

**Makine Mühendisliği Bölümü**  
**SİSTEM MODELLEME VE OTOMATİK KONTROL FİNAL SINAVI SORULARI**  
**07.01.2015 Süre: 75 dakika**

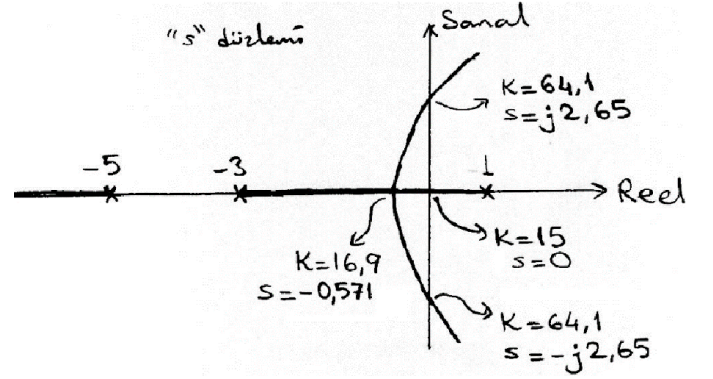
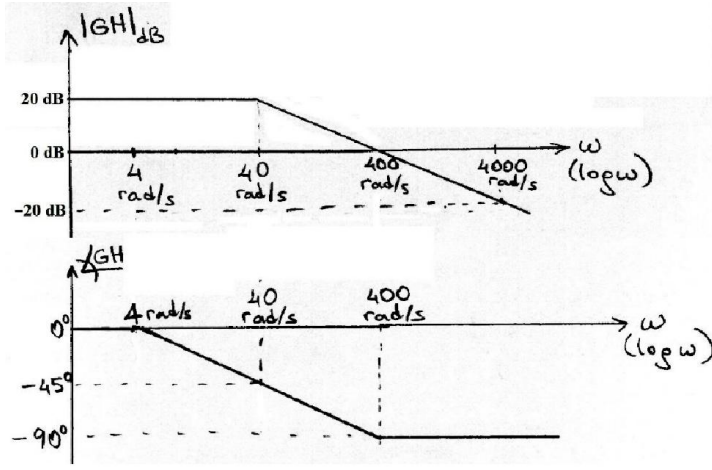
*Yalnızca 4 soru çözmeniz beklenmektedir. 5 soruyla uğraşırsanız, en düşük puanlı cevabınız sayılmayacaktır.*

1) Transfer fonksiyonu  $1/(s^2 + 2s - 8)$  olan bir sistemin çıkışını, istenen  $r$  değerine getirmek için gereken  $u$  değerini PI kontrol ile uygulamak için gereken düzenlemeyi blok şema ile gösteriniz. PI kazançları  $K_P$  ve  $K_I$  hangi şartları sağlamalıdır? Bu şartları sağlayan keyfi bir takım  $K_P$  ve  $K_I$  kazanç değerleri atayınız. **(25 puan)**

2) Bir sistemin açık döngü transfer fonksiyonuna ilişkin Bode genlik(dB) ve açı eğrileri doğrusallaştırılmış yaklaşık parçalar halinde aşağıda solda verilmiştir. Karmaşık açık döngü kutup veya sıfır yoktur.

a) Sistemin açık döngü transfer fonksiyonunu ( $GH$ ) bulunuz. **(18 puan)**

b) Sistemin kararlı olup olmadığını, grafiklerden nasıl anlaşıldığını belirterek söyleyiniz. **(7 puan)**



3) Bir sistemin kapalı döngü transfer fonksiyonunun paydasını sıfır yapan köklerin,  $K$  'nın  $[0, +\infty)$  aralığındaki değişimine göre yerlerini gösteren kök-yer eğrisi yukarıda sağdaki şekilde verilmiştir (Üç adet açık döngü kutup var, açık döngü sıfır yok). Özel bazı noktalarda  $K$  değerleri yaklaşık olarak verilmiştir.

