SİNYALLER VE SİSTEMLER FİNAL SINAVI SORULARI

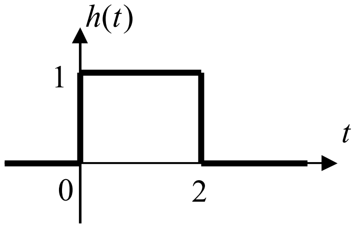
04.01.2012 Süre: 80 dakika

3. ve 4. sorular zorunludur. Diğer sorulardan istediğiniz 3 tanesini çözünüz.

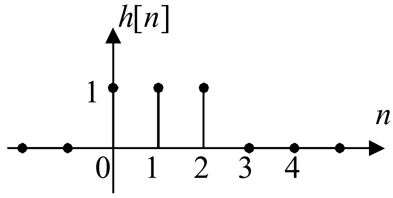
1) a) a bir tamsayı olmak üzere $x[n]*\delta[n-a]=x[n-a]$ olduğunu, konvolüsyon toplamı formülünü kullanarak ispatlayınız. **(10 puan)**

b) Birim darbe tepkisi aşağıdaki $h(t)$ olan doğrusal zamanla değişmez (DZD) sistem bellekli midir, nedensel midir, kararlı mıdır? Her birini DZD sistemlere özel kuralını uygulayarak belirtiniz. **(3+3+4=10 puan)**

2) Birim darbe tepkisi yandaki $h(t)$ olan (DZD) sistemin girişine $x(t)=h(t)$ sinyali uygulanırsa alınacak çıkış sinyalini ($y(t)$) çiziniz. **(20 puan)**



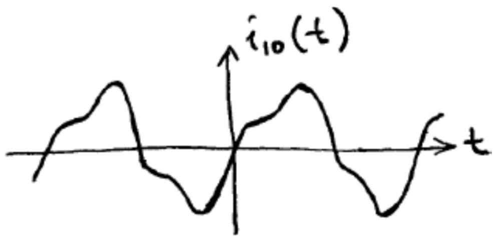
3) Birim darbe tepkisi $h[n]$ yanda verilen DZD sistemin girişine $x[n]=(-1)^n \quad \forall n$ sinyali uygulanırsa çıkış fonksiyonu ne olur? (Çizim beklenmemektedir.) **(25 puan)**



4) Primerine AC gerilim uygulanan yüksüz bir trafonun primer akımı şekildeki gibidir. Bu akımın gerçel ve karmaşık Fourier serileri

$$i_{10}(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{+\infty}\left(a_k\cos(k\omega t)+b_k\sin(k\omega t)\right)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}c_k e^{jk\omega t}$$

biçimlerinde düşünüldüğünde buradaki katsayıların hangilerinin sıfır olduğu söylenebilir? **(15 puan)**



("a_0", "c_0", "$a_k \ \forall k$", "$b_k \ \forall k$", "tek k'lar için hem a_k hem b_k hem c_k", "çift k'lar için hem a_k hem b_k hem c_k", "tüm negatif k'lar için c_k", "tüm pozitif k'lar için c_k" seçeneklerinden sıfır olanların hepsini seçiniz.)

5) Giriş(x)-çıkış(y) ilişkisi aşağıda verilen nedensel sistemin transfer fonksiyonunu **(6 puan)** ve birim darbe tepkisini **(14 puan)** bulunuz.

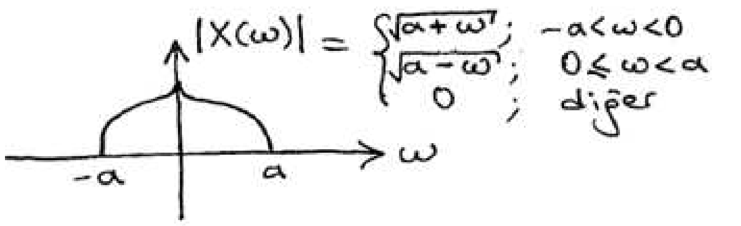
$$2\ddot{y}(t)+8\dot{y}(t)+6y(t)=12\dot{x}(t)+4x(t)$$

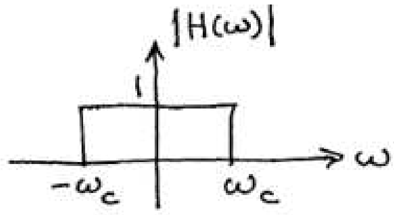
6) Giriş(x)-çıkış(y) ilişkisi

$$2y[n+1]-y[n]=x[n+1]+x[n]$$

ile verilen nedensel sistemin transfer fonksiyonunu **(5 puan)** ve $x[n]=u[n]$ girişi için enerjisiz başlangıçlı çıkışını **(15 puan)** Z ve/veya Z^{-1} dönüşümleriyle bulunuz.

7) Kaydedilmiş bir ses sinyalinin ($x(t)$) genlik spektrumu $|X(\omega)|$ aşağıdaki gibidir. Bu sinyali kazanç spektrumu $|H(\omega)|$ aşağıdaki gibi olan ideal bir alçak geçiren süzgeçten geçirerek $y(t)$ sinyali elde edilecektir. $y(t)$ sinyalinin enerjisinin, $x(t)$ sinyalinin enerjisinin yarısı olması isteniyorsa alt kesim frekansı ω_c ne olmalıdır? **(20 puan)**





BAŞARILAR … **Yard. Doç. Dr. Ata SEVİNÇ**

SİNYALLER VE SİSTEMLER FİNAL SINAVI CEVAP ANAHTARI
04.01.2012

1) a) $x[n]*\delta[n-a]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[n-k]\cdot\delta[k-a]$ Darbe $k=a$ dışında sıfır olduğu için $x[n-k]$'da $k=a$ yazılır ve bu $x[n-a]$ sabit (k'ya göre) olduğu için toplamın dışına çıkar:

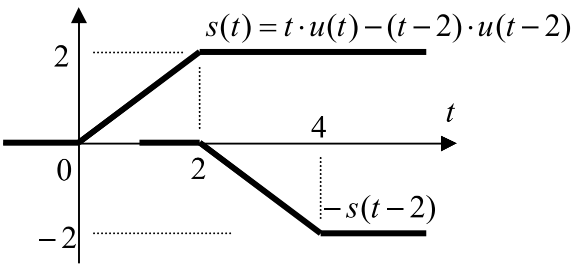
$$x[n]*\delta[n-a]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[n-a]\cdot\delta[k-a]=x[n-a]\underbrace{\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta[k-a]}_{1}=x[n-a]$$ olur.

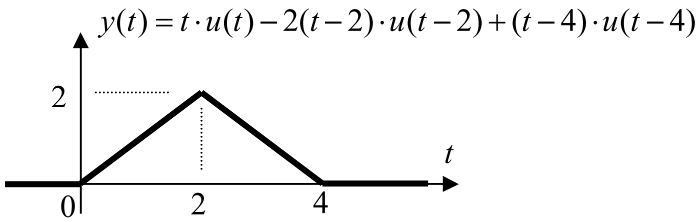
b) $h(t)=0 \quad \forall t<0$ olduğundan dolayı DZD sistem nedenseldir.

$h(t)\neq K\delta(t)$ olduğundan (yani $h(t)$ ötelenmemiş birim darbe cinsinden yazılamayacağı için) sistem belleklidir. Daha basitçesi: Bazı $t\neq 0$ için $h(t)\neq 0$ olduğu için.

$\int_{-\infty}^{+\infty}|h(t)|\,dt=2\times 1=2<\infty$ olduğundan sistem kararlıdır.

2) $x(t)=u(t)-u(t-2)$ olduğundan $y(t)=s(t)-s(t-2)$ olur, burada $s(t)$ sistemin birim basamak tepkisi olup $s(t)=\int_{\tau=-\infty}^{t} h(\tau)d\tau$ biçiminde hesaplanır. Yani t anındaki değeri h fonksiyonu grafiğinde t 'nin sol tarafında biriken alandır. Buna göre $s(t)$ ile $-s(t-2)$ aşağıda soldaki şekildeki gibi olur. Bu iki bileşenin toplamıyla da $y(t)$ aşağıda sağdaki gibi bulunur.





3) Çıkış: $y[n]=h[n]*x[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]\cdot x[n-k]=h[0]\cdot x[n]+h[1]\cdot x[n-1]+h[2]\cdot x[n-2]$

$$y[n]=x[n]+x[n-1]+x[n-2]=(-1)^n+\underbrace{(-1)^{n-1}+(-1)^{n-2}}_{0}=\boxed{y[n]=(-1)^n \quad \forall n}$$

4) Sinyalin ortalaması sıfırdır ($c_0=a_0/2=0$). Tek sinyal değildir (orijinle sağdaki ilk tepe arasında büküm var, soldaki ilk tepe arasında yok). Çift sinyal hiç değildir (orijinin hemen sağı pozitif, hemen solu negatif). Yani her a_k veya her b_k'nın sıfır olduğu söylenemez. Sinyalin bir yarı periyodu, diğer yarı periyodunun negatifi değerlidir ($x(t+\frac{T_0}{2})=-x(t)$), yani tek harmonik simetrisi vardır. Sonuçta sıfır olanlar:

"a_0", "c_0", "çift k'lar için hem a_k hem b_k hem c_k"

Son iki seçenek ise sıfır sinyal hariç gerçel sinyallerde olmaz. Çünkü gerçel sinyallerde $c_{-k}=c_k^*$ olduğundan herhangi bir k için c_k sıfır olsa c_{-k} da sıfır olurdu.

5) Transfer fonksiyon : $\dfrac{12(j\omega)+4}{2(j\omega)^2+8(j\omega)+6}=\boxed{H(\omega)=\dfrac{6(j\omega)+2}{(j\omega+1)(j\omega+3)}}=\dfrac{A}{(j\omega+1)}+\dfrac{B}{(j\omega+3)}$

$$A=\left.\frac{6(j\omega)+2}{(j\omega+3)}\right|_{j\omega\leftarrow -1}=\frac{-6+2}{-1+3}=-2 \qquad B=\left.\frac{6(j\omega)+2}{(j\omega+1)}\right|_{j\omega\leftarrow -3}=\frac{-18+2}{-3+1}=8$$

$$h(t)=\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{-2}{(j\omega+1)}+\frac{8}{(j\omega+3)}\right\}=\ -2e^{-t}u(t)+8e^{-3t}u(t)=\boxed{h(t)=\left(8e^{-3t}-2e^{-t}\right)u(t)}$$

6) Transfer fonksiyon : $\dfrac{z+1}{2z-1}=\boxed{H(z)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{z+1}{z-(1/2)}\quad ;\quad |z|>1/2}$

$$x[n]=u[n]=1^n u[n]\quad\Rightarrow\quad X(z)=\frac{z}{z-1}\quad ;\quad |z|>1$$

$$Y(z)=X(z)H(z)=\frac{1}{2}\cdot\frac{z(z+1)}{(z-1)(z-1/2)}\quad ;\quad |z|>1$$

$$\frac{Y(z)}{z}=\frac{1}{2}\cdot\frac{(z+1)}{(z-1)(z-1/2)}=\frac{A}{z-1}+\frac{B}{z-1/2}\qquad A=\frac{1}{2}\frac{z+1}{(z-1/2)}\bigg|_{z=1}=\frac{1}{2}\times\frac{1+1}{1-1/2}=2=A$$

$$B=\frac{1}{2}\frac{z+1}{(z-1)}\bigg|_{z=1/2}=\frac{1}{2}\times\frac{1/2+1}{1/2-1}=-3/2=B\qquad Y(z)=2\frac{z}{z-1}-\frac{3}{2}\cdot\frac{z}{z-1/2}\quad ;\quad |z|>1$$

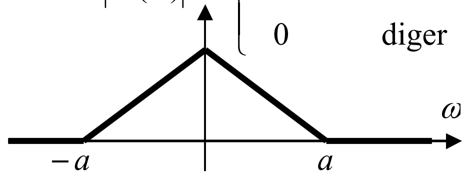
$$\rightarrow\quad y[n]=2\times 1^n u[n]-\frac{3}{2}\times\frac{1}{2^n}u[n]=\boxed{y[n]=\left(2-\frac{3}{2}\times\frac{1}{2^n}\right)u[n]}$$

7) $x(t)$ sinyalinin enerjisi: $E_x=\displaystyle\int_{t=-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2\,dt$ (Sinyalin bir ses çıkış elemanı üzerine bırakacağı enerjinin bununla orantılı olduğu anlamına gelir. Akım veya gerilim sinyalinin direnç üzerinde bıraktığı enerji gibi.) Parseval eşitliğine göre:

$$\int_{t=-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_{\omega=-\infty}^{+\infty}|X(\omega)|^2\,d\omega=E_x \quad \text{ve}$$

$$\int_{t=-\infty}^{+\infty}|y(t)|^2\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_{\omega=-\infty}^{+\infty}|Y(\omega)|^2\,d\omega=E_y$$

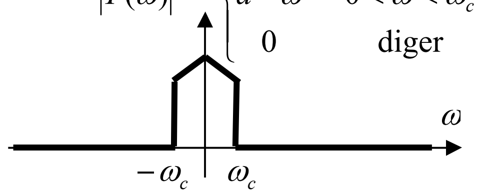
$$|X(\omega)|^2=\begin{cases}a+\omega & -a<\omega<0\\ a-\omega & 0\le\omega<a\\ 0 & \text{diger}\end{cases}$$



$$Y(\omega)=X(\omega)H(\omega)\quad\rightarrow\quad |Y(\omega)|^2=|X(\omega)|^2|H(\omega)|^2$$

$|H(\omega)|^2$ grafiği $|H(\omega)|$'nınkiyle aynı olduğundan çarpımın grafiği yanda gösterildiği gibi olur.

$$|Y(\omega)|^2=\begin{cases}a+\omega & -\omega_c<\omega<0\\ a-\omega & 0<\omega<\omega_c\\ 0 & \text{diger}\end{cases}$$



$y(t)$ sinyalinin enerjisi:

$$E_y=\frac{1}{2\pi}\int_{\omega=-\omega_c}^{0}(a+\omega)d\omega+\frac{1}{2\pi}\int_{\omega=0}^{\omega_c}(a-\omega)d\omega$$

$$=\frac{1}{4\pi}(a+\omega)^2\Big|_{-\omega_c}^{0}-\frac{1}{4\pi}(a-\omega)^2\Big|_{0}^{\omega_c}=\frac{a^2-(a-\omega_c)^2-(a-\omega_c)^2-(-a^2)}{4\pi}=\frac{a^2-(a-\omega_c)^2}{2\pi}=E_y$$

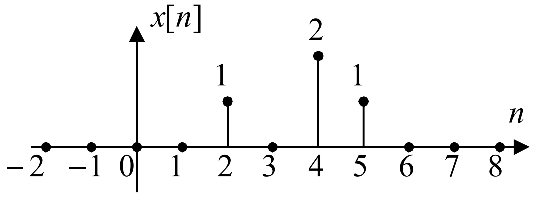
E_x integralinin bundan tek farkı ω_c yerine de a yazılması olduğu için $E_x=\dfrac{a^2}{2\pi}$ bulunur.

$$\rightarrow\quad \frac{E_y}{E_x}=\frac{1}{2}=\frac{a^2-(a-\omega_c)^2}{a^2}\qquad\rightarrow\quad a^2=2a^2-2(a-\omega_c)^2\qquad\rightarrow\quad 2(a-\omega_c)^2=a^2$$

$$\rightarrow\quad a-\omega_c=a/\sqrt{2}\qquad\rightarrow\quad \boxed{\omega_c=\left(1-1/\sqrt{2}\right)\cdot a\approx 0{,}29a}$$

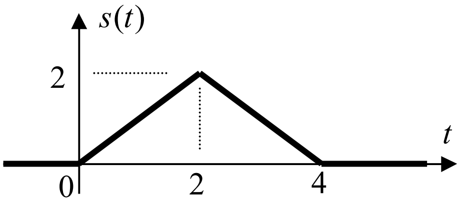
SİNYALLER VE SİSTEMLER BÜTÜNLEME SINAVI SORULARI
18.01.2012 Süre: 80 dakika

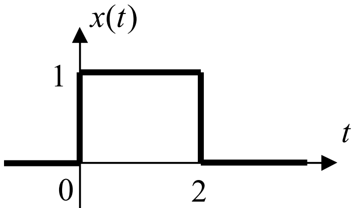
1) Bir öğrencinin ders çalışma sistemi şöyledir: Her bir derse çalışmaya sınavdan üç gün önce 1 saat ile başlıyor, iki gün önce 2 saat, bir gün önce 3 saatle devam ediyor ve sınav günü 1 saat ile o derse çalışmayı sonlandırıyor. Günlere göre sınav sayıları giriş, günlük ders çalışma saat sayıları çıkış olarak tanımlanıyor ve öğrencinin sınav programının, bu sistemin doğrusal ve zamanla değişmez olmasını bozmayacak, günün mümkün olan saat sınırlarını zorlamayacak bir yoğunlukta olduğu ve aksamayacağı varsayılıyor.



a) Sistemin birim darbe tepkisini çiziniz. **(6 puan)**
b) Varsayımlar altında sistem nedensel midir, kararlı mıdır? **(2+2=4 puan)** Genel ifadelerle değil, bu sisteme özel gerekçelerini belirterek yazınız.
c) Öğrencinin günlere (n) göre sınav sayıları ($x[n]$) grafikteki gibiyse bu öğrencinin günlere göre ders çalışma saat sayılarını grafikle gösteriniz. **(10 puan)**

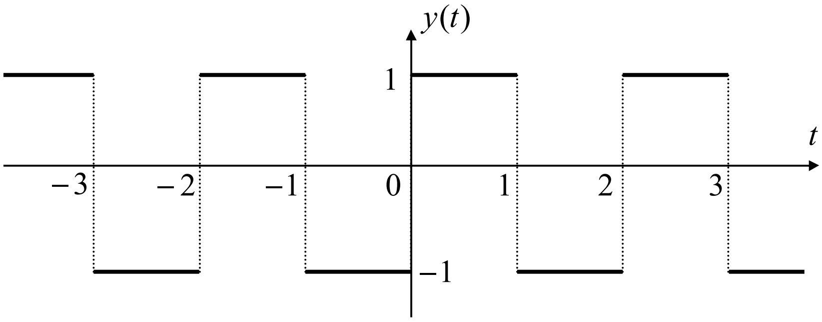
2)





Birim basamak tepkisi yukarıdaki $s(t)$ olan (DZD) sistemin
a) Girişine şekildeki $x(t)$ uygulanırsa alınacak çıkış sinyalini ($y(t)$) çiziniz. **(12 puan)**
b) Birim darbe tepkisini ($h(t)$) çiziniz. **(8 puan)**
Her iki çizimde de özel noktaların yeri belli olmalıdır.

3) Şekilde verilen $T = 2$ ile periyodik $y(t)$ sinyalini Fourier serisine açınız. (Genel katsayı formüllerini bulunuz ve serinin sıfırdan farklı en az 3 terimini, katsayılarının sayısal değerlerini yerine koyarak yazınız.)
(20 puan)



4) Giriş(x)-çıkış(y) ilişkisi aşağıda verilen nedensel sistemin transfer fonksiyonunu **(5 puan)** ve $x(t) = e^{-t}u(t)$ girişi için enerjisiz başlangıçlı çıkışını **(15 puan)** bulunuz.

$$\ddot{y}(t) + 5\dot{y}(t) + 6y(t) = 5\dot{x}(t) + 5x(t)$$

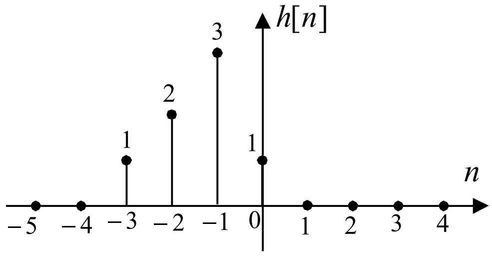
5) Giriş(x)-çıkış(y) ilişkisi aşağıda verilen nedensel sistemin transfer fonksiyonunu **(6 puan)** ve birim darbe tepkisini **(14 puan)** bulunuz.

$$y[n+2] - 0{,}5y[n+1] + 0{,}06y[n] = x[n+1] - 0{,}5x[n]$$

BAŞARILAR … **Yard. Doç. Dr. Ata SEVİNÇ**

SİNYALLER VE SİSTEMLER BÜTÜNLEME SINAVI CEVAP ANAHTARI
18.01.2012

1) a) Bu sistem için birim darbe tepkisi demek, 0. günde bir adet sınavı varsa öğrencinin günlere göre çalışma saatleri demektir ve şekildeki gibidir.



b) Bazı $n<0$ için $h[n]\neq 0$ olduğu için sistem nedensel değildir.

$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|h[n]| = 1+2+3+1 = 7 < \infty$ olduğu için sistem kararlıdır. (Günün 24 saat sınırı olmasa bile bu nedenle kararlı olurdu.)

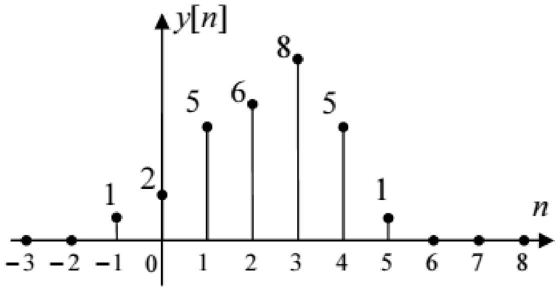
c) Çıkış $y[n]=x[n]*h[n]$. Her iki sinyal de sonlu süreli olduğu için şu yöntem uygulanabilir:

$$\begin{array}{rccccccc}
 & & & & 1 & 2 & 3 & 1 \\
\times & & & & 1 & 0 & 2 & 1 \\
\hline
 & & & & 1 & 2 & 3 & 1 \\
 & & & 2 & 4 & 6 & 2 & \\
 & & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\
+ & 1 & 2 & 3 & 1 & & & \\
\hline
 & 1 & 2 & 5 & 6 & 8 & 5 & 1
\end{array}$$

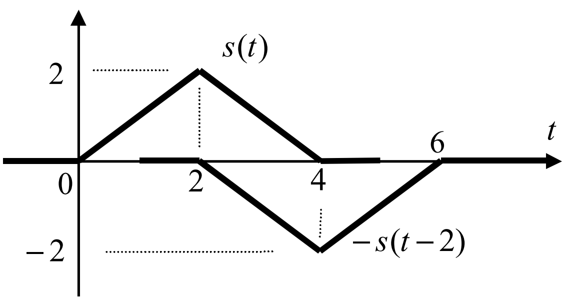
$\rightarrow$ sonuncusu $h[0]$

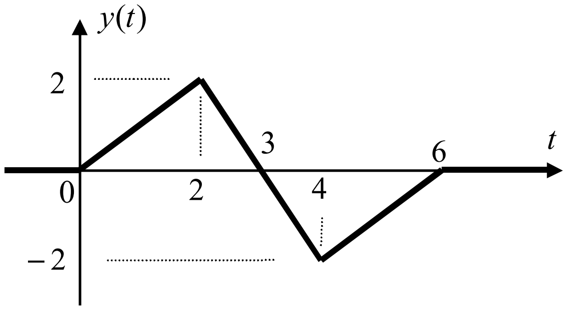
$\rightarrow$ sonuncusu $x[5]$

$\rightarrow$ sonuncusu $y[0+5]=y[5]$. Buna göre $y[n]$ yukarıdaki şekilde gösterildiği gibi olur. (Dikkat! Bu işlem her ne kadar klasik çarpmaya benzese de elde aktarımı yapılmaz ve her bir sayı eksi de olsa artı da olsa rakam rakam değil olduğu gibi sayı olarak ele alınır.)



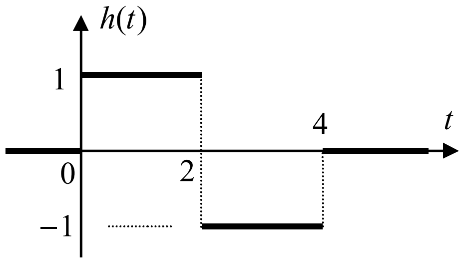
2) a) $x(t)=u(t)-u(t-2)$ olduğu için u yerine s ve x yerine y yazılır: $y(t)=s(t)-s(t-2)$ olur. Aşağıda çıkışın bu iki bileşeni soldaki şekilde, toplamı () da sağdaki şekilde gösterilmiştir.





b) Birim darbe tepkisi $h(t)=\dfrac{ds(t)}{dt}$

Yandaki şekildeki gibi elde edilir.



3) Gerçel seriye açalım: $y(t)=\dfrac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{+\infty}\left(a_k\cos(k\omega t)+b_k\sin(k\omega t)\right)$; $\omega = 2\pi/T = 2\pi/2 = \pi$

$y(-t)=-y(t)$ olduğu için sinyal tektir. Dolayısıyla gerçel serisinde yalnız sinüslü terimler vardır. $a_0=a_k=0 \quad \forall k$. Ayrıca tek harmonik simetrisine de sahip olduğu için tek k 'lar için b_k sıfır olacaktır. Bunu sağlama amacıyla kullanacağız.

$$b_k=\frac{4}{T}\int_0^{T/2} y(t)\sin(k\omega t)dt=\frac{4}{2}\int_0^{2/2} y(t)\sin(k\pi t)dt = 2\int_0^1 1\cdot\sin(k\pi t)dt = \frac{-2}{k\pi}\cos(k\pi t)\Big|_0^1 = \frac{-2}{k\pi}\cos(k\pi)-\frac{-2}{k\pi}$$

b_k için k 'nın sıfır olması söz konusu olmadığı için burada belirsizlik yoktur. $\cos(k\pi)=(-1)^k$ olduğu için

$$b_k = \frac{2}{k\pi}\left(1-(-1)^k\right) \quad \rightarrow \quad b_k = \begin{cases} 4/k\pi & k \text{ tekse} \\ 0 & k \text{ çiftse} \end{cases} \quad \rightarrow \quad b_1 = \frac{4}{\pi} \quad , \quad b_3 = \frac{4}{3\pi} \quad , \quad b_5 = \frac{4}{5\pi} \; .$$

$\boxed{y(t) = \frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin(\pi t)}{1} + \frac{\sin(3\pi t)}{3} + \frac{\sin(5\pi t)}{5} + \dots\right)}$ Tek harmonik simetrili olduğu için seride çift harmonik yoktur. Karmaşık seri katsayıları istenirse, sinyal tek olduğu için $c_k = -c_{-k} = -j\frac{b_k}{2} = \begin{cases} -j2/k\pi & k \text{ tekse} \\ 0 & k \text{ çiftse} \end{cases}$

$$\rightarrow \quad c_1 = -c_{-1} = -j\frac{2}{\pi} \quad , \quad c_3 = -c_{-3} = -j\frac{2}{3\pi} \quad , \quad c_5 = -c_{-5} = -j\frac{2}{5\pi}$$

$$\boxed{y(t) = \ \dots + j\frac{2}{5\pi}e^{-j5\pi t} + j\frac{2}{3\pi}e^{-j3\pi t} + j\frac{2}{\pi}e^{-j\pi t} - j\frac{2}{\pi}e^{j\pi t} - j\frac{2}{3\pi}e^{j3\pi t} - j\frac{2}{5\pi}e^{j5\pi t} - \dots}$$

4) Transfer fonksiyon : $\frac{5(j\omega)+5}{(j\omega)^2+5(j\omega)+6} = \boxed{H(\omega) = \frac{5(j\omega+1)}{(j\omega+2)(j\omega+3)}}$

$$x(t) = e^{-t}u(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega) = \frac{1}{j\omega+1} \qquad\qquad Y(\omega) = H(\omega)X(\omega) = \frac{5(j\omega+1)}{(j\omega+2)(j\omega+3)} \cdot \frac{1}{j\omega+1}$$

$$Y(\omega) = \frac{5}{(j\omega+2)(j\omega+3)} = \frac{A}{(j\omega+2)} + \frac{B}{(j\omega+3)}$$

$$A = \left.\frac{5}{(j\omega+3)}\right|_{j\omega \leftarrow -2} = \frac{5}{-2+3} = 5 \qquad\qquad B = \left.\frac{5}{(j\omega+2)}\right|_{j\omega \leftarrow -3} = \frac{5}{-3+2} = -5$$

$$Y(\omega) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} y(t) = 5e^{-2t}u(t) - 5e^{-3t}u(t) = \boxed{y(t) = 5\left(e^{-2t} - e^{-3t}\right)u(t)}$$

5) Transfer fonksiyon : $\frac{z-0{,}5}{z^2-0{,}5z+0{,}06} = \boxed{H(z) = \frac{z-0{,}5}{(z-0{,}2)(z-0{,}3)} \quad ; \quad |z| > 0{,}3}$

$$H(z) = \frac{A}{z-0{,}2} + \frac{B}{z-0{,}3} \qquad\qquad A = \left.\frac{z-0{,}5}{(z-0{,}3)}\right|_{z=0{,}2} = \frac{0{,}2-0{,}5}{0{,}2-0{,}3} = 3 = A$$

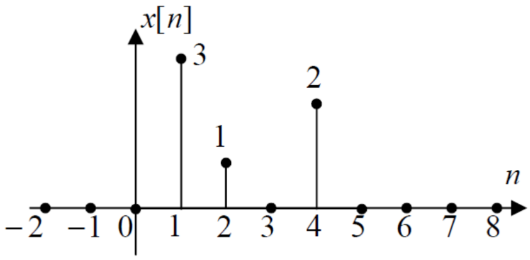
$$B = \left.\frac{z-0{,}5}{(z-0{,}2)}\right|_{z=0{,}3} = \frac{0{,}3-0{,}5}{0{,}3-0{,}2} = -2 = B$$

$H(z) = 3z^{-1}(\frac{z}{z-0{,}2}) - 2z^{-1}(\frac{z}{z-0{,}3}) \quad ; \quad |z| > 0{,}3$ Buradaki z^{-1} çarpanı 1 adım geriletir:

$$\boxed{h[n] = 3\times(0{,}2)^{n-1}u[n-1] - 2\times(0{,}3)^{n-1}u[n-1]}$$

Bilgisayar Mühendislği Bölümü
SİNYALLER VE SİSTEMLER FİNAL SINAVI SORULARI
07.6.2012 Süre: 75 dakika

1) Cesur'un iğne korkusu doğrusal zamanla değişmez bir sistem olarak şöyle modelleniyor: n gün numarası, günlere göre vurulan iğne sayıları giriş, günlere göre duyduğu korku değeri (eksi sayı olursa kurtulma rahatlığı) çıkış olarak tanımlanıyor. Yeterince önceden öğrendiği her bir iğne vurulmadan 2 gün önce 1 birim, 1 gün önce 2 birim, iğne günü 3 birim, iğne vurulduğunun ertesi günü -1 birim korku duyuyor. Cesur, doktorunun kendisine günlük iğne sayıları şekilde verilen $x[n]$ olan bir tedavi planı uygulayacağını yeterince önceden öğreniyor. Planın gerçekleşeceği varsayılıyor. Buna göre:

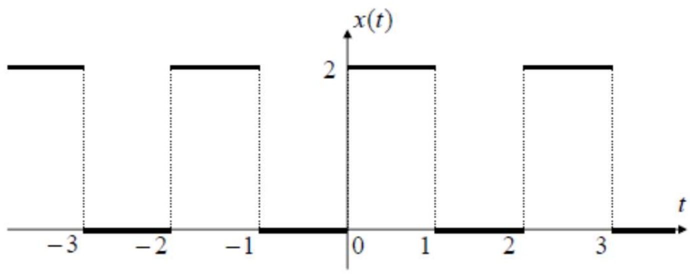


a) Sistemin birim darbe tepkisini çiziniz. **(8 puan)**

b) Sistem nedensel midir, kararlı mıdır, bellekli midir? Gerekçesini belirterek cevaplayınız. **(9 puan)**

c) Sistem çıkışını çiziniz. **(13 puan)**

2) Yanda verilen $T = 2$ ile periyodik $x(t)$ sinyalinin Fourier serisi



$$i_{10}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)\right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{jk\omega t}$$

biçimlerinde düşünüldüğünde buradaki katsayıların hangilerinin sıfır olduğu söylenebilir? **(20 puan)**

I. a_0 ve c_0
II. $a_k \quad k > 0$
III. $b_k \ \forall k$
IV. Tek k'lar için hem a_k hem b_k hem c_k
V. Çift k'lar için hem a_k hem b_k hem c_k
VI. Tüm pozitif k'lar için c_k
VII. Tüm negatif k'lar için c_k

Bu seçeneklerden sıfır olanların hepsini seçiniz. (Yanlış olarak fazla yazmanız eksik yazmanızla aynı puan kaybına neden olacaktır.)

