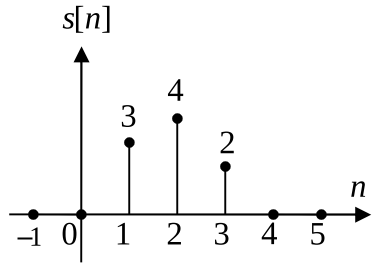
SİNYALLER VE SİSTEMLER ARASINAV SORULARI
21.11.2011 Süre: 80 dakika

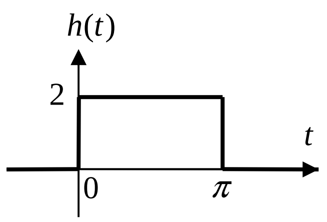
1) $x(t) = 2u(t+2) - 4u(t-2)$ sinyalinin tek ve çift bileşenlerini çiziniz. **(15 puan)**

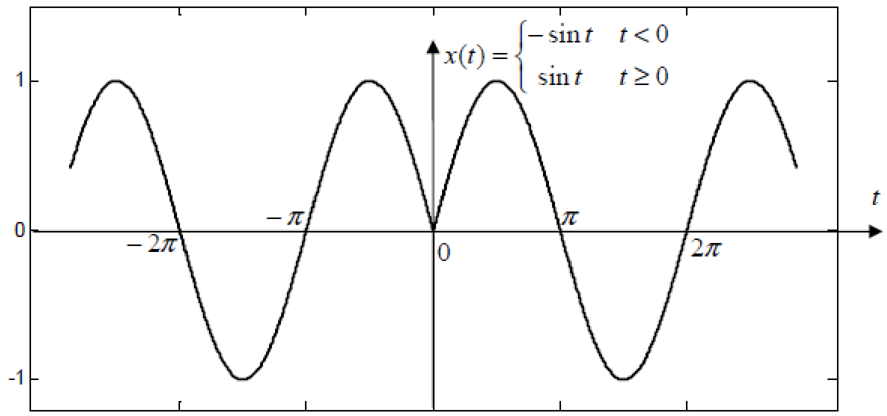
2) Giriş(x)-çıkış(y) ilişkisi $y(t) = \int_{t-2}^{t} x(\tau+1)d\tau$ ile verilen sistem doğrusal mıdır, bellekli midir, nedensel midir, kararlı mıdır, zamanla değişen midir? **(5x2 = 10 puan)** (Açıklama beklenmemektedir.)

3) Birim basamak tepkisi şekildeki $s[n]$ sinyali olan doğrusal zamanla değişmez bir sistemin girişine de $x[n] = s[n]$ sinyali uygulanırsa çıkışı ne olur? Çiziniz. **(20 puan)** İstediğiniz yolla hesaplayınız.
Yol gösterme: Önce sistemin birim darbe tepkisini bulmanız kolaylıktır.



4) Birim darbe tepkisi $h(t)$ ve girişi $x(t)$ şekillerde verilen doğrusal zamanla değişmez sistemin çıkışını bulunuz. **(25 puan)** (Çizmeniz beklenmemektedir.)





5) Giriş(x)-çıkış(y) ilişkisi

$$\dot{y}(t) + 2y(t) = x(t)$$

ile verilen sistemin çıkışını, $x(t) = u(t)\cos t$ girişi ve $y(0) = 0$ başlangıç şartı için bulunuz. **(15 puan)**

6) Giriş(x)-çıkış(y) ilişkisi

$$2y[n+2] - 2y[n+1] + 0{,}5y[n] = 6x[n-5]$$

ile verilen nedensel sistemin birim darbe tepkisini bulunuz. **(15 puan)**

BAŞARILAR … **Yard. Doç. Dr. Ata SEVİNÇ**

SİNYALLER VE SİSTEMLER ARASINAV CEVAP ANAHTARI
21.11.2011

1) $x(t) = 2u(t+2) - 4u(t-2) = \begin{cases} 0 & t < -2 \\ 2 & -2 \le t < 2 \\ -2 & t \ge 2 \end{cases}$

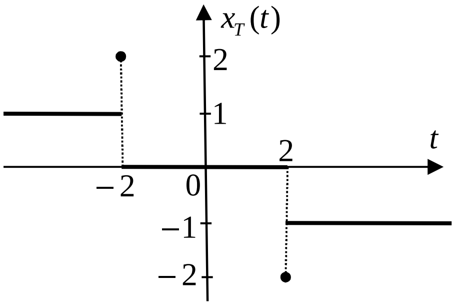
Tek ve çift bileşenlerin önce sağ yarılarını bulalım:

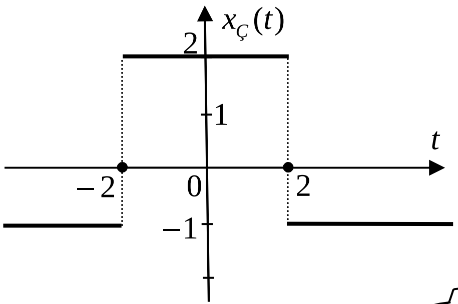
$0 \le t < 2$ için $x_T(t) = (2-2)/2 = 0$ $\qquad x_Ç(t) = (2+2)/2 = 2$

$t = 2$ için $x_T(2) = (-2-2)/2 = -2$ $\qquad x_Ç(2) = (-2+2)/2 = 0$

$t > 2$ için $x_T(t) = (-2-0)/2 = -1$ $\qquad x_Ç(t) = (-2+0)/2 = -1$

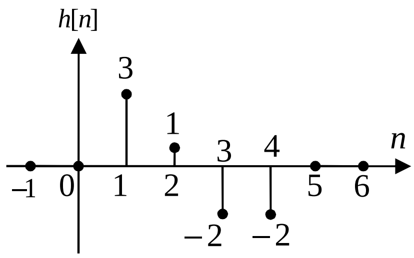
Bunların simetriklerini de alarak çizelim:





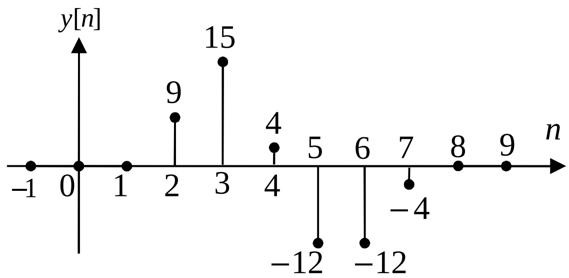
2) Sistem belleklidir.
Doğrusaldır.
Nedensel değildir.
Kararlıdır (her sonlu sinyalin her sonlu zaman aralığı boyunca integrali sonludur).
Zamanla değişmez (sınırlarda sonlu sabit yok).

3) Birim darbe tepkisi: $h[n] = s[n] - s[n-1]$

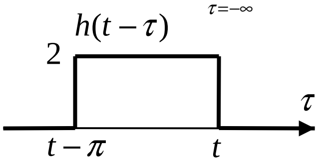


Çıkış $y[n] = x[n] * h[n]$. Bunu klasik çarpmaya benzer yolla yapalım:

		3	1	(-2)	(-2)		Sonuncusu $h[4]$
×			3	4	2		Sonuncusu $x[3] = s[3]$
			6	2	(-4)	(-4)	
		12	4	(-8)	(-8)		
+	9	3	(-6)	(-6)			
9	15	4	(-12)	(-12)	(-4)		Sonuncusu $y[3+4] = y[7]$



4) $y(t) = x(t) * h(t) = \int_{\tau=-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$



<u>$t < 0$ için :</u>

$$x(\tau)h(t-\tau) = \begin{cases} -2\sin\tau & t-\pi \le \tau \le t \\ 0 & \text{diger} \end{cases}$$

$$y(t) = \int_{t-\pi}^{t} -2\sin\tau \, d\tau = 2\cos\tau \,\Big|_{t-\pi}^{t} = 2\cos t - 2\cos(t-\pi)$$

$$y(t) = 4\cos t$$

<u>$0 \le t < \pi$ için :</u>

$$x(\tau)h(t-\tau) = \begin{cases} -2\sin\tau & t-\pi \le \tau \le 0 \\ 2\sin\tau & 0 \le \tau \le t \\ 0 & \text{diger} \end{cases}$$

$$y(t) = \int_{t-\pi}^{0} -2\sin\tau \, d\tau + \int_{0}^{t} 2\sin\tau \, d\tau = 2\cos\tau \,\Big|_{t-\pi}^{0} - 2\cos\tau \,\Big|_{0}^{t} = 2 - 2\cos(t-\pi) - 2\cos t + 2 \qquad \rightarrow \quad y(t) = 4$$

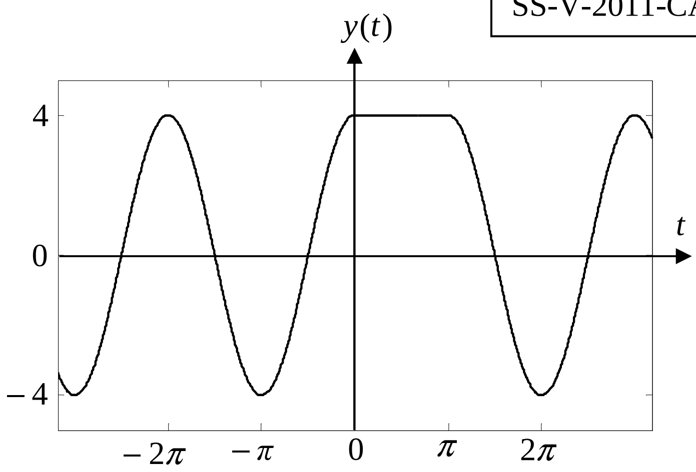
$t \geq \pi$ için :

$$x(\tau)h(t-\tau) = \begin{cases} 2\sin\tau & t-\pi \leq \tau \leq t \\ 0 & \text{diger} \end{cases}$$

$$y(t) = \int_{t-\pi}^{t} 2\sin\tau \, d\tau = -2\cos\tau \Big|_{t-\pi}^{t}$$

$$= -2\cos t + 2\cos(t-\pi) \rightarrow \quad y(t) = -4\cos t$$

Sonuç: $y(t) = \begin{cases} 4\cos t & t < 0 \\ 4 & 0 \leq t < \pi \\ -4\cos t & t \geq \pi \end{cases}$



5) Diferansiyel denklemin sağ tarafı $u(t)$ ile çarpım halinde ve 0 anındaki tüm standart başlangıç şartları sıfır (burada 1. Mertebe olduğu için yalnızca $y(0) = 0$). Bu yüzden $t \geq 0$ çözümünü $u(t)$ ile çarpacağız.

$$\lambda + 2 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = -2$$

$t \geq 0$ için homojen çözüm: $y_h(t) = Ae^{-2t}$

sağ taraf = $x(t) = \cos t$ için $\mp j \notin \{\lambda\}$, dolayısıyla $\quad y_ö(t) = b\sin t + c\cos t$

$$\dot{y}_ö(t) = b\cos t - c\sin t \quad \rightarrow \quad \dot{y}_ö(t) + 2y_ö(t) = (b+2c)\cos t + (-c+2b)\sin t = \cos t$$

$$b + 2c = 1$$

$$2b - c = 0 \quad \rightarrow \quad b = 1/5, \quad c = 2/5 \quad \rightarrow \quad y_ö(t) = \frac{1}{5}\sin t + \frac{2}{5}\cos t$$

$$y(t) = Ae^{-2t} + \frac{1}{5}\sin t + \frac{2}{5}\cos t$$

$$y(0) = 0 = A + 2/5 \quad \rightarrow \quad A = -2/5$$

Tüm zamanlar için çıkış: $y(t) = \dfrac{1}{5}\left(-2e^{-2t} + \sin t + 2\cos t\right)u(t)$

6) $n > 5$ için $\quad 2h[n+2] - 2h[n+1] + 0{,}5h[n] = 0 \quad$ denklemini $h[6] = 0$ ve $h[7] = 6/2 = 3$ için çözeriz:

$$2\lambda^2 - 2\lambda + 0{,}5 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 1/2$$

$$\rightarrow \quad h[n] = \frac{(A_1 + A_2 n)}{2^{n-7}} \qquad \rightarrow \quad h[6] = 2A_1 + 12A_2 = 0$$

$$h[7] = A_1 + 7A_2 = 3 \quad \rightarrow \quad A_1 = -18 \ , \quad A_2 = 3$$

Tüm zamanlar için yazılırsa: $\boxed{h[n] = \dfrac{(3n-18)}{2^{n-7}}u[n-7]}$

Başka gösterimler de mümkündür. Meselâ,

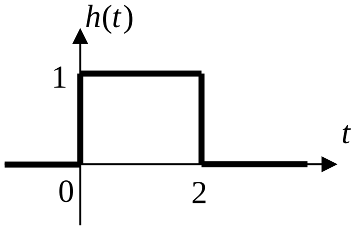
$$h[n] = \frac{(6n-36)}{2^{n-6}}u[n-6] = \frac{(384n-2304)}{2^n}u[n-6] = \frac{(384n-2304)}{2^n}u[n-7]$$

SİNYALLER VE SİSTEMLER FİNAL SINAVI SORULARI
04.01.2012 Süre: 80 dakika
3. ve 4. sorular zorunludur. Diğer sorulardan istediğiniz 3 tanesini çözünüz.

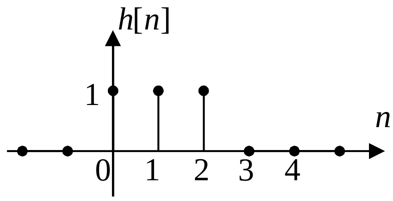
1) a) a bir tamsayı olmak üzere $x[n]*\delta[n-a]=x[n-a]$ olduğunu, konvolüsyon toplamı formülünü kullanarak ispatlayınız. **(10 puan)**

b) Birim darbe tepkisi aşağıdaki $h(t)$ olan doğrusal zamanla değişmez (DZD) sistem bellekli midir, nedensel midir, kararlı mıdır? Her birini DZD sistemlere özel kuralını uygulayarak belirtiniz. **(3+3+4=10 puan)**

2) Birim darbe tepkisi yandaki $h(t)$ olan (DZD) sistemin girişine $x(t)=h(t)$ sinyali uygulanırsa alınacak çıkış sinyalini ($y(t)$) çiziniz. **(20 puan)**



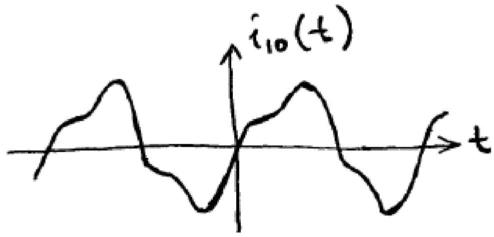
3) Birim darbe tepkisi $h[n]$ yanda verilen DZD sistemin girişine $x[n]=(-1)^n \quad \forall n$ sinyali uygulanırsa çıkış fonksiyonu ne olur? (Çizim beklenmemektedir.) **(25 puan)**



4) Primerine AC gerilim uygulanan yüksüz bir trafonun primer akımı şekildeki gibidir. Bu akımın gerçel ve karmaşık Fourier serileri

$$i_{10}(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{+\infty}\left(a_k\cos(k\omega t)+b_k\sin(k\omega t)\right)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}c_k e^{jk\omega t}$$

biçimlerinde düşünüldüğünde buradaki katsayıların hangilerinin sıfır olduğu söylenebilir? **(15 puan)**



(“a_0” , “c_0” , “$a_k \ \forall k$” , “$b_k \ \forall k$” , “tek k’lar için hem a_k hem b_k hem c_k” , “çift k’lar için hem a_k hem b_k hem c_k” , “tüm negatif k’lar için c_k” , “tüm pozitif k’lar için c_k” seçeneklerinden sıfır olanların hepsini seçiniz.)

5) Giriş(x)-çıkış(y) ilişkisi aşağıda verilen nedensel sistemin transfer fonksiyonunu **(6 puan)** ve birim darbe tepkisini **(14 puan)** bulunuz.

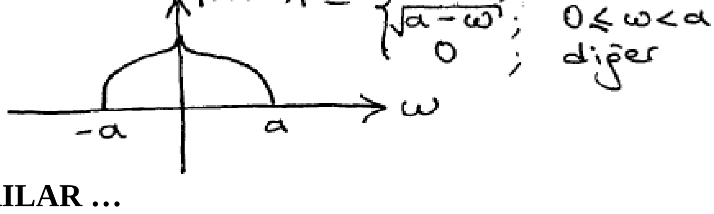
$$2\ddot{y}(t)+8\dot{y}(t)+6y(t)=12\dot{x}(t)+4x(t)$$

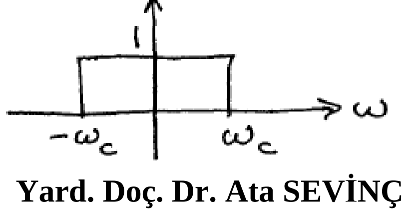
6) Giriş(x)-çıkış(y) ilişkisi

$$2y[n+1]-y[n]=x[n+1]+x[n]$$

ile verilen nedensel sistemin transfer fonksiyonunu **(5 puan)** ve $x[n]=u[n]$ girişi için enerjisiz başlangıçlı çıkışını **(15 puan)** Z ve/veya Z^{-1} dönüşümleriyle bulunuz.

7) Kaydedilmiş bir ses sinyalinin ($x(t)$) genlik spektrumu $|X(\omega)|$ aşağıdaki gibidir. Bu sinyali kazanç spektrumu $|H(\omega)|$ aşağıdaki gibi olan ideal bir alçak geçiren süzgeçten geçirerek $y(t)$ sinyali elde edilecektir. $y(t)$ sinyalinin enerjisinin, $x(t)$ sinyalinin enerjisinin yarısı olması isteniyorsa alt kesim frekansı ω_c ne olmalıdır? **(20 puan)**





BAŞARILAR … **Yard. Doç. Dr. Ata SEVİNÇ**

SİNYALLER VE SİSTEMLER FİNAL SINAVI CEVAP ANAHTARI
04.01.2012

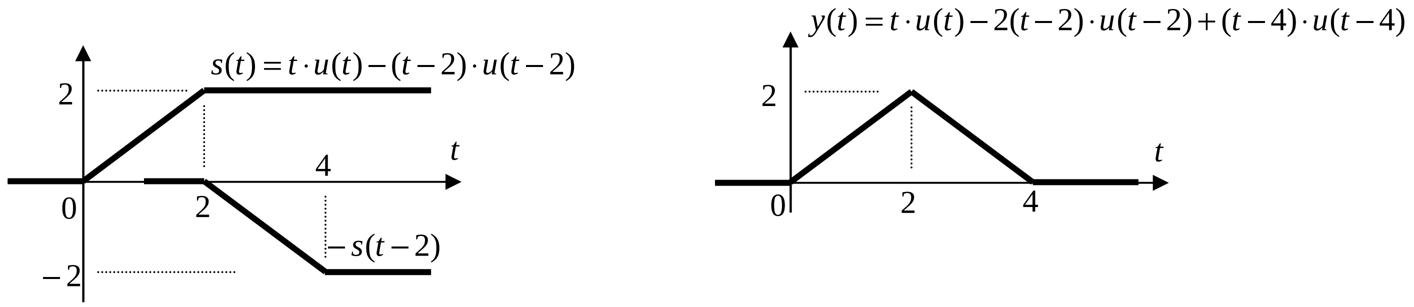
1) a) $x[n]*\delta[n-a]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[n-k]\cdot\delta[k-a]$ Darbe $k=a$ dışında sıfır olduğu için $x[n-k]$'da $k=a$ yazılır ve bu $x[n-a]$ sabit (k'ya göre) olduğu için toplamın dışına çıkar: $x[n]*\delta[n-a]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[n-a]\cdot\delta[k-a]=x[n-a]\underbrace{\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta[k-a]}_{1}=x[n-a]$ olur.

b) $h(t)=0 \quad \forall t<0$ olduğundan dolayı DZD sistem nedenseldir.

