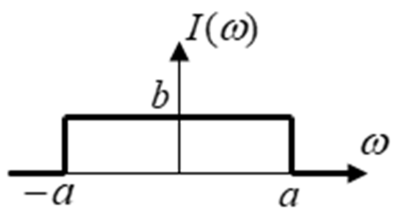
DZD bir sistemin birim basamak tepkisi $s(t)$ ve girişi $x(t)$ yukarıda verilmiştir. Sistem çıkışı $y(t)$ ne olur? Çiziniz **(10 puan).** Bu sistemin birim darbe tepkisi $h(t)$'yi çiziniz **(6 puan)**. Bu sistem nedensel midir, kararlı mıdır, bellekli midir? DZD sistemlere özel ifadelerle gerekçesini ortaya koyarak cevaplayınız **(9 puan)**.

2) Giriş(x)-çıkış(y) ilişkisi $\dot{y}(t) + 5y(t) = x(t-2)$ ile verilen nedensel sistemin transfer fonksiyonunu ve birim darbe tepkisini bulunuz. **(7+8 puan)**

3) Sağdaki şekildeki $T_0 = 2\pi$ ile periyodik $y(t)$ sinyalini Fourier serisine açınız (sıfırdan farklı en az 4 terimi ile seriyi yazınız). **(20 puan)**



4) $R = 5\Omega$ 'luk bir direnç üzerindeki $i(t)$ akım sinyalinin genlik spektrumu sağda verilmiştir. $a = 1000\pi$ rad/s ve $b = 6As$ 'dir. Bu direnç üzerinde $-\infty < t < +\infty$ zaman aralığında harcanan toplam enerjiyi bulunuz. **(20 puan)**



5) Doğrusal ve zamanla değişmez (DZD) bir sistemin birim darbe tepkisi $h[n]$ ve girişi $x[n]$ aşağıda verilmiştir.

$$h[1] = 7\,,\quad h[2] = 4\,,\quad h[3] = -6\,,\quad h[4] = 2\,; \qquad \forall n < 1 \text{ ve } \forall n > 4 \text{ için } h[n] = 0$$
$$x[-2] = -5\,,\quad x[-1] = 0\,,\quad x[0] = -8\,,\quad x[1] = 3\,; \qquad \forall n < -2 \text{ ve } \forall n > 1 \text{ için } x[n] = 0$$

$h[n]$, $x[n]$ ve sistem çıkışı $y[n]$ 'in her birinin Z-dönüşümlerini bulunuz ve $y[n]$'i <u>çiziniz</u>. **(20 puan)**

6) Giriş(x)-çıkış(y) ilişkisi

$$y[n+2] + 3y[n+1] - 4y[n] = x[n+2] - 5x[n+1]$$

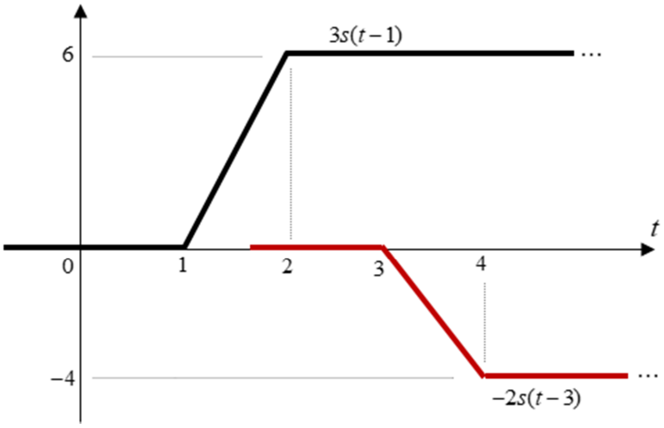
ile verilen nedensel sistemin transfer fonksiyonunu **(5 puan)** ve birim darbe tepkisini **(15 puan)** bulunuz.