3) Giriş(x)-çıkış(y) ilişkisi aşağıda verilen nedensel sistemin transfer fonksiyonunu **(6 puan)** ve birim darbe tepkisini **(14 puan)** bulunuz.

$$\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 2y(t) = 5\dot{x}(t) - 2x(t)$$

4) Giriş(x)-çıkış(y) ilişkisi

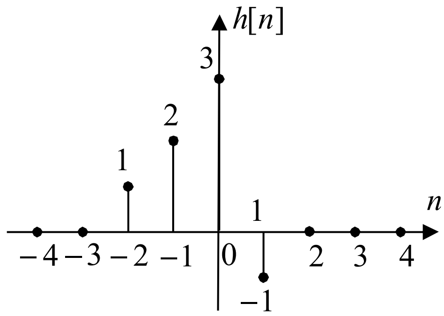
$$y[n+2] - y[n] = x[n+1] - x[n]$$

ile verilen nedensel sistemin transfer fonksiyonunu **(5 puan)**, birim darbe tepkisini **(8 puan)** ve $x[n] = (0{,}5)^n u[n]$ girişi için enerjisiz başlangıçlı çıkışını **(17 puan)** Z ve/veya Z^{-1} dönüşümleriyle bulunuz.

BAŞARILAR … **Yard. Doç. Dr. Ata SEVİNÇ**

Bilgisayar Mühendislği Bölümü
SİNYALLER VE SİSTEMLER FİNAL SINAVI CEVAP ANAHTARI
07.6.2012

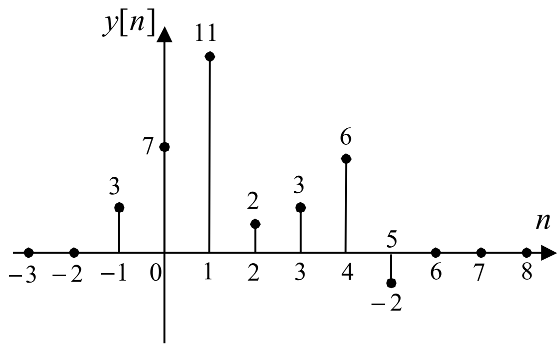
1) a) Bu sistem için birim darbe tepkisi demek, Cesur, sadece 0. günde bir adet iğne vurulacağını yeterince önceden öğrenirse günlere göre duyacağı korku fonksiyonu demektir ve şekildeki $h[n]$ gibidir.



b) Bazı $n<0$ için $h[n]\neq 0$ olduğu için sistem nedensel değildir.

$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|h[n]| = 1+2+3+|-1| = 7 < \infty$ olduğu için sistem kararlıdır.

Bazı $n\neq 0$ için $h[n]\neq 0$ olduğu için sistem belleklidir.



c) Çıkış $y[n]=x[n]*h[n]$. Her iki sinyal de sonlu süreli olduğu için şu yöntem uygulanabilir:

				1	2	3	-1	→ sonuncusu $h[1]$
×				3	1	0	2	→ sonuncusu $x[4]$
				2	4	6	-2	
			0	0	0	0		
		1	2	3	-1			
+	3	6	9	-3				
	3	7	11	2	3	6	-2	→ sonuncusu $y[1+4]=y[5]$.

Buna göre $y[n]$ yukarıdaki şekilde gösterildiği gibi olur. (Dikkat! Bu işlem her ne kadar klasik çarpmaya benzese de elde aktarımı yapılmaz ve her bir sayı eksi de olsa büyük de olsa rakam rakam değil olduğu gibi sayı olarak ele alınır.)

2) $x(t)-1$ hem tek bir sinyaldir, hem de tek harmonik simetrisine sahiptir. Bu yüzden $x(t)$ 'nin Fourier serisi $x(t)-1$ ' in Fourier serisinden sadece a_0 (veya c_0) terimiyle farklıdır.

II. a_k $k>0$ (Tek sinyallerin Fourier serilerinde cos terimleri olmaz)

V. Çift k'lar için hem a_k hem b_k hem c_k (Tek harmonik simetrisine sahip sinyallerin serilerinde çift harmonik olmaz. Ancak burada $x(t)$ tek harmonik simetrisine sahip bir sinyalin 1 fazlası olduğu için $k\neq 0$ kastedilmektedir. Yani $a_0\neq 0$ ve $c_0\neq 0$.)

katsayıları sıfır olur. Diğerlerinin sıfır olması zorunluluğu yoktur.

3) Transfer fonksiyon : $\dfrac{5(j\omega)-2}{(j\omega)^2+3(j\omega)+2} = \boxed{H(\omega)=\dfrac{5(j\omega)-2}{(j\omega+1)(j\omega+2)}} = \dfrac{A}{(j\omega+1)}+\dfrac{B}{(j\omega+2)}$

$$A=\left.\frac{5(j\omega)-2}{(j\omega+2)}\right|_{j\omega\leftarrow -1} = \frac{-5-2}{-1+2} = -7 \qquad B=\left.\frac{5(j\omega)-2}{(j\omega+1)}\right|_{j\omega\leftarrow -2} = \frac{-10-2}{-2+1} = 12$$

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{-7}{(j\omega+1)}+\frac{12}{(j\omega+2)}\right\} = -7e^{-t}u(t)+12e^{-2t}u(t) = \boxed{h(t)=\left(12e^{-2t}-7e^{-t}\right)u(t)}$$

4) Transfer fonksiyon : $\frac{z-1}{z^2-1} = \boxed{H(z)=\frac{1}{z+1} \quad ; \quad |z|>1}$

$$H(z) = \underbrace{\frac{z}{z+1}}_{Z\{(-1)^n u[n]\}} \cdot z^{-1}$$ Buradaki z^{-1} bir adım geriletir.

Bunun Z^{-1} dönüşümü alınarak birim darbe tepkisi $\boxed{h[n]=(-1)^{n-1}u[n-1]}$ bulunur.

$$x[n]=(0{,}5)^n u[n] \quad \Rightarrow \quad X(z)=\frac{z}{z-0{,}5} \quad ; \quad |z|>0{,}5$$

$$Y(z)=X(z)H(z)=\frac{z}{(z+1)(z-0{,}5)} \quad ; \quad |z|>1$$

1. yol:

$$\frac{Y(z)}{z}=\frac{1}{(z+1)(z-0{,}5)}=\frac{A}{z+1}+\frac{B}{z-0{,}5} \qquad A=\left.\frac{1}{(z-0{,}5)}\right|_{z=-1}=\frac{1}{-1-0{,}5}=-\frac{2}{3}=A$$

$$B=\left.\frac{1}{(z+1)}\right|_{z=0{,}5}=\frac{1}{0{,}5+1}=\frac{2}{3}=B \qquad Y(z)=-\frac{2}{3}\frac{z}{z+1}-\frac{2}{3}\cdot\frac{z}{z-0{,}5} \quad ; \quad |z|>1$$

$$\rightarrow \quad y[n]=-\frac{2}{3}\times(-1)^n u[n]+\frac{2}{3}\times(0{,}5)^n u[n]=\boxed{y[n]=\frac{2}{3}\left((0{,}5)^n-(-1)^n\right)u[n]}$$

2.yol:

$$Y(z)=\frac{z}{(z+1)(z-0{,}5)}=\frac{a}{z+1}+\frac{b}{z-0{,}5} \qquad a=\left.\frac{z}{(z-0{,}5)}\right|_{z=-1}=\frac{-1}{-1-0{,}5}=\frac{2}{3}=a$$

$$b=\left.\frac{z}{(z+1)}\right|_{z=0{,}5}=\frac{0{,}5}{0{,}5+1}=\frac{1}{3}=b \qquad Y(z)=\frac{2}{3}\cdot z^{-1}\cdot\frac{z}{z+1}+\frac{1}{3}\cdot z^{-1}\cdot\frac{z}{z-0{,}5} \quad ; \quad |z|>1$$

Başlarındaki z^{-1} çarpanı olmasaydı, Z^{-1} dönüşümü alınınca $\frac{2}{3}\times(-1)^n u[n]+\frac{1}{3}\times(0{,}5)^n u[n]$ bulunurdu. Ancak z^{-1} çarpanı zamanda 1 adım gerilettiği için

$$y[n]=\frac{2}{3}\times(-1)^{n-1}u[n-1]+\frac{1}{3}\times(0{,}5)^{n-1}u[n-1]=\boxed{y[n]=\frac{1}{3}\left((0{,}5)^{n-1}+2\times(-1)^{n-1}\right)u[n-1]}$$ bulunur.

İki yolla bulunan $y[n]$ ifadeleri farklı görünseler de dikkat edilirse her n için aynı değeri verdikleri görülebilir.

SİNYALLER VE SİSTEMLER FİNAL SINAVI SORULARI

04 Ocak 2013 Süre: 80 dakika

Her soru numarasından ya A ya da B ile gösterileni yapınız.

1) $h[n] = 2u[n] + 4\delta[n-1]$ veriliyor.

A) Birim darbe tepkisi bu $h[n]$ olan doğrusal zamanla değişmez (DZD) sistem nedensel midir, kararlı mıdır? DZD sistemlere özel gerekçesiyle yazınız **(3+3 puan).** Bu sistemin birim basamak tepkisini çiziniz **(9 puan).**

B) $h[n]$ sinyali ile, tek ve çift bileşenlerini çiziniz **(3+4+4 puan).** $h[n]$ sinyalini darbeler toplamı halinde yazınız **(4 puan).**

---

2) A) $\forall t < p_1$ ve $\forall t > p_2$ için $x(t) = 0$

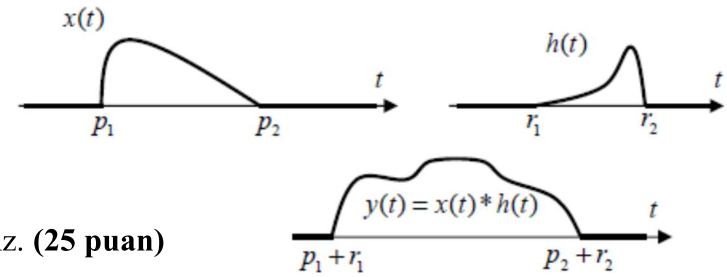
$\forall t < r_1$ ve $\forall t > r_2$ için $h(t) = 0$

olan herhangi iki sinyal veriliyor.

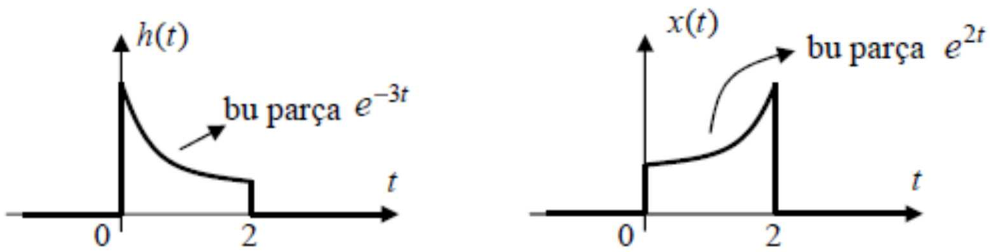
Bu iki sinyalin konvolüsyonunun,

$\forall t < p_1 + r_1$ ve $\forall t > p_2 + r_2$ için $y(t) = 0$

(şekillerdeki gibi) şartını sağladığını ispatlayınız. **(25 puan)**

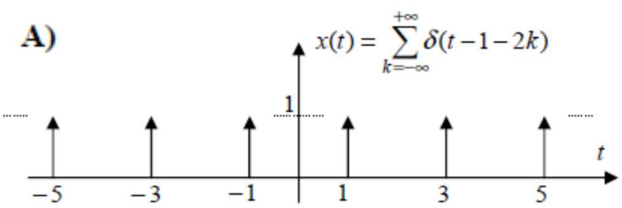


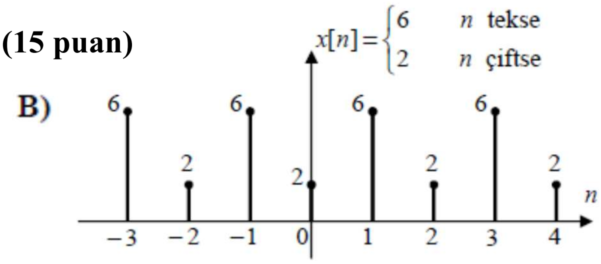
B) Aşağıdaki iki sinyalin konvolüsyonunu hesaplayınız. **(25 puan)**



---

3) Aşağıda verilen sinyallerden birisinin Fourier serisini yazınız. **(15 puan)**





---

4) A) Giriş(x)-çıkış(y) ilişkisi

$$\dot{y}(t) + 2y(t) = \dot{x}(t) - 2x(t)$$

ile verilen nedensel sistemin transfer fonksiyonunu, birim darbe tepkisini ve $x(t) = e^{-t}u(t)$ girişi için enerjisiz başlangıçlı çıkışını bulunuz. **(5+9+11 puan)**

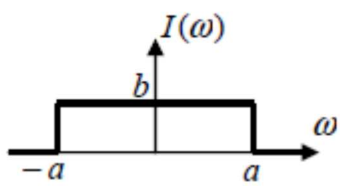
B) Giriş(x)-çıkış(y) ilişkisi $y[n+1] - y[n] = 2x[n+1] + x[n]$

ile verilen nedensel sistemin fonksiyonunu, birim darbe tepkisini ve $x[n] = (-1)^n u[n]$ girişi için enerjisiz başlangıçlı çıkışını bulunuz. **(5+9+11 puan)**

---

5) A) Birim darbe tepkisi $h[n] = 3\delta[n] + 2\delta[n-1] - \delta[n-2]$ olan DZD bir sistemin girişine $x[n] = 4\delta[n+1] - 2\delta[n-1] + 3\delta[n-2]$ sinyali uygulanırsa alınacak çıkışı çiziniz. Z ve/veya Z^{-1} dönüşümleriyle yapınız. **(20 puan)**

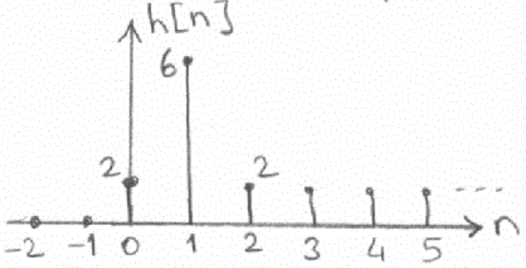
B) Genlik spektrumu verilen $i(t)$ akım sinyali $R = 10\,\Omega$'luk bir direnç üzerinden geçmektedir. Bu direnç üzerinde (-∞,+∞) zaman aralığında harcanan toplam enerji ne kadardır? **(20 puan)** $a = 60\pi\ rad/s$, $b = 20As$



BAŞARILAR … **Yard. Doç. Dr. Ata SEVİNÇ**

SİNYALLER VE SİSTEMLER FİNAL CEVAP ANAHTARI
04 Ocak 2013

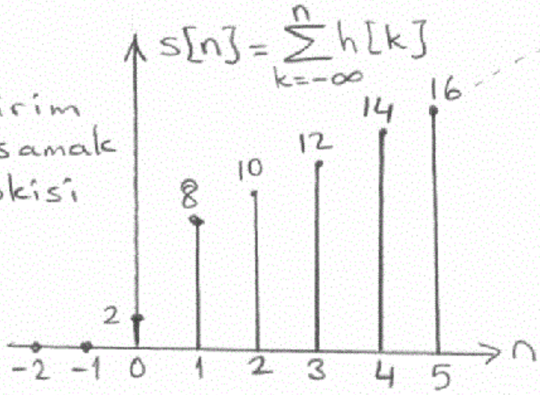
1) (A)



$\forall n<0$ için $h[n]=0$ olduğu için sistem nedenseldir.

$\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| = \infty$ olduğu için sistem kararsızdır.

Birim basamak tepkisi



(B) sorusunda sorulan darbeler toplamı biçimindeki ifade:

$$h[n] = 4\delta[n-1] + \sum_{k=0}^{+\infty} 2\delta[n-k] \quad \text{veya}$$

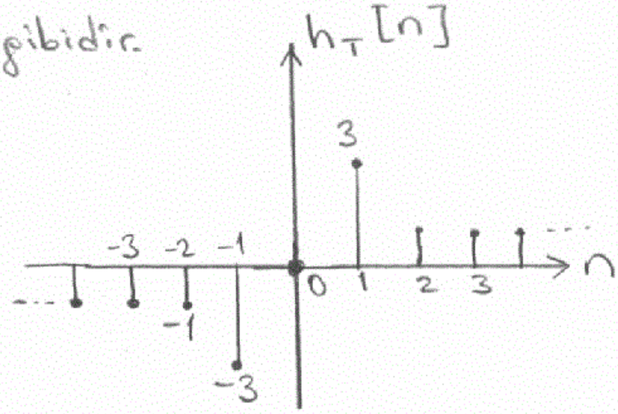
$$h[n] = 2\delta[n] + 6\delta[n-1] + 2\delta[n-2] + 2\delta[n-3] + 2\delta[n-4] + \ldots$$

(B) $h[n]$ en üstte çizildiği gibidir.

Tek bileşen için: $h_T[0]=0$

$h_T[1] = \frac{6-0}{2} = 3$

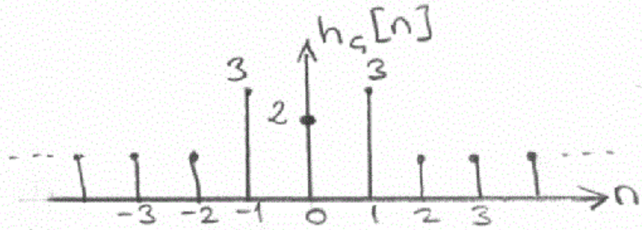
$n \geqslant 2 \Rightarrow h_T[n] = \frac{2-0}{2} = 1$



Çift bileşen için: $h_Ç[0]=2$

$h_Ç[1] = \frac{6+0}{2} = 3$

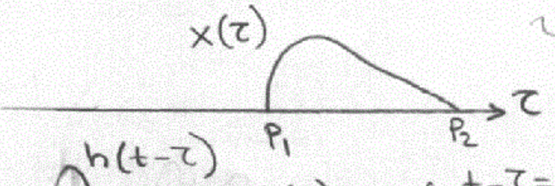
$n \geqslant 2 \Rightarrow h_Ç[0] = \frac{2+0}{2} = 1$

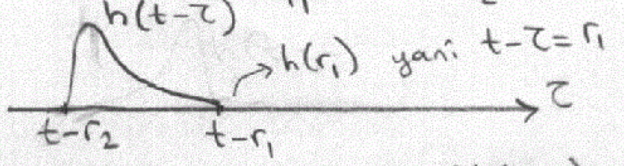


Tek, orijine göre; çift, düşey eksene göre simetrik olarak yukarıdaki gibi bulunur.

2) (A) $y(t) = x(t) * h(t) = \int\limits_{\tau=-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t-\tau)\, d\tau$

$t < p_1 + r_1$ ise :



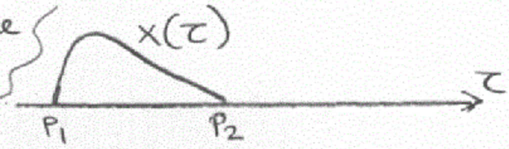


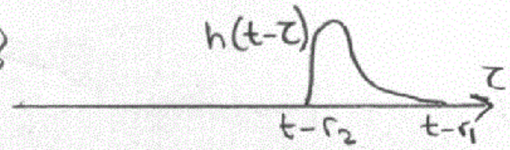
$t - r_1 < p_1$ olduğundan, $x(\tau)h(t-\tau) = 0 \;\; \forall \tau$

Her ikisinden de $y(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} 0 \cdot d\tau$

$y(t) = 0$ bulunur.

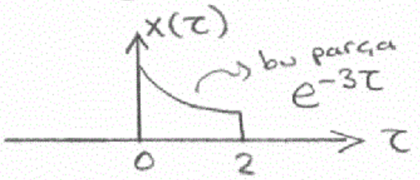
$t > p_2 + r_2$ ise :

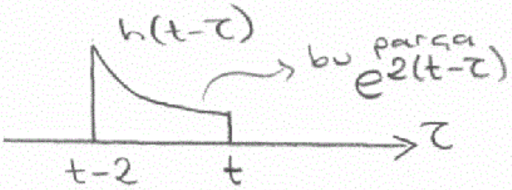




$t - r_2 > p_2$ olduğundan, $x(\tau)h(t-\tau) = 0 \;\; \forall \tau$

2) B $y(t) = x(t) * h(t) = \int_{\tau=-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$





<u>$t<0$ ise:</u>

$x(\tau)h(t-\tau)=0 \quad \forall\tau \rightarrow y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} 0 \cdot d\tau$

$y(t)=0$.

$t-2 \geq 2$ yani <u>$t \geq 4$ ise:</u>

Yine $x(\tau)h(t-\tau)=0 \quad \forall\tau \rightarrow y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} 0 \cdot d\tau$

$y(t)=0$.

<u>$0 \leq t < 2$ ise:</u>

$$x(\tau)h(t-\tau) = \begin{cases} e^{-3\tau} \cdot e^{2(t-\tau)} = e^{2t-5\tau} & 0 \leq \tau \leq t \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$$

$$y(t) = \int_{\tau=0}^{t} e^{2t} \cdot e^{-5\tau} d\tau = e^{2t} \cdot \int_{\tau=0}^{t} e^{-5\tau} d\tau = e^{2t} \cdot \left[\frac{e^{-5\tau}}{-5}\right]_{\tau=0}^{t}$$

$$y(t) = e^{2t} \cdot \frac{1}{5} \cdot \left[1 - e^{-5t}\right] = \frac{1}{5}\left(e^{2t} - e^{-3t}\right)$$

<u>$2 \leq t < 4$ ise:</u>

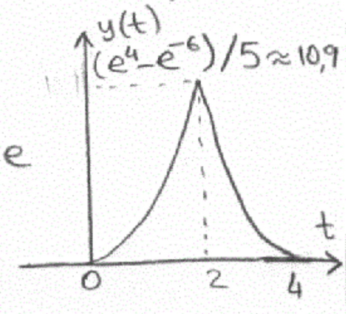
$$x(\tau)h(t-\tau) = \begin{cases} e^{-3\tau} \cdot e^{2(t-\tau)} = e^{2t-5\tau} & t-2 \leq \tau \leq 2 \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$$

$$y(t) = \int_{\tau=t-2}^{2} e^{2t} \cdot e^{-5\tau} d\tau = e^{2t} \int_{\tau=t-2}^{2} e^{-5\tau} d\tau = e^{2t} \cdot \left[\frac{e^{-5\tau}}{-5}\right]_{\tau=t-2}^{2}$$

$$y(t) = e^{2t} \cdot \frac{1}{5} \cdot \left[e^{-5t+10} - e^{-10}\right] = \frac{1}{5}\left(e^{10-3t} - e^{2t-10}\right)$$

Sonuç:

$$y(t) = \begin{cases} 0 & \rightarrow t<0 \text{ ise} \\ \frac{1}{5}\left(e^{2t} - e^{-3t}\right) & \rightarrow 0 \leq t < 2 \text{ ise} \\ \frac{1}{5}\left(e^{10-3t} - e^{2t-10}\right) & \rightarrow 2 \leq t < 4 \text{ ise} \\ 0 & \rightarrow t \geq 4 \text{ ise} \end{cases}$$



3) A $T_0 = 2$ ile periyodik. $\omega_0 = 2\pi/T_0 = \pi \rightarrow x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{jk\pi t}$

$0<t<2$ periyodu için $x(t) = \delta(t-1)$

$c_k = \frac{1}{\underset{T_0}{2}} \int_0^2 \delta(t-1) \cdot e^{-jk\pi t} \cdot dt$ Burada $\delta(t-1) \underset{\text{darbenin etkidiği andaki değeri önemli}}{e^{-jk\pi t}} = \delta(t-1) e^{-jk\pi}$

Dolayısıyla $c_k = \frac{1}{2} \cdot \underset{\text{sabit}}{e^{-jk\pi}} \cdot \underbrace{\int_0^2 \delta(t-1)dt}_{=1} \rightarrow c_k = \frac{1}{2} e^{-jk\pi}$

3) A (devamı) $\quad e^{-jk\pi} = (-1)^k$

$$c_k = \frac{(-1)^k}{2} \rightarrow x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2}(-1)^k \cdot e^{jk\pi t}$$. Açık yazarsak:

$$x(t) = \dots + \frac{1}{2}e^{-j2\pi t} - \frac{1}{2}e^{-j\pi t} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{j\pi t} + \frac{1}{2}e^{j2\pi t} + \dots$$

İstenirse gerçel biçimli de yazılabilir. Sinyal çifttir:

$b_k = 0$, $a_k = 2c_k = (-1)^k$ (Dikkat: $a_k = \frac{4}{T_0}\int_0^{T_0/2} \dots$ formülü, $T_0/2$'de sonsuza sıçrama olduğundan tavsiye edilmez.)