$h(t)\neq K\delta(t)$ olduğundan (yani $h(t)$ ötelenmemiş birim darbe cinsinden yazılamayacağı için) sistem belleklidir. Daha basitçesi: Bazı $t\neq 0$ için $h(t)\neq 0$ olduğu için.

$\int_{-\infty}^{+\infty}|h(t)|\,dt=2\times 1=2<\infty$ olduğundan sistem kararlıdır.

2) $x(t)=u(t)-u(t-2)$ olduğundan $y(t)=s(t)-s(t-2)$ olur, burada $s(t)$ sistemin birim basamak tepkisi olup $s(t)=\int_{\tau=-\infty}^{t}h(\tau)d\tau$ biçiminde hesaplanır. Yani t anındaki değeri h fonksiyonu grafiğinde t 'nin sol tarafında biriken alandır. Buna göre $s(t)$ ile $-s(t-2)$ aşağıda soldaki şekildeki gibi olur. Bu iki bileşenin toplamıyla da $y(t)$ aşağıda sağdaki gibi bulunur.



3) Çıkış: $y[n]=h[n]*x[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}h[k]\cdot x[n-k]=h[0]\cdot x[n]+h[1]\cdot x[n-1]+h[2]\cdot x[n-2]$

$$y[n]=x[n]+x[n-1]+x[n-2]=(-1)^n+\underbrace{(-1)^{n-1}+(-1)^{n-2}}_{0}=\boxed{y[n]=(-1)^n \quad \forall n}$$

4) Sinyalin ortalaması sıfırdır ($c_0=a_0/2=0$). Tek sinyal değildir (orijinle sağdaki ilk tepe arasında büküm var, soldaki ilk tepe arasında yok). Çift sinyal hiç değildir (orijinin hemen sağı pozitif, hemen solu negatif). Yani her a_k veya her b_k'nın sıfır olduğu söylenemez. Sinyalin bir yarı periyodu, diğer yarı periyodunun negatifi değerlidir ($x(t+\frac{T_0}{2})=-x(t)$), yani tek harmonik simetrisi vardır. Sonuçta sıfır olanlar:

"a_0", "c_0", "çift k'lar için hem a_k hem b_k hem c_k"

Son iki seçenek ise sıfır sinyal hariç gerçel sinyallerde olmaz. Çünkü gerçel sinyallerde $c_{-k}=c_k^*$ olduğundan herhangi bir k için c_k sıfır olsa c_{-k} da sıfır olurdu.

5) Transfer fonksiyon : $\frac{12(j\omega)+4}{2(j\omega)^2+8(j\omega)+6}=\boxed{H(\omega)=\frac{6(j\omega)+2}{(j\omega+1)(j\omega+3)}}=\frac{A}{(j\omega+1)}+\frac{B}{(j\omega+3)}$

$$A=\left.\frac{6(j\omega)+2}{(j\omega+3)}\right|_{j\omega\leftarrow -1}=\frac{-6+2}{-1+3}=-2 \qquad B=\left.\frac{6(j\omega)+2}{(j\omega+1)}\right|_{j\omega\leftarrow -3}=\frac{-18+2}{-3+1}=8$$

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{-2}{(j\omega+1)} + \frac{8}{(j\omega+3)}\right\} = \quad -2e^{-t}u(t) + 8e^{-3t}u(t) = \boxed{h(t) = \left(8e^{-3t} - 2e^{-t}\right)u(t)}$$

6) Transfer fonksiyon : $\dfrac{z+1}{2z-1} = \boxed{H(z) = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{z+1}{z-(1/2)} \quad ; \quad |z| > 1/2}$

$$x[n] = u[n] = 1^n u[n] \quad \Rightarrow \quad X(z) = \frac{z}{z-1} \quad ; \quad |z| > 1$$

$$Y(z) = X(z)H(z) = \frac{1}{2}\cdot\frac{z(z+1)}{(z-1)(z-1/2)} \quad ; \quad |z| > 1$$

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{1}{2}\cdot\frac{(z+1)}{(z-1)(z-1/2)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-1/2} \qquad A = \frac{1}{2}\frac{z+1}{(z-1/2)}\bigg|_{z=1} = \frac{1}{2}\times\frac{1+1}{1-1/2} = 2 = A$$

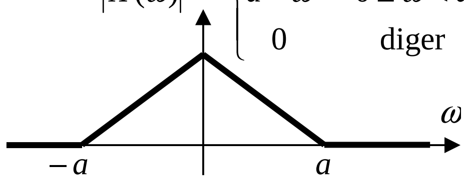
$$B = \frac{1}{2}\frac{z+1}{(z-1)}\bigg|_{z=1/2} = \frac{1}{2}\times\frac{1/2+1}{1/2-1} = -3/2 = B \qquad Y(z) = 2\frac{z}{z-1} - \frac{3}{2}\cdot\frac{z}{z-1/2} \quad ; \quad |z| > 1$$

$$\rightarrow \quad y[n] = 2\times 1^n u[n] - \frac{3}{2}\times\frac{1}{2^n}u[n] = \boxed{y[n] = \left(2 - \frac{3}{2}\times\frac{1}{2^n}\right)u[n]}$$

7) $x(t)$ sinyalinin enerjisi: $E_x = \int_{t=-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$ (Sinyalin bir ses çıkış elemanı üzerine bırakacağı enerjinin bununla orantılı olduğu anlamına gelir. Akım veya gerilim sinyalinin direnç üzerinde bıraktığı enerji gibi.) Parseval eşitliğine göre:

$$\int_{t=-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{\omega=-\infty}^{+\infty} |X(\omega)|^2 d\omega = E_x \quad \text{ve}$$

$$|X(\omega)|^2 = \begin{cases} a+\omega & -a < \omega < 0 \\ a-\omega & 0 \le \omega < a \\ 0 & \text{diger} \end{cases}$$

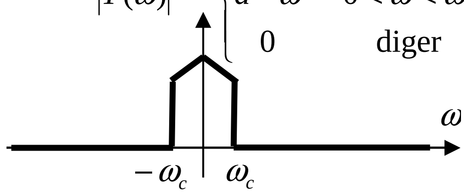


$$\int_{t=-\infty}^{+\infty} |y(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{\omega=-\infty}^{+\infty} |Y(\omega)|^2 d\omega = E_y$$

$$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega) \quad \rightarrow \quad |Y(\omega)|^2 = |X(\omega)|^2 |H(\omega)|^2$$

$|H(\omega)|^2$ grafiği $|H(\omega)|$'nınkiyle aynı olduğundan çarpımın grafiği yanda gösterildiği gibi olur.

$$|Y(\omega)|^2 = \begin{cases} a+\omega & -\omega_c < \omega < 0 \\ a-\omega & 0 < \omega < \omega_c \\ 0 & \text{diger} \end{cases}$$



$y(t)$ sinyalinin enerjisi:

$$E_y = \frac{1}{2\pi}\int_{\omega=-\omega_c}^{0} (a+\omega)d\omega + \frac{1}{2\pi}\int_{\omega=0}^{\omega_c} (a-\omega)d\omega$$

$$= \frac{1}{4\pi}(a+\omega)^2\Big|_{-\omega_c}^{0} - \frac{1}{4\pi}(a-\omega)^2\Big|_{0}^{\omega_c} = \frac{a^2 - (a-\omega_c)^2 - (a-\omega_c)^2 - (-a^2)}{4\pi} = \frac{a^2 - (a-\omega_c)^2}{2\pi} = E_y$$

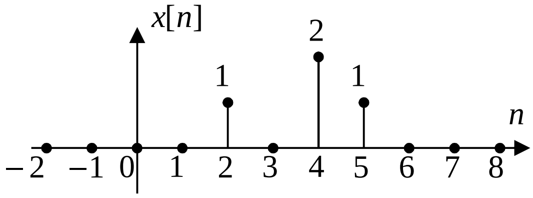
E_x integralinin bundan tek farkı ω_c yerine de a yazılması olduğu için $E_x = \dfrac{a^2}{2\pi}$ bulunur.

$$\rightarrow \quad \frac{E_y}{E_x} = \frac{1}{2} = \frac{a^2 - (a-\omega_c)^2}{a^2} \qquad \rightarrow \quad a^2 = 2a^2 - 2(a-\omega_c)^2 \qquad \rightarrow \quad 2(a-\omega_c)^2 = a^2$$

$$\rightarrow \quad a - \omega_c = a/\sqrt{2} \qquad \rightarrow \quad \boxed{\omega_c = \left(1 - 1/\sqrt{2}\right)\cdot a \approx 0{,}29a}$$

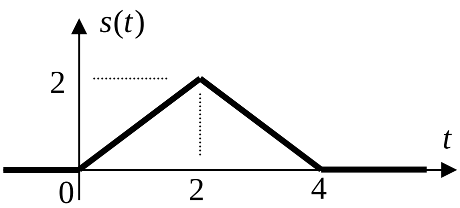
SİNYALLER VE SİSTEMLER BÜTÜNLEME SINAVI SORULARI
18.01.2012 Süre: 80 dakika

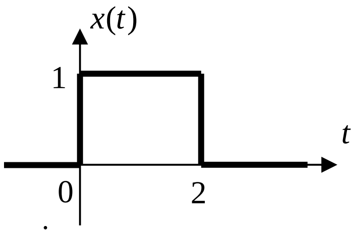
1) Bir öğrencinin ders çalışma sistemi şöyledir: Her bir derse çalışmaya sınavdan üç gün önce 1 saat ile başlıyor, iki gün önce 2 saat, bir gün önce 3 saatle devam ediyor ve sınav günü 1 saat ile o derse çalışmayı sonlandırıyor. Günlere göre sınav sayıları giriş, günlük ders çalışma saat sayıları çıkış olarak tanımlanıyor ve öğrencinin sınav programının, bu sistemin doğrusal ve zamanla değişmez olmasını bozmayacak, günün mümkün olan saat sınırlarını zorlamayacak bir yoğunlukta olduğu ve aksamayacağı varsayılıyor.



a) Sistemin birim darbe tepkisini çiziniz. **(6 puan)**
b) Varsayımlar altında sistem nedensel midir, kararlı mıdır? **(2+2=4 puan)** Genel ifadelerle değil, bu sisteme özel gerekçelerini belirterek yazınız.
c) Öğrencinin günlere (n) göre sınav sayıları ($x[n]$) grafikteki gibiyse bu öğrencinin günlere göre ders çalışma saat sayılarını grafikle gösteriniz. **(10 puan)**

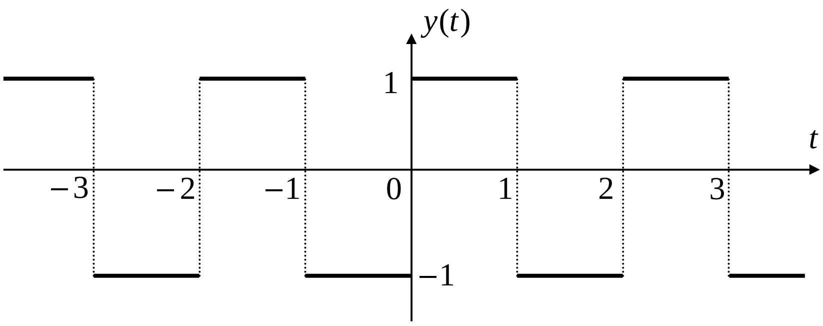
2)





Birim basamak tepkisi yukarıdaki $s(t)$ olan (DZD) sistemin
a) Girişine şekildeki $x(t)$ uygulanırsa alınacak çıkış sinyalini ($y(t)$) çiziniz. **(12 puan)**
b) Birim darbe tepkisini ($h(t)$) çiziniz. **(8 puan)**
Her iki çizimde de özel noktaların yeri belli olmalıdır.

3) Şekilde verilen $T = 2$ ile periyodik $y(t)$ sinyalini Fourier serisine açınız. (Genel katsayı formüllerini bulunuz ve serinin sıfırdan farklı en az 3 terimini, katsayılarının sayısal değerlerini yerine koyarak yazınız.)
(20 puan)



4) Giriş(x)-çıkış(y) ilişkisi aşağıda verilen nedensel sistemin transfer fonksiyonunu **(5 puan)** ve $x(t) = e^{-t}u(t)$ girişi için enerjisiz başlangıçlı çıkışını **(15 puan)** bulunuz.

$$\ddot{y}(t) + 5\dot{y}(t) + 6y(t) = 5\dot{x}(t) + 5x(t)$$

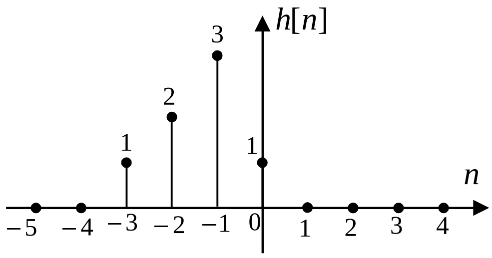
5) Giriş(x)-çıkış(y) ilişkisi aşağıda verilen nedensel sistemin transfer fonksiyonunu **(6 puan)** ve birim darbe tepkisini **(14 puan)** bulunuz.

$$y[n+2] - 0{,}5y[n+1] + 0{,}06y[n] = x[n+1] - 0{,}5x[n]$$

BAŞARILAR … **Yard. Doç. Dr. Ata SEVİNÇ**

SİNYALLER VE SİSTEMLER BÜTÜNLEME SINAVI CEVAP ANAHTARI
18.01.2012

1) a) Bu sistem için birim darbe tepkisi demek, 0. günde bir adet sınavı varsa öğrencinin günlere göre çalışma saatleri demektir ve şekildeki gibidir.

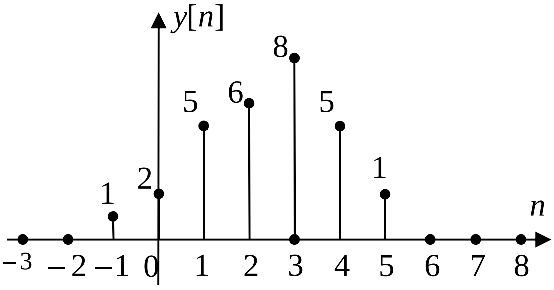


b) Bazı $n<0$ için $h[n]\neq 0$ olduğu için sistem nedensel değildir.

$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|h[n]| = 1+2+3+1 = 7 < \infty$ olduğu için sistem kararlıdır. (Günün 24 saat sınırı olmasa bile bu nedenle kararlı olurdu.)

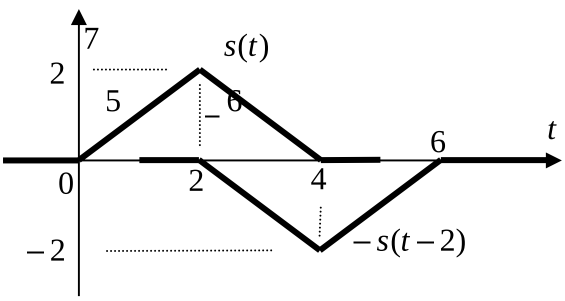
c) Çıkış $y[n]=x[n]*h[n]$. Her iki sinyal de sonlu süreli olduğu için şu yöntem uygulanabilir:

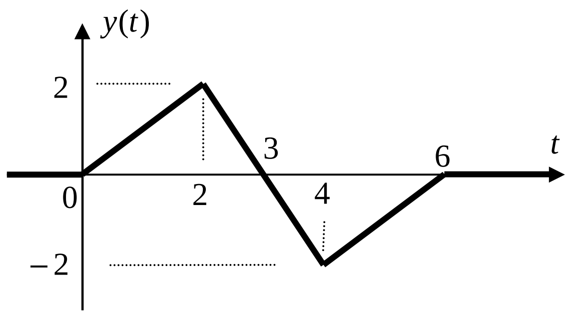
				1	2	3	1	→ sonuncusu $h[0]$
×				1	0	2	1	→ sonuncusu $x[5]$
				1	2	3	1	
			2	4	6	2		
		0	0	0	0			
+	1	2	3	1				
	1	2	5	6	8	5	1	→ sonuncusu $y[0+5]=y[5]$.



Buna göre $y[n]$ yukarıdaki şekilde gösterildiği gibi olur. (Dikkat! Bu işlem her ne kadar klasik çarpmaya benzese de elde aktarımı yapılmaz ve her bir sayı eksi de olsa artı da olsa rakam rakam değil olduğu gibi sayı olarak ele alınır.)

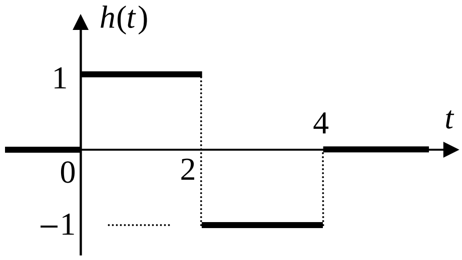
2) a) $x(t)=u(t)-u(t-2)$ olduğu için u yerine s ve x yerine y yazılır: $y(t)=s(t)-s(t-2)$ olur. Aşağıda çıkışın bu iki bileşeni soldaki şekilde, toplamı () da sağdaki şekilde gösterilmiştir.





b) Birim darbe tepkisi $h(t)=\dfrac{ds(t)}{dt}$

Yandaki şekildeki gibi elde edilir.