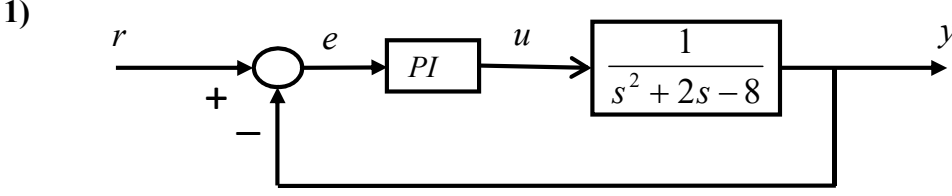
a)  $K$  'nın negatif olmayan hangi değerleri için sistem kararlıdır? **(15 puan)**

b) En sağdaki kapalı döngü kutbun veya kutup çiftinin mümkün olduğunca solda olmasını istiyorsak  $K$  ne seçilmelidir ve bu seçim için en sağdaki kapalı döngü kutup(lar) ne olur? **(10 puan)**

4) Transfer fonksiyonu  $\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{5}{s^2 + 3s + 2}$  ile verilen sistem için uygun durum değişkenleri tanımlayarak bir durum uzayı modeli elde ediniz. **(25 puan)**

5)  $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -7 & -9 \end{bmatrix}$  için  $e^{At}$  matrisini istediğiniz yolla bulunuz. **(25 puan)**

**Makine Mühendisliği Bölümü**  
**SİSTEM MODELLEME VE OTOMATİK KONTROL FİNAL SINAVI CEVAP ANAHTARI**  
**07.01.2015**



PI kontrolörün (denetleyicinin) transfer fonksiyonu  $K_P + \frac{K_I}{s} = \frac{K_P s + K_I}{s}$  olup bütün sistemin transfer fonksiyonu:

$$\frac{\frac{K_P s + K_I}{s(s^2 + 2s - 8)}}{1 + \frac{K_P s + K_I}{s(s^2 + 2s - 8)}} = \frac{K_P s + K_I}{s^3 + 2s^2 + (K_P - 8)s + K_I}$$

Hatanın ( $e$ ) hep sıfıra gitmesi ancak ve eğer ( $\Leftrightarrow$ ) tüm sistem kararlı ise olur. Bütün sistemin transfer fonksiyonunun paydasına Routh-Hurwitz testi uygulayarak kararlılık şartlarını bulalım:

$s^3$	1	$(K_P - 8)$	0
$s^2$	2	$K_I$	0
$s^1$	$K_P - 8 - (K_I/2)$	0	
$s^0$	$K_I$		

Kararlılık için ilk sütunda işaret değişikliği olmamalıdır. Yani

$K_I > 0$  ve  $K_P - 8 - (K_I/2) > 0$  olmalıdır. Diğer bir ifadeyle  $0 < K_I < 2K_P - 16$  olmalıdır. Meselâ,  $K_P = 10$ ,  $K_I = 2$  olabilir.

**2) a)** Genlik(dB) eğrisindeki tek köşe frekansı  $40 \text{ rad/s} = 1/\tau$ , yani  $= 25 \text{ ms}$ 'dir. Köşe frekansının solundan sağına eğim  $-20 \text{ dB/dekad}$  değiştiği için paydada  $(1+s\tau)$  terimi vardır. Açık eğrisindeki köşelerin  $4 \text{ rad/s}$  ve  $400 \text{ rad/s}$  frekanslarda (1 dekad öncesi ve 1 dekad sonrası) olması ve aradaki eğimin  $-45^\circ/\text{dekad}$  olması da bunu doğrular. Köşe frekansından önce (en sol tarafta) genlik(dB) eğrisinin eğimi sıfır olduğundan  $s$  çarpanı bulunmamaktadır.

Başkaca bir köşe olmamasından anlarız ki açık döngü transfer fonksiyon:  $GH = \frac{K}{(1+s\tau)}$

$K$ 'yı bulmak için dB değeri bilinen özel bir frekansta meselâ  $\omega < 40 \text{ rad/s}$ 'de

Genlik(dB) =  $|K|_{dB} + \left| \frac{1}{1+s\tau} \right|_{dB} = 20 \text{ dB}$  olduğu görülmektedir. Bu yaklaşık çizim yönteminde köşe

frekansında  $\left| \frac{1}{1+s\tau} \right|_{dB} = 0 \text{ dB}$  kabul edilmektedir. Dolayısıyla  $|K|_{dB} = 20 \text{ dB} \rightarrow K = 10^{20/20} = 10$  bulunur.

Sonuç:  $GH = \frac{10}{(1+0,025 \cdot s)}$

**b)** Bode açık döngü eğrilerinde, açının  $-180^\circ$  olduğu frekansta genlik kazancı  $\geq 0 \text{ dB}$  ise, ya da genlik kazancının  $0 \text{ dB}$  olduğu frekansta açı  $-180^\circ$  veya daha aşağıda ise, kapalı döngü sistem kararsızdır. Burada açı hiç  $-180^\circ$  olmamaktadır. Genlik kazancı  $0 \text{ dB}$  iken de açı  $-180^\circ$ 'nin üzerindedir. Kararsızlık durumlarının ikisi de olmadığı için sistem kararlıdır.