$a_0 = 1$

$$x(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \cos k\pi t$$

$$x(t) = \frac{1}{2} - \cos\pi t + \cos 2\pi t - \cos 3\pi t + - \dots$$

B Kısa yol: $x[n] = 4 - 2\cdot(-1)^n = \underset{c_0}{4} - \underset{c_1}{2}\cdot e^{j\pi n}$

Standart yol:

$N=2$ ile periyodik. $\omega_0 = 2\pi/N = \pi$

$$x[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} c_k e^{jk\omega_0 n} = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{jk\pi n} = c_0 + c_1 e^{j\pi n}$$

$$c_k = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x[n] e^{-jk\omega_0 n} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{1} x[n] e^{-jk\pi n}$$

$$c_0 = \frac{1}{2}(x[0] + x[1]) = \frac{2+6}{2} = 4 = c_0$$

$$c_1 = \frac{1}{2}\Big(x[0] + x[1]\underbrace{e^{-j\pi}}_{-1}\Big) = \frac{1}{2}(2-6) = -2 = c_1$$

Sonuç: $\boxed{x[n] = 4 - 2\cdot e^{j\pi n}}$

4) A Transfer fonksiyon: $H(\omega) = \dfrac{j\omega - 2}{j\omega + 2}$

$$H(\omega) = \frac{j\omega + 2 - 4}{j\omega + 2} = 1 - 4\cdot\frac{1}{j\omega+2}$$

$\mathcal{F}^{-1}\{H(\omega)\} = h(t) = \delta(t) - 4e^{-2t}u(t)$: birim darbe tepkisi

$$x(t) = e^{-t}u(t) \longrightarrow X(\omega) = \frac{1}{j\omega+1} \rightarrow Y(\omega) = H(\omega)X(\omega)$$

4) Ⓐ (devamı)

$$Y(\omega) = \frac{j\omega-2}{(j\omega+2)(j\omega+1)} = \frac{A_1}{j\omega+1} + \frac{A_2}{j\omega+2}$$

$$A_1 = \frac{-1-2}{-1+2} = -3 \qquad A_2 = \frac{-2-2}{-2+1} = 4$$

$$\mathcal{F}^{-1}\{Y(\omega)\} = y(t) = -3e^{-t}u(t) + 4e^{-2t}u(t)$$

↳ enerjisiz başlangıçlı çıkış

Ⓑ Transfer fonksiyon: $H(z) = \frac{2z+1}{z-1}$; YB: $|z|>1$

$$H(z) = \frac{2z-2+3}{z-1} = 2 + \frac{3}{z-1} = 2\times 1 + 3z^{-1}\cdot\underbrace{\frac{z}{z-1}}_{\mathcal{Z}\{1^n u[n]\}} \; ; \; |z|>1$$

$1 = \mathcal{Z}\{\delta[n]\}$ 1 adım geriletir. $\underbrace{1^n u[n]}_{=u[n]}$

$$\mathcal{Z}^{-1}\{H(z)\} = h[n] = 2\delta[n] + 3u[n-1]$$

$$X(z) = \frac{z}{z-(-1)} = \frac{z}{z+1} \; ; \; \text{YB}: |z|>1$$

↳ $|-1|$

$$Y(z) = X(z)H(z) = \frac{z\cdot(2z+1)}{(z-1)(z+1)} \; ; \; \text{YB}: |z|>1$$

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{2z+1}{(z-1)(z+1)} = \frac{B_1}{z-1} + \frac{B_2}{z+1}$$

$$B_1 = \frac{2\times 1+1}{1+1} = \frac{3}{2} \qquad B_2 = \frac{2\times(-1)+1}{-1-1} = \frac{1}{2}$$

$$Y(z) = \frac{3}{2}\cdot\frac{z}{z-1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{z}{z+1} \; ; \; \text{YB}: |z|>1$$

$$\mathcal{Z}^{-1}\{Y(z)\} = y[n] = \frac{3}{2}\cdot 1^n u[n] + \frac{1}{2}(-1)^n u[n]$$

$$y[n] = \left[\frac{3}{2} + \frac{1}{2}(-1)^n\right]u[n]$$

SS-F-2013-CA-5

5) A Çıkış : $y[n] = x[n] * h[n]$

$\xrightarrow{\mathcal{Z}} Y(z) = X(z)H(z)$

$$X(z) = \sum_{n=-1}^{2} x[n] z^{-n} = 4z - 2z^{-1} + 3z^{-2}$$

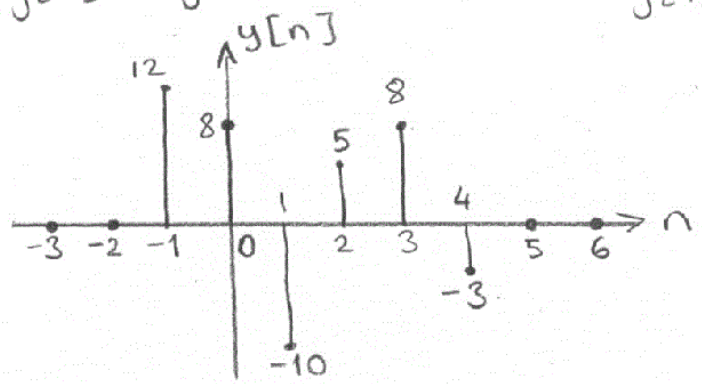
$$H(z) = \sum_{n=0}^{2} h[n] z^{-n} = 3 + 2z^{-1} - z^{-2}$$

$$Y(z) = 12z + 8 + (3\cdot(-2) - 1\times 4)z^{-1} + (2\times(-2)+3\times 3)z^{-2} + (2\times 3+(-1)(-2))z^{-3} - 3z^{-4}$$

$$Y(z) = 12z + 8 - 10z^{-1} + 5z^{-2} + 8z^{-3} - 3z^{-4} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[n] z^{-n}$$

$y[-1]$ $y[0]$ ..... $y[4]$

$n<-1$ ve $n>4$ için $y[n]=0$



B) Enerji $E = \int_{-\infty}^{+\infty} R|i(t)|^2 dt = R\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |I(\omega)|^2 d\omega$

$$E = \frac{R}{2\pi}\int_{-a}^{a} b^2 d\omega = \frac{R}{2\pi}\left[b^2\omega\right]_{-a}^{a} = \frac{R}{2\pi}\cdot 2ab^2 = E$$

$$E = \frac{10\Omega}{\pi}\cdot 60\pi \frac{rad}{s}\cdot 20^2 A^2 s^2 = 24\times 10^4 \underbrace{\Omega\, A\cdot A\cdot s}_{VAs=Ws=J}$$

$$\boxed{E = 240\,kJ}$$

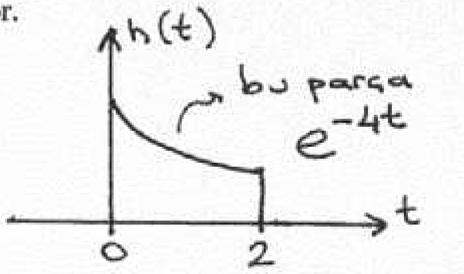
SİNYALLER VE SİSTEMLER BÜTÜNLEME SINAVI SORULARI

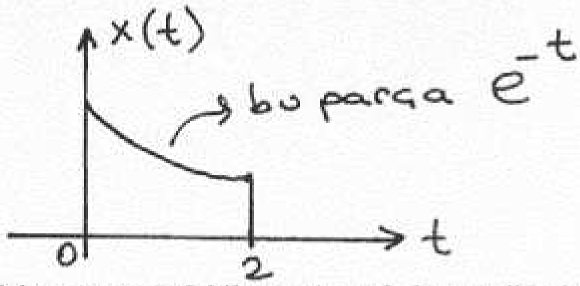
18 Ocak 2013 Süre: 75 dakika

Her soru eşit puanlıdır. 2. Soru zorunludur. İstediğiniz üç soru daha seçerek cevaplayınız.

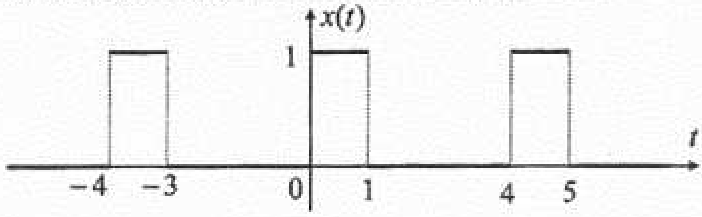
1) $h[n]=4u[n+1]-2\delta[n-1]-4u[n-2]$ sinyalini çiziniz. $x[n]=h[-n]$ sinyalini çiziniz. Birim darbe tepkisi $h[n]$ olan doğrusal zamanla değişmez (DZD) bir sistemin girişine $x[n]$ uygulanırsa elde edilecek çıkışı çiziniz. Bu sistem nedensel midir, kararlı mıdır? DZD sistemlere özel gerekçesiyle cevaplayınız.

2) Birim darbe tepkisi $h(t)$ ve girişi $x(t)$ şekillerde verilen (DZD) bir sistemin çıkışını bulunuz. Sonucun çizimi beklenmiyor.





3) $T=4$ ile periyodik olan şekildeki $x(t)$ sinyalini Fourier serisine açınız. DC bileşen, 1. ve 2. harmoniklerin terimleri ve katsayılarının sayısal değerleri görünecek şekilde seriyi yazınız.



4) Giriş(x)-çıkış(y) ilişkisi

$$\ddot{y}(t)+5\dot{y}(t)+4y(t)=\dot{x}(t)+2x(t)$$

ile verilen nedensel sistemin transfer fonksiyonunu, birim darbe tepkisini ve $x(t)=e^{-2t}u(t)$ girişi için enerjisiz başlangıçlı çıkışını bulunuz.

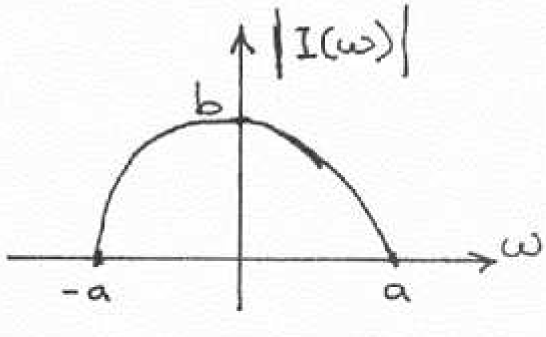
5) Giriş(x)-çıkış(y) ilişkisi $y[n+1]-0{,}5y[n]=x[n+1]+2x[n]$

ile verilen nedensel sistemin transfer fonksiyonunu, birim darbe tepkisini ve $x[n]=(-1)^n u[n]$ girişi için enerjisiz başlangıçlı çıkışını bulunuz.

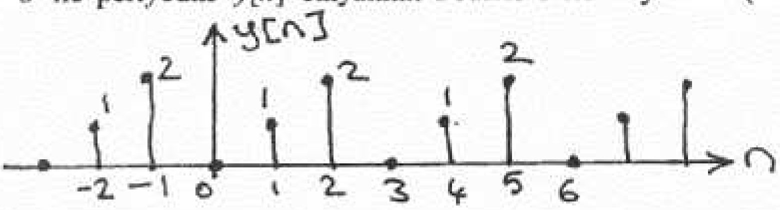
6) Genlik spektrumu verilen $i(t)$ akım sinyali $R=5\,\Omega$'luk bir direnç üzerinden geçmektedir. Bu direnç üzerinde $(-\infty,+\infty)$ zaman aralığında harcanan toplam enerji ne kadardır?

$a=100\pi\ rad/s$, $b=20As$ olmak üzere,

$$|I(\omega)|=\begin{cases} b\cdot\sqrt{\cos(\omega/200)} & -a<\omega<a \\ 0 & diger \end{cases}$$



7) Şekilde verilen $N=3$ ile periyodik $y[n]$ sinyalinin Fourier serisini yazınız (tüm terim ve katsayılarını yerine yazarak)

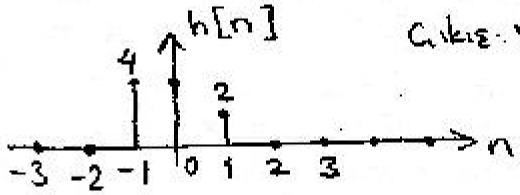


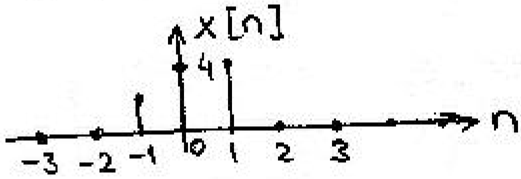
BAŞARILAR ...

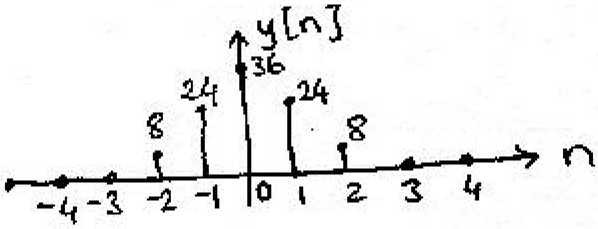
Yard. Doç. Dr. Ata SEVİNÇ

SİNYALLER VE SİSTEMLER BÜTÜNLEME CEVAP ANAHTARI
18 Ocak 2013

1)







Çıkış: $y[n]=x[n]*h[n]$

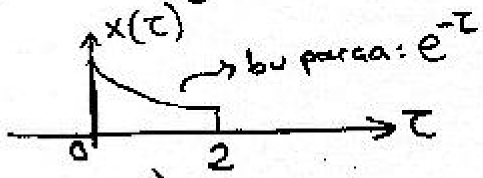
		4	4	2	→ h[1]
×		2	4	4	→ x[1]
		16	16	8	
	16	16	8		
+ 8	8	4			
8	24	36	24	8	→ y[1+1] = y[2]

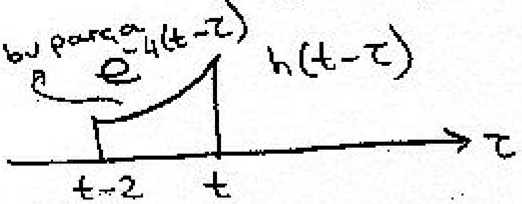
8 → y[-2]

Bazı $n<0$ için $h[n]\neq 0$ olduğu için sistem nedensel değil.

$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| = 10 < \infty$ olduğu için sistem kararlı.

2) Çıkış: $y(t)=x(t)*h(t)=\int_{\tau=-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau$





$t<0$ ise:

$x(\tau)h(t-\tau)=0 \quad \forall\tau$

$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} 0 \cdot d\tau = 0$

$0\le t<2$ ise:

$$x(\tau)h(t-\tau)=\begin{cases} e^{-\tau}\cdot e^{-4t+4\tau} & 0\le\tau\le t \\ 0 & \text{diğer}\end{cases}$$

$\to e^{-4t}\cdot e^{3\tau}$

$$y(t)=\int_{\tau=0}^{t} \underbrace{e^{-4t}}_{\tau\text{'ya göre sabit}}\cdot e^{3\tau}\,d\tau$$

$$y(t)=e^{-4t}\cdot\left[\frac{e^{3\tau}}{3}\right]_{\tau=0}^{t}=e^{-4t}\cdot\frac{e^{3t}-e^{0}}{3}=\frac{1}{3}e^{-t}-\frac{1}{3}e^{-4t}$$

$2\le t<4$ ise:

$$x(\tau)h(t-\tau)=\begin{cases} e^{-\tau}\cdot e^{-4t+4\tau} & t-2\le\tau\le 2 \\ 0 & \text{diğer}\end{cases}$$

$$y(t)=\int_{\tau=t-2}^{2} \underbrace{e^{-4t}}_{\text{sabit}}\cdot e^{3\tau}\,d\tau = e^{-4t}\cdot\left[\frac{e^{3\tau}}{3}\right]_{\tau=t-2}^{2} = e^{-4t}\,\frac{e^{6}-e^{3(t-2)}}{3}$$

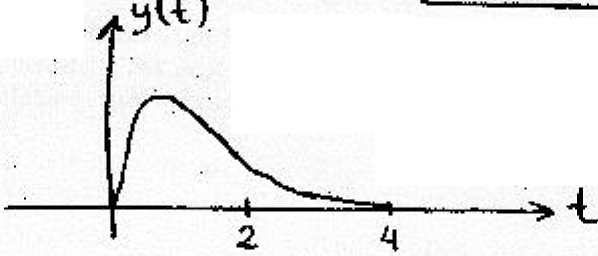
$$y(t)=\frac{1}{3}e^{6-4t}-\frac{1}{3}e^{-6-t}$$

2) (devamı)

$t \geq 4$ ise:

$x(\tau)h(t-\tau) = 0 \quad \forall \tau$

$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} 0 \cdot d\tau = 0$



3) $\omega_0 = 2\pi/T = \pi/2$ $\qquad x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{jk\frac{\pi}{2}t}$ → karmaşık gösterim daha basit

$c_k = \frac{1}{T}\int_0^T x(t) e^{-jk\frac{\pi}{2}t} dt = \frac{1}{4}\int_0^1 1 \cdot e^{-jk\frac{\pi}{2}t} dt + \frac{1}{4}\int_1^4 0 \cdot dt$

$c_k = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{-jk\frac{\pi}{2}} \left[e^{-jk\frac{\pi}{2}t} \right]_0^1$ $\qquad (k \neq 0)$

$c_k = \frac{-1}{j2k\pi}\left(e^{-jk\frac{\pi}{2}} - 1\right) = \begin{cases} 0 & k = 4n \text{ (tamsayı) ise} \quad (k \neq 0) \\ \frac{1-j}{2k\pi} & k = 4n+1 \text{ ise} \\ -j \cdot \frac{1}{k\pi} & k = 4n+2 \text{ ise} \\ \frac{-1-j}{2k\pi} & k = 4n+3 \text{ ise} \end{cases}$

$c_0 = \frac{1}{4}\int_0^1 1 \cdot dt = \frac{1}{4} = c_0$

$c_{-1} = \frac{1+j}{2\pi}$ ($n=-1$, $k=4n+3$), $\quad c_{-2} = \frac{j}{2\pi}$ ($n=-1$, $k=4n+2$), $\quad c_1 = \frac{1-j}{2\pi} = c_{-1}^*$ ($n=0$, $k=4n+1$), $\quad c_2 = \frac{-j}{2\pi} = c_{-2}^*$ ($n=0$, $k=4n+2$)

$x(t) = \ldots + j\frac{1}{2\pi}e^{-j\pi t} + \frac{1+j}{2\pi}e^{-j\frac{\pi}{2}t} + \frac{1}{4} + \frac{1-j}{2\pi}e^{j\frac{\pi}{2}t} - j\frac{1}{2\pi}e^{j\pi t} + \ldots$

Genel gösterime geçilirse hiç bir simetri olmadığına dikkat edilerek: $x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(a_k \cos k\frac{\pi}{2}t + b_k \sin k\frac{\pi}{2}t\right)$

$a_0 = \frac{2}{4}\int_0^1 1 \cdot dt = \frac{1}{2}$ $\qquad k>0 \Rightarrow a_k = \frac{2}{4}\int_0^1 1 \cdot \cos\frac{k\pi}{2}t \, dt$

$k>0 \Rightarrow a_k = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{k\pi} \sin\frac{k\pi}{2}t \Big|_0^1 = \frac{1}{k\pi}\sin\frac{k\pi}{2} = a_k \longrightarrow a_1 = \frac{1}{\pi}, \quad a_2 = 0$

$b_k = \frac{2}{4}\int_0^1 1 \cdot \sin\frac{k\pi}{2}t \, dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{k\pi}\left[-\cos\frac{k\pi}{2}t\right]_0^1$

$b_k = \frac{1}{k\pi}\left(1 - \cos\frac{k\pi}{2}\right) = \begin{cases} 1/k\pi & k \text{ tekse} \\ 2/k\pi & k/2 \text{ tekse} \\ 0 & k/2 \text{ çiftse} \end{cases}$

$b_1 = 1/\pi$

$b_2 = 2/\pi$

3) (devamı)

$$x(t) = \underset{a_0/2}{\frac{1}{4}} + \underbrace{\frac{1}{\pi}\left(\cos\frac{\pi}{2}t + \sin\frac{\pi}{2}t\right)}_{1.\text{harmonik}} + \underbrace{\frac{2}{\pi}\sin\pi t}_{2.\text{harmonik}} + \dots$$

4) Transfer fonksiyon: $H(\omega) = \dfrac{j\omega+2}{(j\omega)^2+5(j\omega)+4} = \dfrac{j\omega+2}{(j\omega+1)(j\omega+4)}$

$$H(\omega) = \frac{A_1}{j\omega+1} + \frac{A_2}{j\omega+4} \qquad A_1 = \left.\frac{j\omega+2}{j\omega+4}\right|_{j\omega\leftarrow-1} = \frac{-1+2}{-1+4} = \frac{1}{3}$$

$$A_2 = \left.\frac{j\omega+2}{j\omega+1}\right|_{j\omega\leftarrow-4} = \frac{-4+2}{-4+1} = \frac{2}{3}$$

$$\mathcal{F}^{-1}\{H(\omega)\} = h(t) = \frac{1}{3}e^{-t}u(t) + \frac{2}{3}e^{-4t}u(t)$$: birim darbe tepkisi

$$X(\omega) = \frac{1}{j\omega+2} \longrightarrow Y(\omega) = H(\omega)X(\omega) = \frac{1}{(j\omega+1)(j\omega+4)}$$

$$Y(\omega) = \frac{B_1}{j\omega+1} + \frac{B_2}{j\omega+4} \qquad B_1 = \frac{1}{-1+4} = \frac{1}{3} \qquad B_2 = \frac{1}{-4+1} = \frac{-1}{3}$$

$$\mathcal{F}^{-1}\{Y(\omega)\} = y(t) = \frac{1}{3}\left(e^{-t} - e^{-4t}\right)u(t)$$

5) Transfer fonksiyon: $H(z) = \dfrac{z+2}{z-0,5}$; $|z|>0,5$ (nedensel-likten)

$$H(z) = \frac{z-0,5+2,5}{z-0,5} = \underset{\mathcal{Z}\{\delta[n]\}}{1} + 2,5\underset{\substack{1\text{ adım}\\ \text{gecikletir}}}{z^{-1}} \cdot \underbrace{\frac{z}{z-0,5}}_{\mathcal{Z}\{0,5^n u[n]\}} \quad ; \quad |z|>0,5$$

$$h[n] = \delta[n] + \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{2^{n-1}}u[n-1]$$: birim darbe tepkisi

$$X(z) = \frac{z}{z+1} \ ; \ |z|>1 \longrightarrow Y(z) = X(z)H(z) = \underset{|z|>1}{\frac{z(z+2)}{(z-0,5)(z+1)}}$$

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{z+2}{(z-0,5)(z+1)} = \frac{A}{z-0,5} + \frac{B}{z+1} \ ; \ A = \frac{0,5+2}{0,5+1} = \frac{5}{3}$$

$$B = \frac{-1+2}{-1-0,5} = -\frac{2}{3} \longrightarrow Y(z) = \frac{5}{3}\underset{|z|>0,5}{\frac{z}{z-0,5}} - \frac{2}{3}\frac{z}{z+1} \ ; \ |z|>1$$

$$y[n] = \left[\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{2^n} - \frac{2}{3}(-1)^n\right]u[n]$$

6) $(-\infty,+\infty)$ zaman aralığında harcanan enerji: $E = \int_{-\infty}^{+\infty} R\cdot|i(t)|^2 dt = R\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|I(\omega)|^2 d\omega$

$$E = \frac{R}{2\pi}\int_{-a}^{a} b^2 \cos\frac{\omega}{200}\cdot d\omega = \frac{b^2R}{2\pi}\cdot 200\cdot \sin\frac{\omega}{200}\Big|_{-a}^{a}$$

$$E = \frac{100b^2R}{\pi}\left(\sin\frac{a}{200} + \sin\frac{a}{200}\right) \quad ; \quad \frac{a}{200} = \frac{\pi}{2} \rightarrow \sin\frac{\pi}{2} = 1$$

$$E = \frac{200b^2R}{\pi} = \frac{200\times 20^2\times 5}{\pi} J = \frac{400}{\pi} kJ = E$$

7) $N=3 \longrightarrow \omega_0 = 2\pi/3 \longrightarrow x[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} c_k e^{j\frac{2k\pi}{3}n}$

$$c_0 = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x[n] e^{-j2\cdot 0\cdot\frac{\pi}{3}n} = \frac{1}{3}\left(\underbrace{x[0]}_{0}+\underbrace{x[1]}_{1}+\underbrace{x[2]}_{2}\right) = \frac{3}{3} = 1 = c_0$$

$$c_1 = \frac{1}{3}\cdot\sum_{n=\langle 3\rangle} x[n] e^{-j2\cdot 1\cdot\frac{\pi}{3}n} = \frac{1}{3}\left(0\cdot e^{-j\frac{2\pi}{3}\cdot 0} + 1\cdot e^{-j2\cdot 1\cdot\frac{\pi}{3}\cdot 1} + 2\cdot e^{-j2\cdot 1\cdot\frac{\pi}{3}\cdot 2}\right)$$

$$c_1 = \frac{1}{3}\left(1\angle{-120^\circ} + 2\angle{120^\circ}\right) = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 + j\sqrt{3}\right)$$

$$c_1 = \frac{1}{3}\left(-\frac{3}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{1}{2} + j\frac{1}{2\sqrt{3}} = c_1$$

$$c_2 = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{2} x[n] e^{-j2\cdot 2\cdot\frac{\pi}{3}n} = \frac{1}{3}\left(0\cdot e^0 + 1\cdot e^{-j\frac{4\pi}{3}\cdot 1} + 2\cdot e^{-j\frac{4\pi}{3}\cdot 2}\right)$$

$$c_2 = \frac{1}{3}\left(1\angle{120^\circ} + 2\angle{-120^\circ}\right) = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 - j\sqrt{3}\right)$$

$$c_2 = \frac{1}{3}\left(-\frac{3}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{1}{2} - j\frac{1}{2\sqrt{3}} = c_2$$

$$x[n] = \sum_{k=0}^{2} c_k e^{j\frac{2k\pi}{3}n}$$

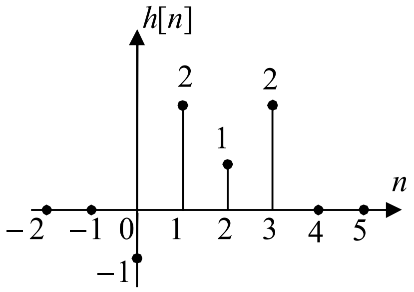
$$x[n] = 1 + \left(-\frac{1}{2} + j\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)e^{j\frac{2\pi}{3}n} + \left(-\frac{1}{2} - j\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)e^{j\frac{4\pi}{3}n}$$

$= e^{-j\frac{2\pi}{3}n}$

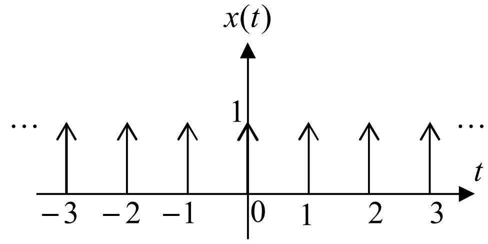
Bilgisayar Mühendislği Bölümü
SİNYALLER VE SİSTEMLER FİNAL SINAVI SORULARI
06.6.2013 Süre: 80 dakika

1. ve 4. sorular zorunludur. 20 puanlık sorulardan ise (2., 3., 5. ve 6.) istediğiniz ikisini yapmanız yeterli olup fazla yaparsanız yalnızca lehinize olan ikisi hesaba katılacaktır.

1) Doğrusal zamanla değişmez (DZD) bir sistemin birim darbe tepkisi aşağıdaki şekildeki $h[n]$ 'dir.
a) Sistem nedensel midir, kararlı mıdır, bellekli midir? DZD sistemlere özel açıklamasını belirterek cevaplayınız. **(9 puan)**
b) Sistemin birim basamak tepkisini çiziniz. **(8 puan)**
c) Sistemin girişi $x[n] = u[n+2] - u[n-5]$ ise çıkışını çiziniz. **(13 puan)**



2) Yanda verilen $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_0)$ sinyalini Fourier serisine açınız. ($T_0 = 1$) **(20 puan)**



3) Giriş(x)-çıkış(y) ilişkisi aşağıda verilen nedensel sistemin transfer fonksiyonunu **(6 puan)** ve birim darbe tepkisini **(14 puan)** bulunuz.

$$\ddot{y}(t) + 5\dot{y}(t) + 4y(t) = 3\dot{x}(t) + x(t)$$

4) Giriş(x)-çıkış(y) ilişkisi

$$y[n+2] - 0{,}6y[n+1] + 0{,}08y[n] = 5x[n+1] - x[n]$$

ile verilen nedensel sistemin transfer fonksiyonunu **(5 puan)**, birim darbe tepkisini **(10 puan)** ve $x[n] = (0{,}2)^n u[n]$ girişi için enerjisiz başlangıçlı çıkışını **(15 puan)** Z ve/veya Z^{-1} dönüşümleriyle bulunuz.