3) Gerçel seriye açalım: $y(t)=\dfrac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{+\infty}\left(a_k\cos(k\omega t)+b_k\sin(k\omega t)\right)$; $\omega = 2\pi/T = 2\pi/2=\pi$

$y(-t)=-y(t)$ olduğu için sinyal tektir. Dolayısıyla gerçel serisinde yalnız sinüslü terimler vardır. $a_0=a_k=0 \quad \forall k$. Ayrıca tek harmonik simetrisine de sahip olduğu için tek k 'lar için b_k sıfır olacaktır. Bunu sağlama amacıyla kullanacağız.

$$b_k=\frac{4}{T}\int_0^{T/2} y(t)\sin(k\omega t)dt=\frac{4}{2}\int_0^{2/2} y(t)\sin(k\pi t)dt = 2\int_0^1 1\cdot\sin(k\pi t)dt=\frac{-2}{k\pi}\cos(k\pi t)\Big|_0^1=\frac{-2}{k\pi}\cos(k\pi)-\frac{-2}{k\pi}$$

b_k için k 'nın sıfır olması söz konusu olmadığı için burada belirsizlik yoktur. $\cos(k\pi)=(-1)^k$ olduğu için

$$b_k = \frac{2}{k\pi}\left(1-(-1)^k\right) \quad \rightarrow \quad b_k = \begin{cases} 4/k\pi & k \text{ tekse} \\ 0 & k \text{ çiftse} \end{cases} \quad \rightarrow \quad b_1 = \frac{4}{\pi} \quad , \quad b_3 = \frac{4}{3\pi} \quad , \quad b_5 = \frac{4}{5\pi} \ .$$

$$\boxed{y(t) = \frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin(\pi t)}{1} + \frac{\sin(3\pi t)}{3} + \frac{\sin(5\pi t)}{5} + \dots\right)}$$

Tek harmonik simetrili olduğu için seride çift harmonik yoktur. Karmaşık seri katsayıları istenirse, sinyal tek olduğu için $c_k = -c_{-k} = -j\frac{b_k}{2} = \begin{cases} -j2/k\pi & k \text{ tekse} \\ 0 & k \text{ çiftse} \end{cases}$

$$\rightarrow \quad c_1 = -c_{-1} = -j\frac{2}{\pi} \quad , \quad c_3 = -c_{-3} = -j\frac{2}{3\pi} \quad , \quad c_5 = -c_{-5} = -j\frac{2}{5\pi}$$

$$\boxed{y(t) = \ \dots + j\frac{2}{5\pi}e^{-j5\pi t} + j\frac{2}{3\pi}e^{-j3\pi t} + j\frac{2}{\pi}e^{-j\pi t} - j\frac{2}{\pi}e^{j\pi t} - j\frac{2}{3\pi}e^{j3\pi t} - j\frac{2}{5\pi}e^{j5\pi t} - \dots}$$

4) Transfer fonksiyon : $\dfrac{5(j\omega)+5}{(j\omega)^2+5(j\omega)+6} = \boxed{H(\omega) = \dfrac{5(j\omega+1)}{(j\omega+2)(j\omega+3)}}$

$$x(t) = e^{-t}u(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega) = \frac{1}{j\omega+1} \qquad Y(\omega) = H(\omega)X(\omega) = \frac{5(j\omega+1)}{(j\omega+2)(j\omega+3)} \cdot \frac{1}{j\omega+1}$$

$$Y(\omega) = \frac{5}{(j\omega+2)(j\omega+3)} = \frac{A}{(j\omega+2)} + \frac{B}{(j\omega+3)}$$

$$A = \left.\frac{5}{(j\omega+3)}\right|_{j\omega \leftarrow -2} = \frac{5}{-2+3} = 5 \qquad B = \left.\frac{5}{(j\omega+2)}\right|_{j\omega \leftarrow -3} = \frac{5}{-3+2} = -5$$

$$Y(\omega) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} y(t) = 5e^{-2t}u(t) - 5e^{-3t}u(t) = \boxed{y(t) = 5\left(e^{-2t} - e^{-3t}\right)u(t)}$$

5) Transfer fonksiyon : $\dfrac{z-0{,}5}{z^2-0{,}5z+0{,}06} = \boxed{H(z) = \dfrac{z-0{,}5}{(z-0{,}2)(z-0{,}3)} \quad ; \quad |z| > 0{,}3}$

$$H(z) = \frac{A}{z-0{,}2} + \frac{B}{z-0{,}3} \qquad A = \left.\frac{z-0{,}5}{(z-0{,}3)}\right|_{z=0{,}2} = \frac{0{,}2-0{,}5}{0{,}2-0{,}3} = 3 = A$$

$$B = \left.\frac{z-0{,}5}{(z-0{,}2)}\right|_{z=0{,}3} = \frac{0{,}3-0{,}5}{0{,}3-0{,}2} = -2 = B$$

$H(z) = 3z^{-1}(\dfrac{z}{z-0{,}2}) - 2z^{-1}(\dfrac{z}{z-0{,}3}) \quad ; \quad |z| > 0{,}3$ Buradaki z^{-1} çarpanı 1 adım geriletir:

$$\boxed{h[n] = 3\times(0{,}2)^{n-1}u[n-1] - 2\times(0{,}3)^{n-1}u[n-1]}$$

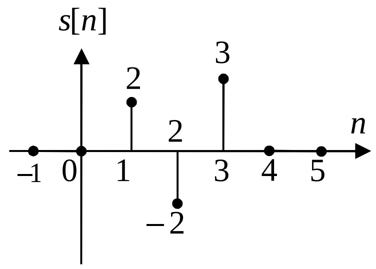
Bilgisayar Mühendislği Bölümü
SİNYALLER VE SİSTEMLER ARASINAV SORULARI
18.4.2012   Süre: 75 dakika

1) Aşağıdaki sinyallerin periyodik olup olmadıklarını ve periyodik olan(lar)ın ana periyodunu yazınız. **(10 puan)**

a) $y[n] = \sin(2\pi n/7) + (-1)^n$ **b)** $x[n] = \cos\left(\sqrt{2}\pi n/7\right) + \sin\left(\sqrt{2}\pi n/5\right)$

2) Giriş(x)-çıkış(y) ilişkisi $y[n] = \sum_{k=0}^{5} k\, x[n+k]$ ile verilen sistem doğrusal mıdır, bellekli midir, nedensel midir, kararlı mıdır, zamanla değişen midir? **(5x2 = 10 puan)** (Açıklama beklenmemektedir.)

3) Birim basamak tepkisi şekildeki $s[n]$ sinyali olan doğrusal zamanla değişmez bir sistemin girişine de $x[n] = s[n]$ sinyali uygulanırsa çıkışı ne olur? Çiziniz. İstediğiniz yolla yapınız. **(20 puan)**
Yol gösterme: Önce sistemin birim darbe tepkisini bulmanız kolaylıktır.



4) Birim darbe tepkisi $h(t) = -u(t) + 2u(t-2) - u(t-4)$ ile verilen doğrusal zamanla değişmez bir sistemin girişine $x(t) = 2u(t-1)$ sinyali uygulanırsa alınacak çıkış sinyalini çiziniz. **(20 puan)**

5) Birim darbe tepkisi (h) ve girişi (x) ~~şekillerde~~ verilen doğrusal zamanla değişmez sistemlerden istediğiniz birisinin çıkışını (y) bulunuz. **(20 puan)** (Çizmeniz beklenmemektedir.)

a) $h[n] = u[n] - u[n-4]$, $x[n] = \sin(\pi n/2)$

b) $h(t) = u(t) - u(t-2)$, $x(t) = \cos(\pi t)$

6) Giriş(x)-çıkış(y) ilişkisi

$$2\dot{y}(t) + 50y(t) = 10x(t-3)$$

ile verilen nedensel sistemin birim darbe tepkisini bulunuz. **(20 puan)**

BAŞARILAR …   **Yard. Doç. Dr. Ata SEVİNÇ**

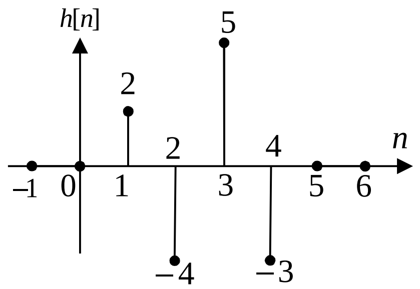
Bilgisayar Mühendislği Bölümü
SİNYALLER VE SİSTEMLER ARASINAV CEVAP ANAHTARI
18.4.2012

1) a) $\sin(2\pi n/7) \;\rightarrow\; N_1 = 7$ ve katları ile periyodik. $(-1)^n \;\rightarrow\; N_2 = 2$ ve katları ile periyodik.
$\rightarrow\; y[n]$ ise $N = \mathrm{EKOK}(N_1, N_2) = 14$ ile periyodiktir.

b) Hem $\sqrt{2}\,N_1/7 = 2k$ hem de $\sqrt{2}\,N_2/7 = 2m$ şartını sağlayacak (N_1, k) ve (N_2, m) tamsayı çiftleri mümkün olmadığı için her iki bileşen de periyodik değildir. Periyodik olmayan bileşenlerin birbirini yok etme durumu da olmadığı için $x[n]$ periyodik değildir.

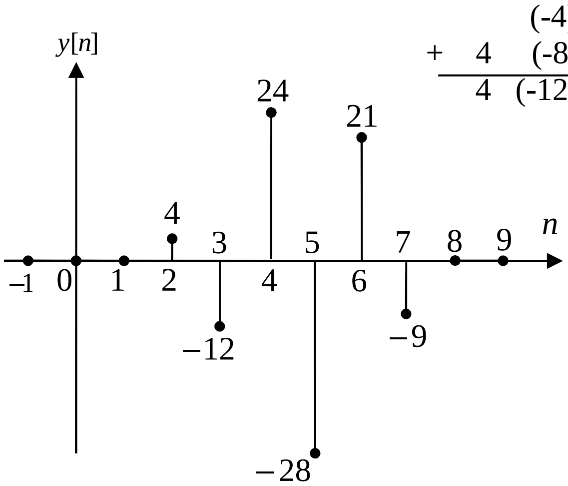
2) $y[n] = \sum_{k=0}^{5} k\,x[n+k] = x[n+1) + 2x[n+2] + 3x[n+3] + 4x[n+4] + 5x[n+5]$ yazınca açıkça görülebileceği gibi sistem doğrusaldır, belleklidir (ama geleceği hatırlayan bellekli), nedensel değildir, kararlıdır, zamanla değişmez.

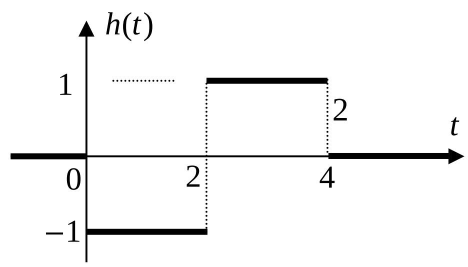
3) Birim darbe tepkisi: $h[n] = s[n] - s[n-1]$



Çıkış ise $y[n] = h[n] * x[n]$. Bunu klasik çarpmaya benzer yolla yapalım:

			2	(-4)	5	(-3)	Sonuncusu $h[4]$
×				2	(-2)	3	Sonuncusu $x[3] = s[3]$
			6	(-12)	15	(-9)	
		(-4)	8	(-10)	6		
+	4	(-8)	10	(-6)			
	4	(-12)	24	(-28)	21	(-9)	Sonuncusu $y[3+4] = y[7]$

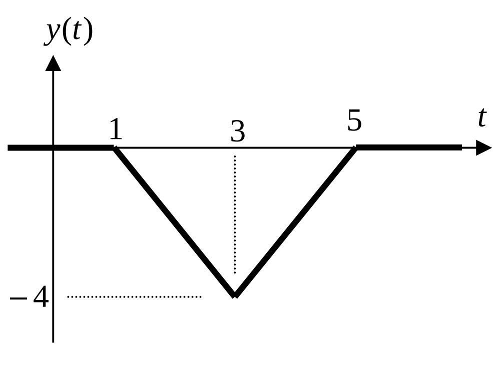


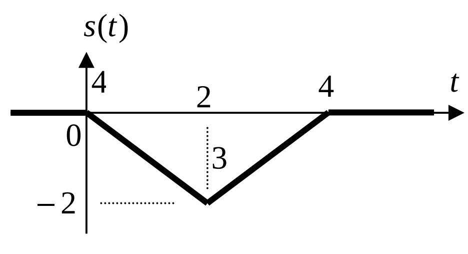


4) $x(t) = 2u(t-1) \;\Rightarrow\; y(t) = 2s(t-1)$

$s(t) = \int_{\tau=-\infty}^{t} h(\tau)\,d\tau$ yanda alttaki gibi bulunur.

Bundan da $y(t) = 2s(t-1)$ hemen aşağıdaki gibi çizilir:





5) $y = x * h$

BSS-V-2012-CA-2

a) $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]\, x[n-k]$ $\qquad h[k] = \begin{cases} 1 & 0 \le k \le 3 \\ 0 & \text{diger} \end{cases}$

$$y[n] = \sum_{k=0}^{3} 1 \cdot x[n-k] = x[n] + x[n-1] + x[n-2] + x[n-3]$$

$$y[n] = \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{2}\right) + \underbrace{\sin\left(\frac{\pi n}{2} - \pi\right)}_{-\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)} + \underbrace{\sin\left(\frac{\pi n}{2} - \frac{3\pi}{2}\right)}_{-\sin\left(\frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{2}\right)} \quad \rightarrow \quad \boxed{y[n] = 0}$$

b) $y(t) = \int_{\tau=-\infty}^{+\infty} h(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau$ $\qquad h(\tau) = \begin{cases} 1 & 0 \le \tau < 2 \\ 0 & \text{diger} \end{cases}$

$$y(t) = \int_{\tau=0}^{2} 1 \cdot x(t-\tau)\, d\tau = \int_{\tau=0}^{2} \cos(\pi t - \pi\tau)\, d\tau = \frac{1}{\pi}\Big[-\sin(\pi t - \pi\tau)\ \Big]_{\tau=0}^{2}$$

$$y(t) = \frac{1}{\pi}\big[-\sin(\pi t - 2\pi) + \sin(\pi t)\big] = \boxed{y(t) = 0}$$

Görüldüğü gibi doğrusal zamanla değişmez sistemlerde birim darbe tepkisi ve giriş sıfırdan farklı olsa da çıkış sıfır olabilmektedir.

6) $t > 3$ için $\quad 2\ddot{h}(t) + 50h(t) = 0 \quad$ denklemi $h(3) = 0$, $\dot{h}(3) = \frac{10}{2} = 5$ başlangıç şartlarıyla çözülmelidir.

$$2\lambda^2 + 50 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \mp j5$$

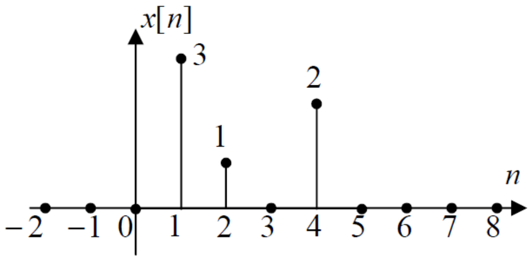
$\rightarrow \quad h(t) = A\cos\big(5(t-3)\big) + B\sin\big(5(t-3)\big) \qquad \rightarrow \quad h(3) = 0 = A \qquad \rightarrow \quad A = 0$

$\rightarrow \quad \dot{h}(t) = -5A\sin\big(5(t-3)\big) + 5B\cos\big(5(t-3)\big) \qquad \rightarrow \quad \dot{h}(3) = 5 = 5B \qquad \rightarrow \quad B = 1$ $\quad$ bulunur.

Tüm zamanlar için çözüm ise: $\boxed{h(t) = u(t-3) \cdot \sin\big(5(t-3)\big)}$

Bilgisayar Mühendislği Bölümü
SİNYALLER VE SİSTEMLER FİNAL SINAVI SORULARI
07.6.2012 Süre: 75 dakika

1) Cesur'un iğne korkusu doğrusal zamanla değişmez bir sistem olarak şöyle modelleniyor: n gün numarası, günlere göre vurulan iğne sayıları giriş, günlere göre duyduğu korku değeri (eksi sayı olursa kurtulma rahatlığı) çıkış olarak tanımlanıyor. Yeterince önceden öğrendiği her bir iğne vurulmadan 2 gün önce 1 birim, 1 gün önce 2 birim, iğne günü 3 birim, iğne vurulduğunun ertesi günü -1 birim korku duyuyor. Cesur, doktorunun kendisine günlük iğne sayıları şekilde verilen $x[n]$ olan bir tedavi planı uygulayacağını yeterince önceden öğreniyor. Planın gerçekleşeceği varsayılıyor. Buna göre:



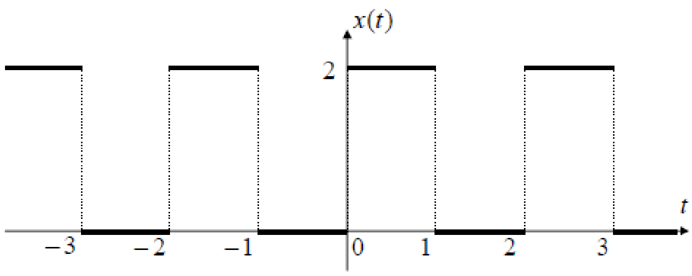
a) Sistemin birim darbe tepkisini çiziniz. **(8 puan)**

b) Sistem nedensel midir, kararlı mıdır, bellekli midir? Gerekçesini belirterek cevaplayınız. **(9 puan)**

c) Sistem çıkışını çiziniz. **(13 puan)**

2) Yanda verilen $T = 2$ ile periyodik $x(t)$ sinyalinin Fourier serisi

$$i_{10}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)\right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{jk\omega t}$$



biçimlerinde düşünüldüğünde buradaki katsayıların hangilerinin sıfır olduğu söylenebilir? **(20 puan)**

I. a_0 ve c_0
II. $a_k \quad k > 0$
III. $b_k \ \forall k$
IV. Tek k'lar için hem a_k hem b_k hem c_k
V. Çift k'lar için hem a_k hem b_k hem c_k
VI. Tüm pozitif k'lar için c_k
VII. Tüm negatif k'lar için c_k

Bu seçeneklerden sıfır olanların hepsini seçiniz. (Yanlış olarak fazla yazmanız eksik yazmanızla aynı puan kaybına neden olacaktır.)

3) Giriş(x)-çıkış(y) ilişkisi aşağıda verilen nedensel sistemin transfer fonksiyonunu **(6 puan)** ve birim darbe tepkisini **(14 puan)** bulunuz.

$$\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 2y(t) = 5\dot{x}(t) - 2x(t)$$

4) Giriş(x)-çıkış(y) ilişkisi

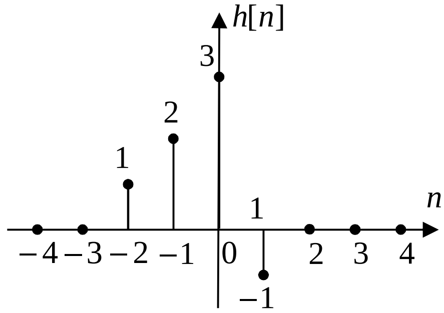
$$y[n+2] - y[n] = x[n+1] - x[n]$$

ile verilen nedensel sistemin transfer fonksiyonunu **(5 puan)**, birim darbe tepkisini **(8 puan)** ve $x[n] = (0,5)^n u[n]$ girişi için enerjisiz başlangıçlı çıkışını **(17 puan)** Z ve/veya Z^{-1} dönüşümleriyle bulunuz.