**3)**  $\times$  ile gösterilen açık döngü kutuplarda  $K = 0$ 'dır. Kök yer eğrisi boyunca bu noktalardan uzaklaştıkça  $K$  artmaktadır.  $K > 15$  olmaya başlayınca sağda hiç kök kalmamakta,  $K = 16,9$  olunca köklerden ikisi  $s = -0,571$ 'de çakışmaktadır.  $K$  biraz daha artırılınca köklerin ikisi karmaşık (eşlenik çift) olmakta, ve nihayet  $K > 64,1$  için eşlenik çift olan iki kök sağ yarı bölgeye geçmektedir.  $K$ 'nın tüm bu değişimi sırasında üçüncü kök  $-5$ 'in daha sol tarafına doğru reel kalarak kaymaktadır. Buna göre,

**a)** Yalnızca  $15 < K < 64,1$  için köklerin üçü de sol yarı bölgede olduğu için sistem negatif olmayan sadece bu  $K$  değer aralığı için kararlıdır.

b) En sağdaki kökün geldiği en sol nokta ayrılma noktasıdır. Bu noktada  $K = 16,9$  ve en sağdaki (çakışan) iki kök  $s = -0,571$  olmaktadır. (Kök-yer eğrisindeki kökler, o noktadaki  $K$  değeri için kapalı döngü kutuptur.)

4)  $(s^2 + 3s + 2)Y = 5U \rightarrow \ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = 5u$

$x_1 = y$  ,  $x_2 = \dot{x}_1 = \dot{y}$  . Ana denklemde yerine yazılırsa

$$\dot{x}_2 = -3x_2 - 2x_1 + 5u$$

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}}_A x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}}_B u$$

$$y = \underbrace{[1 \ 0]}_C x + \underbrace{0}_D \cdot u$$

5)  $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -7 & -9 \end{bmatrix}$  için  $e^{At}$  matrisini bulunuz.

Çözüm: 1. Yol:  $|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -5 \\ 7 & \lambda + 9 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 6\lambda + 8 = 0 \rightarrow \lambda_1 = -2, \lambda_2 = -4.$

$$e^{-2t} = c_0 + c_1 \cdot (-2)$$

$$e^{-4t} = c_0 + c_1 \cdot (-4)$$

$c_1 = \frac{1}{2}e^{-2t} - \frac{1}{2}e^{-4t}$  ve  $c_0 = 2e^{-2t} - e^{-4t}$  bulunur.

$$e^{At} = c_0 I + c_1 A = (2e^{-2t} - e^{-4t}) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \left(\frac{1}{2}e^{-2t} - \frac{1}{2}e^{-4t}\right) \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -7 & -9 \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 3,5e^{-2t} - 2,5e^{-4t} & 2,5e^{-2t} - 2,5e^{-4t} \\ -3,5e^{-2t} + 3,5e^{-4t} & -2,5e^{-2t} + 3,5e^{-4t} \end{bmatrix}$$

Sağlaması,  $t = 0$  için  $e^{At} = I$ .

2. yol:  $e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\}$   $sI - A = \begin{bmatrix} s - 3 & -5 \\ 7 & s + 9 \end{bmatrix}$

$$|sI - A| = s^2 + 6s + 8 = (s + 2)(s + 4)$$

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{(s + 2)(s + 4)} \begin{bmatrix} s + 9 & 5 \\ -7 & s - 3 \end{bmatrix}$$

Her bir eleman basit kesirlere ayrılır. (Bildiğiniz için burada atlandı)

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{7/2}{s + 2} - \frac{5/2}{s + 4} & \frac{5/2}{s + 2} - \frac{5/2}{s + 4} \\ -\frac{7/2}{s + 2} + \frac{7/2}{s + 4} & -\frac{5/2}{s + 2} + \frac{7/2}{s + 4} \end{bmatrix}$$

Ters Laplace dönüşümü alınınca önceki yönteminkiyle aynı sonuç bulunur:

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 3,5e^{-2t} - 2,5e^{-4t} & 2,5e^{-2t} - 2,5e^{-4t} \\ -3,5e^{-2t} + 3,5e^{-4t} & -2,5e^{-2t} + 3,5e^{-4t} \end{bmatrix}$$