5) $N = 3$ ile **periyodik** bir $x[n]$ sinyalinin bir periyodu $x[0] = 1$, $x[1] = 1$ ve $x[2] = -2$ noktalarına sahiptir. Bu sinyali Fourier serisi olarak yazınız. **(20 puan)**

6) 1. soruda birim darbe tepkisi verilen DZD sistemin girişine $x[n] = n \cdot (u[n] - u[n-4])$ sinyali uygulanırsa çıkışın ne olacağını Z ve/veya Z^{-1} dönüşümleriyle bulunuz ve çiziniz. Önce $x[n]$ sinyalini çizmeniz tavsiye edilir. **(20 puan)**

BAŞARILAR … **Yard. Doç. Dr. Ata SEVİNÇ**

SİNYALLER VE SİSTEMLER FİNAL CEVAP ANAHTARI (1)

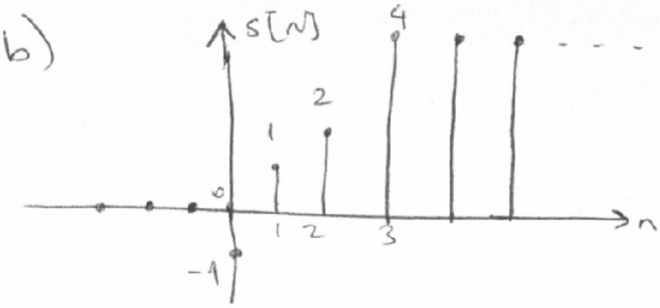
06-6-2013

1) a) Nedensel; çünkü $\forall n<0$ için $h[n]=0$

Kararlı; " $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| = 6 < \infty$

Bellekli; " $\exists n \neq 0 \ni h[n] \neq 0$

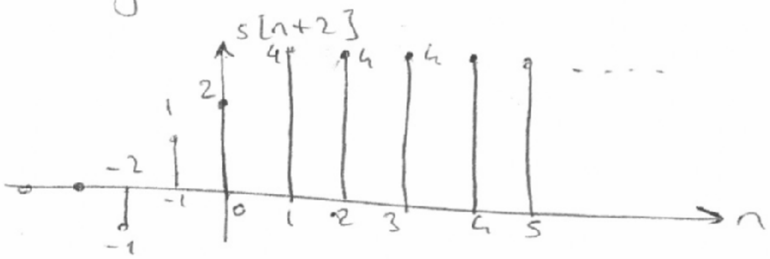
b)

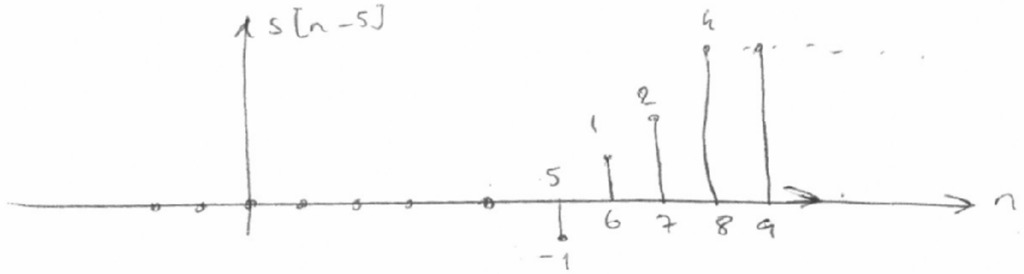


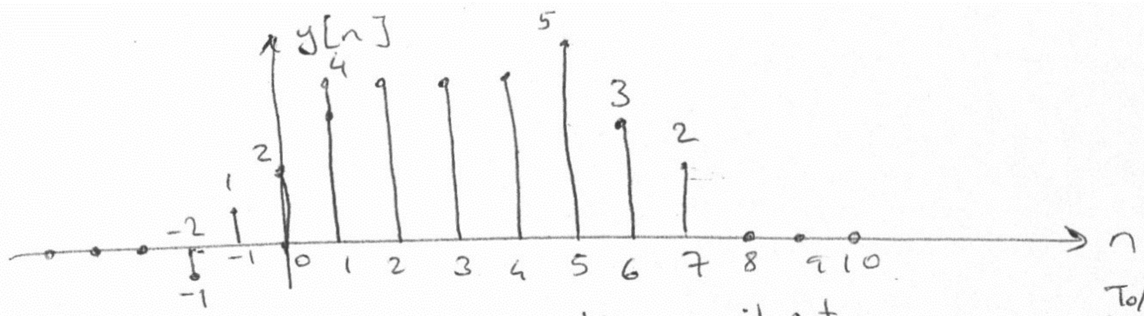
$$s[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} h[k]$$

c) $x[n] = u[n+2] - u[n-5]$

$\Rightarrow y[n] = s[n+2] - s[n-5]$







2) $\omega_0 = 2\pi / T_0 = 2\pi$, $\quad x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$; $\quad c_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$ $\searrow \delta(t)$

$$c_k = \frac{1}{T_0} \int_{-1/2}^{1/2} \delta(t) \cdot e^0 \cdot dt = \frac{1}{T_0} \int_{-1/2}^{1/2} \delta(t) dt = \frac{1}{T_0} = 1$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T_0} e^{jk\omega_0 t} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos k\omega_0 t$$

$a_0 = a_k = 2/T_0 = 2$

2

3) $H(\omega) = \dfrac{3j\omega + 1}{(j\omega)^2 + 5(j\omega) + 4} = \dfrac{3(j\omega)+1}{(j\omega+1)(j\omega+4)}$

$= \dfrac{A}{j\omega+1} + \dfrac{B}{j\omega+4}$ $\qquad A = \dfrac{3(-1)+1}{(-1+4)} = -\dfrac{2}{3}$

$B = \dfrac{3(-4)+1}{(-4+1)} = \dfrac{-11}{-3} = 11/3$

$$h(t) = \left(-\frac{2}{3} e^{-t} + \frac{11}{3} e^{-4t}\right) u(t)$$

4) $H(z) = \dfrac{5z-1}{z^2 - 0,6z + 0,08} = \dfrac{5(z-0,2)}{(z-0,2)(z-0,4)} = \dfrac{5}{z-0,4}$ $\qquad |z| > 0,4$

$h[n] = \mathcal{Z}^{-1}\left\{5z^{-1} \cdot \dfrac{z}{z-0,4}\right\} = 5(0,4)^{n-1} u[n-1]$

$X(z) = \dfrac{z}{z-0,2}$; $|z| > 0,2$ $\qquad Y(z) = \dfrac{5z}{(z-0,2)(z-0,4)}$; $\qquad |z| > 0,4$

$\dfrac{Y(z)}{z} = \dfrac{5}{(z-0,2)(z-0,4)} = \dfrac{a}{z-0,2} + \dfrac{b}{z-0,4}$

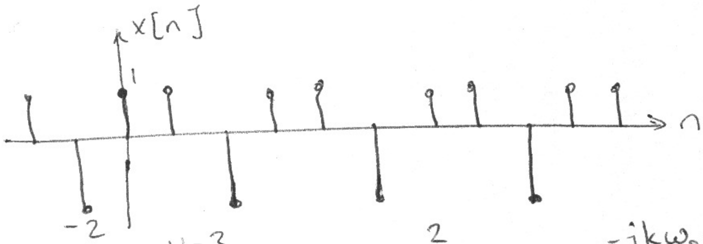
$a = \dfrac{5}{0,2-0,4} = -\dfrac{5}{0,2} = -25$ $\qquad b = \dfrac{5}{0,4-0,2} = 25$

$Y(z) = -25 \cdot \dfrac{z}{z-0,2} + 25 \cdot \dfrac{z}{z-0,4}$

$$y[n] = 25\left(0,4^n - 0,2^n\right) u[n] = \left[10 \times (0,4)^{n-1} - 5 \times (0,2)^{n-1}\right] u[n-1]$$

En sonda yazan diğer yolla bulanların sonucunun görünümüdür.

5)



$x[n] = \sum_{k=0}^{2} c_k e^{jk\omega_0 n}$

$= \sum_{k=-1}^{1} c_k e^{jk\omega_0 n}$

$\omega_0 = 2\pi/3 \rightarrow N=3$ $\qquad c_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{2} x[n] e^{-jk\omega_0 n}$

$c_0 = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{2} x[n] = \frac{1}{3}(1+1+2) = 4/3 = c_0$

$c_1 = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{2} x[n] e^{-j\omega_0 n} = \frac{1}{3}\sum_{n=-1}^{1} x[n] e^{-j\omega_0 n}$

$$c_1 = \frac{1}{3}\left(-2\,e^{j2\pi/3} + 1\cdot e^{j0} + 1\,e^{-j2\pi/3}\right)$$

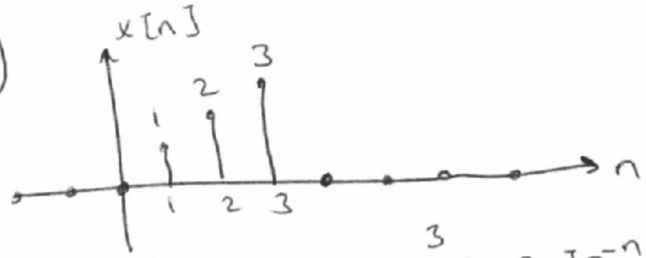
$$c_1 = \frac{1}{3}\left(-2\angle 120^\circ + 1 + 1\angle -120^\circ\right) = \frac{1}{3}\left(1 - j\sqrt{3} + 1 - \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$c_1 = \frac{1}{3}\left(\frac{3}{2} - j\frac{3\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{-j\pi/3} = 1\angle -60^\circ$$

$$c_{-1} = c_1^* = c_2 = 1\angle 60^\circ = e^{j\pi/3} = \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\boxed{x[n] = e^{+j\frac{\pi}{3}}\cdot e^{-j\frac{2\pi}{3}n} + \frac{4}{3} + e^{-j\frac{\pi}{3}}\cdot e^{j\frac{2\pi}{3}n}}$$

6)



$$y[n] = x[n] * h[n]$$

$$Y(z) = X(z)H(z)$$

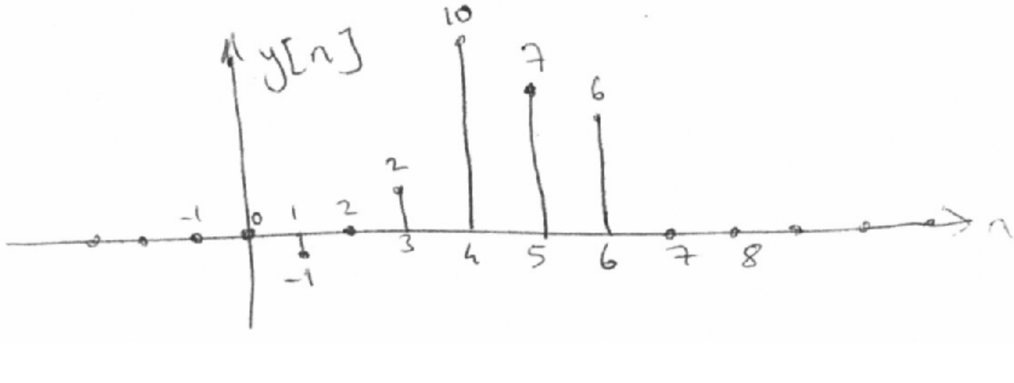
$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n} = \sum_{n=1}^{3} x[n]z^{-n} = z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3}$$

$$H(z) = \sum_{n=0}^{3} h[n]z^{-n} = -1 + 2z^{-1} + z^{-2} + 2z^{-3}$$

$$Y(z) = \left(-1 + 2z^{-1} + z^{-2} + 2z^{-3}\right)\left(z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3}\right)$$

$$Y(z) = \underbrace{-1}_{y[1]}\cdot z^{-1} + \underbrace{(-1\times 2 + 2\times 1)}_{y[2]=0} z^{-2} + \underbrace{(-1\times 3 + 2\times 2 + 1\times 1)}_{y[3]=2} z^{-3}$$

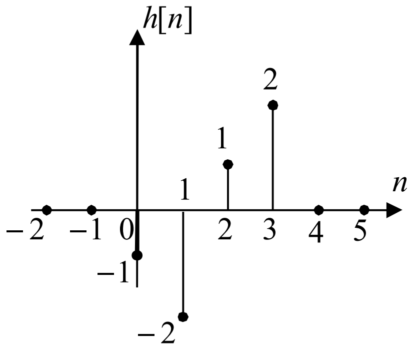
$$+ \underbrace{(2\times 3 + 1\times 2 + 2\times 1)}_{y[4]=10} z^{-4} + \underbrace{(1\times 3 + 2\times 2)}_{y[5]=7} z^{-5} + \underbrace{2\times 3}_{y[6]=6} z^{-6}$$



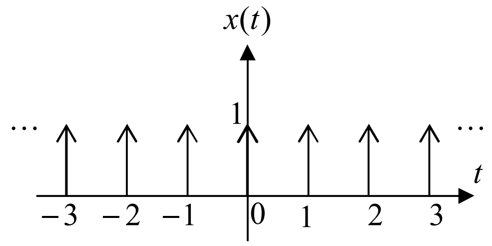
Bilgisayar Mühendislği Bölümü
SİNYALLER VE SİSTEMLER BÜTÜNLEME SINAVI SORULARI
20.6.2013 Süre: 80 dakika

1. ve 4. sorular zorunludur. 20 puanlık sorulardan ise (2., 3., 5. ve 6.) istediğiniz ikisini yapmanız yeterli olup fazla yaparsanız yalnızca lehinize olan ikisi hesaba katılacaktır.

1) Doğrusal zamanla değişmez (DZD) bir sistemin birim darbe tepkisi aşağıdaki şekildeki $h[n]$ 'dir.
a) Sistem nedensel midir, kararlı mıdır, bellekli midir? DZD sistemlere özel açıklamasını belirterek cevaplayınız. **(9 puan)**
b) Sistemin birim basamak tepkisini çiziniz. **(8 puan)**
c) Sistemin girişi $x[n] = -2u[n+2] + 2u[n-5]$ ise çıkışını çiziniz. **(13 puan)**



2) Yanda verilen $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_0)$ sinyalini Fourier serisine açınız. ($T_0 = 1$) **(20 puan)**



3) Giriş(x)-çıkış(y) ilişkisi aşağıda verilen nedensel sistemin transfer fonksiyonunu**(5 puan)**, birim darbe tepkisini **(10 puan)** ve $x(t) = 2e^{-3t}u(t)$ girişi için enerjisiz başlangıçlı çıkışını bulunuz **(15 puan)**.

$$\ddot{y}(t) + 6\dot{y}(t) + 8y(t) = \dot{x}(t) + 3x(t)$$

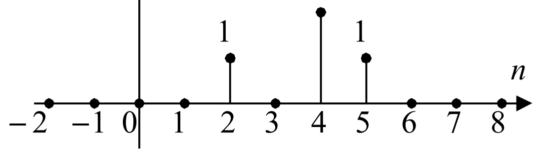
4) Giriş(x)-çıkış(y) ilişkisi

$$y[n+2] - 1{,}6y[n+1] + 0{,}63y[n] = x[n+1] - 2x[n]$$

ile verilen nedensel sistemin transfer fonksiyonunu **(6 puan)** ve birim darbe tepkisini **(14 puan)**.

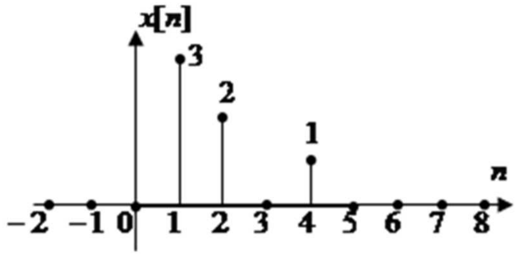
5) $N = 3$ ile **periyodik** bir $x[n]$ sinyalinin bir periyodu $x[1] = 1$, $x[2] = 2$ ve $x[3] = 3$ noktalarına sahiptir. Bu sinyali Fourier serisi olarak yazınız. **(20 puan)**

6) 1. soruda birim darbe tepkisi verilen DZD sistemin girişine yanda verilen $x(t)$ sinyali uygulanırsa çıkışın ne olacağını Z ve/veya Z^{-1} dönüşümleriyle bulunuz ve çiziniz. **(20 puan)**
(Başka bir yolla yaparsanız 10 puan üzerinden değerlendirilir.)



BAŞARILAR … **Yard. Doç. Dr. Ata SEVİNÇ**

SİNYALLER VE SİSTEMLER FİNAL SINAVI SORULARI
03.01.2014 Süre: 75 dakika



1) Cesur'un iğne korkusu doğrusal zamanla değişmez (DZD) bir sistem olarak şöyle modelleniyor: n gün numarası, günlere göre vurulan iğne sayıları giriş, günlere göre duyduğu korku değeri (eksi sayı olursa kurtulma rahatlığı) çıkış olarak tanımlanıyor. Yeterince önceden öğrendiği her bir iğne vurulmadan 2 gün önce 1 birim, 1 gün önce 2 birim, iğne günü 3 birim, iğne vurulduğunun ertesi günü -1 birim korku duyuyor. Cesur, doktorunun kendisine günlük iğne sayıları şekilde verilen $x[n]$ olan bir tedavi planı uygulayacağını yeterince önceden öğreniyor. Planın gerçekleşeceği varsayılıyor. Buna göre:

a) Sistemin birim darbe tepkisini çiziniz. **(8 puan)**

b) Sistem nedensel midir, kararlı mıdır, bellekli midir? DZD sistemlere özel gerekçesini belirterek cevaplayınız. **(9 puan)**

c) Sistem çıkışını Z ve/veya Z^{-1} dönüşümü kullanarak çiziniz. **(13 puan)** (Başka yolla olursa 7 puan)

2) (2A) ya da (2B) sorularından yalnız birisini cevaplayınız. **(25 puan)**

(2A) Bir devre elemanı üzerindeki voltaj tek frekanslı (saf) sinüzoidal, akım ise periyodik fakat harmonikli ise temel bileşeni dışındaki akım bileşenlerinin ortalama (aktif) güç hesabına etkisi olmadığını gösteriniz.

(2B) Yüksek ve düşük seviyeleri eşit genişlikte olan periyodik bir kare dalga çizerek, seviyelerini ve zamanlarını istediğiniz gibi belirleyerek bunu Fourier serisine açınız.

3) Giriş(x) – çıkış(y) ilişkisi aşağıdaki gibi verilen nedensel sistemin transfer fonksiyonunu **(5 puan)**, birim darbe tepkisini **(8 puan)** ve $x(t) = e^{-3t}u(t)$ girişi için enerjisiz başlangıçlı çıkışını bulunuz. **(12 puan)**

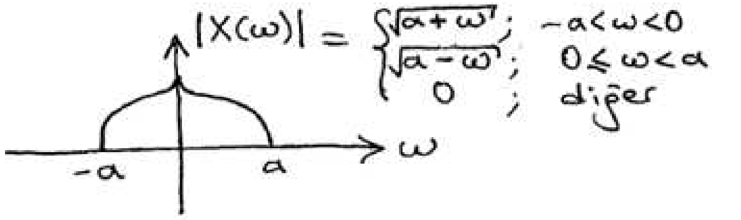
$$\dot{y}(t) + 2y(t) = 2\dot{x}(t) - x(t)$$

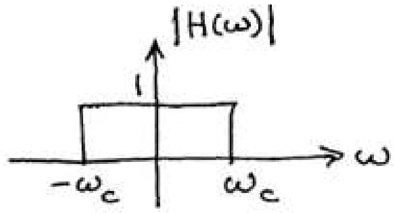
4) (4A) ya da (4B) sorularından yalnız birisini cevaplayınız.

(4A) Giriş(x) – çıkış(y) ilişkisi aşağıdaki gibi verilen nedensel sistemin transfer fonksiyonunu **(7 puan)** ve birim darbe tepkisini **(13 puan)** bulunuz.

$$y[n+2] - 3y[n+1] + 2y[n] = 3x[n+2] - x[n+1]$$

(4B) Kaydedilmiş bir ses sinyalinin ($x(t)$) genlik spektrumu $|X(\omega)|$ aşağıdaki gibidir. Bu sinyali kazanç spektrumu $|H(\omega)|$ aşağıdaki gibi olan ideal bir alçak geçiren süzgeçten geçirerek $y(t)$ sinyali elde edilecektir. $y(t)$ sinyalinin enerjisinin, $x(t)$ sinyalinin enerjisinin yarısı olması isteniyorsa alt kesim frekansı ω_c ne olmalıdır? **(20 puan)**

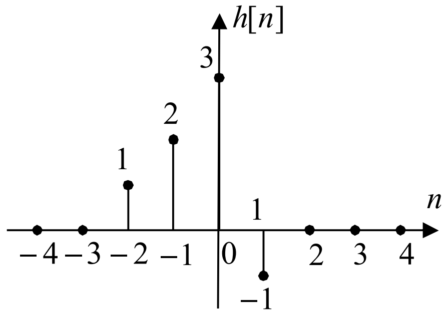




BAŞARILAR … **Yard. Doç. Dr. Ata SEVİNÇ**

SİNYALLER VE SİSTEMLER FİNAL SINAVI CEVAP ANAHTARI
03.01.2014

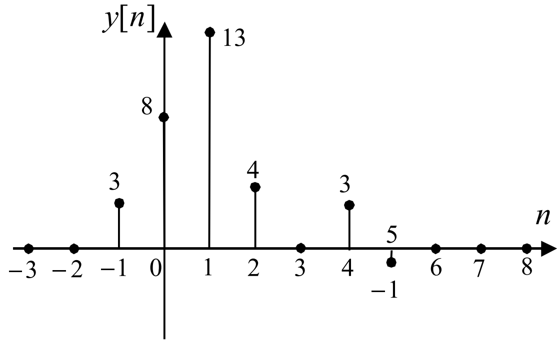
1) a) Bu sistem için birim darbe tepkisi demek, Cesur, sadece 0. günde bir adet iğne vurulacağını yeterince önceden öğrenirse günlere göre duyacağı korku fonksiyonu demektir ve şekildeki $h[n]$ gibidir.



b) Bazı $n<0$ için $h[n]\neq 0$ olduğu için sistem nedensel değildir.

$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|h[n]| = 1+2+3+|-1| = 7<\infty$ olduğu için sistem kararlıdır.

Bazı $n\neq 0$ için $h[n]\neq 0$ olduğu için sistem belleklidir.



c) Çıkış $y[n]=x[n]*h[n] \xrightarrow{Z} Y(z)=X(z)H(z)$

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]z^{-n}=3z^{-1}+2z^{-2}+z^{-4}$$

$$H(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}h[n]z^{-n}=z^{2}+2z+3-z^{-1}$$

$$Y(z)=\left(3z^{-1}+2z^{-2}+z^{-4}\right)\left(z^{2}+2z+3-z^{-1}\right)$$

$$Y(z)=(3\times1)z+(3\times2+2\times1)+(3\times3+2\times2)z^{-1}+(3\times(-1)+2\times3+1\times1)z^{-2}$$
$$+(2\times(-1)+1\times2)z^{-3}+(1\times3)z^{-4}+(1\times(-1))z^{-5}$$

$=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}y[n]z^{-n}$ biçiminde düşünerek katsayılardan $y[n]$ elde edilir ve yukarıdaki şekilde gösterildiği gibi bulunur.

2A) Periyodik olan akımın, voltaj ile aynı periyotlu (aynı frekanslı) olduğu durumla ilgileniyoruz. Akım periyodunun, voltaj periyodunun tam katı olabileceği istisnalarla ilgilenmiyoruz.

Voltaj tek frekanslı sinüzoidal ise $v(t)=\hat{V}\sin(\omega_0 t+\phi)=r_{-1}e^{-j\omega_0 t}+r_1 e^{j\omega_0 t}$ biçiminde yazılabilir ($\hat{V}$, ω_0, r_{-1} ve r_1 sabit). Aynı frekanstaki akım da karmaşık Fourier serisi olarak $i(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}c_k e^{jk\omega_0 t}$ biçiminde yazılabilir.

Anlık güç: $p(t)=v(t)i(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}r_{-1}c_k e^{j(k-1)\omega_0 t}+\sum_{k=-\infty}^{+\infty}r_1 c_k e^{j(k+1)\omega_0 t}$ olur. Diğer yandan $e^{jn\omega_0 t}$ $=\cos(n\omega_0 t)+j\sin(n\omega_0 t)$ olup, $n\neq 0$ ise hem reel hem de sanal kısmının $T_0=2\pi/\omega_0$ periyodu boyunca ortalaması sıfırdır; çünkü T_0 periyodu içinde ikisi de $|n|$ adet sinüzoidal tam dalgadan oluşurlar. Dolayısıyla $e^{jn\omega_0 t}$ teriminin ortalaması sıfırdır. Sadece $n=0$ için 1'e eşit olacağından ortalaması da 1 olur. Buna göre

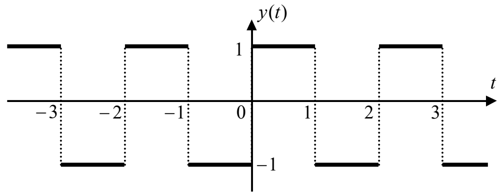
$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}r_{-1}c_k e^{j(k-1)\omega_0 t}$ kısmının ortalaması sadece $k=1$ teriminin katsayısı, yani $r_{-1}c_1$,

$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}r_1 c_k e^{j(k+1)\omega_0 t}$ kısmının ortalaması sadece $k=-1$ teriminin katsayısı, yani $r_1 c_{-1}$ olur.

Böylece $k\neq\mp1$ terimlerinin, yani *temel bileşen dışındaki akım harmoniklerinin ortalama güce katkısı olmadığı* anlaşılır.

Soruda sorulmamasına rağmen ortalama güç $P=r_{-1}c_1+r_1 c_{-1}$ bulunur.

2B) Kare dalgayı tek sinyal seçenlerin serileri SS-B-2012-CA'daki 3. soru çözümüne benzetilebilir:



$$a_0 = a_k = 0 \quad \forall k\,,\;\; b_k = \frac{2}{k\pi}\left(1-(-1)^k\right) = \begin{cases} 4/(k\pi) & k \text{ tekse} \\ 0 & k \text{ çiftse} \end{cases}$$

Yani $\boxed{y(t) = \frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin(\pi t)}{1} + \frac{\sin(3\pi t)}{3} + \frac{\sin(5\pi t)}{5} + \ldots\right)}$

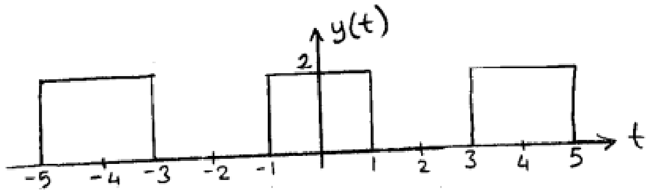
ya da karmaşık seri gösterimi istenirse

$$c_k = -c_{-k} = -j\frac{b_k}{2} = \begin{cases} -j2/k\pi & k \text{ tekse} \\ 0 & k \text{ çiftse} \end{cases}$$

Yani $\boxed{y(t) = \ldots + j\frac{2}{5\pi}e^{-j5\pi t} + j\frac{2}{3\pi}e^{-j3\pi t} + j\frac{2}{\pi}e^{-j\pi t} - j\frac{2}{\pi}e^{j\pi t} - j\frac{2}{3\pi}e^{j3\pi t} - j\frac{2}{5\pi}e^{j5\pi t} - \ldots}$

gibi.

Kare dalgayı çift sinyal seçenlerin serileri de SS-B-2007-CA'daki 4. soru çözümüne benzetilebilir:



$$a_k = \begin{cases} (-1)^{\frac{k-1}{2}}\, 4/k\pi & k \text{ tekse} \\ 0 & k \text{ çiftse } (k \neq 0) \end{cases}$$

$a_0 = 2$, ve $b_k = 0 \quad \forall k$. Yani

$$y(t) = 1 + \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{1}\cos\frac{\pi t}{2} - \frac{1}{3}\cos\frac{3\pi t}{2} + \frac{1}{5}\cos\frac{5\pi t}{2} - + \ldots\right)$$

ya da karmaşık seri gösterimi istenirse, $c_0 = 1$ ve

$$c_k = \begin{cases} 1 & k=0 \text{ ise} \\ 0 & k \text{ çiftse } (\neq 0) \\ (-1)^{\frac{k-1}{2}} \cdot \frac{2}{k\pi} & k \text{ tekse} \end{cases}$$

yani $y(t) = \ldots + \frac{2}{3\pi}e^{-j3\frac{\pi}{2}t} - \frac{2}{\pi}e^{-j\frac{\pi}{2}t} + 1 + \frac{2}{\pi}e^{j\frac{\pi}{2}t} - \frac{2}{3\pi}e^{j3\frac{\pi}{2}t} + - \ldots$ gibi.

Burada her iki kare dalganın da tepeden tepeye yüksekliği 2 birim alınmıştır.Kare dalganızın tepeden tepeye değeri farklıysa 2'ye oranı ile a_0 ve c_0 hariç tüm katsayıları çarparak kendi seri katsayılarınızı bulabilirsiniz. Ters fazdaysa ayrıca eksiyle de çarpılmalıdır. $c_0 = a_0/2$ değerini de dalganızın ortalamasına eşit almalısınız. Kare dalganızın fazı daha farklıysa bunlara benzetmeden ayrıca baştan hesap yapılmalıdır.

3) $(j\omega+2)Y(\omega) = (j2\omega-1)X(\omega) \quad \rightarrow \quad \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = H(\omega) = \frac{j2\omega-1}{j\omega+2}$ = Transfer fonksiyon.

Biraz düzenlenirse $H(\omega) = \frac{2(j\omega+2)-5}{j\omega+2} = 2 - \frac{5}{j\omega+2} \xrightarrow{F^{-1}} h(t) = 2\delta(t) - 5e^{-2t}u(t)$

Ayrıca, $x(t) = e^{-3t}u(t) \xrightarrow{F} X(\omega) = \frac{1}{j\omega+3}$

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega) = \frac{j2\omega-1}{(j\omega+2)}\cdot\frac{1}{(j\omega+3)} = \frac{A}{(j\omega+2)} + \frac{B}{(j\omega+3)}$$

$A = \frac{2\times(-2)-1}{-2+3} = -5$ ve $B = \frac{2\times(-3)-1}{-3+2} = 7$

F^{-1}

$Y(\omega) \longrightarrow \quad y(t) = -5e^{-2t}u(t) + 7e^{-3t}u(t)$

SS-F-2014-CA-3

4A) $y[n+2] - 3y[n+1] + 2y[n] = 3x[n+2] - x[n+1]$

$$\left(z^2 - 3z + 2\right)Y(z) = \left(3z^2 - z\right)X(z)$$

Transfer fonksiyon $\dfrac{Y(z)}{X(z)} = H(z) == \dfrac{3z^2 - z}{z^2 - 3z + 2} = \dfrac{z(3z-1)}{(z-1)(z-2)}$; $|z| > 2$ Biraz düzenlenirse

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{3z-1}{(z-1)(z-2)} = \frac{a}{z-1} + \frac{b}{z-2} \qquad a = \frac{3\times 1 - 1}{1-2} = -2 \qquad b = \frac{3\times 2 - 1}{2-1} = 5$$

$$H(z) == -2\frac{z}{z-1} + 5\frac{z}{z-2} \; ; \; |z| > 2 \xrightarrow{Z^{-1}} h[n] = -2\times 1^n u[n] + 5\times 2^n u[n] = \boxed{h[n] = \left(5\times 2^n - 2\right)u[n]}$$

<u>Diğer yol:</u> $H(z) = 3 + \dfrac{c}{z-1} + \dfrac{d}{z-2}$ $\qquad c = \dfrac{3\times 1^2 - 1}{1-2} = -2 \qquad d = \dfrac{3\times 2^2 - 2}{2-1} = 10$

$H(z) = 3 - 2z^{-1}\dfrac{z}{z-1} + 10z^{-1}\dfrac{z}{z-2}$; $|z| > 2$ Buradaki z^{-1}, zamanda 1 adım gerileticidir. Ters dönüşümü alınırsa:

$$h[n] = 3\delta[n] - 2\times 1^{n-1}u[n-1] + 10\times 2^{n-1}u[n-1] = \boxed{h[n] = 3\delta[n] + \left(10\times 2^{n-1} - 2\right)u[n-1]}$$

Dikkat edilirse bunun önceki bulunan $h[n]$ 'e eşit olduğu görülür.