BAŞARILAR … **Yard. Doç. Dr. Ata SEVİNÇ**

Bilgisayar Mühendislği Bölümü
SİNYALLER VE SİSTEMLER FİNAL SINAVI CEVAP ANAHTARI
07.6.2012

1) a) Bu sistem için birim darbe tepkisi demek, Cesur, sadece 0. günde bir adet iğne vurulacağını yeterince önceden öğrenirse günlere göre duyacağı korku fonksiyonu demektir ve şekildeki $h[n]$ gibidir.

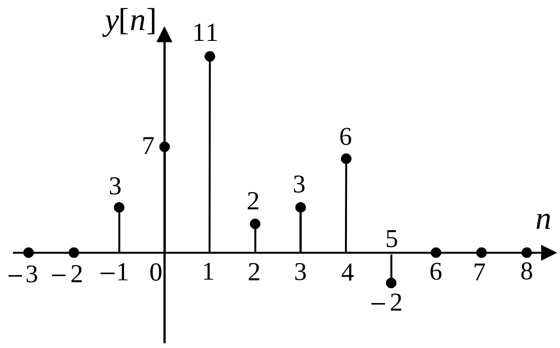


b) Bazı $n<0$ için $h[n]\neq 0$ olduğu için sistem nedensel değildir.

$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|h[n]| = 1+2+3+|-1| = 7 < \infty$ olduğu için sistem kararlıdır.

Bazı $n\neq 0$ için $h[n]\neq 0$ olduğu için sistem belleklidir.

c) Çıkış $y[n]=x[n]*h[n]$. Her iki sinyal de sonlu süreli olduğu için şu yöntem uygulanabilir:



				1	2	3	-1	→ sonuncusu $h[1]$
×				3	1	0	2	→ sonuncusu $x[4]$
				2	4	6	-2	
			0	0	0	0		
		1	2	3	-1			
+	3	6	9	-3				
	3	7	11	2	3	6	-2	→ sonuncusu $y[1+4]=y[5]$. Buna göre $y[n]$ yukarıdaki şekilde

gösterildiği gibi olur. (Dikkat! Bu işlem her ne kadar klasik çarpmaya benzese de elde aktarımı yapılmaz ve her bir sayı eksi de olsa büyük de olsa rakam rakam değil olduğu gibi sayı olarak ele alınır.)

2) $x(t)-1$ hem tek bir sinyaldir, hem de tek harmonik simetrisine sahiptir. Bu yüzden $x(t)$ 'nin Fourier serisi $x(t)-1$ ' in Fourier serisinden sadece a_0 (veya c_0) terimiyle farklıdır.

II. a_k $k>0$ (Tek sinyallerin Fourier serilerinde cos terimleri olmaz)

V. Çift k'lar için hem a_k hem b_k hem c_k (Tek harmonik simetrisine sahip sinyallerin serilerinde çift harmonik olmaz. Ancak burada $x(t)$ tek harmonik simetrisine sahip bir sinyalin 1 fazlası olduğu için $k\neq 0$ kastedilmektedir. Yani $a_0\neq 0$ ve $c_0\neq 0$.)

katsayıları sıfır olur. Diğerlerinin sıfır olması zorunluluğu yoktur.

3) Transfer fonksiyon : $\frac{5(j\omega)-2}{(j\omega)^2+3(j\omega)+2} = \boxed{H(\omega)=\frac{5(j\omega)-2}{(j\omega+1)(j\omega+2)}} = \frac{A}{(j\omega+1)}+\frac{B}{(j\omega+2)}$

$$A=\left.\frac{5(j\omega)-2}{(j\omega+2)}\right|_{j\omega\leftarrow -1} = \frac{-5-2}{-1+2} = -7 \qquad B=\left.\frac{5(j\omega)-2}{(j\omega+1)}\right|_{j\omega\leftarrow -2} = \frac{-10-2}{-2+1} = 12$$

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{-7}{(j\omega+1)}+\frac{12}{(j\omega+2)}\right\} = -7e^{-t}u(t)+12e^{-2t}u(t) = \boxed{h(t)=\left(12e^{-2t}-7e^{-t}\right)u(t)}$$

4) Transfer fonksiyon : $\frac{z-1}{z^2-1} = \boxed{H(z)=\frac{1}{z+1} \quad ; \quad |z|>1}$

Bunun Z^{-1} dönüşümü alınarak birim darbe tepkisi $\boxed{h[n]=(-1)^n u[n]}$ bulunur.

$$x[n]=(0{,}5)^n u[n] \quad \Rightarrow \quad X(z)=\frac{z}{z-0{,}5} \quad ; \quad |z|>0{,}5$$

$$Y(z)=X(z)H(z)=\frac{z}{(z+1)(z-0{,}5)} \quad ; \quad |z|>1$$

1. yol:

$$\frac{Y(z)}{z}=\frac{1}{(z+1)(z-0{,}5)}=\frac{A}{z+1}+\frac{B}{z-0{,}5} \qquad A=\left.\frac{1}{(z-0{,}5)}\right|_{z=-1}=\frac{1}{-1-0{,}5}=-\frac{2}{3}=A$$

$$B=\left.\frac{1}{(z+1)}\right|_{z=0{,}5}=\frac{1}{0{,}5+1}=\frac{2}{3}=B \qquad Y(z)=-\frac{2}{3}\frac{z}{z+1}-\frac{2}{3}\cdot\frac{z}{z-0{,}5} \quad ; \quad |z|>1$$

$$\rightarrow \quad y[n]=-\frac{2}{3}\times(-1)^n u[n]+\frac{2}{3}\times(0{,}5)^n u[n]=\boxed{y[n]=\frac{2}{3}\left((0{,}5)^n-(-1)^n\right)u[n]}$$

2.yol:

$$Y(z)=\frac{z}{(z+1)(z-0{,}5)}=\frac{a}{z+1}+\frac{b}{z-0{,}5} \qquad a=\left.\frac{z}{(z-0{,}5)}\right|_{z=-1}=\frac{-1}{-1-0{,}5}=\frac{2}{3}=a$$

$$b=\left.\frac{z}{(z+1)}\right|_{z=0{,}5}=\frac{0{,}5}{0{,}5+1}=\frac{1}{3}=b \qquad Y(z)=\frac{2}{3}\cdot z^{-1}\cdot\frac{z}{z+1}+\frac{1}{3}\cdot z^{-1}\cdot\frac{z}{z-0{,}5} \quad ; \quad |z|>1$$

Başlarındaki z^{-1} çarpanı olmasaydı, Z^{-1} dönüşümü alınınca $\frac{2}{3}\times(-1)^n u[n]+\frac{1}{3}\times(0{,}5)^n u[n]$ bulunurdu. Ancak z^{-1} çarpanı zamanda 1 adım gerilettiği için

$$y[n]=\frac{2}{3}\times(-1)^{n-1}u[n-1]+\frac{1}{3}\times(0{,}5)^{n-1}u[n-1]=\boxed{y[n]=\frac{1}{3}\left((0{,}5)^{n-1}+2\times(-1)^{n-1}\right)u[n-1]} \text{ bulunur.}$$

İki yolla bulunan $y[n]$ ifadeleri farklı görünseler de dikkat edilirse her n için aynı değeri verdikleri görülebilir.

SİNYALLER VE SİSTEMLER FİNAL SINAVI SORULARI

04 Ocak 2013   Süre: 80 dakika

Her soru numarasından ya A ya da B ile gösterileni yapınız.

1) $h[n] = 2u[n] + 4\delta[n-1]$ veriliyor.

A) Birim darbe tepkisi bu $h[n]$ olan doğrusal zamanla değişmez (DZD) sistem nedensel midir, kararlı mıdır? DZD sistemlere özel gerekçesiyle yazınız **(3+3 puan).** Bu sistemin birim basamak tepkisini çiziniz **(9 puan).**

B) $h[n]$ sinyali ile, tek ve çift bileşenlerini çiziniz **(3+4+4 puan).** $h[n]$ sinyalini darbeler toplamı halinde yazınız **(4 puan).**

---

2) A) $\forall t < p_1$ ve $\forall t > p_2$ için $x(t) = 0$

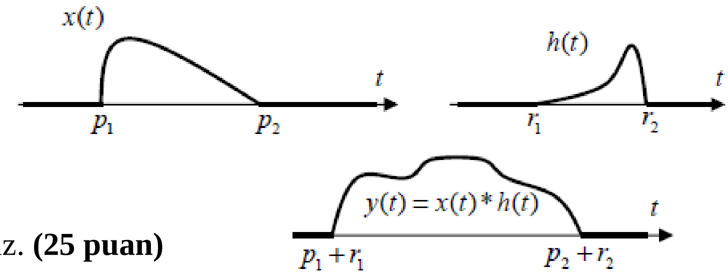
$\forall t < r_1$ ve $\forall t > r_2$ için $h(t) = 0$

olan herhangi iki sinyal veriliyor.

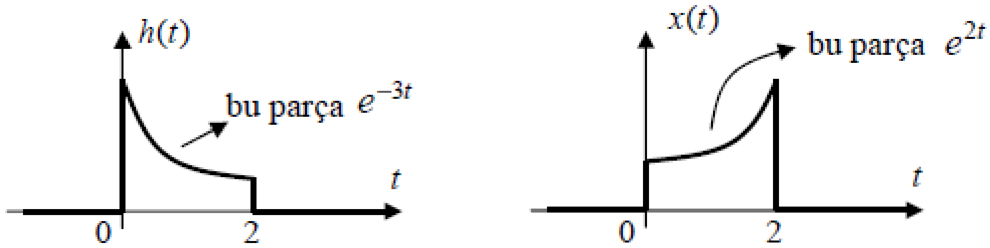
Bu iki sinyalin konvolüsyonunun,

$\forall t < p_1 + r_1$ ve $\forall t > p_2 + r_2$ için $y(t) = 0$

(şekillerdeki gibi) şartını sağladığını ispatlayınız. **(25 puan)**



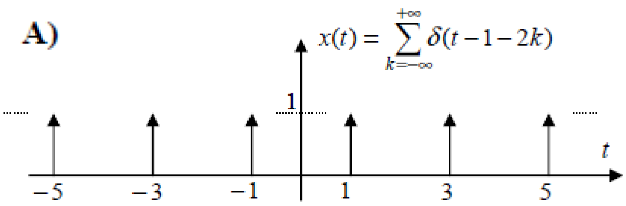
B) Aşağıdaki iki sinyalin konvolüsyonunu hesaplayınız. **(25 puan)**



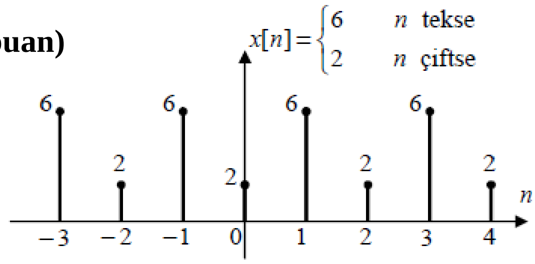
---

3) Aşağıda verilen sinyallerden birisinin Fourier serisini yazınız. **(15 puan)**

A)



B)



---

4) A) Giriş(x)-çıkış(y) ilişkisi

$$\dot{y}(t) + 2y(t) = \dot{x}(t) - 2x(t)$$

ile verilen nedensel sistemin transfer fonksiyonunu, birim darbe tepkisini ve $x(t) = e^{-t}u(t)$ girişi için enerjisiz başlangıçlı çıkışını bulunuz. **(5+9+11 puan)**

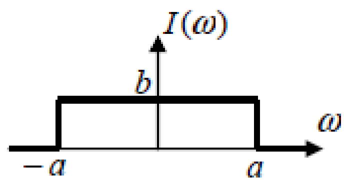
B) Giriş(x)-çıkış(y) ilişkisi $y[n+1] - y[n] = 2x[n+1] + x[n]$

ile verilen nedensel sistemin fonksiyonunu, birim darbe tepkisini ve $x[n] = (-1)^n u[n]$ girişi için enerjisiz başlangıçlı çıkışını bulunuz. **(5+9+11 puan)**

---

5) A) Birim darbe tepkisi $h[n] = 3\delta[n] + 2\delta[n-1] - \delta[n-2]$ olan DZD bir sistemin girişine $x[n] = 4\delta[n+1] - 2\delta[n-1] + 3\delta[n-2]$ sinyali uygulanırsa alınacak çıkışı <u>çiziniz</u>. Z ve/veya Z^{-1} dönüşümleriyle yapınız. **(20 puan)**

B) Genlik spektrumu verilen $i(t)$ akım sinyali $R = 10\ \Omega$'luk bir direnç üzerinden geçmektedir. Bu direnç üzerinde (-∞,+∞) zaman aralığında harcanan toplam enerji ne kadardır? **(20 puan)** $a = 60\pi\ rad/s$, $b = 20As$



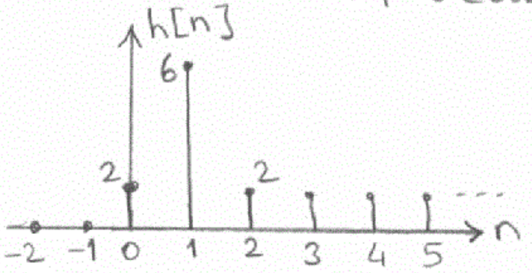
BAŞARILAR …

Yard. Doç. Dr. Ata SEVİNÇ

SİNYALLER VE SİSTEMLER FİNAL CEVAP ANAHTARI

04 Ocak 2013

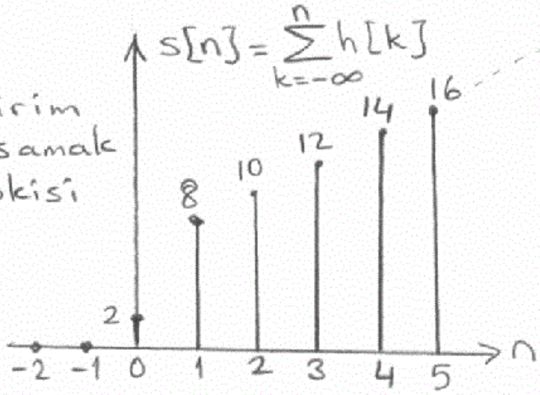
1) (A)



$\forall n<0$ için $h[n]=0$ olduğu için sistem nedenseldir.

$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| = \infty$ olduğu için sistem kararsızdır.

Birim basamak tepkisi



(B) sorusunda sorulan darbeler toplamı biçimindeki ifade:

$$h[n] = 4\delta[n-1] + \sum_{k=0}^{+\infty} 2\delta[n-k] \quad \text{veya}$$

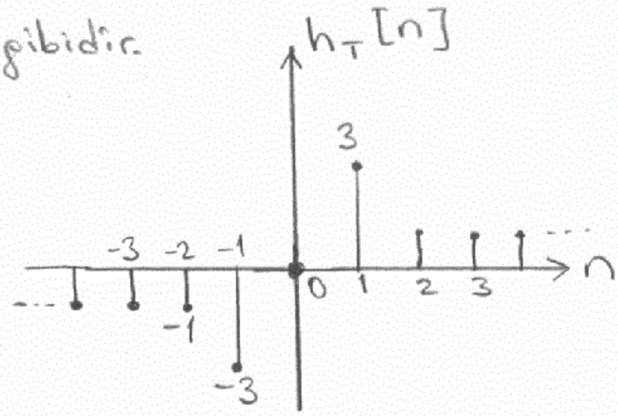
$$h[n] = 2\delta[n] + 6\delta[n-1] + 2\delta[n-2] + 2\delta[n-3] + 2\delta[n-4] + \ldots$$

(B) $h[n]$ en üstte çizildiği gibidir.

Tek bileşen için: $h_T[0]=0$

$h_T[1] = \frac{6-0}{2} = 3$

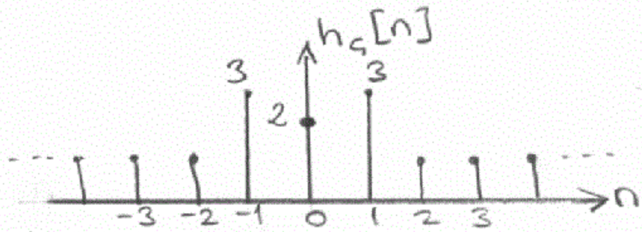
$n \geqslant 2 \Rightarrow h_T[n] = \frac{2-0}{2} = 1$



Çift bileşen için: $h_Ç[0] = 2$

$h_Ç[1] = \frac{6+0}{2} = 3$

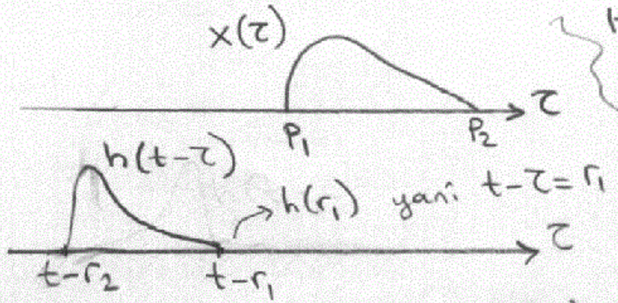
$n \geqslant 2 \Rightarrow h_Ç[0] = \frac{2+0}{2} = 1$



Tek, orijine göre; çift, düşey eksene göre simetrik olarak yukarıdaki gibi bulunur.

2) (A) $y(t) = x(t) * h(t) = \int_{\tau=-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau$

$t < P_1 + r_1$ ise:

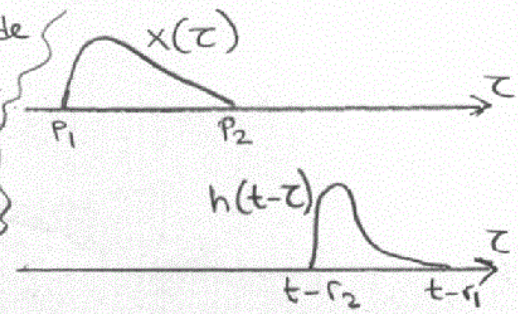


$t-r_1 < P_1$ olduğundan, $x(\tau)h(t-\tau)=0 \quad \forall \tau$

Her ikisinden de $y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} 0 \cdot d\tau$

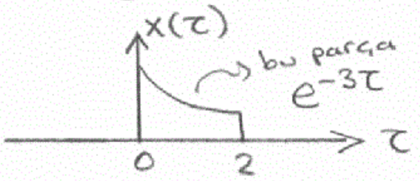
$y(t)=0$ bulunur.