**Makine Mühendisliği Bölümü**  
**SİSTEM MODELLEME VE OTOMATİK KONTROL BÜTÜNLEME SINAVI SORULARI**  
**28.01.2015 Süre: 75 dakika**

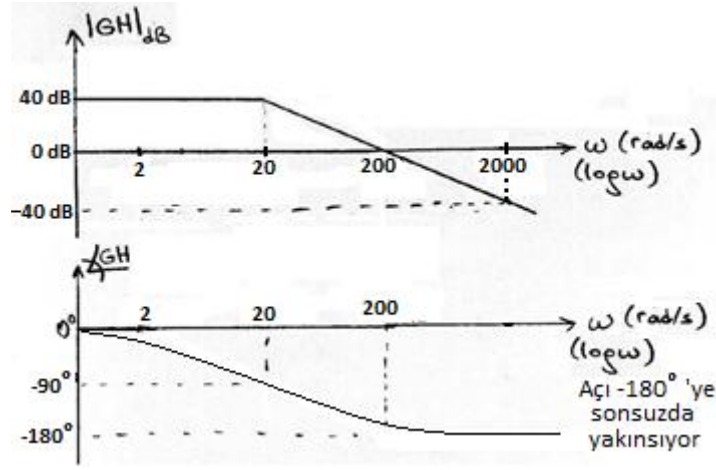
*Yalnızca 4 soru çözmeniz beklenmektedir. 5 soruyla uğraşırsanız, en düşük puanlı cevabınız sayılmayacaktır.*

1) Transfer fonksiyonu  $1/(s^2 + 5s - 2)$  olan bir sistemin çıkışını, istenen  $r$  değerine getirmek için gereken  $u$  değerini PI kontrol ile uygulamak için gereken düzenlemeyi blok şema ile gösteriniz. PI kazançları  $K_P$  ve  $K_I$  hangi şartları sağlamalıdır? Bu şartları sağlayan keyfi bir takım  $K_P$  ve  $K_I$  kazanç değerleri atayınız. **(25 puan)**

2) Bir sistemin açık döngü transfer fonksiyonuna ilişkin Bode genlik(dB) eğrisi doğrusallaştırılmış parçalar halinde ve açı eğrisi yaklaşık olarak aşağıda verilmiştir. Karmaşık açık döngü kutup veya sıfır yoktur.

a) Sistemin açık döngü transfer fonksiyonunu ( $GH$ ) bulunuz. **(18 puan)**

b) Sistemin kararlı olup olmadığını, grafiklerden nasıl anlaşıldığını belirterek söyleyiniz. **(7 puan)**



3) Açık döngü transfer fonksiyonu  $GH = \frac{K}{s(s+6)}$  olan sistemin kapalı döngü kutuplarının,  $K$ 'nın  $[0, +\infty)$  aralığındaki değişimine göre yerlerini gösteren kök-yer eğrisini çiziniz. Sönüm oranı  $\xi = 0,5$  isteniyorsa kökler ne olur? Bu kökler için  $K$  ne olur? **(25 puan)**

4) Transfer fonksiyonu  $\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{4}{s^2 + 7s + 12}$  ile verilen sistem için uygun durum değişkenleri tanımlayarak bir durum uzayı modeli elde ediniz. **(25 puan)**

5)  $A = \begin{bmatrix} -4 & 6 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$  için  $e^{At}$  matrisini istediğiniz yolla bulunuz. **(25 puan)**