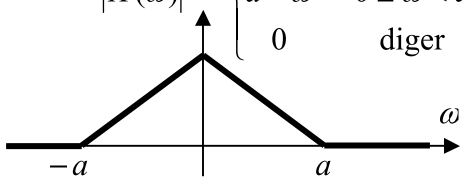
4B) SS-B-2012-CA'da aynısı çözülmüştür:

$x(t)$ sinyalinin enerjisi: $E_x = \int\limits_{t=-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$ (Sinyalin bir ses çıkış elemanı üzerine bırakacağı enerjinin bununla orantılı olduğu anlamına gelir. Akım veya gerilim sinyalinin direnç üzerinde bıraktığı enerji gibi.) Parseval eşitliğine göre:

$$\int\limits_{t=-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\omega=-\infty}^{+\infty} |X(\omega)|^2 d\omega = E_x \quad \text{ve}$$

$$\int\limits_{t=-\infty}^{+\infty} |y(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\omega=-\infty}^{+\infty} |Y(\omega)|^2 d\omega = E_y$$

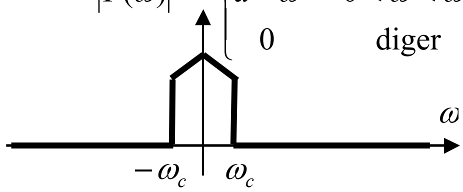
$$|X(\omega)|^2 = \begin{cases} a+\omega & -a < \omega < 0 \\ a-\omega & 0 \le \omega < a \\ 0 & \text{diger} \end{cases}$$



$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega) \;\rightarrow\; |Y(\omega)|^2 = |X(\omega)|^2 |H(\omega)|^2$

$|H(\omega)|^2$ grafiği $|H(\omega)|$'nınkiyle aynı olduğundan çarpımın grafiği yanda gösterildiği gibi olur.

$$|Y(\omega)|^2 = \begin{cases} a+\omega & -\omega_c < \omega < 0 \\ a-\omega & 0 < \omega < \omega_c \\ 0 & \text{diger} \end{cases}$$



$y(t)$ sinyalinin enerjisi:

$$E_y = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\omega=\omega_c}^{0} (a+\omega)d\omega + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\omega=0}^{\omega_c} (a-\omega)d\omega$$

$$= \frac{1}{4\pi}(a+\omega)^2\Big|_{-\omega_c}^{0} - \frac{1}{4\pi}(a-\omega)^2\Big|_{0}^{\omega_c} = \frac{a^2 - (a-\omega_c)^2 - (a-\omega_c)^2 - (-a^2)}{4\pi} = \frac{a^2 - (a-\omega_c)^2}{2\pi} = E_y$$

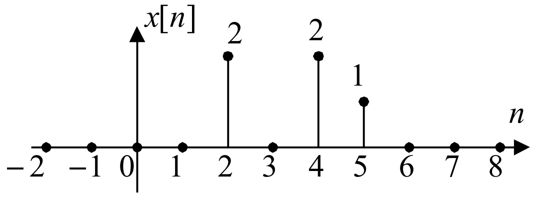
E_x integralinin bundan tek farkı ω_c yerine de a yazılması olduğu için $E_x = \dfrac{a^2}{2\pi}$ bulunur.

$$\rightarrow \quad \frac{E_y}{E_x} = \frac{1}{2} = \frac{a^2 - (a-\omega_c)^2}{a^2} \qquad \rightarrow \quad a^2 = 2a^2 - 2(a-\omega_c)^2 \qquad \rightarrow \quad 2(a-\omega_c)^2 = a^2$$

$$\rightarrow \quad a - \omega_c = a/\sqrt{2} \qquad \rightarrow \quad \boxed{\omega_c = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot a \approx 0{,}29a}$$

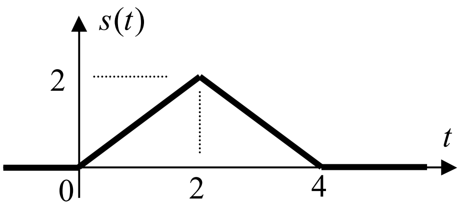
SİNYALLER VE SİSTEMLER BÜTÜNLEME SINAVI SORULARI
17.01.2014 Süre: 80 dakika

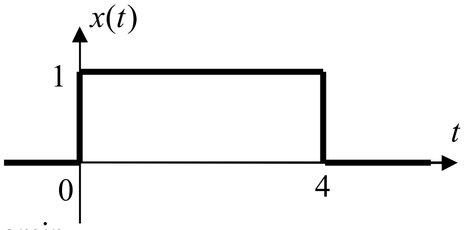
1) Bir öğrencinin ders çalışma sistemi şöyledir: Her bir derse çalışmaya sınavdan üç gün önce 2 saat ile başlıyor, iki gün önce de 2 saat, bir gün önce 3 saatle devam ediyor ve sınav günü 1 saat ile o derse çalışmayı sonlandırıyor. Günlere göre sınav sayıları giriş, günlük ders çalışma saat sayıları çıkış olarak tanımlanıyor ve öğrencinin sınav programının, bu sistemin doğrusal ve zamanla değişmez olmasını bozmayacak, günün mümkün olan saat sınırlarını zorlamayacak bir yoğunlukta olduğu ve aksamayacağı varsayılıyor.



a) Sistemin birim darbe tepkisini çiziniz. **(6 puan)**
b) Varsayımlar altında sistem nedensel midir, kararlı mıdır? **(2+2=4 puan)** Genel ifadelerle değil, bu sisteme özel gerekçelerini belirterek yazınız.
c) Öğrencinin günlere (n) göre sınav sayıları ($x[n]$) grafikteki gibiyse bu öğrencinin günlere göre ders çalışma saat sayılarını Z ve/veya Z^{-1} dönüşümleriyle bulunuz ve grafikle gösteriniz. **(10 puan)** (Başka yolla yaparsanız 5 puan)

2)





Birim basamak tepkisi yukarıdaki $s(t)$ olan (DZD) sistemin

a) Girişine şekildeki $x(t)$ uygulanırsa alınacak çıkış sinyalini ($y(t)$) çiziniz. **(12 puan)**
b) Birim darbe tepkisini ($h(t)$) çiziniz. **(8 puan)**

Her iki çizimde de özel noktaların yeri belli olmalıdır.

3) Fourier serisi aşağıdaki özelliklerin hepsini birden sağlayan periyodik bir sinyal çiziniz veya tanımlayınız (Çizerseniz özel noktalarını anlaşılır biçimde belirtiniz ve en az 2 tam periyodunu çiziniz). Sonra da bu sinyalin ortalama değerini integralli formülüyle hesaplayınız. (Seri sonlu sayıda terimden ibaret olmamalıdır.) **(20 puan)**

_ Sinyalin dc bileşen dışında çift harmoniği olmasın.
_ Serisinde hem sinüslü hem kosinüslü terimler olsun.
_ DC bileşeni 2 olsun.

4) Giriş(x)-çıkış(y) ilişkisi aşağıda verilen nedensel sistemlerin her ikisinin de transfer fonksiyonlarını **(3+3 puan)** ve birim darbe tepkilerini **(7+7 puan)** bulunuz.

a) $\dot{y}(t) + 5y(t) = 3\dot{x}(t) + x(t)$

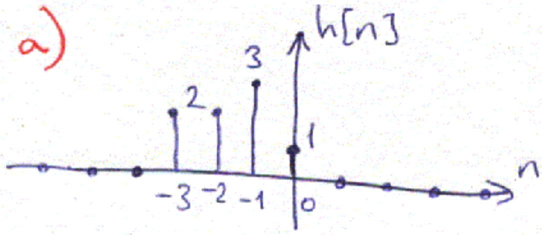
b) $y[n+2] - 0{,}5y[n+1] + 0{,}06y[n] = 2x[n+1]$

5) Alçak geçiren doğrusal zamanla değişmez bir süzgecin kataloğunda, 100MHz'e kadar frekanslardaki girişleri, birim kazançlı ve ideal olarak çıkışa geçirdiği, daha yüksek frekanslarda ise frekans yükseldikçe kazancın düştüğü belirtilmektedir. Bu süzgecin girişine 30MHz'lik ideal kare dalga uygulanırsa çıkış kabaca nasıl olur? Giriş ve çıkışı aynı eksenlerde çizerek gösteriniz. Köşelerde bozulma olup olmadığını, katalog açıklamasıyla ilişkilendirerek nedeniyle açıklayınız. **(20 puan)**

BAŞARILAR … **Yard. Doç. Dr. Ata SEVİNÇ**

SS-B-2014-CA

1) a)



b) Nedensel değil, çünkü bazı $n<0$ için $h[n]\neq 0$

Kararlı, çünkü $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| = 8 < \infty$

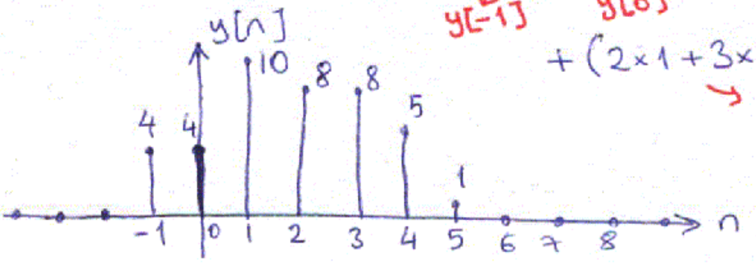
c) $y[n] = x[n] * h[n]$
$Y(z) = X(z)H(z)$

$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n} = 2z^{-2} + 2z^{-4} + z^{-5}$

$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n] z^{-n} = 2z^3 + 2z^2 + 3z + 1$

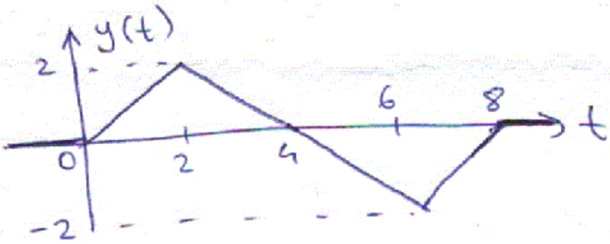
$\Rightarrow Y(z) = X(z)H(z) = \underbrace{4z}_{y[-1]} + \underbrace{4}_{y[0]} + \underbrace{(2\times2+3\times2)z^{-1}}_{y[1]=10} + \underbrace{(2\times1+2\times2+1\times2)z^{-2}}_{y[2]=8}$

$+ \underbrace{(2\times1+3\times2)z^{-3}}_{y[3]=8} + \underbrace{(3\times1+1\times2)z^{-4}}_{y[4]=5} + \underbrace{1\times z^{-5}}_{y[5]}$

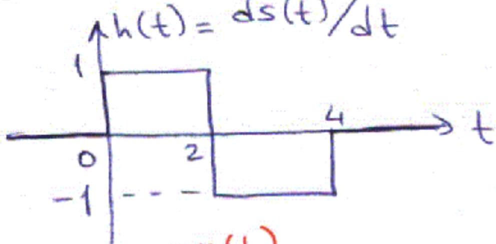


2) a) $x(t) = u(t) - u(t-4)$

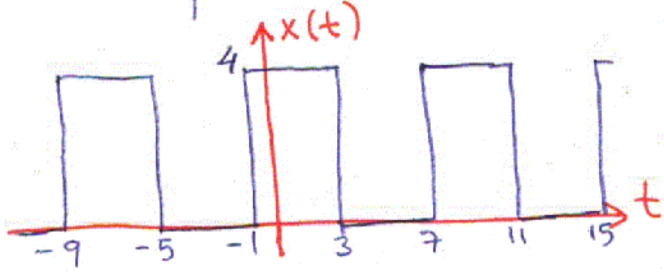
$\Rightarrow y(t) = s(t) - s(t-4) \Rightarrow$



b)



3)



Rasgele bir fan ile çizildiği için ne tek, ne çift.
Yani hem sin hem cos var.
Eşit genişlikli, periyot $T_0 = 8$
Yarısında sıfır, yarısında 4.
Yani ortalama = 2
$x(t)-2$ 'nin ise bir yarı periyodu, diğer yarısının negatifi olduğundan
$x(t)-2$ tek harmonik simetrili.
Yani $x(t)$ 'nin de bileşeni=2 dışında tek harmoniği yok.

Ortalama değer $= c_0 = \frac{a_0}{2}$ şöyle de bulunabilir:

$$c_0 = \frac{1}{\underbrace{8}_{T_0}} \int_{-1}^{7} x(t)\,dt = \frac{1}{8}\int_{-1}^{3} 4\,dt = \left.\frac{4t}{8}\right|_{-1}^{3}$$

$$= \frac{12}{8} + \frac{4}{8} = \boxed{2 = c_0 = \frac{a_0}{2}}$$

4) a) Transfer fonksiyon:

$$H(\omega) = \frac{3(j\omega)+1}{(j\omega)+5} = 3\,\frac{j\omega+5}{j\omega+5} - 14\cdot\frac{1}{j\omega+5}$$

$$H(\omega) = 3 - 14\cdot\frac{1}{j\omega+5} \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} \boxed{h(t) = 3\delta(t) - 14\,e^{-5t}\,u(t)}$$

→ birim darbe tepkisi

b) Transfer fonksiyon:

$$H(z) = \frac{2z}{z^2-0{,}5z+0{,}06} \rightarrow \frac{H(z)}{z} = \frac{2}{(z-0{,}2)(z-0{,}3)}$$

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{A}{z-0{,}2} + \frac{B}{z-0{,}3}$$

$$A = \left.\frac{2}{z-0{,}3}\right|_{z=0{,}2} = -20$$

$$B = \left.\frac{2}{z-0{,}2}\right|_{z=0{,}3} = 20$$

$$H(z) = -20\,\frac{z}{z-0{,}2} + 20\,\frac{z}{z-0{,}3}$$

$\mathcal{Z}^{-1}\downarrow$

$$h[n] = -20\times(0{,}2)^n u[n] + 20\times(0{,}3)^n u[n] = 20\left(0{,}3^n - 0{,}2^n\right)u[n]$$

Diğer bir ifadeyle de

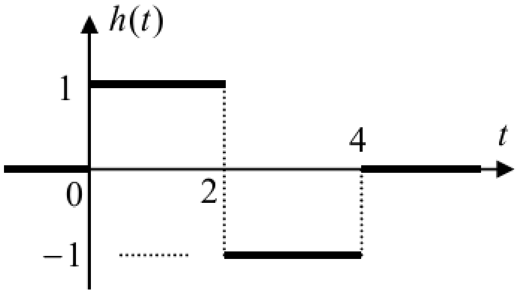
$$h[n] = \left[6\times(0{,}3)^{n-1} - 4\times(0{,}2)^{n-1}\right]\cdot u[n-1]$$

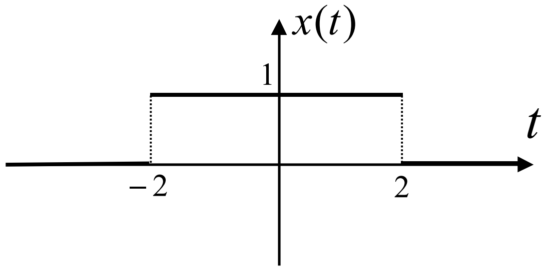
5) Kataloglardaki frekans değerleri sinüzoidal sinyaller içindir. 30MHz'lik kare dalganın 3. harmoniğe (90MHz) kadarki sinüzoidal bileşenleri ideal filtreden aynen geçer. Daha yüksek numaralı harmonikler, ki bunlar zaman uzayındaki hızlı değişimlere karşılık gelir, 100MHz'den daha yüksek frekanslı (30MHz'in 3 'ten büyük katları) oldukları için zayıflayarak çıkışa ulaşırlar. Yani giriş sinyalinde köşelerdeki ani değişimler, çıkışta yumuşamış (değişimi ani olmayan) olarak görülür. Bu konuyu Fourier konularına geçtiğimiz ilk hafta anlattım ve çok öncesinden itibaren o dersin kaçırılmaması gerektiğini ısrarla söylemiştim.

Bilgisayar Mühendislği Bölümü
SİNYALLER VE SİSTEMLER FİNAL SINAVI SORULARI
02 Haziran 2014 Süre: 80 dakika

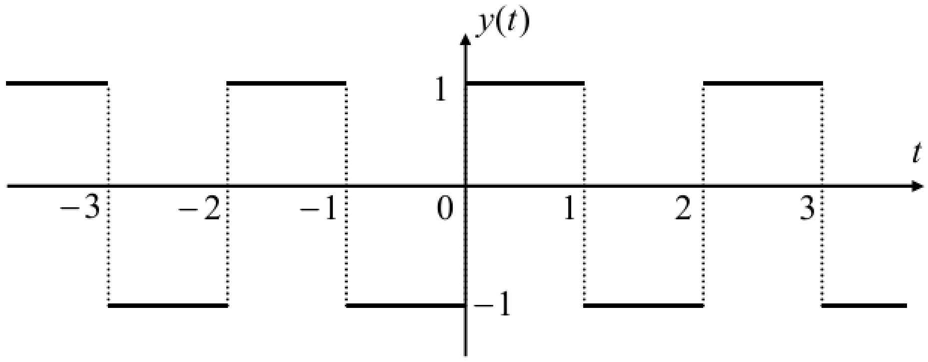
1. ve 4. sorular zorunludur. 20 puanlık sorulardan ise (2., 3. ve 5.) istediğiniz ikisini yapmanız yeterli olup fazla yaparsanız yalnızca lehinize olan ikisi hesaba katılacaktır.

1) Doğrusal zamanla değişmez (DZD) bir sistemin birim <u>darbe</u> tepkisi aşağıda soldaki şekildeki $h(t)$ 'dir.
a) Sistem nedensel midir, kararlı mıdır, bellekli midir? DZD sistemlere özel açıklamasını belirterek cevaplayınız. **(9 puan)**
b) Sistemin birim basamak tepkisini ($s(t)$) çiziniz. **(8 puan)**
c) Sistemin girişi aşağıda sağdaki şekildeki $x(t)$ ise çıkışını çiziniz. **(13 puan)**





2) Aşağıda verilen $T_0 = 2$ ile periyodik $y(t)$ sinyalini Fourier serisine açınız. **(20 puan)**



3) Giriş(x)-çıkış(y) ilişkisi aşağıda verilen nedensel sistemin transfer fonksiyonunu **(6 puan)** ve birim darbe tepkisini **(14 puan)** bulunuz.

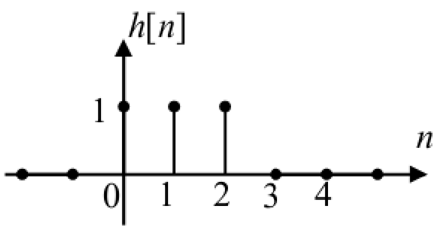
$$\ddot{y}(t) + 4\dot{y}(t) + 3y(t) = 3\dot{x}(t) + x(t)$$

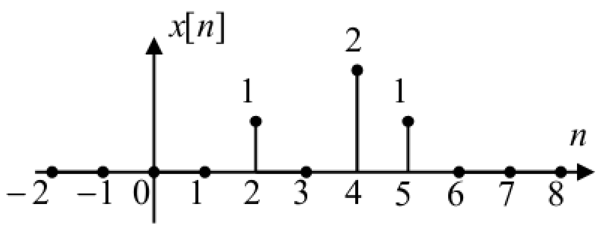
4) Giriş(x)-çıkış(y) ilişkisi

$$y[n+2] - y[n+1] + 0{,}16y[n] = 2x[n+1] - x[n]$$

ile verilen nedensel sistemin transfer fonksiyonunu **(5 puan)**, birim darbe tepkisini **(10 puan)** ve $x[n] = (0{,}5)^n u[n]$ girişi için enerjisiz başlangıçlı çıkışını **(15 puan)** Z ve/veya Z^{-1} dönüşümleriyle bulunuz.

5) Birim darbe tepkisi $h[n]$ ile girişi $x[n]$ aşağıda verilen DZD sistemin çıkışı $y[n]$ 'dir. $h[n]$, $x[n]$ ve $y[n]$ 'in Z dönüşümlerini bulunuz ve $y[n]$ 'i çiziniz. **(20 puan)**





BAŞARILAR … **Yard. Doç. Dr. Ata SEVİNÇ**

Bilgisayar Mühendisliği Bölümü

SİNYALLER VE SİSTEMLER FİNAL CEVAP ANAHTARI

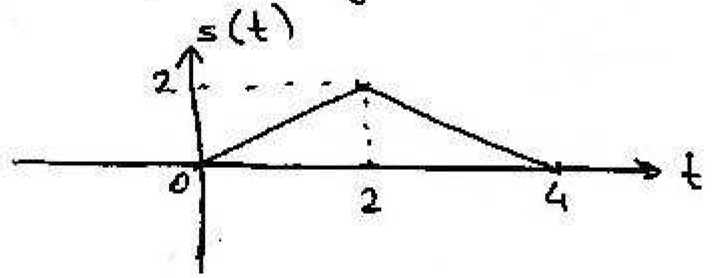
02 Haziran 2014

1) a) $\forall t<0$ için $h(t)=0$ olduğundan nedenseldir.

$\int_{-\infty}^{+\infty}|h(t)|dt = \int_0^4 1\cdot dt < \infty$ olduğundan kararlıdır.

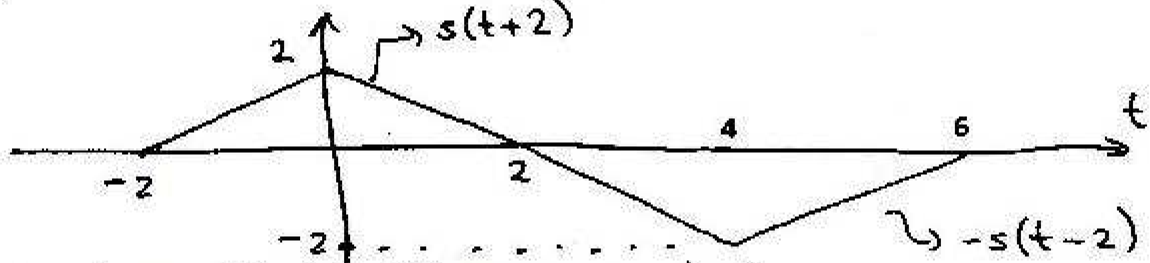
Bazı $t\neq 0$ için $h(t)\neq 0$ olduğundan belleklidir.

b) $s(t)=\int_{\tau=-\infty}^{t} h(\tau)d\tau$



c) $x(t)=u(t+2)-u(t-2)$, dolayısıyla

$y(t) = s(t+2)-s(t-2)$



parçalar çakışmadığı için iki parçanın toplamı yanyana çizimiyle aynı şekilde

2) $T_0=2 \rightarrow \omega_0 = 2\pi/T_0 = \pi$

Sinyal tek olduğu için $y(t)=\sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin k\pi t$

$b_k = \frac{2}{T_0}\int_{T_0} y(t)\sin k\pi t\,dt = \frac{4}{T_0}\int_0^{T_0/2} y(t)\sin k\pi t\,dt = 2\int_0^1 1\cdot \sin k\pi t\,dt$

$b_k = \frac{-2}{k\pi}\cos k\pi t\Big|_0^1 = \frac{2}{k\pi}(\cos 0 - \cos k\pi) = \frac{2}{k\pi}(1-(-1)^k)$

$b_k = \begin{cases} 0 & k \text{ çiftse} \\ \frac{4}{k\pi} & k \text{ tekse} \end{cases}$

$y(t) = \frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin\pi t}{1} + \frac{\sin 3\pi t}{3} + \frac{\sin 5\pi t}{5} + \cdots\right)$

Karmaşık seri katsayıları ise:

$$\left.\begin{array}{l} c_k = (a_k - j b_k)/2 \\ c_{-k} = (a_k + j b_k)/2 \end{array}\right\} \quad k>0$$

$a_k = 0$
(cos terimleri ve sabit yok)

Dolayısıyla $c_k = \begin{cases} 0 & k \text{ çiftse} \\ \dfrac{-j2}{k\pi} & k \text{ tekse (hem − hem + için aynı)} \end{cases}$

çünkü $k<0$ ise $k>0$ 'dakinin eksisi oluyor.

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{jk\pi t}$$

$$y(t) = \frac{j2}{\pi}\left\{ \cdots + \frac{e^{-j3\pi t}}{3} + \frac{e^{-j\pi t}}{1} - \frac{e^{j\pi t}}{1} - \frac{e^{j3\pi t}}{3} - \cdots \right\}$$

3) $\left[(j\omega)^2 + 4(j\omega) + 3\right] Y(\omega) = \left[3(j\omega) + 1\right] X(\omega)$

$$\frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = H(\omega) = \frac{3(j\omega)+1}{(j\omega)^2 + 4(j\omega)+3} = \frac{3(j\omega)+1}{(j\omega+3)(j\omega+1)}$$

↳ Transfer fonksiyon

$$H(\omega) = \frac{A_1}{j\omega+1} + \frac{A_2}{j\omega+3} \qquad A_1 = \left.\frac{3(j\omega)+1}{j\omega+3}\right|_{j\omega \leftarrow -1}$$

$$A_1 = \frac{-3+1}{-1+3} = -1 \qquad A_2 = \left.\frac{3(j\omega)+1}{j\omega+1}\right|_{j\omega \leftarrow -3} = \frac{-9+1}{-3+1} = 4$$

$$h(t) = \left[-e^{-t} + 4e^{-3t}\right] u(t)$$

4) $\left[z^2 - z + 0{,}16\right] Y(z) = \left[2z - 1\right] X(z)$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = H(z) = \frac{2z-1}{z^2 - z + 0{,}16} = \frac{2z-1}{(z-0{,}2)(z-0{,}8)}$$

: Transfer fonksiyon

$$H(z) = \frac{A}{z-0{,}2} + \frac{B}{z-0{,}8} \quad ; \quad |z| > 0{,}8$$

↳ nedensellikten

4) (Devamı)

$$A = \left.\frac{2z-1}{z-0,8}\right|_{z=0,2} = \frac{0,4-1}{0,2-0,8} = 1$$

$$B = \left.\frac{2z-1}{z-0,2}\right|_{z=0,8} = \frac{1,6-1}{0,8-0,2} = 1$$

$$H(z) = \underbrace{z^{-1}\frac{z}{z-0,2}}_{\mathcal{Z}\{0,2^n u[n]\}} + \underbrace{z^{-1}\frac{z}{z-0,8}}_{\mathcal{Z}\{0,8^n u[n]\}} \quad ; \quad |z|>0,8$$

z^{-1} çarpanı zamanda 1 adım geciktirir.

$$h[n] = \left[0,2^{n-1} + 0,8^{n-1}\right]u[n-1]$$

$$x[n] = 0,5^n u[n] \xrightarrow{\mathcal{Z}} X(z) = \frac{z}{z-0,5} \; ; \; |z|>0,5$$

$$Y(z) = H(z)X(z) = \frac{2z-1}{(z-0,2)(z-0,8)} \cdot \frac{z}{(z-0,5)} \quad ; \quad |z|>0,8$$

$$Y(z) = \frac{2z}{(z-0,2)(z-0,8)} \qquad \frac{Y(z)}{z} = \frac{a_1}{z-0,2} + \frac{a_2}{z-0,8}$$

$$a_1 = \left.\frac{2}{z-0,8}\right|_{z=0,2} = \frac{2}{0,2-0,8} = -\frac{10}{3}$$

$$a_2 = \left.\frac{2}{z-0,2}\right|_{z=0,8} = \frac{2}{0,8-0,2} = \frac{10}{3}$$

$$Y(z) = \frac{10}{3}\left(\frac{z}{z-0,8} - \frac{z}{z-0,2}\right)$$

$$y[n] = \frac{10}{3}\left[0,8^n - 0,2^n\right]u[n]$$

→ n=0'da sıfır olduğu için şöyle de yazılabilir

$$= \left[\frac{8}{3}\,0,8^{n-1} - \frac{2}{3}\,0,2^{n-1}\right]u[n-1]$$

5) $H(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{2} \underbrace{h[n]}_{1} z^{-n}$

$H(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2}$

$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n} = \sum_{n=2}^{5} x[n] z^{-n}$

$X(z) = z^{-2} + 2z^{-4} + z^{-5}$

$y[n] = x[n] * h[n] \xrightarrow{\mathcal{Z}} Y(z) = X(z)H(z)$

$Y(z) = (1 + z^{-1} + z^{-2})(z^{-2} + 2z^{-4} + z^{-5})$

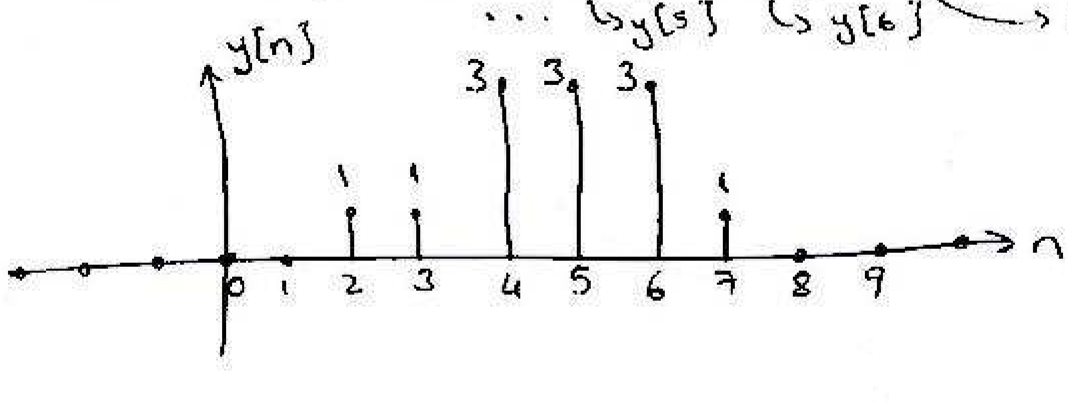
Konvolüsyonun çarpmaya benzer yolu polinom çarpımlarında da uygulanabilir.

$$\begin{array}{rrrrrrl}
 & & 1 & 0 & 2 & 1 & \rightarrow z^{-5}\text{'in katsayısı} \\
 & & & 1 & 1 & 1 & \rightarrow z^{-2}\text{'nin katsayısı} \\
\times & & & & & & \\
\hline
 & & 1 & 0 & 2 & 1 & \\
 & 1 & 0 & 2 & 1 & & \\
1 & 0 & 2 & 1 & & & \\
+ & & & & & & \\
\hline
1 & 1 & 3 & 3 & 3 & 1 & \rightarrow z^{-5-2} = z^{-7}\text{, katsayısı}
\end{array}$$

↳ z^{-2}'nin katsayısı bulunur.

