

ÖDEV 1

Ödevlerinizin el yazısı görüntülerini ya “TEK bir pdf dosya olarak e-postayla”, ya da “sıralı ve dikey resim dosyaları halinde 0534 827 58 86’ya WhatsApp’tan” en geç **28 Mart 2021 Pazar** günü gönderiniz. Her dosyada isim yazılı olsun. Ödevleriniz birbirinizinkine birbirinizden alındığını düşündürecek kadar benzememelidir. Aksi halde o sorudan alınan bir kişilik puan bu öğrenciler arasında paylaştırılır.

1) Kâğıt(k)-taş(t)-makas(m) oyununda kazanan veya berabere kalınan seçimi $A=\{k,t,m\}$ üzerinde tanımlı Δ işleminin sonucu olarak tanımlarsak, yani

Δ	k	t	m
k	k	k	m
t	k	t	t
m	m	t	m

ise (A, Δ) bir değişmeli bir grup mudur?

2) A boş olmayan bir küme ve A ’nın bütün altkümelerinden oluşan küme (evrensel küme) E olsun.

a) (E, \cup) değişmeli bir grup mudur?

b) (E, \cap) değişmeli bir grup mudur?

3) $D = \{d \mid d = a + b\sqrt{3} \text{ biçiminde yazılabilen sayılar, } a \text{ ve } b \text{ rasyonel olmak üzere}\}$ kümesi bilinen toplama ve çarpma işlemleriyle bir cisim midir? Gösteriniz.

4) $B = \{p, q, r\}$ kümesi ile birlikte bir cisim oluşturacak iki işlem $(\oplus \text{ ve } \otimes)$ tanımlayınız. Yani aşağıdaki tabloları doldurunuz, etkisiz elemanlarını ve terslerini belirtiniz.

\oplus	p	q	r
p			
q			
r			

\otimes	p	q	r
p			
q			
r			

$-p = ? \quad -q = ? \quad -r = ?$

$p^{-1} = ? \quad q^{-1} = ? \quad r^{-1} = ? \quad (\text{Sıfır olanı hariç})$

5) F bir cisim ve $V = \{f \mid f : F \rightarrow F\}$ vektör uzayı olsun. (V, F) vektör uzayının iki alt kümesi de

$V_T = \{f \mid \text{Her } x \in F \text{ için } f(-x) = -f(x)\} \quad (\text{Tek fonksiyonlar kümesi})$

$V_C = \{f \mid \text{Her } x \in F \text{ için } f(-x) = f(x)\} \quad (\text{Çift fonksiyonlar kümesi})$

olarak tanımlanıyor. V_T ve V_C altuzay mıdır? Gösteriniz.

ÖDEV 2

Ödevlerinizin el yazısı görüntülerini ya “TEK bir pdf dosya olarak e-postayla”, ya da “sıralı ve dikey resim dosyaları halinde 0534 827 58 86’ya WhatsApp’tan” en geç **4 Nisan 2021 Pazar** günü gönderiniz. Her dosyada isim yazılı olsun. Ödevleriniz birbirinizinkine birbirinizden alındığını düşündürtecek kadar benzememelidir. Aksi halde o sorudan alınan bir kişilik puan bu öğrenciler arasında paylaşılır.

1) Kırmızı (R), yeşil (G), mavi (B) ışıkların parlaklıklarını temsil eden reel sayı üçlülerıyla oluşturulan RGB uzayı, bir vektör uzayı olarak düşünülebilir mi? Düşünülemezse neden? Düşünülebilirse nasıl?

2) Bilinen toplama ve çarpma işlemleriyle tanımlı \mathcal{R} cismi üzerinde fonksiyonların bilinen toplama ve reel sayıyla çarpım işlemleriyle tanımlı

$$V = \{ f \mid f: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R} \text{ olan 3. dereceye kadarki polinom fonksiyonlar} \}$$

Vektör uzayını ele alalım. Bu vektör uzayı için \mathcal{B} ve \mathcal{B}' sıralı tabanları şöyle tanımlanıyor:

$$\mathcal{B} = \{ 1, x, x^2, x^3 \} \quad \mathcal{B}' = \{ 1, (x+a), (x+a)^2, (x+a)^3 \}$$

(Bu kümelerin elemanlarını, fonksiyonun özel bir x reel sayısındaki değeri olarak **değil**, fonksiyonun bütünü olarak düşünüyoruz. Sadece kolaylık için böyle yazdık.)

\mathcal{B} tabanına göre koordinat vektörünü \mathcal{B}' tabanına göre koordinat vektörüne dönüştüren matrisi bulunuz. Yani $[f]_{\mathcal{B}'} = P \cdot [f]_{\mathcal{B}}$ için gereken P matrisini bulunuz. (Kısa yol gösterme: Taylor serisine açma kuralından faydalananak daha kolay çözebilirsiniz.)

3) 1. sorudaki V vektör uzayı üzerinde Laplace dönüşümünün (\mathcal{L}) matris gösterimini verilen sıralı tabanlar için bulunuz. Şöyle ki:

$$\mathcal{L}: V \rightarrow W$$

$$V \text{ için sıralı taban : } \mathcal{B} = \{ 1, x, x^2, x^3 \}, \quad W \text{ için sıralı taban : } \mathcal{B}' = \left\{ \frac{1}{s}, \frac{1}{s^2}, \frac{1}{s^3}, \frac{1}{s^4} \right\}$$

(Bu kümelerin elemanlarını, fonksiyonun özel bir x veya s reel veya karmaşık sayısındaki değeri olarak **değil**, fonksiyonun bütünü olarak düşünüyoruz. Sadece kolaylık için böyle yazdık.)

4) Size özel olarak verilen A matrisinin görüntü uzayı için bir taban bulunuz.

5) Size özel olarak verilen A matrisinin sıfır uzayı için bir taban bulunuz.

Kişiyi özel matrisler isminizin kısaltmasına göre şöyledir:

O.S.K. için:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -4 & 0 & 2 & -2 & 5 \\ 3 & 2 & -1 & -5 & -6 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 4 & 0 & -2 & 2 & -5 \\ 4 & 0 & 3 & -5 & -8 & 5 & -3 \\ 5 & 9 & -1 & 4 & -2 & 6 & -2 \end{bmatrix}$$

M.F.K. için:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 5 & -1 & 0 & -3 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 3 & 3 & -3 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & 6 & 4 & 0 & 5 \\ -5 & -5 & 1 & 0 & 3 & -4 & 2 \\ -7 & -3 & -2 & -3 & 6 & -6 & 0 \end{bmatrix}$$

N.A.M. için:

$$A = \begin{bmatrix} -5 & -3 & 1 & -5 & 3 & 3 & -1 \\ -3 & -6 & 1 & -8 & 2 & 5 & 1 \\ -2 & -8 & 0 & -8 & 2 & 4 & 8 \\ -8 & -4 & 1 & -6 & 5 & 3 & 1 \\ -3 & -1 & 0 & -1 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$