**BAŞARILAR ...**

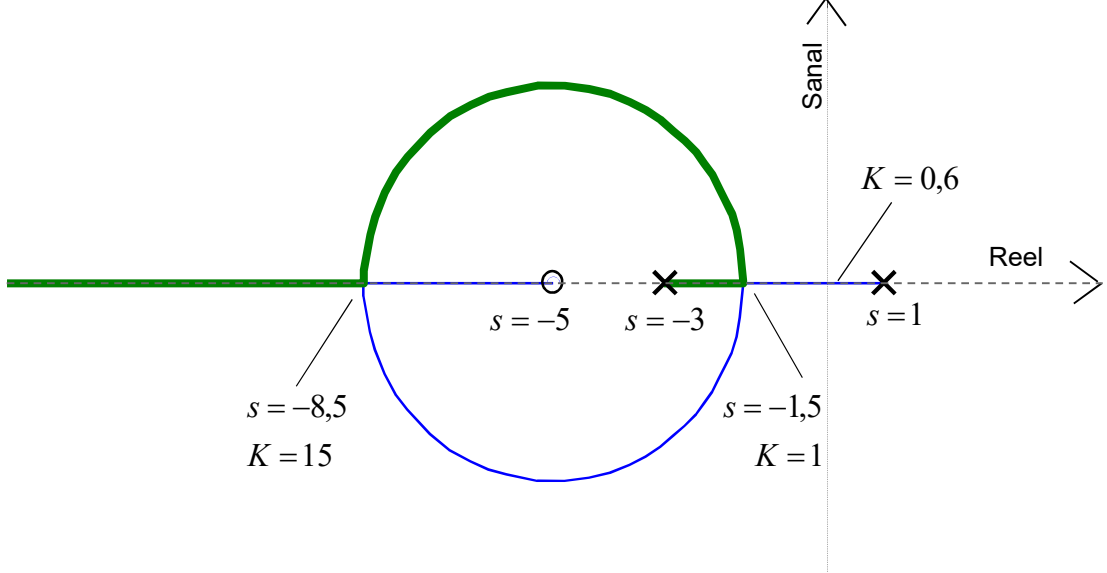
**Yard. Doç. Dr. Ata SEVİNÇ**

**Makine Mühendisliği Bölümü**  
**SİSTEM MODELLEME VE OTOMATİK KONTROL FİNAL SINAVI SORULARI**  
**06.01.2016 Süre: 75 dakika**

*Sorulardan istediğiniz 4 tanesini cevaplayınız. Fazla cevaplarsanız en iyi dördü dikkate alınır.*

1) Transfer fonksiyonu  $1/(s^2 + 3s - 6)$  olan bir sistemin çıkışını, istenen  $r$  değerine getirmek için gereken  $u$  değerini PI kontrol ile uygulamak için gereken düzenlemeyi blok şema ile gösteriniz. PI kazançları  $K_P$  ve  $K_I$  hangi şartları sağlamalıdır? Bu şartları sağlayan keyfi bir takım  $K_P$  ve  $K_I$  kazanç değerleri atayınız. **(25 puan)**

2)



Bir sistemin kapalı döngü transfer fonksiyonunun paydasını sıfır yapan köklerin,  $K$  'nın  $[0, +\infty)$  aralığındaki değişimine göre yerlerini gösteren kök-yer eğrisi yukarıdaki şekilde verilmiştir. Köklerden biri kalın düz, diğeri ince düz, reel ve sanal eksenler ise kesikli çizgilerle gösterilmiştir. Özel bazı noktalarda  $K$  değerleri yaklaşık olarak verilmiştir.

a) Açık döngü sıfır ve açık döngü kutupların değerlerini ve kök-yer eğrisinde bu noktalarda  $K$  'nın değerlerini belirtiniz. **(7 puan)**

b)  $K$  'nın negatif olmayan hangi değerleri için sistem kararlıdır? **(8 puan)**

c) En sağdaki kapalı döngü kutbun veya kutup çiftinin mümkün olduğunca solda olmasını istiyorsak  $K$  ne seçilmelidir ve bu seçim için en sağdaki kapalı döngü kutup(lar) ne olur? **(10 puan)**

3) Transfer fonksiyonu  $\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2}{s^2 + 3s + 5}$  ile verilen sistem için uygun durum değişkenleri tanımlayarak bir durum uzayı modeli elde ediniz. **(25 puan)**

4)  $A = \begin{bmatrix} -8 & -6 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$  için  $e^{At}$  matrisini istediğiniz yolla bulunuz. **(25 puan)**

5)  $\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$  ,  $y = \underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 3 \end{bmatrix}}_C x$

ile verilen sistemde  $y$  çıkışının,  $y^*$  sabit referans (talep) değerine, -8 ve -10 özdeğerleriyle yakınsaması, durum geribeslemeli kontrol uygulanarak isteniyor. Bunun için  $u$  girişi ne olmalıdır? **(25 puan)**

Yardımcı formül: Tek girişli tek çıkışlı denetleyici kanonik biçimli sistem için  $C_{11} \neq 0$  şartıyla,

$$K_r = \frac{\alpha_0}{C_{11}}$$

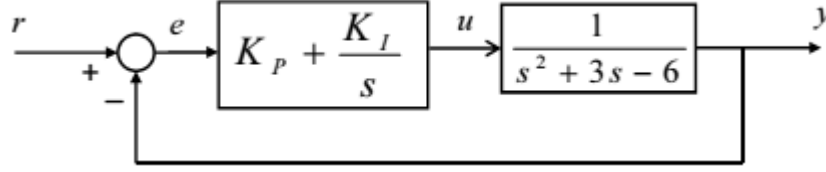
( $\alpha_0$  istenen karakteristik polinomun sabit terimi)