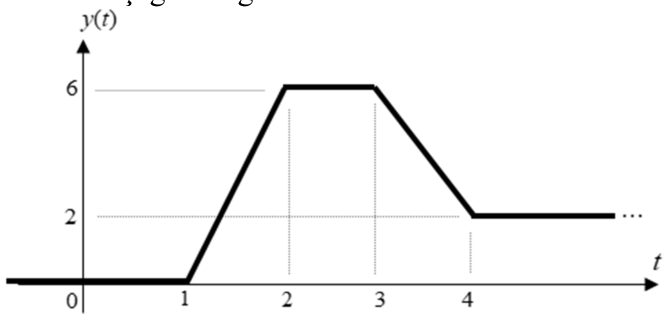
7) $x[0] = 0$, $x[1] = -12$, $x[2] = 0$, $x[3] = 20$ ve $N = 4$ ile periyodik olan $x[n]$ sinyalinin Fourier serisini, katsayılarını bulup yerine koyarak yazınız. **(20 puan)**

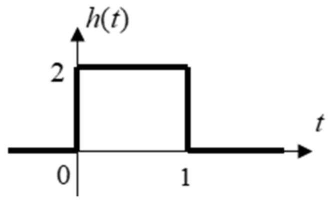
BAŞARILAR …

SİNYALLER VE SİSTEMLER BÜTÜNLEME SINAVI CEVAP ANAHTARI
23.01.2020

1) $x(t) = 3u(t-1) - 2u(t-3)$ diye yazılabilir. Bu yüzden
$y(t) = 3s(t-1) - 2s(t-3)$ olur. Tek tek ve bileşke grafikleri aşağıdaki gibi bulunur.







Ayrıca $h(t) = \frac{ds(t)}{dt} = \begin{cases} 2 & 0 \le t < 1 \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$

$\forall t < 0$ için $h(t) = 0$ olduğundan nedenseldir. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|dt = 2 < \infty$ yani sonlu olduğundan kararlıdır.
Bazı $t \neq 0$ için $h(t) \neq 0$, bu yüzden belleklidir.

2) $j\omega Y(\omega) + 5Y(\omega) = e^{-j2\omega}X(\omega)$ (zamanda ötelenme özelliği) $\rightarrow$ $\frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = H(\omega) = \frac{1}{j\omega+5}e^{-j2\omega}$ transfer fonksiyondur. $F(\omega) = \frac{1}{j\omega+5}$ dersek $H(\omega) = e^{-j2\omega}F(\omega)$ $\rightarrow$ $h(t) = f(t-2)$ olur.
$f(t) = e^{-5t}u(t)$ olduğu açıkça görülmektedir. Dolayısıyla birim darbe tepkisi $h(t) = e^{-5(t-2)}u(t-2)$

3) $y(t)$ tek de değildir çift de değildir; fakat $y(t) - 2 = x(t)$ sinyali tektir. Bu yüzden $x(t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin(k\omega_0 t)$
Ayrıca $\omega_0 = 2\pi/2\pi = 1$.

$$b_k = \frac{4}{T_0}\int_0^{\pi} x(t)\sin(kt)\,dt = \frac{4}{2\pi}\int_0^{\pi}(0-2)\sin(kt)\,dt = \frac{4}{\pi}\left[\frac{\cos(kt)}{k}\right]_0^{\pi} = \frac{4}{k\pi}[\cos k\pi - 1]$$

$b_k = \frac{4}{k\pi}((-1)^k - 1) = \begin{cases} -8/(k\pi) & k \text{ tekse} \\ 0 & k \text{ çiftse} \end{cases}$ (zaten $x(t)$ kısmı aynı zamanda tek harmonik simetrilidir.)

$y(t) = 2 + \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin kt$ yani $a_0 = 4$ ve $a_k = 0\ \forall k > 0$. Sonuç:

$$y(t) = 2 - \frac{8}{\pi}\left(\frac{\sin \pi t}{1} + \frac{\sin 3\pi t}{3} + \frac{\sin 5\pi t}{5} + \cdots\right)$$

4) $$E = R\int_{-\infty}^{+\infty}|i(t)|^2dt = \frac{R}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|I(\omega)|^2d\omega = \frac{R}{2\pi}\int_{-a}^{a}b^2d\omega = \frac{R}{2\pi}[b^2\omega]_{-a}^{+a} = \frac{R}{2\pi}2ab^2 = \frac{ab^2R}{\pi}$$