$Y(z) = z^{-2} + z^{-3} + 3z^{-4} + 3z^{-5} + 3z^{-6} + z^{-7}$

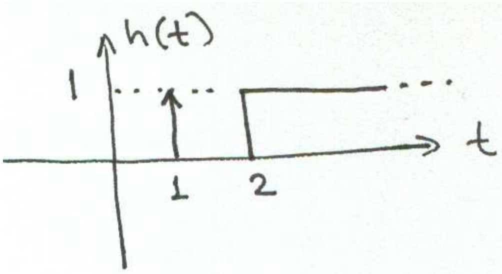
... ↳ $y[5]$ ↳ $y[6]$ → $y[7] = 1$

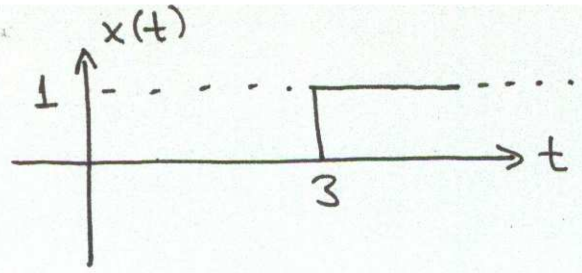


Bilgisayar Mühendislği Bölümü
SİNYALLER VE SİSTEMLER BÜTÜNLEME SINAVI SORULARI
16 Haziran 2014 Süre: 80 dakika

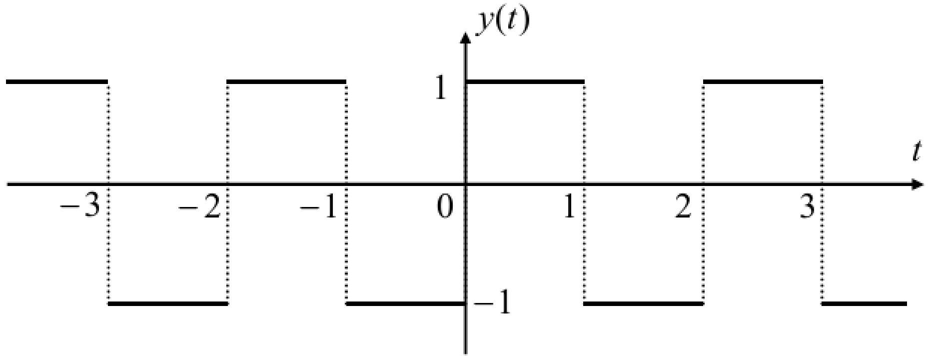
1. ve 4. sorular zorunludur. 20 puanlık sorulardan ise (2., 3. ve 5.) istediğiniz ikisini yapmanız yeterli olup fazla yaparsanız yalnızca lehinize olan ikisi hesaba katılacaktır.

1) Doğrusal zamanla değişmez (DZD) bir sistemin birim darbe tepkisi aşağıda soldaki şekildeki $h(t)$ 'dir.
a) Sistem nedensel midir, kararlı mıdır, bellekli midir? DZD sistemlere özel açıklamasını belirterek cevaplayınız. **(9 puan)**
b) Sistemin birim basamak tepkisini ($s(t)$) çiziniz. **(8 puan)**
c) Sistemin girişi aşağıda sağdaki şekildeki $x(t)$ ise çıkışını çiziniz. **(13 puan)**





2) Aşağıda verilen $T_0 = 2$ ile periyodik $y(t)$ sinyalini Fourier serisine açınız. **(20 puan)**



3) Giriş(x)-çıkış(y) ilişkisi aşağıda verilen nedensel sistemin transfer fonksiyonunu **(6 puan)** ve birim darbe tepkisini **(14 puan)** bulunuz.

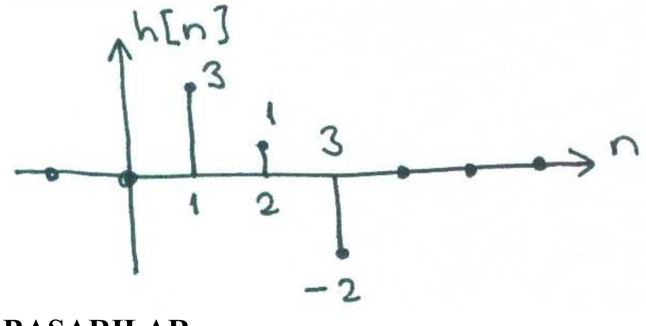
$$\ddot{y}(t) + 7\dot{y}(t) + 10y(t) = 2\dot{x}(t) + x(t)$$

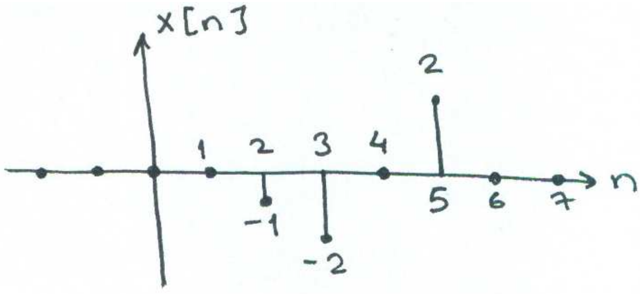
4) Giriş(x)-çıkış(y) ilişkisi

$$y[n+2] - 0{,}9y[n+1] + 0{,}18y[n] = 3x[n+1] - x[n]$$

ile verilen nedensel sistemin transfer fonksiyonunu **(5 puan)**, birim darbe tepkisini **(10 puan)** ve $x[n] = (1/3)^n u[n]$ girişi için enerjisiz başlangıçlı çıkışını **(15 puan)** Z ve/veya Z^{-1} dönüşümleriyle bulunuz.

5) Birim darbe tepkisi $h[n]$ ile girişi $x[n]$ aşağıda verilen DZD sistemin çıkışı $y[n]$ 'dir. $h[n]$, $x[n]$ ve $y[n]$ 'in Z dönüşümlerini bulunuz ve $y[n]$ 'i çiziniz. **(20 puan)**



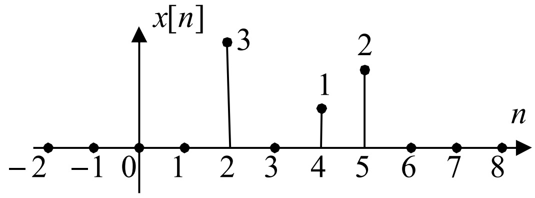


BAŞARILAR … **Yard. Doç. Dr. Ata SEVİNÇ**

SİNYALLER VE SİSTEMLER FİNAL SINAVI SORULARI
08.01.2015 Süre: 75 dakika

İşlem yaptığınız soruların toplam tam puanı 100'den fazla ise aldığınız puanlar toplamı, bu soruların tam puan toplamının yüzde birine bölünecektir. Meselâ 110 puanlık soruya 88 puanlık cevap yaptıysanız 1,1'e bölünerek 80'e dönüştürülecektir. Ancak bu şekilde hesaba katılması aleyhinize olacak kadar düşük puanlı cevaplarınız yok sayılacaktır.

1) Bir öğrencinin ders çalışma sistemi şöyledir: Her bir derse çalışmaya sınavdan üç gün önce 1 saat ile başlıyor, iki gün önce 2 saat, bir gün önce 4 saatle devam ediyor ve sınav günü 1 saat ile o derse çalışmayı sonlandırıyor. Günlere göre sınav sayıları giriş, günlük ders çalışma saat sayıları çıkış ($y[n]$) olarak tanımlanıyor ve öğrencinin sınav programının, bu sistemin doğrusal ve zamanla değişmez olmasını bozmayacak, günün mümkün olan saat sınırlarını zorlamayacak bir yoğunlukta olduğu ve aksamayacağı varsayılıyor.



a) Sistemin birim darbe tepkisini ($h[n]$) çiziniz. **(6 puan)**

b) Varsayımlar altında sistem nedensel midir, kararlı mıdır? **(2+2=4 puan)** Genel ifadelerle değil, bu sisteme özel gerekçelerini belirterek yazınız.

c) Öğrencinin günlere (n) göre sınav sayıları ($x[n]$) grafikteki gibidir. Önce $X(z)$, $H(z)$ ve $Y(z)$ 'yi bulup sonra $y[n]$ 'i grafikle gösteriniz. **(20 puan)**
(a şıkkındaki $h[n]$'i bulamayanlar ya da yanlış bulanlar, en az 4 noktası sıfırdan farklı olan ve bu 4 değerin hepsi aynı olmayan keyfi bir $h[n]$ çizdikten sonra bununla c şıkkını çözebilirler; fakat bu durumda c şıkkı 17 puanlık sayılır ve tüm soru yine 30 puanlık seçmeli soru gibi paydada işlem görür.)

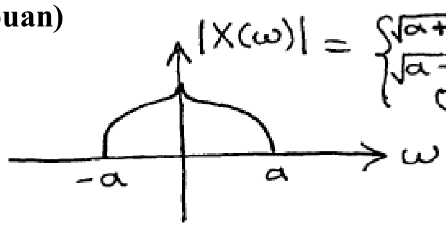
2) Yüksek ve düşük seviyeleri eşit genişlikte olan, sürekli zamanlı, periyodik bir kare dalga çizerek, seviyelerini ve zamanlarını istediğiniz gibi belirleyip yazınız (yapabildiğiniz türde simetrik yapabilirsiniz). Bu sinyalin Fourier serisinde sıfır olan bütün katsayıları belirtiniz. (Seriye açmanız beklenmiyor, simetri özelliklerinden faydalanarak belirtiniz. Ancak hangi tür seriden ve hangi katsayılardan bahsettiğinizin anlaşılır olması için Fourier serisinin istediğiniz bir türünün genel ifadesini de yazınız.) **(10 puan)**

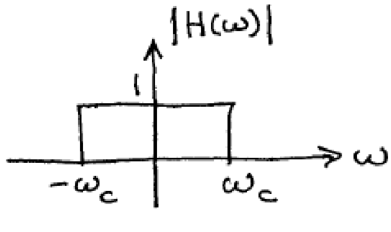
3) Giriş(x) – çıkış(y) ilişkisi aşağıdaki gibi verilen nedensel sistemin transfer fonksiyonunu, birim darbe tepkisini ve $x(t) = e^{-3t}u(t)$ girişi için enerjisiz başlangıçlı çıkışını bulunuz. **(5 + 8 + 12 = 25 puan)**

$$\dot{y}(t) + 5y(t) = \dot{x}(t) - 2x(t)$$

4) Kaydedilmiş bir ses sinyalinin ($x(t)$) genlik spektrumu $|X(\omega)|$ aşağıdaki gibidir. Bu sinyali kazanç spektrumu $|H(\omega)|$ aşağıdaki gibi olan ideal bir alçak geçiren süzgeçten geçirerek $y(t)$ sinyali elde edilecektir. $y(t)$ sinyalinin enerjisinin, $x(t)$ sinyalinin enerjisinin yarısı olması isteniyorsa alt kesim frekansı ω_c ne olmalıdır? **(25 puan)**

$$|X(\omega)| = \begin{cases} \sqrt{a+\omega}\,; & -a<\omega<0 \\ \sqrt{a-\omega}\,; & 0\leq\omega<a \\ 0\,; & \text{diğer} \end{cases}$$





5) Giriş(x) – çıkış(y) ilişkisi aşağıdaki gibi verilen nedensel sistemin transfer fonksiyonunu ve birim darbe tepkisini bulunuz. **(7 + 13 = 20 puan)**

$$y[n+2] - 0{,}5y[n+1] + 0{,}06y[n] = x[n+2] - 3x[n+1]$$

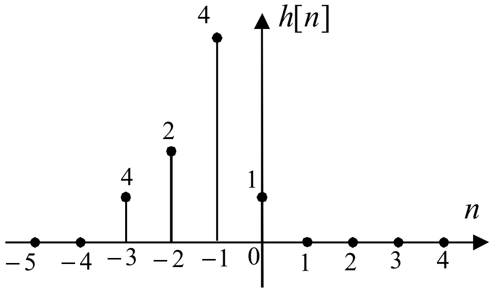
6) $x[0] = 6$, $x[1] = 0$, $x[2] = 2$, $x[3] = 0$ olan ve $N = 4$ ile periyodik $x[n]$ sinyalini ayrık zamanlı Fourier serisine açınız. Yardımcı formüller:

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j2k\pi n/N} \quad , \quad c_k = \frac{1}{N}\cdot\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j2k\pi n/N}$$

(25 puan)

BAŞARILAR … **Yard. Doç. Dr. Ata SEVİNÇ**

SİNYALLER VE SİSTEMLER FİNAL SINAVI CEVAP ANAHTARI
08.01.2015



1) a) Bu sistem için birim darbe tepkisi demek, 0. günde bir adet sınavı varsa öğrencinin günlere göre çalışma saatleri demektir ve şekildeki gibidir.

b) Bazı $n<0$ için $h[n]\neq 0$ olduğu için sistem nedensel değildir.

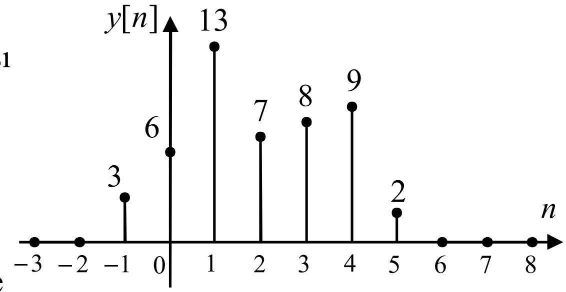
$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|h[n]| = 1+2+4+1 = 8 < \infty$ olduğu için sistem kararlıdır. (Günün 24 saat sınırı olmasa bile bu nedenle kararlı olurdu.)

c) Çıkış $y[n]=x[n]*h[n]$. Bunun Z dönüşümü alınırsa, $Y(z)=X(z)H(z)$ olur.

$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, z^{-n} = 3z^{-2}+0\cdot z^{-3}+1\cdot z^{-4}+2z^{-5}$ ve $H(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]\, z^{-n} = 1z^{3}+2\cdot z^{2}+4\cdot z+1$

Daha önce sonlu süreli iki ayrık sinyalin konvolüsyonu için kullandığımız çarpmaya benzer yöntem (çarpma değil, benzer), polinom çarpımının katsayılarını bulmak için de kullanılabilir:

			1	2	4	1	→ sonuncusu z^{0}'ın katsayısı
×			3	0	1	2	→ sonuncusu z^{-5}'in katsayısı
			2	4	8	2	
		1	2	4	1		
	0	0	0	0			
+ 3	6	12	3				
3	6	13	7	8	9	2	→ sonuncusu $z^{0-5}=z^{-5}$'in katsayısı.



Soldakiler daha büyük üslülerin katsayılarıdır. Buna göre $Y(z)=3z+6+13z^{-1}+7z^{-2}+8z^{-3}+9z^{-4}+2z^{-5}$ bulunur.

Bunu da $Y(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[n]\, z^{-n} = y[-1]z^{1}+y[0]\cdot z^{0}+y[1]\cdot z^{-1}+y[2\}z^{-2}+y[3\}z^{-3}+y[4\}z^{-4}+y[5\}z^{-5}$ biçiminde düşünerek yukarıda sağda çizilen $y[n]$ sinyali buluruz.

2) $x(t)=\dfrac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{+\infty}\left(a_k\cos k\omega t+b_k\sin k\omega t\right)=\sum_{k=1}^{+\infty} c_k e^{jk\omega t}$

Sinyal tekse $a_0=a_k=0 \quad \forall k$.

Sinyal çiftse $b_k=0 \quad \forall k$.

Sinyal tek harmonik simetrili (bir yarı periyot diğer yarı periyodun negatifi) ise a_0 ve c_0 dahil tüm çift k'lar için $c_k=a_k=b_k=0$.

Kare dalganız bunlardan hiç biri olmasa bile iki seviyesi aynı yatay genişliğe sahip denildiği için, dc bileşen hariç kısmı daima tek harmonik simetrili olur. Dolayısıyla, a_0 ve c_0 hariç tüm çift k'lar için $c_k=a_k=b_k=0$.

3) Transfer fonksiyon : $\dfrac{(j\omega)-2}{(j\omega)+5} = \boxed{H(\omega)=1-\dfrac{7}{j\omega+5}}$

Ters Fourier dönüşümü alınarak birim darbe tepkisi $\boxed{h(t)=\delta(t)-7e^{-5t}\,u(t)}$ bulunur.

$x(t)=e^{-3t}u(t)$ için $X(\omega)=\dfrac{1}{j\omega+3}$. $\qquad y(t)=x(t)*h(t) \;\rightarrow\; Y(\omega)=H(\omega)X(\omega)$

$Y(\omega)=\dfrac{j\omega-2}{(j\omega+3)(j\omega+5)}=\dfrac{A}{j\omega+3}+\dfrac{B}{j\omega+5}$ (Diğer $H(\omega)$ ifadesiyle çarpılması da olur ama tavsiye edilmez, işlemleri uzatır. $A=\left.\dfrac{j\omega-2}{(j\omega+5)}\right|_{j\omega\leftarrow -3}=\dfrac{-5}{2}$, $\qquad B=\left.\dfrac{j\omega-2}{(j\omega+3)}\right|_{j\omega\leftarrow -5}=\dfrac{7}{2}$

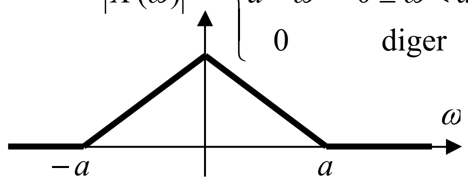
$Y(\omega)$ 'nın ters Fourier dönüşümü alınarak $\boxed{y(t) = \left(\frac{7}{2}e^{-5t} - \frac{5}{2}e^{-3t}\right)u(t)}$ bulunur.

4) $x(t)$ sinyalinin enerjisi: $E_x = \int_{t=-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \, dt$ (Sinyalin bir ses çıkış elemanı üzerine bırakacağı enerjinin bununla orantılı olduğu anlamına gelir. Akım veya gerilim sinyalinin direnç üzerinde bıraktığı enerji gibi.) Parseval eşitliğine göre:

$$\int_{t=-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{+\infty} |X(\omega)|^2 \, d\omega = E_x \quad \text{ve}$$

$$\int_{t=-\infty}^{+\infty} |y(t)|^2 \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{+\infty} |Y(\omega)|^2 \, d\omega = E_y$$

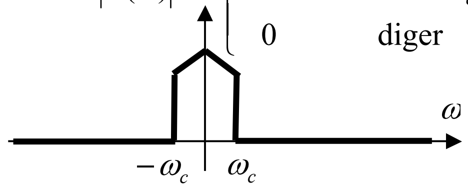
$$|X(\omega)|^2 = \begin{cases} a+\omega & -a < \omega < 0 \\ a-\omega & 0 \le \omega < a \\ 0 & \text{diger} \end{cases}$$



$$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega) \quad \rightarrow \quad |Y(\omega)|^2 = |X(\omega)|^2 |H(\omega)|^2$$

$|H(\omega)|^2$ grafiği $|H(\omega)|$ 'nınkiyle aynı olduğundan çarpımın grafiği yanda gösterildiği gibi olur.

$$|Y(\omega)|^2 = \begin{cases} a+\omega & -\omega_c < \omega < 0 \\ a-\omega & 0 < \omega < \omega_c \\ 0 & \text{diger} \end{cases}$$



$y(t)$ sinyalinin enerjisi:

$$E_y = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\omega_c}^{0} (a+\omega) d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=0}^{\omega_c} (a-\omega) d\omega$$

$$= \frac{1}{4\pi}(a+\omega)^2 \Big|_{-\omega_c}^{0} - \frac{1}{4\pi}(a-\omega)^2 \Big|_{0}^{\omega_c} = \frac{a^2 - (a-\omega_c)^2 - (a-\omega_c)^2 - (-a^2)}{4\pi} = \frac{a^2 - (a-\omega_c)^2}{2\pi} = E_y$$

E_x integralinin bundan tek farkı ω_c yerine de a yazılması olduğu için $E_x = \frac{a^2}{2\pi}$ bulunur.

$$\rightarrow \quad \frac{E_y}{E_x} = \frac{1}{2} = \frac{a^2 - (a-\omega_c)^2}{a^2} \quad \rightarrow \quad a^2 = 2a^2 - 2(a-\omega_c)^2 \quad \rightarrow \quad 2(a-\omega_c)^2 = a^2$$

$$\rightarrow \quad a - \omega_c = a/\sqrt{2} \quad \rightarrow \quad \boxed{\omega_c = \left(1 - 1/\sqrt{2}\right) \cdot a \approx 0{,}29a}$$

5) Transfer fonksiyon : $\frac{z^2 - 3z}{z^2 - 0{,}5z + 0{,}06} = \boxed{H(z) = \frac{z \cdot (z-3)}{(z-0{,}2)(z-0{,}3)} \quad ; \quad |z| > 0{,}3}$

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{z-3}{(z-0{,}2)(z-0{,}3)} = \frac{A}{z-0{,}2} + \frac{B}{z-0{,}3} \qquad A = \left.\frac{z-3}{(z-0{,}3)}\right|_{z=0{,}2} = 28$$

$$B = \left.\frac{z-3}{z-0{,}2}\right|_{z=0{,}3} = -27 \qquad H(z) = 28 \cdot \frac{z}{z-0{,}2} - 27 \cdot \frac{z}{z-0{,}3} \quad ; \quad |z| > 0{,}3$$

$$\rightarrow \quad \boxed{h[n] = \left(28 \cdot (0{,}2)^n - 27 \cdot (0{,}3)^n\right) u[n]}$$

6) $N = 4$ yazılarak, ortalama değer: $c_{\mathbf{0}} = \dfrac{x[0]+x[1]+x[2]+x[3]}{4} = \dfrac{6+0+2+0}{4} = 2 = c_0$

$$c_{\mathbf{1}} = \frac{1}{4}\cdot\sum_{n=0}^{3} x[n]e^{-j\mathbf{1}\pi n/2} = \frac{6\cdot \overbrace{e^{-j\mathbf{1}\pi\cdot 0/2}}^{1} + 2\cdot \overbrace{e^{-j\mathbf{1}\pi\cdot 2/2}}^{-1}}{4} = \frac{6-2}{4} = 1 = c_{\mathbf{1}}$$

$$\rightarrow \quad c_1^* = c_3 = 1$$

$$c_{\mathbf{2}} = \frac{1}{4}\cdot\sum_{n=0}^{3} x[n]e^{-j\mathbf{2}\pi n/2} = \frac{6\overbrace{e^{-j\mathbf{2}\pi\cdot 0/2}}^{1} + 2\overbrace{e^{-j\mathbf{2}\pi\cdot 2/2}}^{1}}{4} = \frac{6+2}{4} = 2$$

Tüm katsayıları Fourier serisinde yerine yazalım:

$$x[n] = \sum_{k=0}^{3} c_k e^{jk\pi n/2} = c_{\mathbf{0}}e^{j\mathbf{0}\pi n/2} + c_{\mathbf{1}}e^{j\mathbf{1}\pi n/2} + c_{\mathbf{2}}e^{j\mathbf{2}\pi n/2} + c_{\mathbf{3}}e^{\overbrace{j\mathbf{3}\pi n/2}^{\equiv -j\pi n/2}}$$

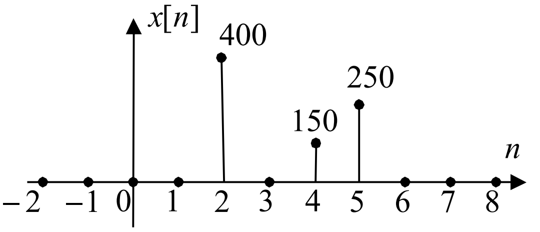
$$\boxed{x[n] == 2 + 1\cdot e^{j\pi n/2} + 2e^{j\pi n} + 1\cdot e^{-j\pi n/2}}$$

SİNYALLER VE SİSTEMLER BÜTÜNLEME SINAVI SORULARI
29.01.2015 Süre: 75 dakika

25 puanlık (2., 3. ve 5.) sorulardan birisi fazladır. Bunların üçünü de cevaplarsanız en düşük puan aldığınız sayılmayacaktır. 1. ve 4. sorular ise zorunludur.

1) Bir mağaza şöyle bir alışveriş sistemi uyguluyor: Alınan ürün fiyatının; peşinat olarak %10'u, 1 ay sonra % 20'si, 2 ay sonra %30'u ve 3 ay sonra da %40'ı ödeniyor. n ay numarası, $x[n]$ girişi n. aydaki alınanların toplam tutarı, $y[n]$ çıkışı ise n. aydaki taksit ödemesi olarak tanımlanıyor. Buna göre,

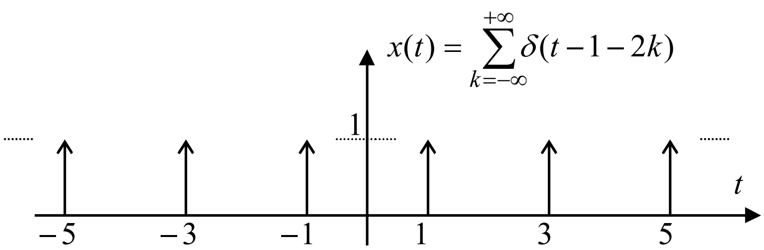
a) Sistemin birim darbe tepkisini ($h[n]$) çiziniz. **(6 puan)**



b) Sistem nedensel midir, kararlı mıdır? **(2+2=4 puan)** Genel ifadelerle değil, DZD sistemlere özel gerekçelerini belirterek yazınız.

c) Aylara göre şekildeki $x[n]$ ile verilen alımları yapan bir müşterinin ödeme planını bulmak için önce $X(z)$, $H(z)$ ve $Y(z)$ 'yi bulup sonra $y[n]$ 'i grafikle gösteriniz. **(20 puan)**
(a şıkkındaki $h[n]$ 'i bulamayanlar ya da yanlış bulanlar, en az 4 noktası sıfırdan farklı olan ve bu 4 değerin hepsi aynı olmayan keyfi bir $h[n]$ çizdikten sonra bununla c şıkkını çözebilirler; fakat bu durumda c şıkkı 17 puanlık sayılır.)