**BAŞARILAR ...**

**Yard. Doç. Dr. Ata SEVİNÇ**

**Makine Mühendisliği Bölümü**  
**SİSTEM MODELLEME VE OTOMATİK KONTROL FİNAL SINAVI CEVAP ANAHTARI**  
**06.01.2016**

1)



PI kontrolörün (denetleyicinin) transfer fonksiyonu  $K_P + \frac{K_I}{s} = \frac{K_P s + K_I}{s}$  ve birim geribeslemeli olduğundan, bütün sistemin transfer fonksiyonu:

$$\frac{\frac{K_P s + K_I}{s(s^2 + 3s - 6)}}{1 + \frac{K_P s + K_I}{s(s^2 + 3s - 6)} \cdot 1} = \frac{K_P s + K_I}{s^3 + 3s^2 + (K_P - 6)s + K_I}$$

Hatanın ( $e$ ) hep sıfıra gitmesi ancak ve eğer ( $\Leftrightarrow$ ) tüm sistem kararlı ise olur. Bütün sistemin transfer fonksiyonunun paydasına Routh-Hurwitz testi uygulayarak kararlılık şartlarını bulalım:

$s^3$	1	$(K_P - 6)$	0
$s^2$	3	$K_I$	0
$s^1$	$K_P - 6 - (K_I/3)$	0	
$s^0$	$K_I$		

Kararlılık için ilk sütunda işaret değişikliği olmamalıdır. Yani

$K_I > 0$  ve  $K_P - 6 - (K_I/3) > 0$  olmalıdır. Diğer bir ifadeyle  $0 < K_I < 3K_P - 18$  olmalıdır. Meselâ,  $K_P = 8$ ,  $K_I = 4$  olabilir.

2) a)  $x$  ile işaretli olanlar açık döngü kutup,  $o$  ile işaretli olan açık döngü sıfırdır. Açık döngü kutuplarda  $K = 0$ , açık döngü sıfırlarda ise  $K = +\infty$  'dur. Yani,

$s = 1$ 'de ve  $s = -3$ 'te açık döngü kutup olup  $K = 0$ ,

$s = -5$ 'te açık döngü sıfır olup  $K = +\infty$ .

b)  $K = 0$ 'dan itibaren artırılırken, kapalı döngü kutupların (köklerin) biri  $s = 1$ 'de, diğeri ve  $s = -3$ 'te yer almaya başlar,  $K$  arttıkça birbirine yaklaşır.  $K > 0,6$  olduğunda sağdaki kök sol yarı bölgeye geçer.  $K > 0,6$  için her iki kök de sol yarı bölgede olduğundan ve başka kök (kapalı döngü kutup) olmadığından sistem kararlıdır ve aksi halde kararsızdır. Yani kararlılık için  $K > 0,6$  olmalıdır ve bu yeterlidir.

c) Az önce birbirine yaklaştığından bahsettiğimiz iki kök,  $K = 1$  olunca  $s = -1,5$ 'te birleşirler ve  $K$  daha da artırılınca karmaşık eşlenik çift olarak birbirinden ayrılırlar.  $K$  daha da artırılınca çember üzerinde ilerleyerek  $K = 15$  olunca tekrar birleşirler.  $K$  daha da artırılınca bu kez reel eksen üzerinde biri sağa, biri sola doğru ayrılırlar. Buna göre en sağdaki kapalı döngü kutbun, yani kökün, en solda olduğu durum,  $K = 15$  ikendir ve her iki kök de  $s_1 = s_2 = -8,5$  olur.

3) Sayısız farklı biçimde model elde edilebilir. Başlıca yollardan ikisini verelim.

1. yol: Denetleyici kanonik biçimi için durum değişkenlerini  $s$  uzayında şöyle tanımlayalım:

$$X_1(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 5} U(s), \quad X_2(s) = sX_1(s)$$

Buna göre  $s^2 X_1(s) + 3sX_1(s) + 5X_1(s) = U(s)$ . Düzenlenirse  $sX_2(s) + 3X_2(s) + 5X_1(s) = U(s)$ .