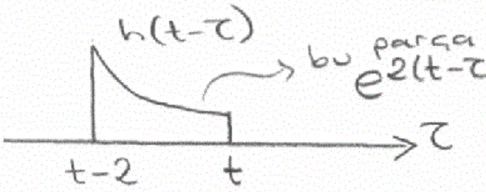
$t > P_2 + r_2$ ise:



$t-r_2 > P_2$ olduğundan, $x(\tau)h(t-\tau)=0 \quad \forall \tau$

2) B $y(t) = x(t) * h(t) = \int_{\tau=-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau$





$t<0$ ise:

$x(\tau)h(t-\tau)=0 \quad \forall \tau \rightarrow y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} 0 \cdot d\tau$

$y(t)=0.$

$t-2 \geq 2$ yani **$t \geq 4$ ise:**

Yine $x(\tau)h(t-\tau)=0 \quad \forall\tau \rightarrow y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} 0 \cdot d\tau$

$y(t)=0.$

$0 \leq t < 2$ ise:

$$x(\tau)h(t-\tau) = \begin{cases} e^{-3\tau} \cdot e^{2(t-\tau)} = e^{2t-5\tau} & 0 \leq \tau \leq t \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$$

$$y(t) = \int_{\tau=0}^{t} e^{2t} \cdot e^{-5\tau}\,d\tau = e^{2t} \cdot \int_{\tau=0}^{t} e^{-5\tau}\,d\tau = e^{2t} \cdot \left[\frac{e^{-5\tau}}{-5}\right]_{\tau=0}^{t}$$

$$y(t) = e^{2t} \cdot \frac{1}{5} \cdot \left[1 - e^{-5t}\right] = \frac{1}{5}\left(e^{2t} - e^{-3t}\right)$$

$2 \leq t < 4$ ise:

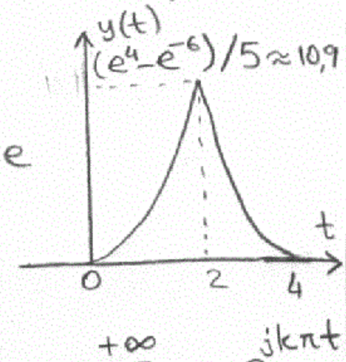
$$x(\tau)h(t-\tau) = \begin{cases} e^{-3\tau} \cdot e^{2(t-\tau)} = e^{2t-5\tau} & t-2 \leq \tau \leq 2 \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$$

$$y(t) = \int_{\tau=t-2}^{2} e^{2t} \cdot e^{-5\tau}\,d\tau = e^{2t} \int_{\tau=t-2}^{2} e^{-5\tau}\,d\tau = e^{2t} \cdot \left[\frac{e^{-5\tau}}{-5}\right]_{\tau=t-2}^{2}$$

$$y(t) = e^{2t} \cdot \frac{1}{5} \cdot \left[e^{-5t+10} - e^{-10}\right] = \frac{1}{5}\left(e^{10-3t} - e^{2t-10}\right)$$

Sonuç:

$$y(t) = \begin{cases} 0 & \rightarrow t<0 \text{ ise} \\ \frac{1}{5}\left(e^{2t} - e^{-3t}\right) & \rightarrow 0 \leq t < 2 \text{ ise} \\ \frac{1}{5}\left(e^{10-3t} - e^{2t-10}\right) & \rightarrow 2 \leq t < 4 \text{ ise} \\ 0 & \rightarrow t \geq 4 \text{ ise} \end{cases}$$



3) A $T_0 = 2$ ile periyodik. $\omega_0 = 2\pi/T_0 = \pi \rightarrow x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{jk\pi t}$

$0<t<2$ periyodu için $x(t) = \delta(t-1)$

$c_k = \frac{1}{\underset{T_0}{2}} \int_0^2 \delta(t-1) \cdot e^{-jk\pi t}\,dt$ Burada $\delta(t-1)\, e^{-jk\pi t} = \delta(t-1)\, e^{-jk\pi}$

darbenin etkidiği andaki değeri önemli

Dolayısıyla $c_k = \frac{1}{2} \cdot \underbrace{e^{-jk\pi}}_{\text{sabit}} \cdot \underbrace{\int_0^2 \delta(t-1)\,dt}_{=1} \rightarrow c_k = \frac{1}{2} e^{-jk\pi}$

3) A (devamı) $e^{-jk\pi} = (-1)^k$

$c_k = \frac{(-1)^k}{2} \rightarrow x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2}(-1)^k \cdot e^{jk\pi t}$. Açık yazarsak:

$x(t) = \dots + \frac{1}{2} e^{-j2\pi t} - \frac{1}{2} e^{-j\pi t} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{j\pi t} + \frac{1}{2} e^{j2\pi t} + \dots$

İstenirse gerçel biçimli de yazılabilir. Sinyal çifttir:

$b_k = 0$, $a_k = 2c_k = (-1)^k$ (Dikkat: $a_k = \frac{4}{T_0} \int_0^{T_0/2} \dots$ formülü, $T_0/2$ 'de sonsuza sıçrama olduğundan tavsiye edilmez.)

$a_0 = 1$

$x(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \cos k\pi t$

$x(t) = \frac{1}{2} - \cos\pi t + \cos 2\pi t - \cos 3\pi t + - \dots$

B Kısa yol: $x[n] = 4 - 2\cdot(-1)^n = \underbrace{4}_{c_0} \underbrace{-2}_{c_1} \cdot e^{j\pi n}$

Standart yol:

$N=2$ ile periyodik. $\omega_0 = 2\pi/N = \pi$

$x[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} c_k e^{jk\omega_0 n} = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{jk\pi n} = c_0 + c_1 e^{j\pi n}$

$c_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N\rangle} x[n] e^{-jk\omega_0 n} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{1} x[n] e^{-jk\pi n}$

$c_0 = \frac{1}{2}(x[0] + x[1]) = \frac{2+6}{2} = 4 = c_0$

$c_1 = \frac{1}{2}\left(x[0] + x[1] \underbrace{e^{-j\pi}}_{-1}\right) = \frac{1}{2}(2-6) = -2 = c_1$

Sonuç: $\boxed{x[n] = 4 - 2\cdot e^{j\pi n}}$

4) A Transfer fonksiyon: $H(\omega) = \frac{j\omega - 2}{j\omega + 2}$

$H(\omega) = \frac{j\omega + 2 - 4}{j\omega + 2} = 1 - 4 \cdot \frac{1}{j\omega + 2}$

$\mathcal{F}^{-1}\{H(\omega)\} = h(t) = \delta(t) - 4e^{-2t}u(t)$: birim darbe tepkisi

$x(t) = e^{-t}u(t) \longrightarrow X(\omega) = \frac{1}{j\omega + 1} \rightarrow Y(\omega) = H(\omega)X(\omega)$

4) (A) (devamı)

$$Y(\omega) = \frac{j\omega - 2}{(j\omega+2)(j\omega+1)} = \frac{A_1}{j\omega+1} + \frac{A_2}{j\omega+2}$$

$$A_1 = \frac{-1-2}{-1+2} = -3 \qquad A_2 = \frac{-2-2}{-2+1} = 4$$

$$\mathcal{F}^{-1}\{Y(\omega)\} = y(t) = -3e^{-t}u(t) + 4e^{-2t}u(t)$$

↳ enerjisiz başlangıçlı çıkış

(B) Transfer fonksiyon: $H(z) = \frac{2z+1}{z-1}$; YB: $|z| > 1$

$$H(z) = \frac{2z-2+3}{z-1} = 2 + \frac{3}{z-1} = 2\times 1 + \underbrace{3z^{-1}}_{\text{1 adım geriletir.}} \cdot \underbrace{\frac{z}{z-1}}_{\mathcal{Z}\{1^n u[n]\}} \ ; \ |z|>1$$

$1 = \mathcal{Z}\{\delta[n]\}$ $\qquad$ $\underbrace{1^n u[n]}_{= u[n]}$

$$\mathcal{Z}^{-1}\{H(z)\} = h[n] = 2\delta[n] + 3u[n-1]$$

$$X(z) = \frac{z}{z-(-1)} = \frac{z}{z+1} \ ; \ YB: |z| > 1$$

↳ $|-1|$

$$Y(z) = X(z)H(z) = \frac{z\cdot(2z+1)}{(z-1)(z+1)} \ ; \ YB: |z|>1$$

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{2z+1}{(z-1)(z+1)} = \frac{B_1}{z-1} + \frac{B_2}{z+1}$$

$$B_1 = \frac{2\times 1+1}{1+1} = \frac{3}{2} \qquad B_2 = \frac{2\times(-1)+1}{-1-1} = \frac{1}{2}$$

$$Y(z) = \frac{3}{2}\cdot\frac{z}{z-1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{z}{z+1} \ ; \ YB: |z|>1$$

$$\mathcal{Z}^{-1}\{Y(z)\} = y[n] = \frac{3}{2}\cdot 1^n u[n] + \frac{1}{2}(-1)^n u[n]$$

$$y[n] = \left[\frac{3}{2} + \frac{1}{2}(-1)^n\right]u[n]$$

5) A Çıkış : $y[n] = x[n] * h[n]$

$$\xrightarrow{\mathcal{Z}} Y(z) = X(z)H(z)$$

$$X(z) = \sum_{n=-1}^{2} x[n] z^{-n} = 4z - 2z^{-1} + 3z^{-2}$$

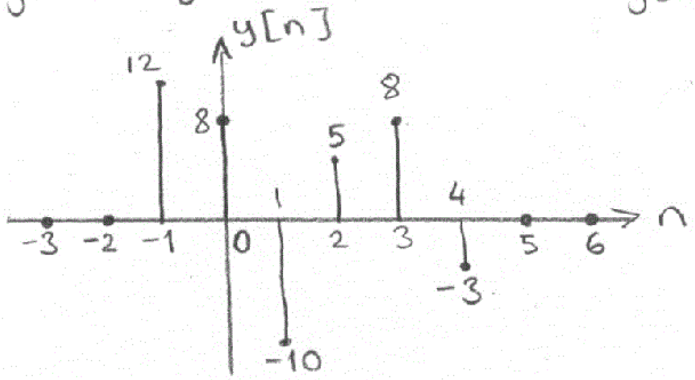
$$H(z) = \sum_{n=0}^{2} h[n] z^{-n} = 3 + 2z^{-1} - z^{-2}$$

$$Y(z) = 12z + 8 + (3\cdot(-2) - 1\times 4)z^{-1} + (2\times(-2)+3\times 3)z^{-2} + (2\times 3+(-1)(-2))z^{-3} - 3z^{-4}$$

$$Y(z) = \underset{y[-1]}{12z} + \underset{y[0]}{8} - 10z^{-1} + 5z^{-2} + 8z^{-3} - \underset{y[4]}{3z^{-4}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[n] z^{-n}$$

$y[-1]$ $y[0]$ ..... $y[4]$

$n<-1$ ve $n>4$ için $y[n]=0$



B Enerji $E = \int_{-\infty}^{+\infty} R|i(t)|^2 dt = R\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |I(\omega)|^2 d\omega$

$$E = \frac{R}{2\pi}\int_{-a}^{a} b^2 d\omega = \frac{R}{2\pi}\left[b^2\omega\right]_{-a}^{a} = \frac{R}{2\pi}\cdot 2ab^2 = E$$

$$E = \frac{10\Omega}{\pi}\cdot 60\pi\frac{rad}{s}\cdot 20^2 A^2 s^2 = 24\times 10^4 \underbrace{\Omega A\cdot A\cdot s}_{VAs = Ws = J}$$

$$\boxed{E = 240\,kJ}$$

Bilgisayar Mühendisliği Bölümü
SİNYALLER VE SİSTEMLER ARASINAV SORULARI
18 Nisan 2013   Süre: 70 dakika

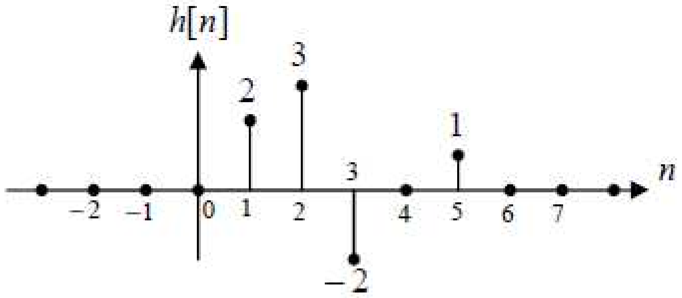
1) $x[n] = 2u[n] + 2u[n-2] + 2\delta[n-3]$ sinyali ile tek ve çift bileşenlerini çiziniz **(15 puan)**

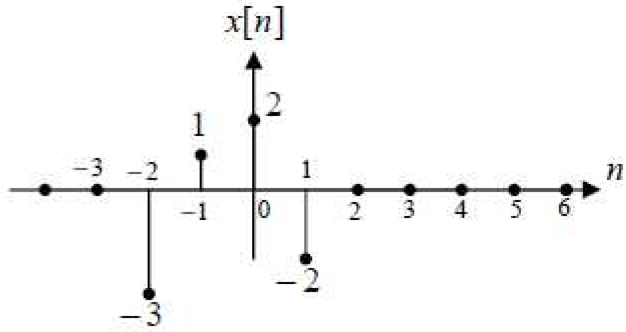
2) $x[n] = \sin\left[\dfrac{n\pi}{2}\right] + \cos\left[\dfrac{n\pi}{3}\right]$ sinyali veriliyor.

a) $x[n]$ periyodik midir, periyodikse ana periyodu nedir? **(4 puan)**
b) $y[n] = x[2n]$ sinyali periyodik midir, periyodikse ana periyodu nedir? **(6 puan)**

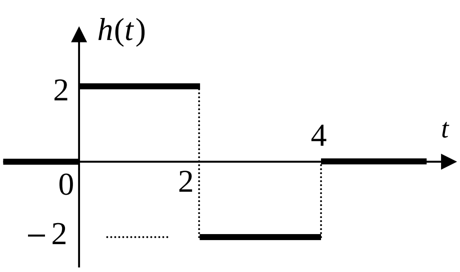
3) Giriş(x) – çıkış(y) ilişkisi $y[n] = e^{x[0]}x[n]$ ile verilen bir sistem bellekli midir, nedensel midir, kararlı mıdır, doğrusal mıdır, zamanla değişen midir? Açıklama istenmemektedir. Sistem hakkında herhangi bir ek bilgi verilmemektedir. **(15 puan)**

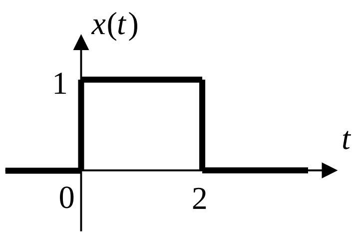
4) Birim darbe tepkisi şekildeki $h[n]$ olan doğrusal zamanla değişmez (DZD) bir sistemin girişine şekildeki $x[n]$ sinyali giriş olarak uygulanırsa elde edilecek çıkış sinyali $y[n]$ 'i çiziniz. **(20 puan)**





5) Birim darbe tepkisi şekildeki $h(t)$ olan DZD bir sistemin girişine şekildeki $x(t)$ sinyali giriş olarak uygulanırsa elde edilecek çıkış sinyali $y(t)$ 'yi çiziniz. Önce sistemin birim basamak tepkisini bulmanız tavsiye edilir. **(20 puan)**





6) Giriş(x) – çıkış(y) ilişkisi

$$4\ddot{y}(t) + 16y(t) = 8x(t)$$

ile verilen nedensel sistemin birim darbe tepkisini bulunuz. **(20 puan)**

BAŞARILAR …

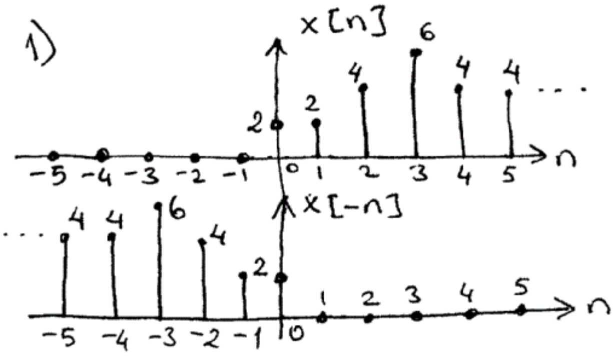
Yard. Doç. Dr. Ata SEVİNÇ

Bilgisayar Mühendisliği Bölümü

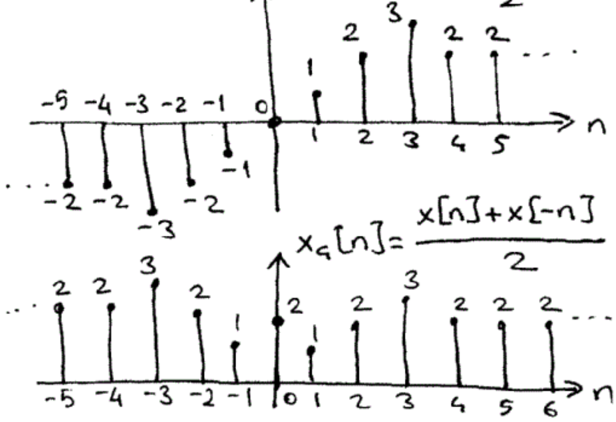
SİNYALLER VE SİSTEMLER ARASINAV CEVAP ANAHTARI

18 Nisan 2013

1)



$x_T[n] = \dfrac{x[n]-x[-n]}{2}$, $\quad x_e[n] = \dfrac{x[n]+x[-n]}{2}$



2) a) $\sin\left[\frac{n\pi}{2}\right] \rightarrow \frac{2\pi}{\pi/2} = 4$ tamsayı olduğundan bu bileşen 4 ile periyodik

$\cos\left[\frac{n\pi}{3}\right] \rightarrow \frac{2\pi}{\pi/3} = 6$ tamsayı → bu bileşen de 6 ile periyodik

EKOK(4,6) = 12 = N → x[n] ise 12 ile periyodik

b) $y[n] = x[2n] = \underbrace{\sin\left[\frac{2n\pi}{2}\right]}_{0 \rightarrow \text{bilgi kaybı}} + \cos\left[\frac{2n\pi}{3}\right] = \cos\left[\frac{2n\pi}{3}\right]$

$\frac{2\pi}{2\pi/3} = 3 \rightarrow y[n]$, 3 ile periyodiktir.

3) $y[n] = e^{x[0]} \cdot x[n]$ → bellekli (x[0]'ı saklamak için)

Nedensel değil (n<0 için çıkış, girişin gelecekteki x[0] değerine bağlı)

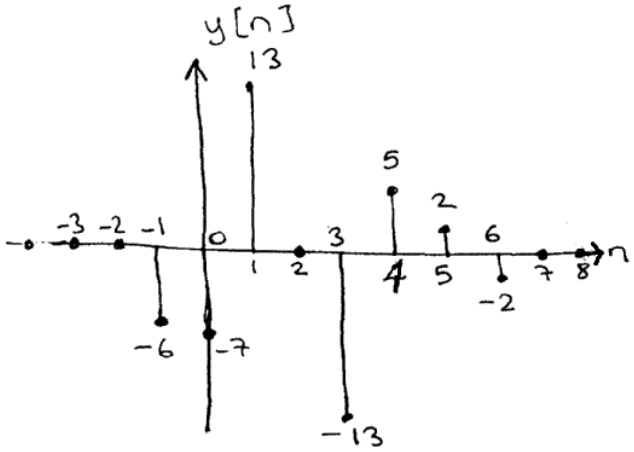
Kararlı (x[n] sınırlıysa $e^{x[0]}$ da sınırlı → y[n] de sınırlı)

Doğrusal değil ($e^{x[0]}$ katsayısından dolayı)

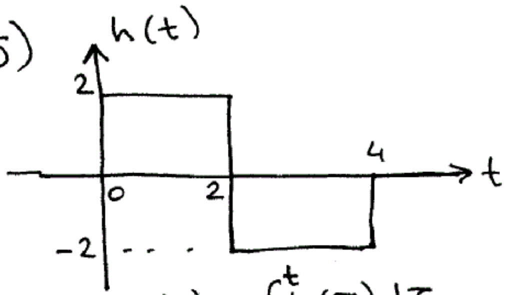
Zamanla değişen (Giriş ötelenince x[0] başka bir değer olur. Halbuki y[n] ötelense aynı x[0] kullanılmış olurdu.)