2) Yandaki şekilde verilen T = 2 periyotlu darbe treninin,
a) Fourier serisini bulunuz **(12 puan)** (b şıkkına devam edeceklerin karmaşık seriye açmaları tavsiye edilir).
b) Bu seriden faydalanarak Fourier dönüşümünü bulunuz ve çiziniz. **(13 puan)**



3) Giriş(x) – çıkış(y) ilişkisi aşağıdaki gibi verilen nedensel sistemin transfer fonksiyonunu, birim darbe tepkisini ve $x(t) = e^{-2t}u(t)$ girişi için enerjisiz başlangıçlı çıkışını bulunuz. **(5 + 8 + 12 = 25 puan)**

$$\ddot{y}(t) + 4y(t) + 3y(t) = \dot{x}(t) + 2x(t)$$

4) Giriş(x) – çıkış(y) ilişkisi aşağıdaki gibi verilen nedensel sistemin transfer fonksiyonunu ve birim darbe tepkisini bulunuz. **(7 + 13 = 20 puan)**

$$y[n+2] - 1{,}6y[n+1] + 0{,}63y[n] = 2x[n+2] - 4x[n+1]$$

5) $x[0] = 10$, $x[1] = 0$, $x[2] = 6$, $x[3] = 0$ olan ve $N = 4$ ile periyodik $x[n]$ sinyalini ayrık zamanlı Fourier serisine açınız. **(25 puan)**

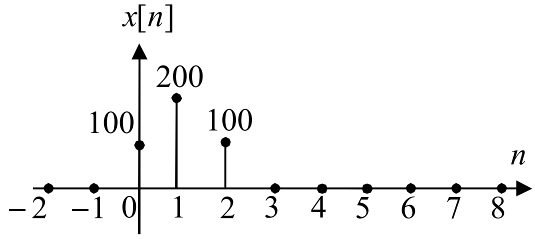
Yardımcı formüller: $x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j2k\pi n/N}$, $c_k = \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2k\pi n/N}$

BAŞARILAR … **Yard. Doç. Dr. Ata SEVİNÇ**

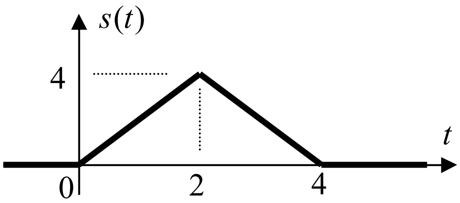
Bilgisayar Mühendislği Bölümü
SİNYALLER VE SİSTEMLER FİNAL SINAVI SORULARI
15.06.2015 Süre: 70 dakika

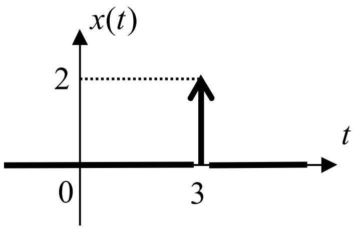
1) Taksitli alışveriş sistemi için tanımlar şöyle olsun: n ay numarası olmak üzere $x[n]$ girişi, n. ayda müşterinin aldıklarının etiket fiyatı üzerinden toplam tutarıdır. $y[n]$ çıkışı ise n. ay için müşterinin ödemesi gereken tutardır. Bir mağazanın müşterilerine uyguladığı taksitli alışveriş sistemi şöyledir: Alınanların etiket tutarının; alım ayında %20'si, 1 ay sonra %20'si, 2 ay sonra %30'u, 3 ay sonra %10'u ve 4 ay sonra %30'unu ödemesi isteniyor (vade farkı uyguladığı için taksitlerin toplamı %100'ü geçmektedir).

a) Sistemin birim darbe tepkisini çiziniz. **(8 puan)**
b) Sistem nedensel midir, kararlı mıdır? Genel ifadelerle değil, bu sisteme özel gerekçelerini belirterek yazınız. **(6 puan)**
c) Aylara (n) göre etiket fiyatlarına göre alım tutarları $x[n]$ yanda verilen bir müşterinin ödeme planını çiziniz. **(10 puan)**
d) Giriş ve çıkışın Z dönüşümlerini yazınız. **(6 puan)**



2)





Birim basamak tepkisi s(t) ve girişi x(t) yukarıdaki şekillerde verilen doğrusal zamanla değişmez sistemin çıkışını bulunuz. **(20puan)**

3) Giriş(x)-çıkış(y) ilişkisi aşağıda verilen nedensel sistemin transfer fonksiyonunu **(6 puan)** ve birim darbe tepkisini **(14 puan)** bulunuz.

$$\ddot{y}(t) + 6\dot{y}(t) + 8y(t) = 3\dot{x}(t) - x(t)$$

4) Giriş(x)-çıkış(y) ilişkisi

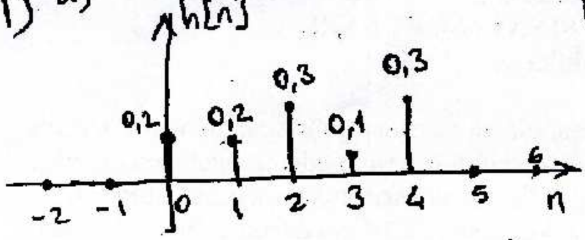
$$y[n+2] - 1{,}2y[n+1] + 0{,}35y[n] = x[n+1] - x[n]$$

ile verilen nedensel sistemin transfer fonksiyonunu **(5 puan)**, birim darbe tepkisini **(11 puan)** ve $x[n] = u[n]$ girişi için enerjisiz başlangıçlı çıkışını **(14 puan)** Z ve/veya Z^{-1} dönüşümleriyle bulunuz.

BAŞARILAR … **Yard. Doç. Dr. Ata SEVİNÇ**

Bilgisayar Mühendislği Bölümü
SİNYALLER VE SİSTEMLER FİNAL CEVAP ANAHTARI
15.06.2015

1) a)



b) $\forall n<0$ için $h[n]=0 \rightarrow$ nedensel

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| = 1,1 < \infty \rightarrow \text{kararlı}$$

c, d) $H(z) = 0,2 + 0,2z^{-1} + 0,3z^{-2} + 0,1z^{-3} + 0,3z^{-4}$

$X(z) = 100 + 200z^{-1} + 100z^{-2}$

$Y(z) = H(z)X(z)$

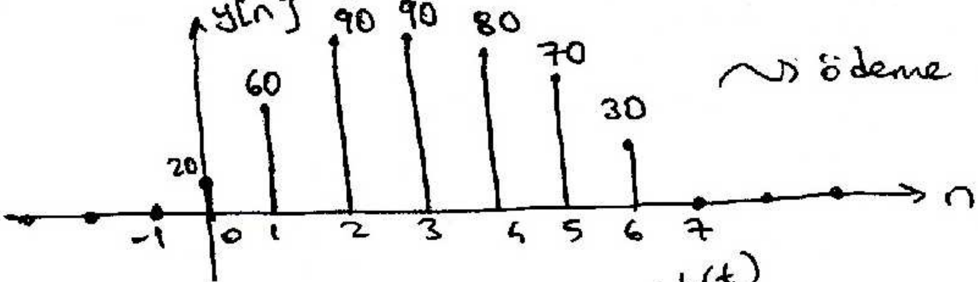
Konvolüsyon için kullanılan çarpmaya benzer yöntem polinom çarpımları için de geçerlidir.

$$\begin{array}{rrrrrrrl}
 & & 0,2 & 0,2 & 0,3 & 0,1 & 0,3 & \leftarrow z^{-4} \text{ 'ün katsayısı} \\
\times & & & & 100 & 200 & 100 & \leftarrow z^{-2} \text{ 'nin katsayısı} \\
\hline
 & & 20 & 20 & 30 & 10 & 30 & \\
 & 40 & 40 & 60 & 20 & 60 & & \\
+\ 20 & 20 & 30 & 10 & 30 & & & \\
\hline
20 & 60 & 90 & 90 & 80 & 70 & 30 & \leftarrow z^{-4-2} = z^{-6} \text{ 'nın katsayısı}
\end{array}$$

$$Y(z) = \underset{y[0]}{20} + \underset{y[1]}{60}z^{-1} + 90z^{-2} + 90z^{-3} + 80z^{-4} + \underset{y[5]}{70}z^{-5} + \underset{y[6]}{30}z^{-6}$$

- - -

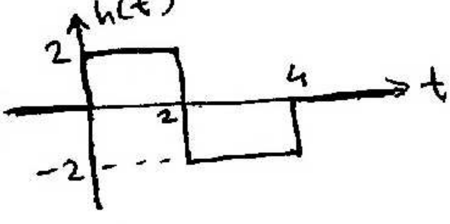
diğer n 'ler için $y[n]=0$; çünkü $Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[n] z^{-n}$ idi.



$\rightsquigarrow$ ödeme planı

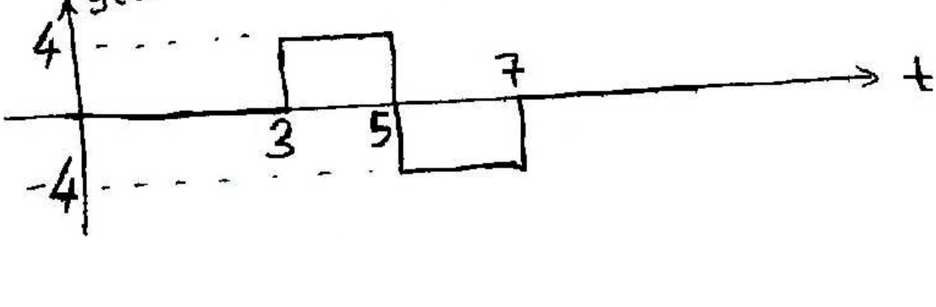
2) $y(t) = x(t) * h(t)$

$h(t) = \dfrac{ds(t)}{dt}$



$x(t) = 2\delta(t-3)$

$h(t) * [2\delta(t-3)] = 2h(t-3) = y(t)$



3) $H(\omega)=\dfrac{3(j\omega)-1}{(j\omega)^2+6(j\omega)+8}=\dfrac{3(j\omega)-1}{(j\omega+4)(j\omega+2)}$

$H(\omega)=\dfrac{A_1}{j\omega+4}+\dfrac{A_2}{j\omega+2}$ $\qquad A_1=\dfrac{3(-4)-1}{-4+2}=\dfrac{13}{2}$

$A_2=\dfrac{3(-2)-1}{-2+4}=\dfrac{-7}{2} \rightarrow h(t)=\dfrac{13}{2}e^{-4t}u(t)-\dfrac{7}{2}e^{-2t}u(t)$

4) $H(z)=\dfrac{z-1}{z^2-1{,}2z+0{,}35}=\dfrac{z-1}{(z-0{,}5)(z-0{,}7)}$; $|z|>0{,}7$

$H(z)=\dfrac{a_1}{z-0{,}5}+\dfrac{a_2}{z-0{,}7}$ $\qquad a_1=\dfrac{0{,}5-1}{0{,}5-0{,}7}=\dfrac{5}{2}$

$a_2=\dfrac{0{,}7-1}{0{,}7-0{,}5}=\dfrac{-3}{2} \rightarrow H(z)=\dfrac{5}{2}z^{-1}\cdot\dfrac{z}{z-0{,}5}-\dfrac{3}{2}z^{-1}\cdot\dfrac{z}{z-0{,}7}$

1 adım geriletir.

$h[n]=\dfrac{5}{2}(0{,}5)^{n-1}u[n-1]-\dfrac{3}{2}(0{,}7)^{n-1}u[n-1]$

$x[n]=u[n]=1^n u[n] \xrightarrow{\mathcal{Z}} X(z)=\dfrac{z}{z-1}$; $|z|>1$

$y[n]=x[n]*h[n] \xrightarrow{\mathcal{Z}} Y(z)=X(z)H(z)$

$Y(z)=\dfrac{z-1}{(z-0{,}5)(z-0{,}7)}\cdot\dfrac{z}{z-1}$

$\dfrac{Y(z)}{z}=\dfrac{1}{(z-0{,}5)(z-0{,}7)}=\dfrac{b_1}{z-0{,}5}+\dfrac{b_2}{z-0{,}7}$

$b_1=\dfrac{1}{0{,}5-0{,}7}=-5$ $\qquad b_2=\dfrac{1}{0{,}7-0{,}5}=5$

$Y(z)=5\left(-\dfrac{z}{z-0{,}5}+\dfrac{z}{z-0{,}7}\right)$

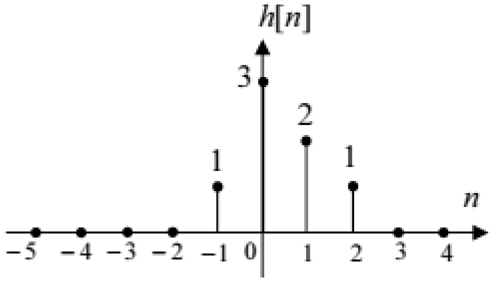
$y[n]=5\left((0{,}7)^n-(0{,}5)^n\right)u[n]$

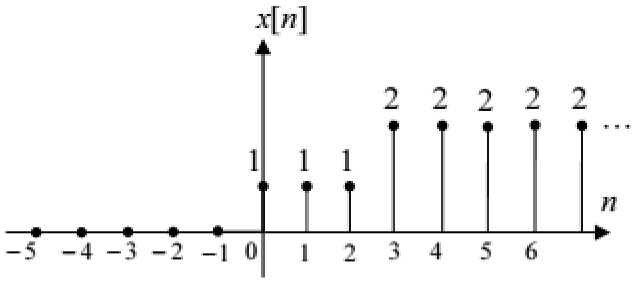
diğer yolla $\longrightarrow$ $=\left[-\dfrac{5}{2}(0{,}5)^{n-1}+\dfrac{7}{2}(0{,}7)^{n-1}\right]u[n-1]$

Bilgisayar Mühendislği Bölümü
SİNYALLER VE SİSTEMLER BÜTÜNLEME SINAVI SORULARI
26.6.2015 Süre: 75 dakika

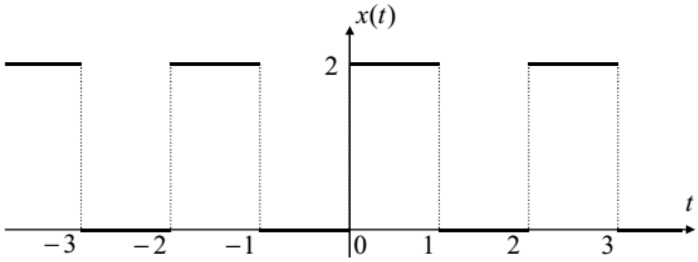
20 puanlık sorulardan (2., 4., ve 5.) en az puan aldığınız dikkate alınmayacaktır.

1) Doğrusal zamanla değişmez (DZD) bir sistemin birim darbe tepkisi aşağıda soldaki şekildeki $h[n]$ 'dir.
a) Sistem nedensel midir, kararlı mıdır, bellekli midir? DZD sistemlere özel açıklamasını belirterek cevaplayınız. **(9 puan)**
b) Sistemin birim basamak tepkisini ($s[n]$) çiziniz. **(8 puan)**
c) Sistemin girişi aşağıda sağdaki şekildeki $x[n]$ ise çıkışını ($y[n]$) çiziniz. **(13 puan)**





2) Aşağıda verilen $T_0 = 2$ ile periyodik $x(t)$ sinyalini Fourier serisine açınız. ($T_0 = 1$) **(20 puan)**



3) Giriş(x)-çıkış(y) ilişkisi aşağıda verilen nedensel sistemin transfer fonksiyonunu**(5 puan)**, birim darbe tepkisini **(10 puan)** ve $x(t) = e^{-2t}u(t)$ girişi için enerjisiz başlangıçlı çıkışını bulunuz **(15 puan)**.

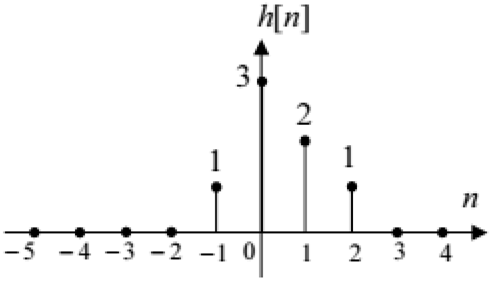
$$\ddot{y}(t) + 6\dot{y}(t) + 5y(t) = 2\dot{x}(t) + 4x(t)$$

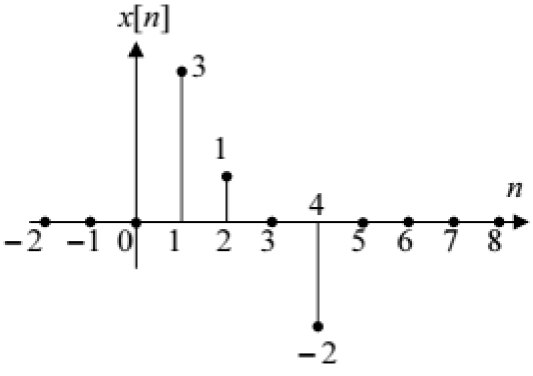
4) Giriş(x)-çıkış(y) ilişkisi

$$y[n+2] - 1{,}3y[n+1] + 0{,}4y[n] = 3x[n+1] + 2x[n]$$

ile verilen nedensel sistemin transfer fonksiyonunu **(6 puan)** ve birim darbe tepkisini **(14 puan)**.

5) Birim darbe tepkisi $h[n]$ ile girişi $x[n]$ aşağıda verilen DZD sistemin çıkışının ($y[n]$) ne olacağını Z ve/veya Z^{-1} dönüşümleriyle bulunuz ve çiziniz. **(20 puan)**

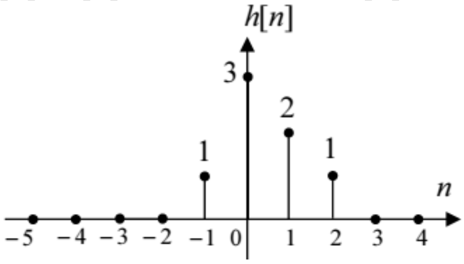


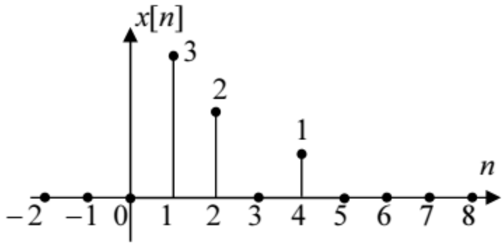


BAŞARILAR … **Yard. Doç. Dr. Ata SEVİNÇ**

SİNYALLER VE SİSTEMLER FİNAL SINAVI SORULARI
30.12.2015 Süre: 80 dakika
Sorulardan istediğiniz 5 tanesini cevaplayınız. Fazla cevapların lehinize 5 tanesi dikkate alınır.

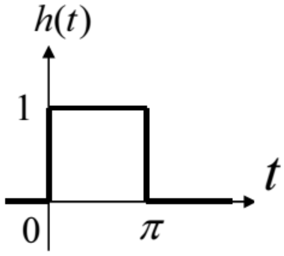
1) Doğrusal ve zamanla değişmez (DZD) bir sistemin birim darbe tepkisi $h[n]$ ve girişi $x[n]$ şekillerde verilmiştir. $h[n]$, $x[n]$ ve sistem çıkışı $y[n]$ 'in her birinin Z-dönüşümlerini bulunuz ve $y[n]$'i çiziniz. **(20 puan)**



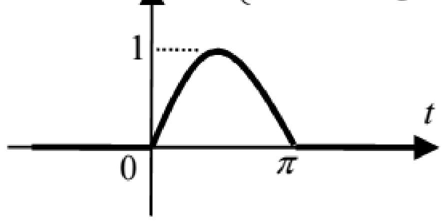


2) DZD bir sistemin birim darbe tepkisi $h[n]$ yukarıda verilmiştir. Bu sistemin birim basamak tepkisi $s[n]$'i çiziniz **(11 puan)**. Bu sistem nedensel midir, kararlı mıdır, bellekli midir? DZD sistemlere özel ifadelerle gerekçesini ortaya koyarak cevaplayınız **(9 puan)**.

3) DZD bir sistemin birim darbe tepkisi $h(t)$ ve girişi $x(t)$ aşağıdaki şekillerde verilmiştir. Sistem çıkışı $y(t)$'yi bulunuz. **(20 puan)**

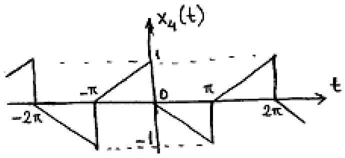


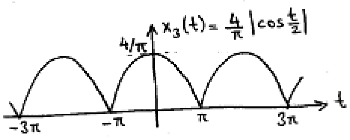
$$x(t)=\begin{cases}\sin t & 0\le t<\pi\\ 0 & \text{diger}\end{cases}$$

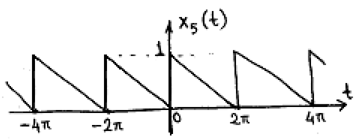


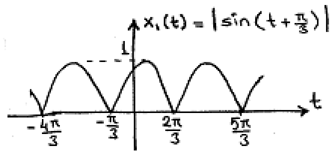
4) Fourier serisi ile katsayı formülleri aşağıda verilen sinyal, en az iki periyodu çizilmiş şekillerdeki sinyallerden hangisine ait olabilir? Nedenlerini belirterek yazınız **(10 puan)**. Bu sinyalin 4. ve daha yüksek numaralı harmoniklerini <u>ihmal</u> ederek kare ortalamasının karekökü (rms) değerini açık işlem haliyle yazınız **(10 puan).** (Dikkat: Bu sorunun iki şıkkında da integralli bir şey yazılması istenmiyor.)

$$y(t)=\frac{1}{2}+\left\{\frac{1}{\pi}\sin t+\frac{1}{2\pi}\sin 2t+\frac{1}{3\pi}\sin 3t+\dots\right\}\quad,\qquad a_0=1\ ,\qquad a_k=0\ (k\neq 0)\,,\qquad b_k=\frac{1}{k\pi}$$









5) $x[0]=12$, $x[1]=24$ ve $N=2$ ile periyodik olan $x[n]$ sinyalinin Fourier serisini katsayılarını bulup yerine koyarak yazınız. **(20 puan)**

6) Giriş(x)-çıkış(y) ilişkisi

$$y[n+2]+y[n+1]-2y[n]=3x[n+2]-x[n+1]$$

ile verilen nedensel sistemin transfer fonksiyonunu **(5 puan)** ve birim darbe tepkisini **(15 puan)** bulunuz.

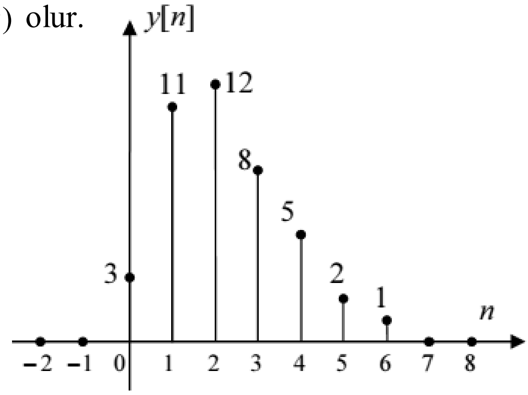
7) Transfer fonksiyonu $H(\omega)=\dfrac{j\omega+2}{j\omega+3}$ olan nedensel sistemin birim darbe tepkisini **(8 puan)** ve $x(t)=e^{-t}u(t)$ girişi için çıkışını **(12 puan)** bulunuz.

BAŞARILAR … **Yard. Doç. Dr. Ata SEVİNÇ**

SİNYALLER VE SİSTEMLER FİNAL CEVAP ANAHTARI
30.12.2015 (Güz 2015-16)

1) $H(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]\,z^{-n}=1\cdot z+3+2z^{-1}+1\cdot z^{-2}$ $X(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\,z^{-n}=3z^{-1}+2z^{-2}+0\cdot z^{-3}+1\cdot z^{-4}$

Çıkış $y[n]=x[n]*h[n]$. Bunun Z dönüşümü alınırsa, $Y(z)=X(z)H(z)$ olur.

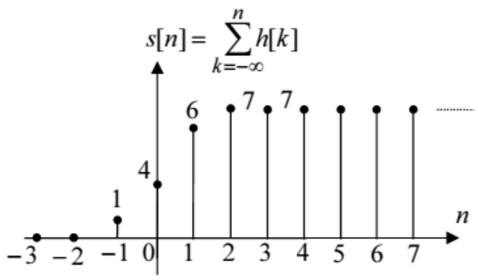


$$\begin{array}{rrrrrrrl}
 & & & 1 & 3 & 2 & 1 & \rightarrow \text{ sonuncusu } z^{-2}\text{'nin katsayısı}\\
\times & & & 3 & 2 & 0 & 1 & \rightarrow \text{ sonuncusu } z^{-4}\text{'ün katsayısı}\\
\hline
 & & & 1 & 3 & 2 & 1 & \\
 & & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\
 & 2 & 6 & 4 & 2 & & & \\
+\ 3 & 9 & 6 & 3 & & & & \\
\hline
3 & 11 & 12 & 8 & 5 & 2 & 1 & \rightarrow \text{ sonuncusu } z^{-2-4}=z^{-6}\text{'nın}
\end{array}$$

katsayısı. Soldakiler daha büyük üslülerin katsayılarıdır. Buna göre $Y(z)=3+11z^{-1}+12z^{-2}+8z^{-3}+5z^{-4}+2z^{-5}+1\cdot z^{-6}$ bulunur.

Bunu da $Y(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[n]\,z^{-n}=y[0]\cdot z^{0}+y[1]\cdot z^{-1}+y[2]z^{-2}+y[3]z^{-3}+y[4]z^{-4}+y[5]z^{-5}+y[6]z^{-6}$ biçiminde düşünerek yukarıda sağda çizilen $y[n]$ sinyalini buluruz.

2)



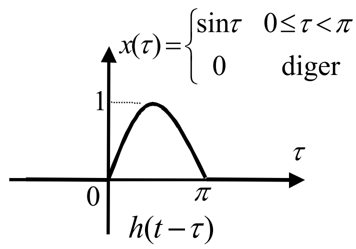
Sistem özellikleri için $s[n]$ 'e değil $h[n]$ 'e bakarız.

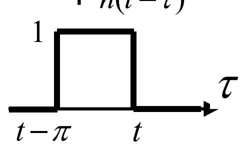
Bazı $n<0$ için ($n=-1$'de) $h[n]\neq 0$ $\rightarrow$ nedensel değil.

$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|h[n]|=7<\infty$ olduğundan kararlı.

Bazı $n\neq 0$ için $h[n]\neq 0$ $\rightarrow$ bellekli.

3) $y(t)=x(t)*h(t)=\int_{\tau=-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$





$t<0$ ise: $x(\tau)h(t-\tau)=0\quad\forall\tau \quad\rightarrow\quad y(t)=\int_{\tau=-\infty}^{+\infty}0d\tau=0$

$0\le t<\pi$ ise: $x(\tau)h(t-\tau)=\begin{cases}1\cdot\sin\tau & 0\le\tau\le \mathrm{t}\\ 0 & \text{diger}\end{cases}$

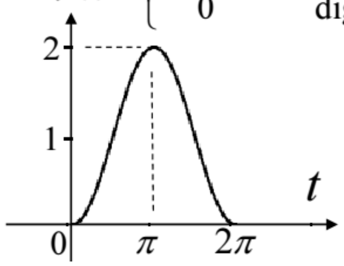
$\rightarrow\quad y(t)=\int_{\tau=0}^{t}\sin\tau\,d\tau=(-\cos\tau)\Big|_0^t=1-\cos t$

$\pi\le t<2\pi$ ise: $x(\tau)h(t-\tau)=\begin{cases}1\cdot\sin\tau & \mathrm{t}-\pi\le\tau\le\pi\\ 0 & \text{diger}\end{cases}$

$\rightarrow\quad y(t)=\int_{\tau=t-\pi}^{\pi}\sin\tau\,d\tau=(-\cos\tau)\Big|_{t-\pi}^{\pi}=\underbrace{\cos(t-\pi)}_{-\cos t}-\cos\pi=1-\cos t$

$t\ge 2\pi$ ise: $x(\tau)h(t-\tau)=0\quad\forall\tau\quad\rightarrow\quad y(t)=\int_{\tau=-\infty}^{+\infty}0d\tau=0$

$y(t)=\begin{cases}1-\cos t & 0\le \mathrm{t}<2\pi\\ 0 & \text{diger}\end{cases}$



4) $x_4(t)$ olamaz, çünkü tek harmonik simetrilidir. Halbuki serimizde çift harmonik de var.

$x_3(t)$ olamaz, çünkü çift sinyaldir. Halbuki serimizde sin terimleri var.

$x_5(t)$ olabilir, çünkü 1/2 çıkartırsak tek sinyal olur. Zaten serimizde de sabit terim 1/2 ve gerisi sadece sin terimleri.

$x_1(t)$ olamaz, çünkü ne tektir ne çift, ve düşey kaydırmayla da tek yapılamıyor. Yani serisinde hem sin hem cos terimleri olmalı. Halbuki serimizde sabiti saymazsak hiç cos terimi yok.

Yani $y(t)=x_5(t)$. Ayrıca Parseval eşitliğinden: $Y_{rms}=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{(1/\pi)^2+(1/2\pi)^2+(1/3\pi)^2}{2}}$

5) Ortalaması $\frac{12+24}{2}=18=c_0$ olup, $x[n]=18-6\cdot(-1)^n$ diye yazılabilir. $-1=e^{j\pi}$ olduğundan,

$\boxed{x[n]=18-6\cdot e^{j\pi n}}$ sinyalin Fourier serisidir. Bu seride $c_1=-6$ ve $\omega_o=2\pi/N=\pi$ 'dir.

6) Transfer fonksiyon: $H(z)=\frac{3z^2-z}{z^2+z-2}$ $\quad\rightarrow\quad$ $\frac{H(z)}{z}=\frac{3z-1}{(z-1)(z+2)}=\frac{A}{(z-1)}+\frac{B}{(z+2)}$

Köklerden ve nedensellikten anlaşıldığına göre $YB:|z|>2$. $\quad A=\frac{3\cdot1-1}{1+2}=\frac{2}{3}$, $\quad B=\frac{3\cdot(-2)-1}{-2-1}=\frac{7}{3}$

$\rightarrow \quad H(z)=\frac{2}{3}\cdot\frac{z}{z-1}+\frac{7}{3}\cdot\frac{z}{z-(-2)}$ $\quad ; \quad YB:|z|>2 \quad \rightarrow \quad h[n]=\left(\frac{2}{3}\right)\cdot1^n u[n]+\left(\frac{7}{3}\right)\cdot(-2)^n u[n]$

Yani $\boxed{h[n]=\frac{1}{3}\left(2+7\cdot(-2)^n\right)\cdot u[n]}$

Diğer bir yolla da yapılabilir: $H(z)=3+\frac{a}{(z-1)}+\frac{b}{(z+2)}$, $\quad a=\frac{3\cdot1^2-1}{1+2}=\frac{2}{3}$, $\quad b=\frac{3\cdot(-2)^2-(-2)}{-2-1}=-\frac{14}{3}$

$H(z)=3\cdot1+\frac{2}{3}z^{-1}\frac{z}{z-1}-\frac{14}{3}z^{-1}\frac{z}{z-(-2)}$

1'in ters dönüşümü birim darbe ve z^{-1} çarpanı bir adım geriletici olduğundan

$\boxed{h[n]=3\delta[n]+\frac{1}{3}\left(2-14\cdot(-2)^{n-1}\right)\cdot u[n-1]}$ Diğer çözüm ifadesiyle aynı olduğunu görünüz.