Ayrıca çıkış  $Y(s) = 2X_1(s)$  olur. İkinci ve son iki denklemleri sırasıyla zaman uzayında yazarsak:

$$x_2 = \dot{x}_1, \quad \dot{x}_2 + 3x_2 + 5x_1 = u, \quad y = 2x_1$$

Bunları matris biçiminde yazarak denetleyici kanonik biçimli durum uzayı modelini elde ederiz:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -3 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_B u \quad y = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix}}_C x \quad (D = 0)$$

2. yol: Gözleyici kanonik biçim için transfer fonksiyondan giriş-çıkış diferansiyel denklemini yazalım:

$$\ddot{y} + 3\dot{y} + 5y = 2u$$

$$x_2 = y,$$

$$x_1 = \dot{x}_2 + 3y \quad (= \dot{y} + 3y),$$

$$0 = \dot{x}_1 + 5y - 2u$$

Son iki denklemden  $\dot{x}_1$  ve  $\dot{x}_2$  çekilerek ve  $y = x_2$  yazılarak,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -5 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_x + \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}}_B u \quad y = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}}_C x + \underbrace{0}_D \cdot u$$

gözleyici kanonik biçimi bulunur. Buradaki giriş ve çıkış hariç semboller, diğer yoldakinden farklı tanımlanmıştır.

$$4) \text{ 1. yol: } |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda + 8 & 6 \\ -3 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 7\lambda + 10 = 0 \rightarrow \lambda_1 = -2, \lambda_2 = -5.$$

$$e^{-2t} = c_0 + c_1 \cdot (-2)$$

$$e^{-5t} = c_0 + c_1 \cdot (-5)$$

Bu iki denklemin farkı  $e^{-2t} - e^{-5t} = 3c_1$  olduğundan  $c_1 = \frac{1}{3}e^{-2t} - \frac{1}{3}e^{-5t}$  bulunur.

$c_0 = e^{-2t} + 2c_1$  olduğundan  $c_0 = \frac{5}{3}e^{-2t} - \frac{2}{3}e^{-5t}$  bulunur.

$$e^{At} = c_0 I + c_1 A = \left( \frac{5}{3}e^{-2t} - \frac{2}{3}e^{-5t} \right) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \left( \frac{1}{3}e^{-2t} - \frac{1}{3}e^{-5t} \right) \begin{bmatrix} -8 & -6 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} -e^{-2t} + 2e^{-5t} & -2e^{-2t} + 2e^{-5t} \\ e^{-2t} - e^{-5t} & 2e^{-2t} - e^{-5t} \end{bmatrix}$$

Sağlaması,  $t = 0$  için  $e^{At} = I$  olduğunu görebiliriz.

$$\text{2. yol: } e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\} \quad sI - A = \begin{bmatrix} s + 8 & 6 \\ -3 & s - 1 \end{bmatrix}$$

$$|sI - A| = s^2 + 7s + 10 = (s + 2)(s + 5)$$

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{(s + 2)(s + 5)} \begin{bmatrix} s - 1 & -6 \\ 3 & s + 8 \end{bmatrix}$$

Her bir eleman basit kesirlere ayrılır. (Bildiğiniz için burada atlandı ama sınavda gösterilmesi istenir.)

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{s+2} + \frac{2}{s+5} & \frac{-2}{s+2} + \frac{2}{s+5} \\ \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+5} & \frac{2}{s+2} - \frac{1}{s+5} \end{bmatrix}$$

Ters Laplace dönüşümü alınınca önceki yönteminkiyle aynı sonuç bulunur:

$$e^{At} = \begin{bmatrix} -e^{-2t} + 2e^{-5t} & -2e^{-2t} + 2e^{-5t} \\ e^{-2t} - e^{-5t} & 2e^{-2t} - e^{-5t} \end{bmatrix}$$

**5)** Sistem denetleyici kanonik biçimde verilmiştir. İstenen özdeğerler için karakteristik polinom:  
 $(\lambda + 8)(\lambda + 10) = \lambda^2 + 18\lambda + 80$

$$k_1 = 80 - 1 = \boxed{k_1 = 79}$$

$$k_2 = 18 - 2 = \boxed{k_2 = 16}$$

$$\text{Sağlaması: } A - BK = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 79 & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1-79 & -2-16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -80 & -18 \end{bmatrix} = A_c$$

$$\det(\lambda I - A_c) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 80 & \lambda + 18 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 18\lambda + 80 \quad \checkmark$$

$$\alpha_0 = 80 \quad K_r = \frac{\alpha_0}{C_{11}} = \frac{80}{4} = \boxed{K_r = 20}$$

Sonuç:  $u = -Kx + K_r y^* = \boxed{u = -79x_1 - 16x_2 + 20y^*}$  olmalıdır.