4)

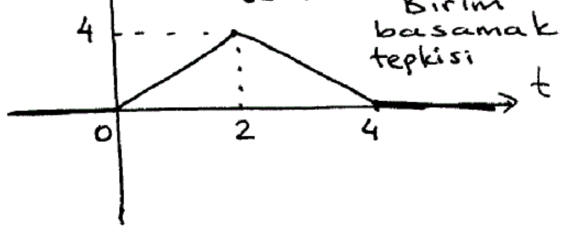
			2	3	−2	0	1	→ h[5]
				−3	1	2	−2	→ x[1]
×								
			−4	−6	4	0	−2	
		4	6	−4	0	2		
	2	3	−2	0	1			
−6	−9	6	0	−3				
+								
−6	−7	13	0	−13	5	2	−2	→ y[5+1] = y[6]



5)



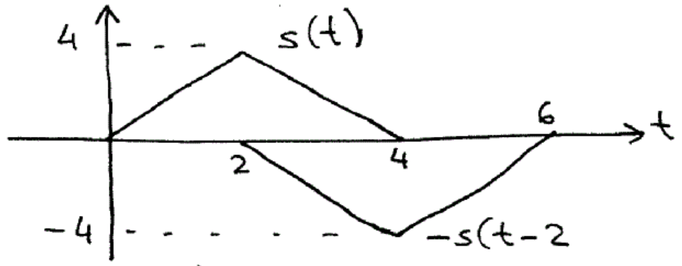
$s(t) = \int_{\tau=-\infty}^{t} h(\tau)\, d\tau$

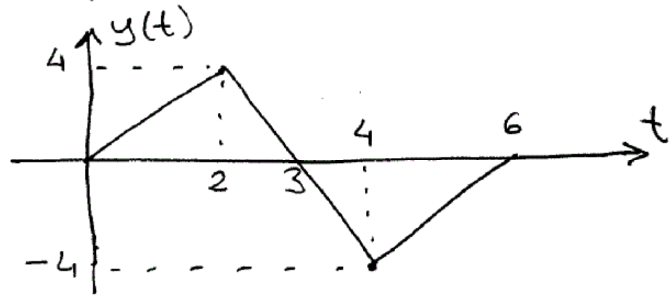


$x(t) = u(t) - u(t-2)$

olduğu görüldüğü için,

$y(t) = s(t) - s(t-2)$ olur.





6) $t>0$ için

$4\ddot{h}(t) + 16h(t) = 0$

denklemi, $h(0) = 0$

$\dot{h}(0) = 8/4 = 2$

başlangıç şartlarıyla

çözülür ve $t<0$ için $h(t)=0$ 'dır.

$4\lambda^2 + 16 = 0 \longrightarrow \lambda_{1,2} = \mp j2$

$h(t) = A\cos 2t + B\sin 2t$ $\quad t>0$ için

$h(0) = A = 0$

$\dot{h}(0) = -2A\sin 2t + 2B\cos 2t \Big|_{t=0} = 2B = \frac{8}{4} = 2 \longrightarrow B = 1$

$\longrightarrow \boxed{h(t) = u(t)\sin 2t}$ Tüm zamanlar için.

Bilgisayar Mühendislği Bölümü
SİNYALLER VE SİSTEMLER FİNAL SINAVI SORULARI
06.6.2013 Süre: 80 dakika

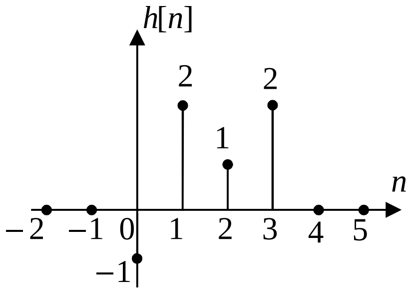
1. ve 4. sorular zorunludur. 20 puanlık sorulardan ise (2., 3., 5. ve 6.) istediğiniz ikisini yapmanız yeterli olup fazla yaparsanız yalnızca lehinize olan ikisi hesaba katılacaktır.

1) Doğrusal zamanla değişmez (DZD) bir sistemin birim darbe tepkisi aşağıdaki şekildeki $h[n]$ 'dir.

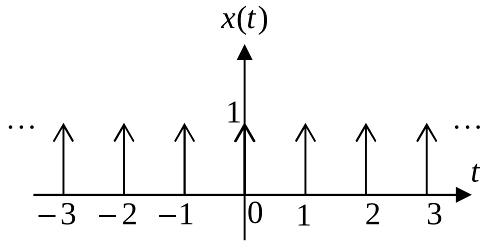
a) Sistem nedensel midir, kararlı mıdır, bellekli midir? DZD sistemlere özel açıklamasını belirterek cevaplayınız. **(9 puan)**

b) Sistemin birim basamak tepkisini çiziniz. **(8 puan)**

c) Sistemin girişi $x[n]=u[n+2]-u[n-5]$ ise çıkışını çiziniz. **(13 puan)**



2) Yanda verilen $x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-kT_0)$ sinyalini Fourier serisine açınız. ($T_0=1$) **(20 puan)**



3) Giriş(x)-çıkış(y) ilişkisi aşağıda verilen nedensel sistemin transfer fonksiyonunu **(6 puan)** ve birim darbe tepkisini **(14 puan)** bulunuz.

$$\ddot{y}(t)+5\dot{y}(t)+4y(t)=3\dot{x}(t)+x(t)$$

4) Giriş(x)-çıkış(y) ilişkisi

$$y[n+2]-0{,}6y[n+1]+0{,}08y[n]=5x[n+1]-x[n]$$

ile verilen nedensel sistemin transfer fonksiyonunu **(5 puan)**, birim darbe tepkisini **(10 puan)** ve $x[n]=(0{,}2)^n u[n]$ girişi için enerjisiz başlangıçlı çıkışını **(15 puan)** Z ve/veya Z^{-1} dönüşümleriyle bulunuz.

5) $N=3$ ile **periyodik** bir $x[n]$ sinyalinin bir periyodu $x[0]=1$, $x[1]=1$ ve $x[2]=-2$ noktalarına sahiptir. Bu sinyali Fourier serisi olarak yazınız. **(20 puan)**

6) 1. soruda birim darbe tepkisi verilen DZD sistemin girişine $x[n]=n\cdot\left(u[n]-u[n-4]\right)$ sinyali uygulanırsa çıkışın ne olacağını Z ve/veya Z^{-1} dönüşümleriyle bulunuz ve çiziniz. Önce $x[n]$ sinyalini çizmeniz tavsiye edilir. **(20 puan)**

BAŞARILAR … **Yard. Doç. Dr. Ata SEVİNÇ**

SİNYALLER VE SİSTEMLER FİNAL CEVAP ANAHTARI (1)

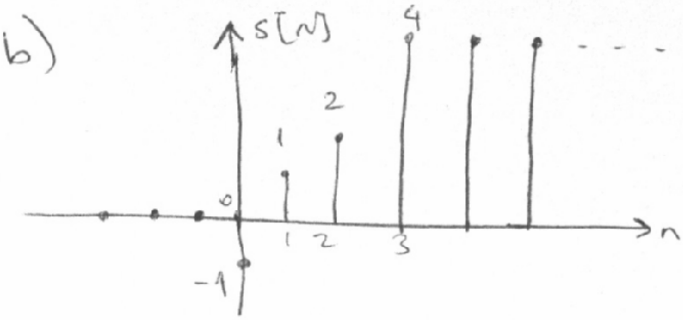
06-6-2013

1) a) Nedensel; çünkü $\forall n<0$ için $h[n]=0$

Kararlı; " $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| = 6 < \infty$

Bellekli; " $\exists n\neq 0 \Rightarrow h[n]\neq 0$

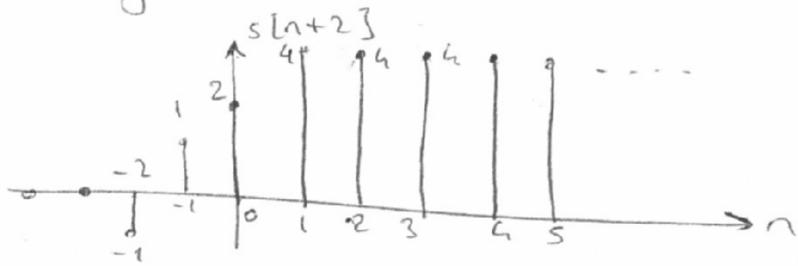
b)

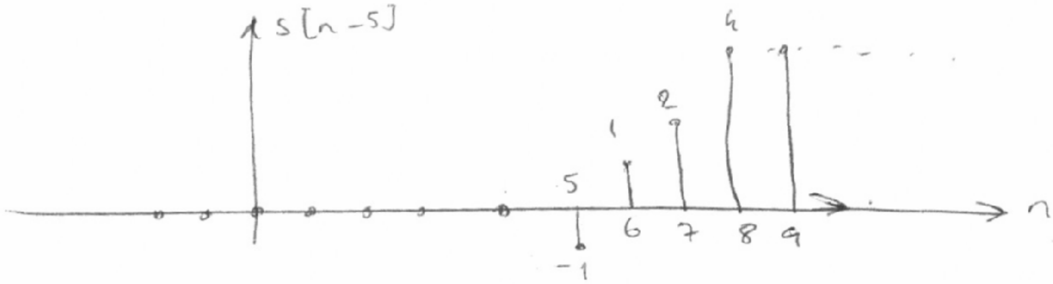


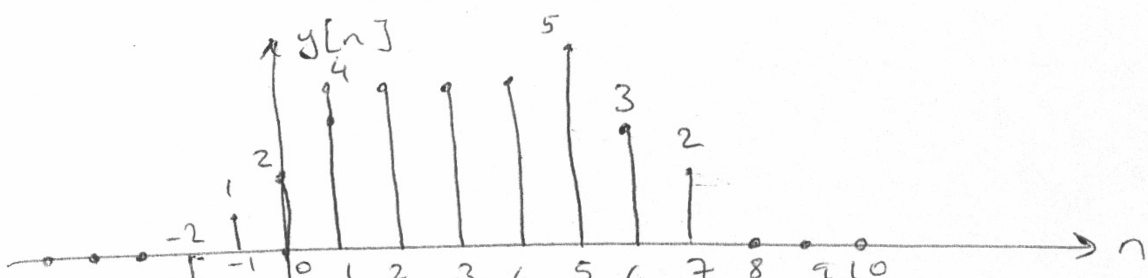
$$s[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} h[k]$$

c) $x[n] = u[n+2] - u[n-5]$

$\Rightarrow y[n] = s[n+2] - s[n-5]$







2) $\omega_0 = 2\pi/T_0 = 2\pi$, $\quad x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$; $\quad c_k = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$ $\searrow \delta(t)$

$$c_k = \frac{1}{T_0}\int_{-1/2}^{1/2} \delta(t)\cdot e^{0}\cdot dt = \frac{1}{T_0}\int_{-1/2}^{1/2} \delta(t)\,dt = \frac{1}{T_0} = 1$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T_0} e^{jk\omega_0 t} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos k\omega_0 t$$

$a_0 = a_k = 2/T_0 = 2$

2

3) $H(\omega) = \dfrac{3j\omega + 1}{(j\omega)^2 + 5(j\omega) + 4} = \dfrac{3(j\omega)+1}{(j\omega+1)(j\omega+4)}$

$= \dfrac{A}{j\omega+1} + \dfrac{B}{j\omega+4}$ $\qquad A = \dfrac{3(-1)+1}{(-1+4)} = -\dfrac{2}{3}$

$B = \dfrac{3(-4)+1}{(-4+1)} = \dfrac{-11}{-3} = 11/3$

$$h(t) = \left(-\frac{2}{3}e^{-t} + \frac{11}{3}e^{-4t}\right)u(t)$$

4) $H(z) = \dfrac{5z-1}{z^2 - 0{,}6z + 0{,}08} = \dfrac{5(z-0{,}2)}{(z-0{,}2)(z-0{,}4)} = \dfrac{5}{z-0{,}4}$

$|z|>0{,}4$

$h[n] = \mathcal{Z}^{-1}\left\{5z^{-1}\cdot\dfrac{z}{z-0{,}4}\right\} = 5(0{,}4)^{n-1}u[n-1]$

$X(z) = \dfrac{z}{z-0{,}2}$; $|z|>0{,}2$ $\quad Y(z) = \dfrac{5z}{(z-0{,}2)(z-0{,}4)}$; $\quad |z|>0{,}4$

$\dfrac{Y(z)}{z} = \dfrac{5}{(z-0{,}2)(z-0{,}4)} = \dfrac{a}{z-0{,}2} + \dfrac{b}{z-0{,}4}$

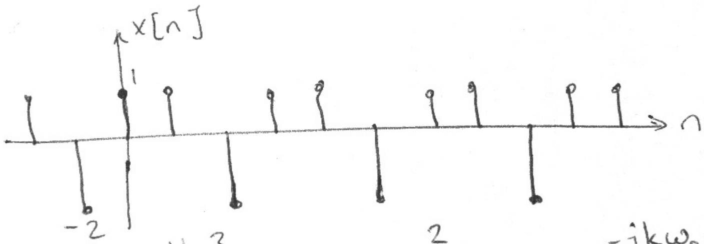
$a = \dfrac{5}{0{,}2-0{,}4} = -\dfrac{5}{0{,}2} = -25$ $\qquad b = \dfrac{5}{0{,}4-0{,}2} = 25$

$Y(z) = -25\cdot\dfrac{z}{z-0{,}2} + 25\cdot\dfrac{z}{z-0{,}4}$

$$y[n] = 25\left(0{,}4^n - 0{,}2^n\right)u[n] = \left[10\times(0{,}4)^{n-1} - 5\times(0{,}2)^{n-1}\right]u[n-1]$$

En sonda yazan diğer yolla bulanların sonucunun görünümüdür.

5)



$x[n] = \sum_{k=0}^{2} c_k e^{jk\omega_0 n}$

$= \sum_{k=-1}^{1} c_k e^{jk\omega_0 n}$

$\omega_0 = 2\pi/3 \rightarrow N=3$ $\qquad c_k = \dfrac{1}{N}\sum_{n=0}^{2} x[n]\, e^{-jk\omega_0 n}$

$c_0 = \dfrac{1}{3}\sum_{n=0}^{2} x[n] = \dfrac{1}{3}(1+1+2) = 4/3 = c_0$

$c_1 = \dfrac{1}{3}\sum_{n=0}^{2} x[n]\, e^{-j\omega_0 n} = \dfrac{1}{3}\sum_{n=-1}^{1} x[n]\, e^{-j\omega_0 n}$

3

$$c_1 = \frac{1}{3}\left(-2e^{j2\pi/3} + 1\cdot e^{j0} + 1e^{-j2\pi/3}\right)$$

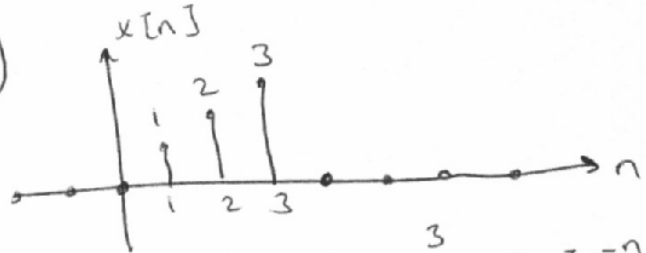
$$c_1 = \frac{1}{3}\left(-2\angle 120^\circ + 1 + 1\angle -120^\circ\right) = \frac{1}{3}\left(1 - j\sqrt{3} + 1 - \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$c_1 = \frac{1}{3}\left(\frac{3}{2} - j\frac{3\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{-j\pi/3} = 1\angle -60^\circ$$

$$c_{-1} = c_1^* = c_2 = 1\angle 60^\circ = e^{j\pi/3} = \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\boxed{x[n] = e^{+j\frac{\pi}{3}}\cdot e^{-j\frac{2\pi}{3}n} + \frac{4}{3} + e^{-j\frac{\pi}{3}}\cdot e^{j\frac{2\pi}{3}n}}$$

6)



$$y[n] = x[n] * h[n]$$

$$Y(z) = X(z)H(z)$$

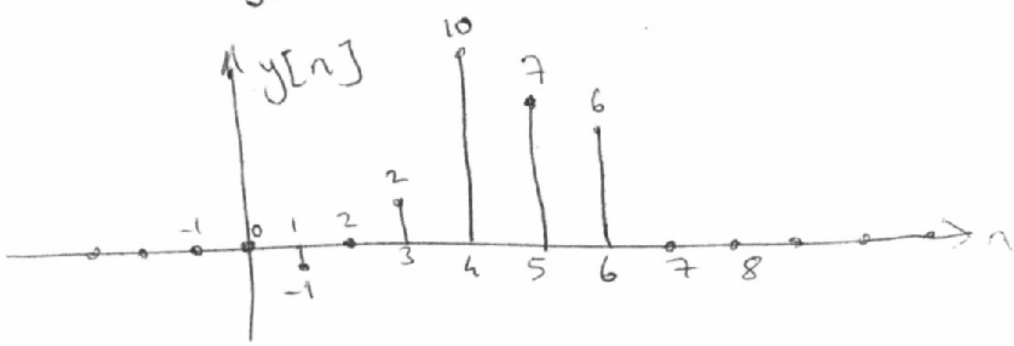
$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n} = \sum_{n=1}^{3} x[n]z^{-n} = z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3}$$

$$H(z) = \sum_{n=0}^{3} h[n]z^{-n} = -1 + 2z^{-1} + z^{-2} + 2z^{-3}$$

$$Y(z) = \left(-1 + 2z^{-1} + z^{-2} + 2z^{-3}\right)\left(z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3}\right)$$

$$Y(z) = \underbrace{-1}_{y[1]}\cdot z^{-1} + \underbrace{(-1\times 2 + 2\times 1)}_{y[2]=0} z^{-2} + \underbrace{(-1\times 3 + 2\times 2 + 1\times 1)}_{y[3]=2} z^{-3}$$

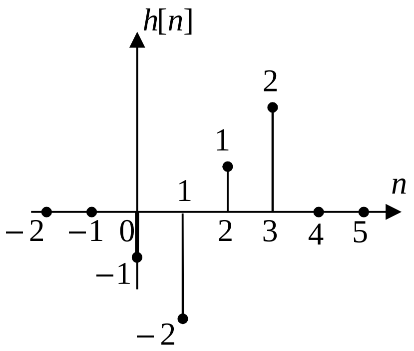
$$+ \underbrace{(2\times 3 + 1\times 2 + 2\times 1)}_{y[4]=10} z^{-4} + \underbrace{(1\times 3 + 2\times 2)}_{y[5]=7} z^{-5} + \underbrace{2\times 3}_{y[6]=6} z^{-6}$$



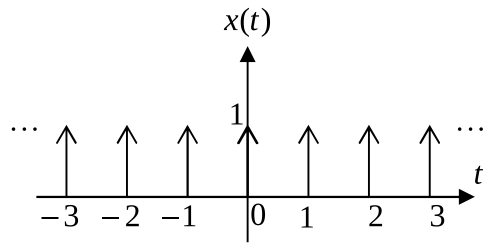
Bilgisayar Mühendislği Bölümü
SİNYALLER VE SİSTEMLER BÜTÜNLEME SINAVI SORULARI
20.6.2013   Süre: 80 dakika

1. ve 4. sorular zorunludur. 20 puanlık sorulardan ise (2., 3., 5. ve 6.) istediğiniz ikisini yapmanız yeterli olup fazla yaparsanız yalnızca lehinize olan ikisi hesaba katılacaktır.