$$E = \frac{1000\pi \times 6^2 \times 5}{\pi}J = 180 \text{ kJ}$$

5) $\mathcal{Z}\{h[n]\} = H(z) = 7z^{-1} + 4z^{-2} - 6z^{-3} + 2z^{-4}$

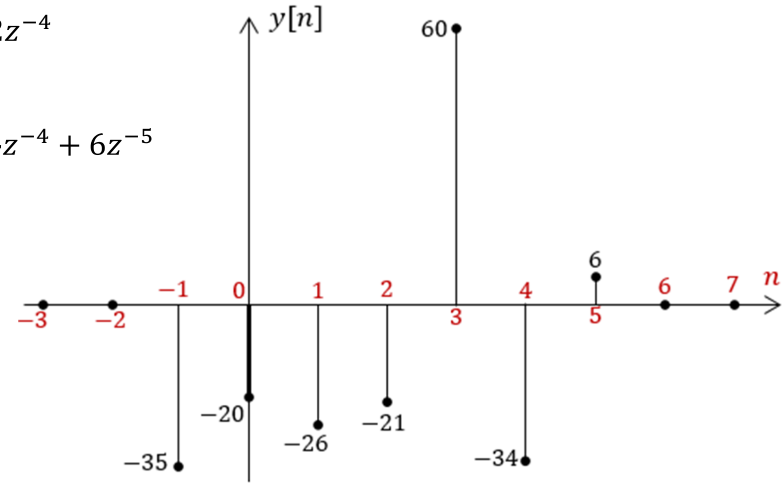
$\mathcal{Z}\{x[n]\} = X(z) = -5z^2 + 0 \cdot z - 8 + 3z^{-1}$

$Y(z) = H(z)X(z)$

$= -35z - 20 - 26z^{-1} - 21z^{-2} + 60z^{-3} - 34z^{-4} + 6z^{-5}$

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[n]\, z^{-n}$$

(Burada doğrudan sonuç yazıldı ama öğrenciden bunun çıkartılışı da isteniyordu (önceki cevap anahtarlarındaki gibi).



6) Transfer fonksiyon $H(z) = \frac{z^2-5z}{z^2+3z-4}$; $|z| > 4$

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{z-5}{(z-1)(z+4)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-(-4)}$$

$$A = \frac{1-5}{1+4} = -\frac{4}{5} \qquad B = \frac{-4-5}{-4-1} = \frac{9}{5}$$

$$H(z) = -\frac{4}{5}\cdot\frac{z}{z-1} + \frac{9}{5}\cdot\frac{z}{z-(-4)}\ ; \quad |z| > 4 \qquad \rightarrow \quad h[n] = \left(-\tfrac{4}{5}1^n + \tfrac{9}{5}(-4)^n\right)u[n] = \left(-\tfrac{4}{5} + \tfrac{9}{5}(-4)^n\right)u[n]$$

7) $\omega_o = \frac{2\pi}{N} = \frac{\pi}{2}$ olmak üzere $x[n] = \sum_{k=0}^{3} c_k e^{jk\pi n/2}$ Fourier serisidir. Katsayılar şöyle bulunur:

$$c_k = \frac{1}{4}\cdot\sum_{n=0}^{3} x[n] e^{-jk\pi n/2}$$

Ortalama değer: $c_0 = \frac{x[0]+x[1]+x[2]+x[3]}{4} = \frac{0-12+0+20}{4} = 2 = c_0$

$$c_1 = \frac{1}{4}\cdot\sum_{n=0}^{3} x[n] e^{-j1\pi n/2} = \frac{x[0]\overbrace{e^{-j1\pi\cdot 0/2}}^{1} + x[1]\overbrace{e^{-j1\pi\cdot 1/2}}^{-j} + x[2]\overbrace{e^{-j1\pi\cdot 2/2}}^{-1} + x[3]\overbrace{e^{-j1\pi\cdot 3/2}}^{j}}{4}$$

$$c_1 = \frac{0 - j(-12) - 0 + j20}{4} = j8 = c_1 \quad \rightarrow \quad c_1^* = c_3 = -j8$$

$$c_2 = \frac{1}{4}\cdot\sum_{n=0}^{3} x[n] e^{-j2\pi n/2} = \frac{x[0]\overbrace{e^{-j2\pi\cdot 0/2}}^{1} + x[1]\overbrace{e^{-j2\pi\cdot 1/2}}^{-1} + x[2]\overbrace{e^{-j2\pi\cdot 2/2}}^{1} + x[3]\overbrace{e^{-j2\pi\cdot 3/2}}^{-1}}{4}$$

$$c_2 = \frac{0-(-12)+0-20}{4} = -2 = c_2$$

Tüm katsayıları Fourier serisinde yerine yazalım:

$$x[n] = \sum_{k=0}^{3} c_k e^{jk\pi n/2} = c_0 e^{j0\pi n/2} + c_1 e^{j1\pi n/2} + c_2 e^{j2\pi n/2} + c_3 e^{\overbrace{j3\pi n/2}^{\equiv -j\pi n/2}}$$

$$\boxed{x[n] = 2 + j8e^{j\pi n/2} - 2e^{j\pi n} - j8e^{-j\pi n/2}}$$