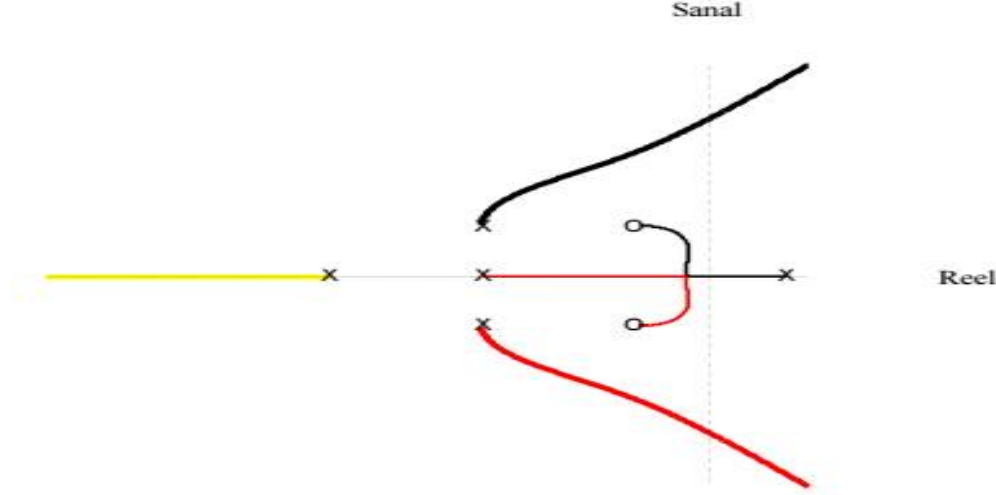


**Makine Mühendisliği Bölümü**  
**SİSTEM MODELLEME VE OTOMATİK KONTROL BÜTÜNLEME SINAVI SORULARI**  
**27.01.2016 Süre: 75 dakika**

*Sorulardan istediğiniz 4 tanesini cevaplayınız. Fazla cevaplarsanız en iyi dördü dikkate alınır.*

1) Transfer fonksiyonu  $2/(s^2 + 4s - 9)$  olan bir sistemin çıkışını, istenen  $r$  değerine getirmek için gereken  $u$  değerini PI kontrol ile uygulamak için gereken düzenlemeyi blok şema ile gösteriniz. PI kazançları  $K_P$  ve  $K_I$  hangi şartları sağlamalıdır? Bu şartları sağlayan keyfi bir takım  $K_P$  ve  $K_I$  kazanç değerleri atayınız. **(25 puan)**

2)



Bir sistemin kapalı döngü transfer fonksiyonunun paydasını sıfır yapan köklerin,  $K$  'nın  $[0, +\infty)$  aralığındaki değişimine göre yerlerini gösteren kök-yer eğrisi yukarıdaki şekilde verilmiştir. Her bir kök farklı renk veya kalınlıkta düz çizgiyle, reel ve sanal eksenler ise kesikli çizgilerle gösterilmiştir. Özel bazı noktalarda  $K$  değerleri yaklaşık olarak verilmiştir.

a) Açık döngü sıfır ve açık döngü kutupların değerlerini ve kök-yer eğrisinde bu noktalarda  $K$  'nın değerlerini belirtiniz. **(7 puan)**

b)  $K$  'nın negatif olmayan hangi değerleri için sistem kararlıdır? **(8 puan)**

3) Transfer fonksiyonu  $\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{6s}{s^2 + 2s + 4}$  ile verilen sistem için uygun durum değişkenleri tanımlayarak bir durum uzayı modeli elde ediniz. **(25 puan)**

4)  $A = \begin{bmatrix} -6 & 3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$  için  $e^{At}$  matrisini istediğiniz yolla bulunuz. **(25 puan)**

5)  $\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -8 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$  ,  $y = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 4 \end{bmatrix}}_C x$

ile verilen sistemde  $y$  çıkışının,  $y^*$  sabit referans (talep) değerine, her iki özdeğeri de -10 olacak şekilde yakınsaması, durum geribeslemeli kontrol uygulanarak isteniyor. Bunun için  $u$  girişi ne olmalıdır? **(25 puan)**

*Yardımcı formül:* Tek girişli tek çıkışlı denetleyici kanonik biçimli sistem için  $C_{11} \neq 0$  şartıyla,  $K_r = \frac{\alpha_0}{C_{11}}$

( $\alpha_0$  istenen karakteristik polinomun sabit terimi)

**BAŞARILAR ...**

**Yard. Doç. Dr. Ata SEVİNÇ**