1) Doğrusal zamanla değişmez (DZD) bir sistemin birim <u>darbe</u> tepkisi aşağıdaki şekildeki $h[n]$ 'dir.
a) Sistem nedensel midir, kararlı mıdır, bellekli midir? DZD sistemlere özel açıklamasını belirterek cevaplayınız. **(9 puan)**
b) Sistemin birim basamak tepkisini çiziniz. **(8 puan)**
c) Sistemin girişi $x[n] = -2u[n+2] + 2u[n-5]$ ise çıkışını çiziniz. **(13 puan)**



2) Yanda verilen $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_0)$ sinyalini Fourier serisine açınız. ($T_0 = 1$) **(20 puan)**



3) Giriş(x)-çıkış(y) ilişkisi aşağıda verilen nedensel sistemin transfer fonksiyonunu**(5 puan)**, birim darbe tepkisini **(10 puan)** ve $x(t) = 2e^{-3t}u(t)$ girişi için enerjisiz başlangıçlı çıkışını bulunuz **(15 puan)**.

$$\ddot{y}(t) + 6\dot{y}(t) + 8y(t) = \dot{x}(t) + 3x(t)$$

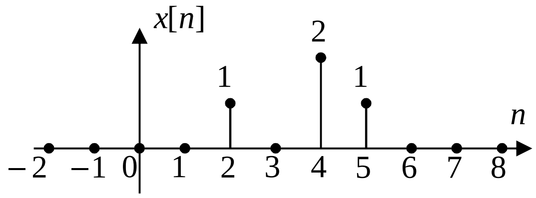
4) Giriş(x)-çıkış(y) ilişkisi

$$y[n+2] - 1{,}6y[n+1] + 0{,}63y[n] = x[n+1] - 2x[n]$$

ile verilen nedensel sistemin transfer fonksiyonunu **(6 puan)** ve birim darbe tepkisini **(14 puan)**.

5) $N = 3$ ile **periyodik** bir $x[n]$ sinyalinin bir periyodu $x[1] = 1$, $x[2] = 2$ ve $x[3] = 3$ noktalarına sahiptir. Bu sinyali Fourier serisi olarak yazınız. **(20 puan)**

6) 1. soruda birim darbe tepkisi verilen DZD sistemin girişine yanda verilen $x(t)$ sinyali uygulanırsa çıkışın ne olacağını Z ve/veya Z^{-1} dönüşümleriyle bulunuz ve çiziniz. **(20 puan)**
(Başka bir yolla yaparsanız 10 puan üzerinden değerlendirilir.)



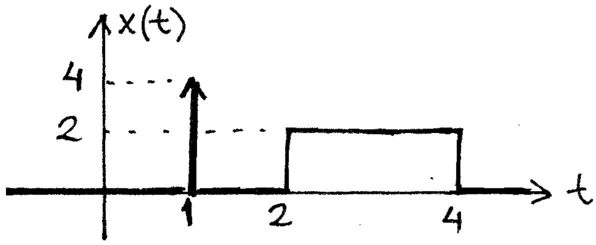
BAŞARILAR …

Yard. Doç. Dr. Ata SEVİNÇ

SİNYALLER VE SİSTEMLER ARASINAV SORULARI
26 Kasım 2013 Süre: 90 dakika

İşlem yaptığınız soruların toplam tam puanı 100'den fazla ise aldığınız puanlar toplamı, bu soruların tam puan toplamının yüzde birine bölünecektir. Meselâ 110 puanlık soruya 88 puanlık cevap yaptıysanız 1,1'e bölünerek 80'e dönüştürülecektir. Ancak bu şekilde hesaba katılması aleyhinize olacak kadar düşük puanlı cevaplarınız yok sayılacaktır.

1)



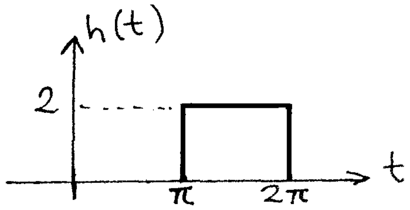
Yukarıdaki şekilde verilen $x(t)$ sinyalinin fonksiyonunu darbe ve/veya basmaklar cinsinden yazınız. Bu sinyalin tek ve çift bileşenlerini çiziniz. **(15 puan)**

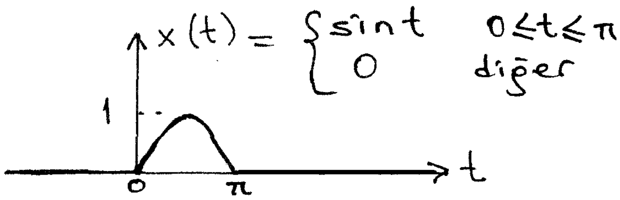
2) Şu sinyallerin periyodik olup olmadığını, periyodik iseler ana periyodunu söyleyiniz. **(10 puan)**

a) $v[n] = \cos[\sqrt{2}\pi n]$ **b)** $x[n] = 2^n \cos\left[\frac{\pi n}{7}\right]$ **c)** $y(t) = \cos(3\pi t) + \sin(5\pi t)$

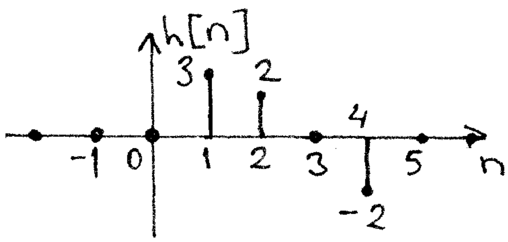
3) Giriş(x)-çıkış(y) ilişkisi $y[n] = \sum_{k=0}^{n} x[k]$ ile verilen sistem bellekli midir, nedensel midir, kararlı mıdır, doğrusal mıdır, zamanla değişen midir? **(15 puan)** (Açıklama beklenmiyor)

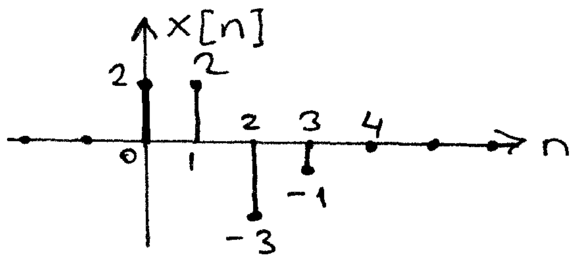
4) Doğrusal ve zamanla değişmez (DZD) bir sistemin birim darbe tepkisi $h(t)$ ile girişi $x(t)$ şekillerde verildiği gibidir. Sistem çıkışını ($y(t)$) bulunuz. **(25 puan)** (Çizmeniz beklenmiyor)





5) DZD bir sistemin birim darbe tepkisi $h[n]$ ve girişi $x[n]$ aşağıdaki şekillerde verilmiştir. Sistem çıkışını ($y[n]$) çiziniz. Ayrıca sistemin birim basamak tepkisini ($s[n]$) çiziniz. **(20 puan)** (Açıklama beklenmiyor)





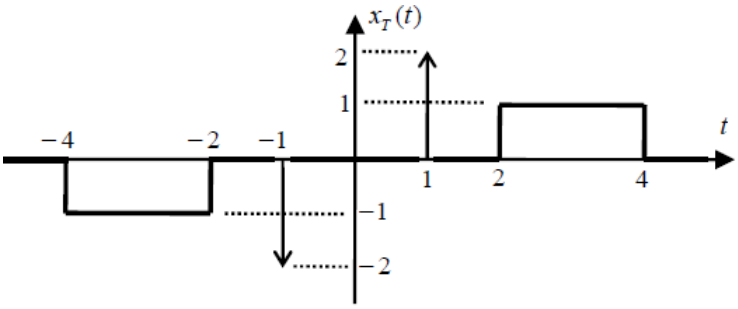
6) Giriş(x)-çıkış(y) ilişkisi $2\ddot{y}(t) + 6\dot{y}(t) + 4y(t) = 8x(t-5)$ ile verilen nedensel sistemin birim darbe tepkisini bulunuz. **(15 puan)**

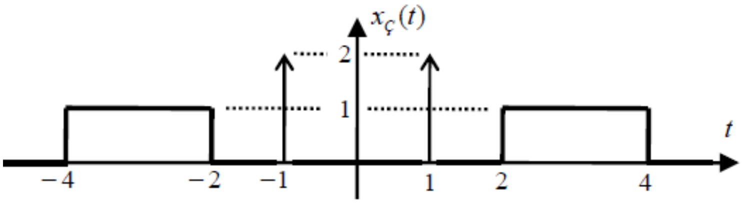
7) Giriş(x)-çıkış(y) ilişkisi $y[n+2] - y[n] = x[n]$ ile verilen sistemin girişine $x[n] = \left(3 + 2^n\right) \cdot u[n]$ sinyali uygulanırsa $y[0] = y[1] = 0$ başlangıç şartları için çıkış ne olur? **(20 puan)**

BAŞARILAR … **Yard. Doç. Dr. Ata SEVİNÇ**

SİNYALLER VE SİSTEMLER ARASINAV CEVAP ANAHTARI
26 Kasım 2013

1) $x(t) = 4\delta(t-1) + 2u(t-2) - 2u(t-4)$





2) a) $v[n]$, $2\pi/(\sqrt{2}\,\pi) = \sqrt{2}$ irrasyonel olduğu için periyodik değildir.

b) $x[n]$, periyodik değildir, 2^n'den dolayı.

c) $y(t)$, periyodiktir. Ana periyodu $2\pi/(3\pi) = 2/3$ ve $2\pi/(5\pi) = 2/5$'in en küçük ortak tam katı olan 2'dir.

3) Belleklidir,

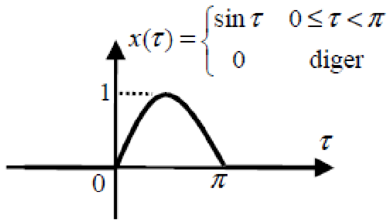
Nedensel değildir ($n < 0$ iken bile $x[0]$'a bağlı),

Kararsız ($u[n]$ giriş için çıkış $n \cdot u[n]$ oluyor),

Doğrusal,

Zamanla değişen (Giriş ötelenirse $x[0]$ değişir, çıkışın ötelenmişinden farklı çıkış alınır).

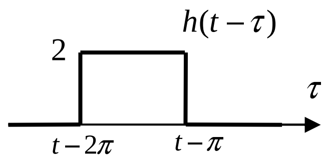
4) $t-\pi < 0$ yani $\underline{t < \pi \text{ için :}}$ $\quad x(\tau)h(t-\tau) = 0 \quad \forall\tau \quad \rightarrow \quad y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} 0\,d\tau = 0$



$0 \le t-\pi < \pi$ yani $\underline{\pi \le t < 2\pi \text{ için :}}$

$$x(\tau)h(t-\tau) = \begin{cases} 2\sin\tau & 0 \le \tau \le t-\pi \\ 0 & diger \end{cases}$$

$$y(t) = \int_0^{t-\pi} 2\sin\tau\, d\tau = -2\cos\tau \Big|_0^{t-\pi} = -2\cos(t-\pi) + 2 \qquad y(t) = 2 + 2\cos t$$



$0 \le t-2\pi < \pi$ yani $\underline{2\pi \le t < 3\pi \text{ için :}}$

$$x(\tau)h(t-\tau) = \begin{cases} 2\sin\tau & t-2\pi \le \tau \le \pi \\ 0 & diger \end{cases}$$

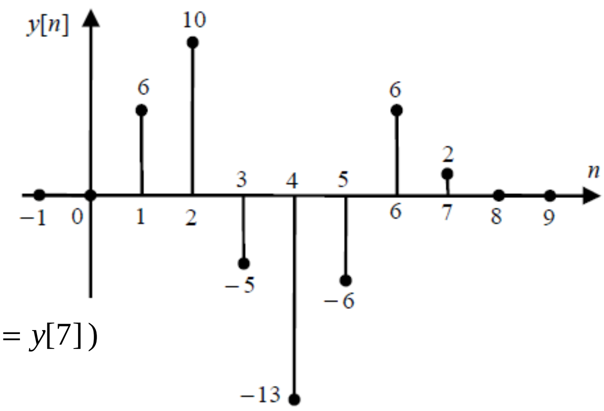
$$y(t) = \int_{t-2\pi}^{\pi} 2\sin\tau\, d\tau = -2\cos\tau \Big|_{t-2\pi}^{\pi} = 2 + 2\cos(t-2\pi) \quad \rightarrow \quad y(t) = 2 + 2\cos t$$

$t-2\pi \ge \pi$ yani $\underline{t \ge 3\pi \text{ için :}}$ $\quad x(\tau)h(t-\tau) = 0 \quad \forall\tau \quad \rightarrow \quad y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} 0\,d\tau = 0$

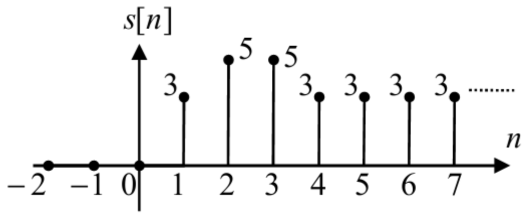
Sonuç: $y(t) = \begin{cases} 2 + 2\cos t & \pi \le t < 3\pi \\ 0 & diger \end{cases}$

5) $y[n] = x[n] * h[n]$ Her iki sinyal de sonlu süreli olduğu için klasik çarpmaya benzeyen yolla yapalım:

				2	2	-3	-1	(En sağdaki $x[3]$)
				3	2	0	-2	(En sağdaki $h[4]$)
×								
				-4	-4	6	2	
			0	0	0	0		
		4	4	-6	-2			
	6	6	-9	-3				
+								
	6	10	-5	-13	-6	6	2	(En sağdaki $y[3+4] = y[7]$)



Birim basamak tepkisi ise $s[n]=\sum_{k=-\infty}^{n} h[k]$



6) $t>5$ için $2\ddot{h}(t)+6\dot{h}(t)+4h(t)=0$ denklemi,

$h(5)=0$ ve $\dot{h}(5)=8/2=4$ başlangıç şartlarıyla çözülmelidir.

$2\lambda^2+6\lambda+4=0 \quad \rightarrow \quad \lambda_1=-1\,, \quad \lambda_2=-2$

$h(t)=A_1e^{-(t-5)}+A_2e^{-2(t-5)}$ Başlangıç şartlarını kullanırsak

$h(5)=A_1+A_2=0$

$\dot{h}(5)=-A_1-2A_2=4 \quad \rightarrow \quad A_1=4\;, \quad A_2=-4$

Nedensellikten dolayı girişin sıfırdan farklı olduğu ilk ana kadar, yani $t<5$ için $h(t)=0$ olduğundan birim darbe tepkisi:

$$h(t)=4\left(e^{-(t-5)}-e^{-2(t-5)}\right)\cdot u(t-5)$$

7) $y[n+2]-y[n]=\left(3+2^n\right)\cdot u[n]$

$\lambda^2-1=0 \quad \rightarrow \quad \lambda_1=1\,, \quad \lambda_2=-1$

$n<0$ için sağ taraf sıfır ve $y[0]=y[1]=0$ olduğu için çözümün de sıfır olduğu bellidir.

$n\geq 0$ için:

Homojen çözüm: $y_h[n]=A_1\cdot 1^n+A_2(-1)^n=A_1+A_2(-1)^n$

Sağdaki $3=3\times 1^n$ için özel çözüm bileşeni, $1=\lambda_1$ olduğundan $y_{ö1}[n]=c_1n\cdot 1^n=c_1n$

$y_{ö1}[n+2]-y_{ö1}[n]=3 \quad \rightarrow \quad c_1(n+2)-c_1n=3 \quad \rightarrow \quad 2c_1=3 \quad \rightarrow \quad c_1=3/2$

Sağdaki 1×2^n için özel çözüm bileşeni, $2\notin\{\lambda_1\,,\lambda_2\}$ olduğundan $y_{ö2}[n]=c_2 2^n$

$c_2=\dfrac{1}{2^2-1}=\dfrac{1}{3}$

Toplam çözüm: $y[n]=A_1+A_2(-1)^n+\dfrac{3}{2}n+\dfrac{1}{3}\cdot 2^n$

Başlangıç şartları: $y[0]=A_1+A_2+\dfrac{1}{3}=0$

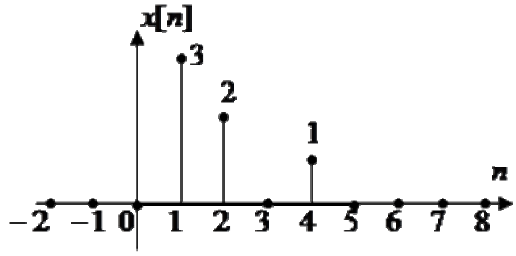
$y[1]=A_1-A_2+\dfrac{3}{2}+\dfrac{2}{3}=0$

$2A_1=-5/2 \qquad A_1=-\dfrac{5}{4} \quad \rightarrow \quad A_2=\dfrac{11}{12}$

Katsayılar yerine yazılarak ve negatif anlar da dikkate alınarak

$$y[n]=\left(-\frac{5}{4}+\frac{11}{12}(-1)^n+\frac{3}{2}n+\frac{1}{3}\cdot 2^n\right)\cdot u[n]$$ bulunur.

SİNYALLER VE SİSTEMLER FİNAL SINAVI SORULARI
03.01.2014 Süre: 75 dakika



1) Cesur'un iğne korkusu doğrusal zamanla değişmez (DZD) bir sistem olarak şöyle modelleniyor: n gün numarası, günlere göre vurulan iğne sayıları giriş, günlere göre duyduğu korku değeri (eksi sayı olursa kurtulma rahatlığı) çıkış olarak tanımlanıyor. Yeterince önceden öğrendiği her bir iğne vurulmadan 2 gün önce 1 birim, 1 gün önce 2 birim, iğne günü 3 birim, iğne vurulduğunun ertesi günü -1 birim korku duyuyor. Cesur, doktorunun kendisine günlük iğne sayıları şekilde verilen $x[n]$ olan bir tedavi planı uygulayacağını yeterince önceden öğreniyor. Planın gerçekleşeceği varsayılıyor. Buna göre:

a) Sistemin birim darbe tepkisini çiziniz. **(8 puan)**

b) Sistem nedensel midir, kararlı mıdır, bellekli midir? DZD sistemlere özel gerekçesini belirterek cevaplayınız. **(9 puan)**

c) Sistem çıkışını Z ve/veya Z^{-1} dönüşümü kullanarak çiziniz. **(13 puan)** (Başka yolla olursa 7 puan)

2) (2A) ya da (2B) sorularından yalnız birisini cevaplayınız. **(25 puan)**

(2A) Bir devre elemanı üzerindeki voltaj tek frekanslı (saf) sinüzoidal, akım ise periyodik fakat harmonikli ise temel bileşeni dışındaki akım bileşenlerinin ortalama (aktif) güç hesabına etkisi olmadığını gösteriniz.

(2B) Yüksek ve düşük seviyeleri eşit genişlikte olan periyodik bir kare dalga çizerek, seviyelerini ve zamanlarını istediğiniz gibi belirleyerek bunu Fourier serisine açınız.

3) Giriş(x) – çıkış(y) ilişkisi aşağıdaki gibi verilen nedensel sistemin transfer fonksiyonunu **(5 puan)**, birim darbe tepkisini **(8 puan)** ve $x(t) = e^{-3t}u(t)$ girişi için enerjisiz başlangıçlı çıkışını bulunuz. **(12 puan)**

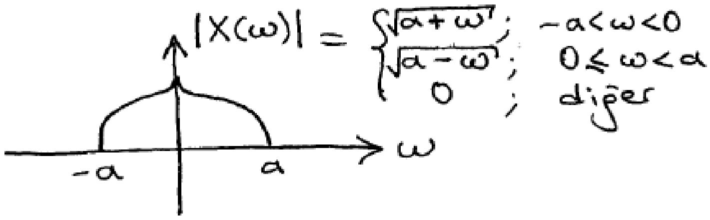
$$\dot{y}(t) + 2y(t) = 2\dot{x}(t) - x(t)$$

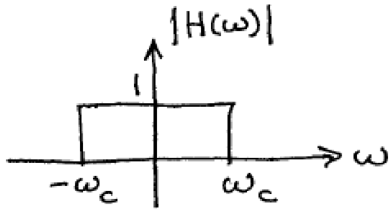
4) (4A) ya da (4B) sorularından yalnız birisini cevaplayınız.

(4A) Giriş(x) – çıkış(y) ilişkisi aşağıdaki gibi verilen nedensel sistemin transfer fonksiyonunu **(7 puan)** ve birim darbe tepkisini **(13 puan)** bulunuz.

$$y[n+2] - 3y[n+1] + 2y[n] = 3x[n+2] - x[n+1]$$

(4B) Kaydedilmiş bir ses sinyalinin ($x(t)$) genlik spektrumu $|X(\omega)|$ aşağıdaki gibidir. Bu sinyali kazanç spektrumu $|H(\omega)|$ aşağıdaki gibi olan ideal bir alçak geçiren süzgeçten geçirerek $y(t)$ sinyali elde edilecektir. $y(t)$ sinyalinin enerjisinin, $x(t)$ sinyalinin enerjisinin yarısı olması isteniyorsa alt kesim frekansı ω_c ne olmalıdır? **(20 puan)**



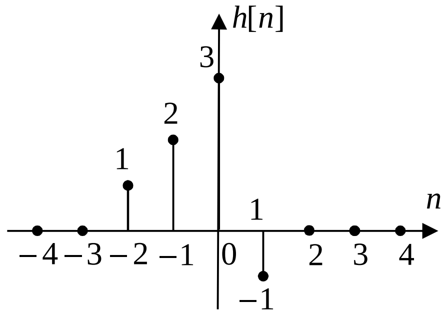


BAŞARILAR …

Yard. Doç. Dr. Ata SEVİNÇ

SİNYALLER VE SİSTEMLER FİNAL SINAVI CEVAP ANAHTARI
03.01.2014

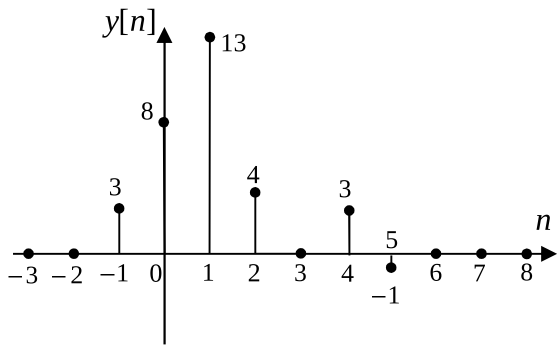
1) a) Bu sistem için birim darbe tepkisi demek, Cesur, sadece 0. günde bir adet iğne vurulacağını yeterince önceden öğrenirse günlere göre duyacağı korku fonksiyonu demektir ve şekildeki $h[n]$ gibidir.



b) Bazı $n<0$ için $h[n]\neq 0$ olduğu için sistem nedensel değildir.

$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|h[n]| = 1+2+3+|-1| = 7 < \infty$ olduğu için sistem kararlıdır.

Bazı $n\neq 0$ için $h[n]\neq 0$ olduğu için sistem belleklidir.



c) Çıkış $y[n]=x[n]*h[n] \xrightarrow{Z} Y(z)=X(z)H(z)$

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\,z^{-n} = 3z^{-1}+2z^{-2}+z^{-4}$$

$$H(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]\,z^{-n} = z^{2}+2z+3-z^{-1}$$

$$Y(z)=\left(3z^{-1}+2z^{-2}+z^{-4}\right)\left(z^{2}+2z+3-z^{-1}\right)$$

$$Y(z)=(3\times1)z+(3\times2+2\times1)+(3\times3+2\times2)z^{-1}+(3\times(-1)+2\times3+1\times1)z^{-2}$$
$$+(2\times(-1)+1\times2)z^{-3}+(1\times3)z^{-4}+(1\times(-1))z^{-5}$$

$=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[n]\,z^{-n}$ biçiminde düşünerek katsayılardan $y[n]$ elde edilir ve yukarıdaki şekilde gösterildiği gibi bulunur.

2A) Periyodik olan akımın, voltaj ile aynı periyotlu (aynı frekanslı) olduğu durumla ilgileniyoruz. Akım periyodunun, voltaj periyodunun tam katı olabileceği istisnalarla ilgilenmiyoruz.

Voltaj tek frekanslı sinüzoidal ise $v(t)=\hat{V}\sin(\omega_0 t+\phi) = r_{-1}e^{-j\omega_0 t}+r_1 e^{j\omega_0 t}$ biçiminde yazılabilir ($\hat{V}$, ω_0, r_{-1} ve r_1 sabit). Aynı frekanstaki akım da karmaşık Fourier serisi olarak $i(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$ biçiminde yazılabilir.

Anlık güç: $p(t)=v(t)i(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} r_{-1}c_k e^{j(k-1)\omega_0 t}+\sum_{k=-\infty}^{+\infty} r_1 c_k e^{j(k+1)\omega_0 t}$ olur. Diğer yandan $e^{jn\omega_0 t}=\cos(n\omega_0 t)+j\sin(n\omega_0 t)$ olup, $n\neq 0$ ise hem reel hem de sanal kısmının $T_0=2\pi/\omega_0$ periyodu boyunca ortalaması sıfırdır; çünkü T_0 periyodu içinde ikisi de $|n|$ adet sinüzoidal tam dalgadan oluşurlar. Dolayısıyla $e^{jn\omega_0 t}$ teriminin ortalaması sıfırdır. Sadece $n=0$ için 1'e eşit olacağından ortalaması da 1 olur. Buna göre

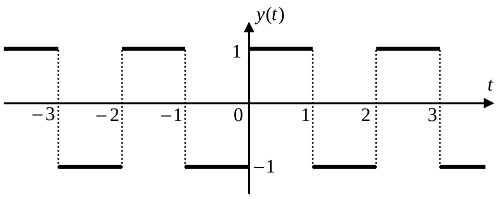
$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} r_{-1}c_k e^{j(k-1)\omega_0 t}$ kısmının ortalaması sadece $k=1$ teriminin katsayısı, yani $r_{-1}c_1$,

$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} r_1 c_k e^{j(k+1)\omega_0 t}$ kısmının ortalaması sadece $k=-1$ teriminin katsayısı, yani $r_1 c_{-1}$ olur.

Böylece $k\neq\mp1$ terimlerinin, yani *temel bileşen dışındaki akım harmoniklerinin ortalama güce katkısı olmadığı* anlaşılır.

Soruda sorulmamasına rağmen ortalama güç $P=r_{-1}c_1+r_1c_{-1}$ bulunur.

2B) Kare dalgayı tek sinyal seçenlerin serileri SS-B-2012-CA'daki 3. soru çözümüne benzetilebilir:



$$a_0 = a_k = 0 \quad \forall k\ ,\ \ b_k = \frac{2}{k\pi}\left(1-(-1)^k\right) = \begin{cases} 4/(k\pi) & k \text{ tekse} \\ 0 & k \text{ çiftse} \end{cases}$$

Yani $\boxed{y(t) = \frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin(\pi t)}{1} + \frac{\sin(3\pi t)}{3} + \frac{\sin(5\pi t)}{5} + \ldots\right)}$

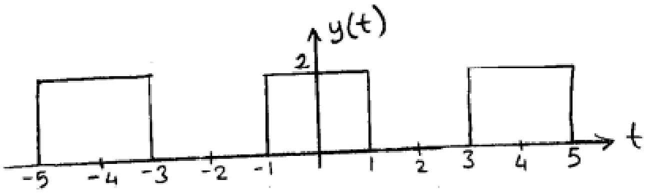
ya da karmaşık seri gösterimi istenirse

$$c_k = -c_{-k} = -j\frac{b_k}{2} = \begin{cases} -j2/k\pi & k \text{ tekse} \\ 0 & k \text{ çiftse} \end{cases}$$

Yani $\boxed{y(t) = \ldots + j\frac{2}{5\pi}e^{-j5\pi t} + j\frac{2}{3\pi}e^{-j3\pi t} + j\frac{2}{\pi}e^{-j\pi t} - j\frac{2}{\pi}e^{j\pi t} - j\frac{2}{3\pi}e^{j3\pi t} - j\frac{2}{5\pi}e^{j5\pi t} - \ldots}$

gibi.

Kare dalgayı çift sinyal seçenlerin serileri de SS-B-2007-CA'daki 4. soru çözümüne benzetilebilir:



$$a_k = \begin{cases} (-1)^{\frac{k-1}{2}}\, 4/k\pi & k \text{ tekse} \\ 0 & k \text{ çiftse } (k\neq 0) \end{cases}$$

$a_0 = 2$, ve $b_k = 0 \quad \forall k$. Yani

$$y(t) = 1 + \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{1}\cos\frac{\pi t}{2} - \frac{1}{3}\cos\frac{3\pi t}{2} + \frac{1}{5}\cos\frac{5\pi t}{2} - + \ldots\right)$$

ya da karmaşık seri gösterimi istenirse, $c_0 = 1$ ve

$$c_k = \begin{cases} 1 & k=0 \text{ ise} \\ 0 & k \text{ çiftse } (\neq 0) \\ (-1)^{\frac{k-1}{2}}\cdot\frac{2}{k\pi} & k \text{ tekse} \end{cases}$$

yani $y(t) = \ldots + \frac{2}{3\pi}e^{-j3\frac{\pi}{2}t} - \frac{2}{\pi}e^{-j\frac{\pi}{2}t} + 1 + \frac{2}{\pi}e^{j\frac{\pi}{2}t} - \frac{2}{3\pi}e^{j3\frac{\pi}{2}t} + - \ldots$ gibi.

Burada her iki kare dalganın da tepeden tepeye yüksekliği 2 birim alınmıştır.Kare dalganızın tepeden tepeye değeri farklıysa 2'ye oranı ile a_0 ve c_0 hariç tüm katsayıları çarparak kendi seri katsayılarınızı bulabilirsiniz. Ters fazdaysa ayrıca eksiyle de çarpılmalıdır. $c_0 = a_0/2$ değerini de dalganızın ortalamasına eşit almalısınız. Kare dalganızın fazı daha farklıysa bunlara benzetmeden ayrıca baştan hesap yapılmalıdır.

3) $(j\omega+2)Y(\omega) = (j2\omega-1)X(\omega) \quad \rightarrow \quad \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = H(\omega) = \frac{j2\omega-1}{j\omega+2}$ = Transfer fonksiyon.

Biraz düzenlenirse $H(\omega) = \frac{2(j\omega+2)-5}{j\omega+2} = 2 - \frac{5}{j\omega+2} \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} h(t) = 2\delta(t) - 5e^{-2t}u(t)$

Ayrıca, $x(t) = e^{-3t}u(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega) = \frac{1}{j\omega+3}$

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega) = \frac{j2\omega-1}{(j\omega+2)}\cdot\frac{1}{(j\omega+3)} = \frac{A}{(j\omega+2)} + \frac{B}{(j\omega+3)}$$

$$A = \frac{2\times(-2)-1}{-2+3} = -5 \quad \text{ve} \quad B = \frac{2\times(-3)-1}{-3+2} = 7$$

$$Y(\omega) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} y(t) = -5e^{-2t}u(t) + 7e^{-3t}u(t)$$

4A) $y[n+2]-3y[n+1]+2y[n]=3x[n+2]-x[n+1]$

$$\left(z^2-3z+2\right)Y(z)=\left(3z^2-z\right)X(z)$$

Transfer fonksiyon $\dfrac{Y(z)}{X(z)}=H(z)==\dfrac{3z^2-z}{z^2-3z+2}=\dfrac{z(3z-1)}{(z-1)(z-2)}$; $|z|>2$ Biraz düzenlenirse

$$\frac{H(z)}{z}=\frac{3z-1}{(z-1)(z-2)}=\frac{a}{z-1}+\frac{b}{z-2} \qquad a=\frac{3\times1-1}{1-2}=-2 \qquad b=\frac{3\times2-1}{2-1}=5$$

$$H(z)==-2\frac{z}{z-1}+5\frac{z}{z-2}\ ;\ |z|>2 \quad \xrightarrow{Z^{-1}} \quad h[n]=-2\times1^n u[n]+5\times2^n u[n]=\boxed{h[n]=\left(5\times2^n-2\right)u[n]}$$

<u>Diğer yol:</u> $H(z)=3+\dfrac{c}{z-1}+\dfrac{d}{z-2}$ $\qquad c=\dfrac{3\times1^2-1}{1-2}=-2$ $\qquad d=\dfrac{3\times2^2-2}{2-1}=10$

$H(z)=3-2z^{-1}\dfrac{z}{z-1}+10z^{-1}\dfrac{z}{z-2}$; $|z|>2$ Buradaki z^{-1}, zamanda 1 adım gerileticidir. Ters dönüşümü alınırsa: $h[n]=3\delta[n]-2\times1^{n-1}u[n-1]+10\times2^{n-1}u[n-1]=\boxed{h[n]=3\delta[n]+\left(10\times2^{n-1}-2\right)u[n-1]}$

Dikkat edilirse bunun önceki bulunan $h[n]$ ’e eşit olduğu görülür.

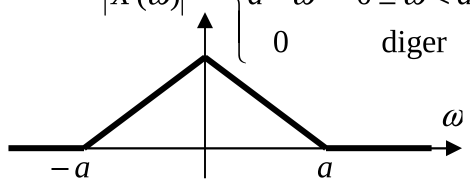
4B) SS-B-2012-CA’da aynısı çözülmüştür:

$x(t)$ sinyalinin enerjisi: $E_x=\int\limits_{t=-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2\,dt$ (Sinyalin bir ses çıkış elemanı üzerine bırakacağı enerjinin bununla orantılı olduğu anlamına gelir. Akım veya gerilim sinyalinin direnç üzerinde bıraktığı enerji gibi.) Parseval eşitliğine göre:

$$\int\limits_{t=-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2\,dt=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\omega=-\infty}^{+\infty}|X(\omega)|^2\,d\omega=E_x \quad \text{ve}$$

$$\int\limits_{t=-\infty}^{+\infty}|y(t)|^2\,dt=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\omega=-\infty}^{+\infty}|Y(\omega)|^2\,d\omega=E_y$$

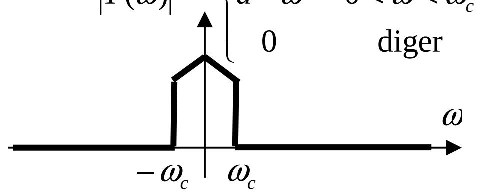
$$|X(\omega)|^2=\begin{cases} a+\omega & -a<\omega<0 \\ a-\omega & 0\le\omega<a \\ 0 & \text{diger}\end{cases}$$



$Y(\omega)=X(\omega)H(\omega) \quad \rightarrow \quad |Y(\omega)|^2=|X(\omega)|^2|H(\omega)|^2$

$|H(\omega)|^2$ grafiği $|H(\omega)|$’nınkiyle aynı olduğundan çarpımın grafiği yanda gösterildiği gibi olur.

$$|Y(\omega)|^2=\begin{cases} a+\omega & -\omega_c<\omega<0 \\ a-\omega & 0<\omega<\omega_c \\ 0 & \text{diger}\end{cases}$$



$y(t)$ sinyalinin enerjisi:

$$E_y=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\omega=\omega_c}^{0}(a+\omega)d\omega+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\omega=0}^{\omega_c}(a-\omega)d\omega$$

$$=\frac{1}{4\pi}(a+\omega)^2\Big|_{-\omega_c}^{0}-\frac{1}{4\pi}(a-\omega)^2\Big|_{0}^{\omega_c}=\frac{a^2-(a-\omega_c)^2-(a-\omega_c)^2-(-a^2)}{4\pi}=\frac{a^2-(a-\omega_c)^2}{2\pi}=E_y$$

E_x integralinin bundan tek farkı ω_c yerine de a yazılması olduğu için $E_x=\dfrac{a^2}{2\pi}$ bulunur.

$$\rightarrow \quad \frac{E_y}{E_x}=\frac{1}{2}=\frac{a^2-(a-\omega_c)^2}{a^2} \qquad \rightarrow \quad a^2=2a^2-2(a-\omega_c)^2 \qquad \rightarrow \quad 2(a-\omega_c)^2=a^2$$

$$\rightarrow \quad a-\omega_c=a/\sqrt{2} \quad \rightarrow \quad \boxed{\omega_c=\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot a\approx0{,}29a}$$