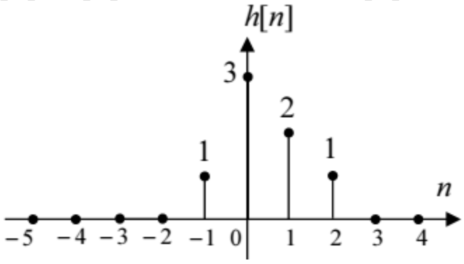
7) $H(\omega)=\frac{j\omega+2}{j\omega+3}=1-\frac{1}{j\omega+3}$ $\quad\rightarrow\quad$ Birim darbe tepkisi: $\boxed{h(t)=\delta(t)-e^{-3t}u(t)}$

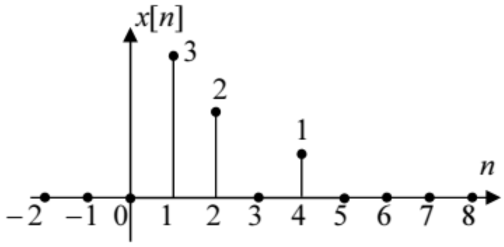
$X(\omega)=\frac{1}{j\omega+1}$ $\quad\rightarrow\quad$ $Y(\omega)=H(\omega)X(\omega)=\frac{j\omega+2}{(j\omega+3)(j\omega+1)}=\frac{A}{j\omega+3}+\frac{B}{j\omega+1}$

$A=\frac{-3+2}{-3+1}=\frac{1}{2}$, $\quad B=\frac{-1+2}{-1+3}=\frac{1}{2}$ $\quad\rightarrow\quad$ $\boxed{y(t)=\frac{1}{2}\left(e^{-3t}+e^{-t}\right)u(t)}$

SİNYALLER VE SİSTEMLER BÜTÜNLEME SINAVI SORULARI
20.01.2016 Süre: 80 dakika
Sorulardan istediğiniz 5 tanesini cevaplayınız. Fazla cevapların lehinize 5 tanesi dikkate alınır.

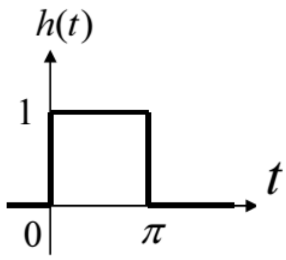
1) Doğrusal ve zamanla değişmez (DZD) bir sistemin birim darbe tepkisi $h[n]$ ve girişi $x[n]$ şekillerde verilmiştir. $h[n]$, $x[n]$ ve sistem çıkışı $y[n]$ 'in her birinin Z-dönüşümlerini bulunuz ve $y[n]$'i çiziniz. **(20 puan)**





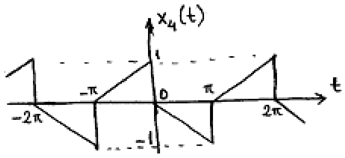
2) DZD bir sistemin birim darbe tepkisi $h[n]$ yukarıda verilmiştir. Bu sistemin birim basamak tepkisi $s[n]$'i çiziniz **(11 puan)**. Bu sistem nedensel midir, kararlı mıdır, bellekli midir? DZD sistemlere özel ifadelerle gerekçesini ortaya koyarak cevaplayınız **(9 puan)**.

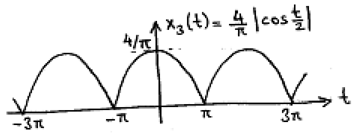
3) DZD bir sistemin birim darbe tepkisi şekildeki $h(t)$ ve girişi $x(t) = u(t)\cos(t)$ 'dir. Sistem çıkışı $y(t)$'yi bulunuz. **(20 puan)**

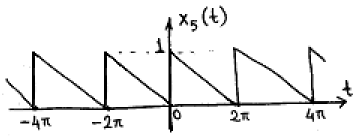


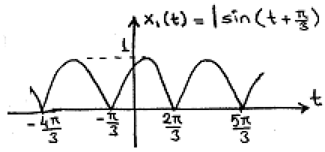
4) Fourier serisi ile katsayı formülleri aşağıda verilen sinyal, en az iki periyodu çizilmiş şekillerdeki sinyallerden hangisine ait olabilir? Nedenlerini belirterek yazınız **(10 puan)**. Bu sinyalin 4. ve daha yüksek numaralı harmoniklerini <u>ihmal</u> ederek kare ortalamasının karekökü (rms) değerini açık işlem haliyle yazınız **(10 puan).** (Dikkat: Bu sorunun iki şıkkında da integralli bir şey yazılması istenmiyor.)

$x_F(t) = \dfrac{8}{\pi^2} + \left\{ \dfrac{16}{3\pi^2}\cos t - \dfrac{16}{15\pi^2}\cos 2t + \dfrac{16}{35\pi^2}\cos 3t \ - + \ldots \right\}$, $a_0 = \dfrac{16}{\pi^2}$, $a_k = (-1)^{k+1}\dfrac{16}{(4k^2-1)\pi^2}$, $b_k = 0$.









5) $x[0] = 12$, $x[1] = 0$, $x[2] = 24$ ve $x[3] = 0$ olan $N = 4$ ile periyodik olan $x[n]$ sinyalinin Fourier serisini katsayılarını bulup yerine koyarak yazınız. **(20 puan)**

6) Giriş(x)-çıkış(y) ilişkisi

$$\ddot{y}(t) + 6\dot{y}(t) + 9y(t) = 2\dot{x}(t) - x(t)$$

ile verilen nedensel sistemin transfer fonksiyonunu **(5 puan)** ve birim darbe tepkisini **(15 puan)** bulunuz.

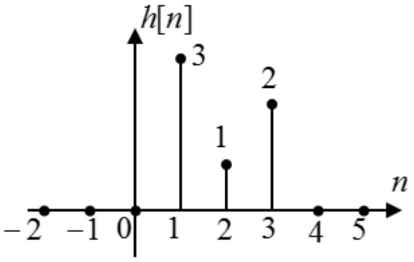
7) Transfer fonksiyonu $H(z) = \dfrac{z+2}{z+3}$; $|z| > 3$ olan sistemin birim darbe tepkisini **(8 puan)** ve $x[\mathrm{n}] = 2^n u[n]$ girişi için çıkışını **(12 puan)** bulunuz.

BAŞARILAR … **Yard. Doç. Dr. Ata SEVİNÇ**

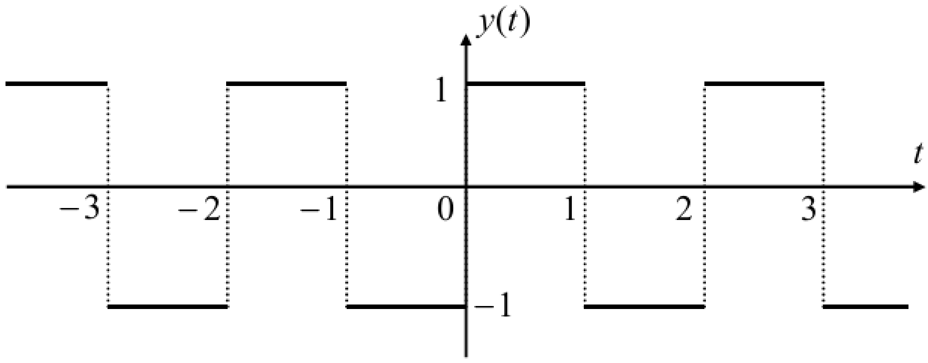
Bilgisayar Mühendislği Bölümü
SİNYALLER VE SİSTEMLER FİNAL SINAVI SORULARI
31 Mayıs 2016   Süre: 75 dakika

2. ve 4. sorular zorunludur. 20 puanlık sorulardan ise (2., 3. ve 5.) istediğiniz ikisini yapmanız yeterli olup fazla yaparsanız yalnızca lehinize olan ikisi hesaba katılacaktır.

1) Doğrusal zamanla değişmez (DZD) bir sistemin birim <u>darbe</u> tepkisi aşağıda soldaki şekildeki $h[n]$'dir.
a) Sistem nedensel midir, kararlı mıdır, bellekli midir? DZD sistemlere özel açıklamasını belirterek cevaplayınız. **(9 puan)**
b) Sistemin birim basamak tepkisini ($s[n]$) çiziniz. **(8 puan)**
c) Sistemin girişi $x[n]=u[n]-u[n-4]$ ise çıkışını çiziniz. **(13 puan)**



2) Aşağıda verilen $T_0 = 2$ ile periyodik $y(t)$ sinyalini Fourier serisine açınız. **(20 puan)**



3) Giriş(x)-çıkış(y) ilişkisi aşağıda verilen nedensel sistemin transfer fonksiyonunu **(6 puan)** ve birim darbe tepkisini **(14 puan)** bulunuz.

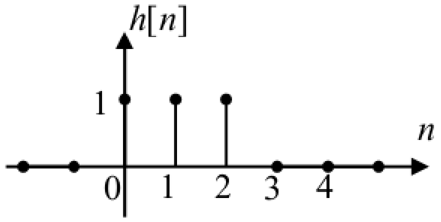
$$\ddot{y}(t)+3\dot{y}(t)+2y(t)=3\dot{x}(t)+2x(t)$$

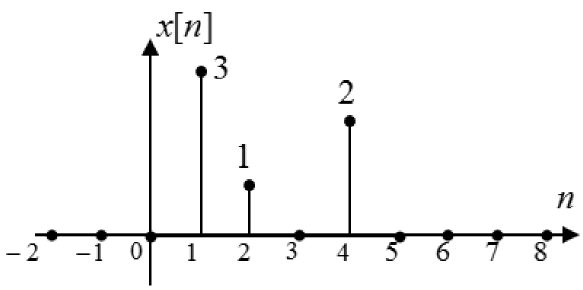
4) Giriş(x)-çıkış(y) ilişkisi

$$y[n+2]-1{,}5y[n+1]+0{,}56y[n]=4x[n+1]-x[n]$$

ile verilen nedensel sistemin transfer fonksiyonunu **(5 puan)**, birim darbe tepkisini **(10 puan)** ve $x[n]=(0{,}25)^n u[n]$ girişi için enerjisiz başlangıçlı çıkışını **(15 puan)** Z ve/veya Z^{-1} dönüşümleriyle bulunuz.

5) Birim darbe tepkisi $h[n]$ ile girişi $x[n]$ aşağıda verilen DZD sistemin çıkışı $y[n]$'dir. $h[n]$, $x[n]$ ve $y[n]$'in Z dönüşümlerini bulunuz ve $y[n]$'i çiziniz. **(20 puan)**





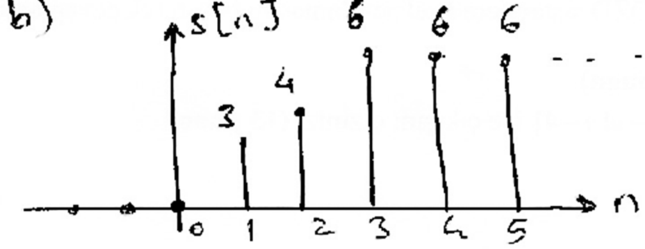
Bilgisayar Mühendislği Bölümü
SİNYALLER VE SİSTEMLER FİNAL SINAVI CEVAP ANAHTARI
31 Mayıs 2016

1) a) Nedensel ; çünkü $\forall n<0$ için $h[n]=0$

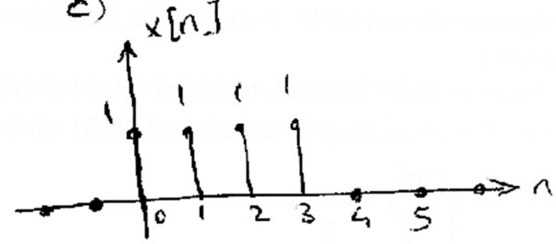
Kararlı ; " $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| = 6 < \infty$

Bellekli ; " bazı $n \neq 0$ için $h[n] \neq 0$

b)



c)

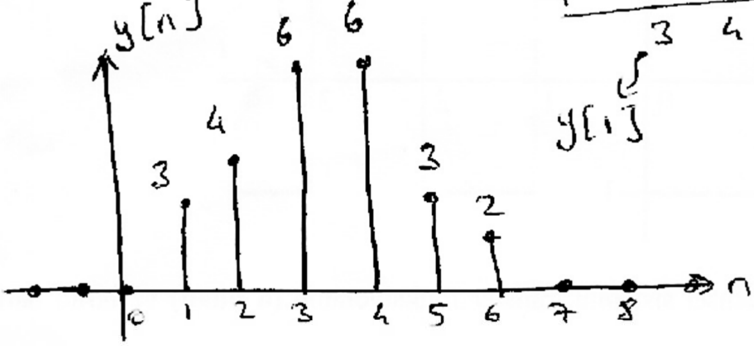


$y[n] = x[n] * h[n]$

Her iki sinyal de sonlu süreli

$$
\begin{array}{rrrrrrl}
 & & 1 & 1 & 1 & 1 & \to x[3] \\
\times & & & 3 & 1 & 2 & \to h[3] \\
\hline
 & & 2 & 2 & 2 & 2 & \\
 & 1 & 1 & 1 & 1 & & \\
+\ 3 & 3 & 3 & 3 & & & \\
\hline
3 & 4 & 6 & 6 & 3 & 2 & \to y[3+3] = y[6]
\end{array}
$$

$y[1]$



2) Bu sorunun cevabı için 2014 Final cevap anahtarına bakınız (yine 2. soru).

3) $H(\omega) = \dfrac{3(j\omega)+2}{(j\omega)^2+3(j\omega)+2} = \dfrac{3(j\omega)+2}{(j\omega+1)(j\omega+2)} = \dfrac{A}{j\omega+1} + \dfrac{B}{j\omega+2}$

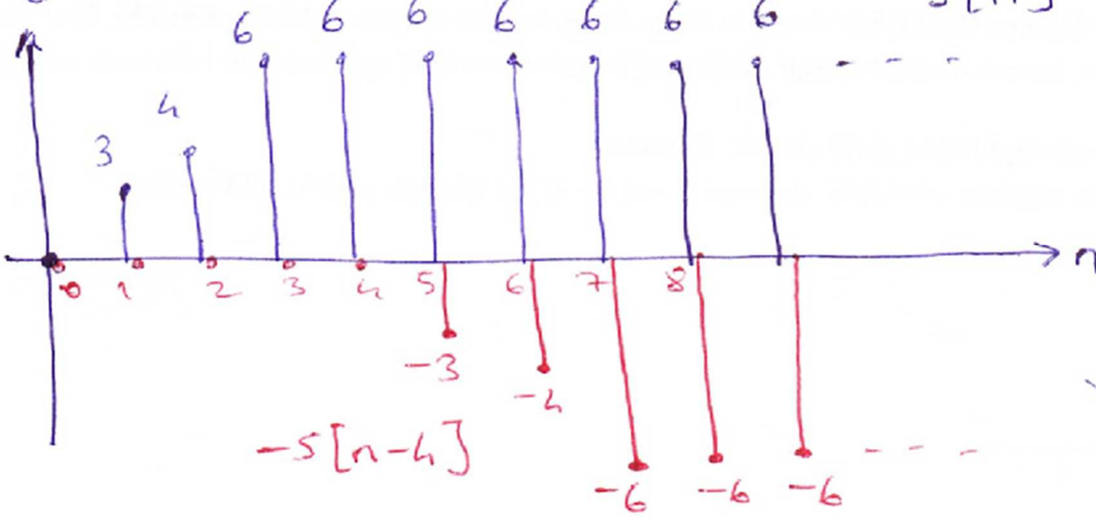
$A = \dfrac{3(-1)+2}{-1+2} = -1$ $\qquad$ $B = \dfrac{3(-2)+2}{-2+1} = 4$

$h(t) = -e^{-t}u(t) + 4e^{-2t}u(t)$

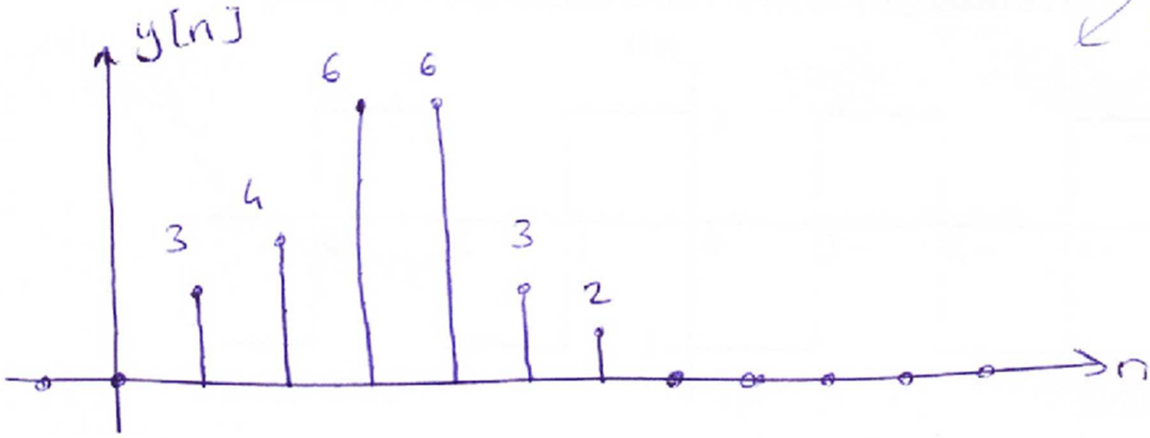
1) c) Diğer yol

$x[n] = u[n] - u[n-4]$

$y[n] = s[n] - s[n-4]$



Bileşkesi



BSS-F-2016-CA-3

4) $H(z) = \frac{4z-1}{z^2-1{,}5z+0{,}56} = \frac{4z-1}{(z-0{,}7)(z-0{,}8)} = \frac{a}{z-0{,}7} + \frac{b}{z-0{,}8}$ $\quad |z|>0{,}8$

$a = \frac{4\times 0{,}7-1}{0{,}7-0{,}8} = -18 \qquad b = \frac{4\times 0{,}8-1}{0{,}8-0{,}7} = 22$

$H(z) = -18\, z^{-1}\frac{z}{z-0{,}7} + 22\, z^{-1}\frac{z}{z-0{,}8}\ ; \qquad |z|>0{,}8$

$h[n] = \left(-18\times 0{,}7^{n-1} + 22\times 0{,}8^{n-1}\right) u[n-1]$

$X(z) = \frac{z}{z-0{,}25}\ ; \qquad |z|>0{,}25$

$Y(z) = H(z)X(z) = \frac{4(z-0{,}25)}{(z-0{,}7)(z-0{,}8)}\cdot\frac{z}{(z-0{,}25)} = \frac{4z}{(z-0{,}7)(z-0{,}8)}$

$\frac{Y(z)}{z} = \frac{A}{z-0{,}7} + \frac{B}{z-0{,}8} \qquad A = \frac{4}{0{,}7-0{,}8} = -40$

$B = \frac{4}{0{,}8-0{,}7} = 40$

$Y(z) = 40\left(\frac{z}{z-0{,}8} - \frac{z}{z-0{,}7}\right) \longrightarrow y[n] = 40\left(0{,}8^n - 0{,}7^n\right)u[n]$

veya $Y(z) = \frac{c}{z-0{,}7} + \frac{d}{z-0{,}8}$

$c = \frac{4\times 0{,}7}{0{,}7-0{,}8} = -28 \qquad d = \frac{4\times 0{,}8}{0{,}8-0{,}7} = 32$

$Y(z) = 32\, z^{-1}\frac{z}{z-0{,}8} - 28\, z^{-1}\frac{z}{z-0{,}7} \longrightarrow y[n] = \left(32\times 0{,}8^{n-1} - 28\times 0{,}7^{n-1}\right)\cdot u[n-1]$

5) $H(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2}$

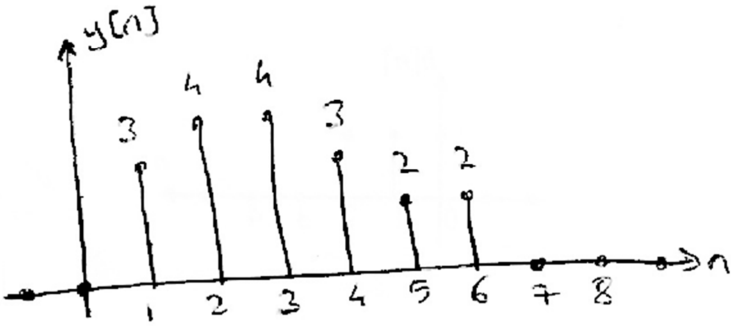
$X(z) = 3z^{-1} + z^{-2} + 2z^{-4}$

$Y(z) = H(z)X(z)$

```
      3 1 0 2   ~> z^-4
  x     1 1 1   ~> z^-2
  -------------
        3 1 0 2
      3 1 0 2
  + 3 1 0 2     ~> z^-6
  -------------
    3 4 4 3 2 2
z^-1
```

$Y(z) = 3z^{-1} + 4z^{-2} + 4z^{-3} + 3z^{-4} + 2z^{-5} + 2z^{-6}$

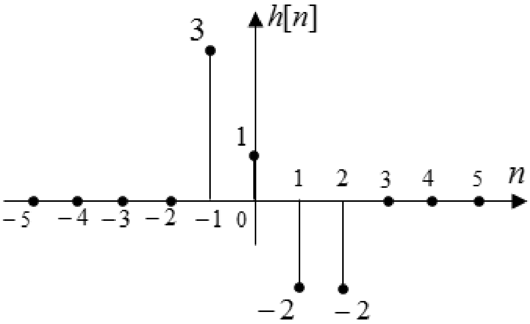
$y[1] \quad y[2] \quad \ldots \quad y[6]$

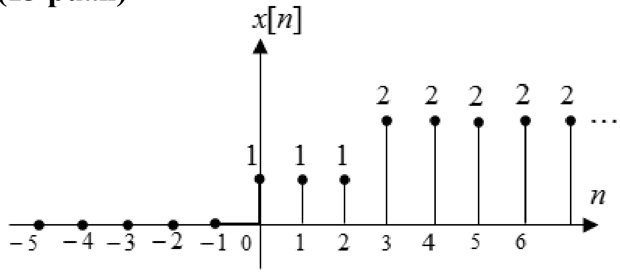


Bilgisayar Mühendislği Bölümü
SİNYALLER VE SİSTEMLER BÜTÜNLEME SINAVI SORULARI
21 Haziran 2016 Süre: 75 dakika

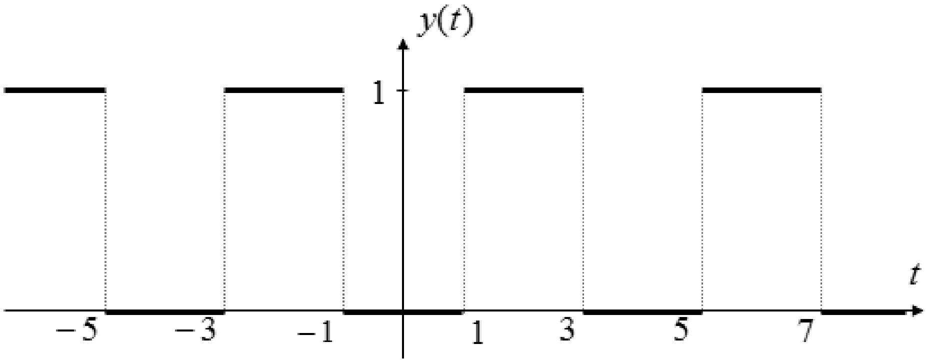
1. ve 4. sorular zorunludur. 20 puanlık sorulardan ise (2., 3. ve 5.) istediğiniz ikisini yapmanız yeterli olup fazla yaparsanız yalnızca lehinize olan ikisi hesaba katılacaktır.

1) Doğrusal zamanla değişmez (DZD) bir sistemin birim <u>darbe</u> tepkisi aşağıda soldaki şekildeki $h[n]$'dir.
a) Sistem nedensel midir, kararlı mıdır, bellekli midir? DZD sistemlere özel açıklamasını belirterek cevaplayınız. **(9 puan)**
b) Sistemin birim basamak tepkisini ($s[n]$) çiziniz. **(8 puan)**
c) Sistemin girişi aşağıda sağdaki şekildeki ise çıkışını çiziniz. **(13 puan)**





2) Aşağıda verilen $T_0 = 2$ ile periyodik $y(t)$ sinyalini Fourier serisine açınız. **(20 puan)**



3) Giriş(x)-çıkış(y) ilişkisi aşağıda verilen nedensel sistemin transfer fonksiyonunu **(5 puan)** ve birim darbe tepkisini **(15 puan)** bulunuz.

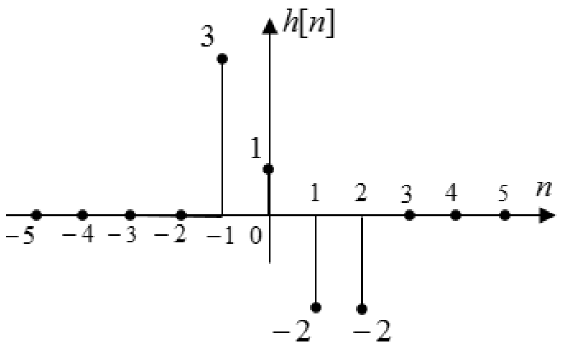
$$\ddot{y}(t) + 4\dot{y}(t) + 3y(t) = \ddot{x}(t) + 5\dot{x}(t) + 2x(t)$$

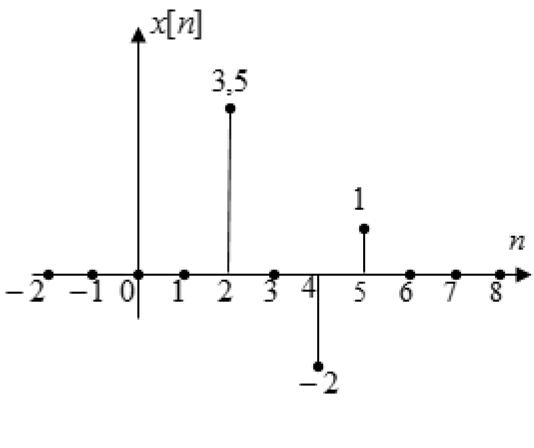
4) Giriş(x)-çıkış(y) ilişkisi

$$y[n+2] + y[n+1] - 2y[n] = 4x[n+1] - x[n]$$

ile verilen nedensel sistemin transfer fonksiyonunu **(5 puan)**, birim darbe tepkisini **(10 puan)** ve $x[n] = (0{,}25)^n u[n]$ girişi için enerjisiz başlangıçlı çıkışını **(15 puan)** Z ve/veya Z^{-1} dönüşümleriyle bulunuz.

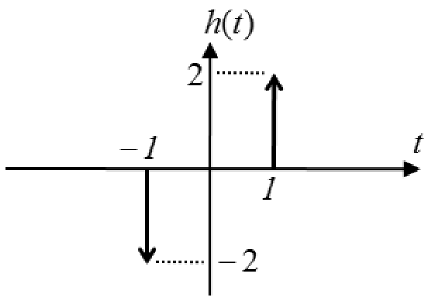
5) Birim darbe tepkisi $h[n]$ ile girişi $x[n]$ aşağıda verilen DZD sistemin çıkışı $y[n]$'dir. $h[n]$, $x[n]$ ve $y[n]$'in Z dönüşümlerini bulunuz ve $y[n]$'i çiziniz. **(20 puan)**

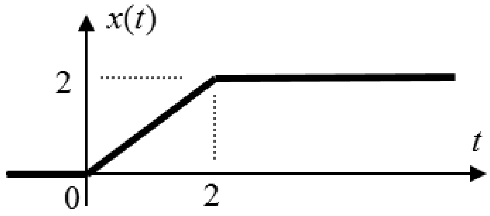




SİNYALLER VE SİSTEMLER FİNAL SINAVI SORULARI
03 Ocak 2017 Süre: 80 dakika

1) Doğrusal zamanla değişmez (DZD) bir sistemin birim darbe tepkisi aşağıda $h(t)$ şeklinde verilmiştir.





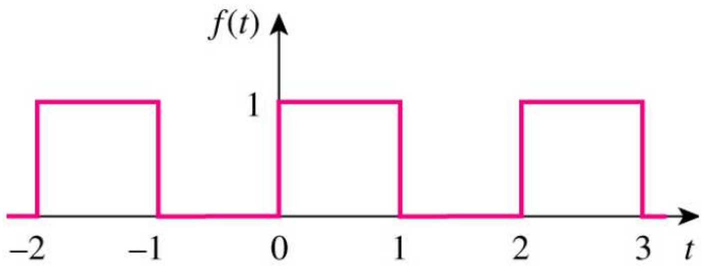
a) Bu sistem bellekli midir, nedensel midir, kararlı mıdır? DZD sistemlere özel gerekçesini belirterek cevaplayınız. **(3×3 puan)**
b) Sistemin girişine yukarıda $x(t)$ şeklinde verilen giriş uygulanırsa çıkış ne olur? Çiziniz. **(11 puan)**

2) Giriş(x)-çıkış(y) ilişkisi $4y[n+2]-4y[n+1]+y[n]=12x[n-5]$ ile verilen nedensel sistemin birim darbe tepkisini bulunuz. **(15 puan)**

3) Giriş(x)-çıkış(y) ilişkisi $\ddot{y}(t)+5\dot{y}(t)+4y(t)=5\dot{x}(t)+4x(t)$ ile verilen nedensel sistemin transfer fonksiyonunu ve birim darbe tepkisini bulunuz. **(5+10 puan)**

4) $x[n]=\left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n]-\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1]$ ile verilen sinyalin z dönüşümünü bulunuz, yakınsaklık bölgesini, kutup ve sıfırlarını z düzleminde gösteriniz (z dönüşümü tablosunda bulunan sinyallerin temel z dönüşümü ifadelerini biliyorsanız kullanabilirsiniz) **(10+10+5 puan)**

5) Aşağıda verilen $f(t)=f(t+2)\ \forall t$ sinyalinin formülünü yazınız. Sinyali Fourier serisine açınız (katsayıların genel ifadelerini bulunuz). Katsayıların sıfırdan farklı en az 3 tanesini yerine koyarak seriyi açık şekilde yazınız. **(5+15+5 puan)**



BAŞARILAR

SİNYALLER VE SİSTEMLER FİNAL
CEVAP ANAHTARI
03 Ocak 2017

1) a) Bazı $t \neq 0$ için $h(t) \neq 0$ olduğundan belleklidir.

Bazı $t<0$ için ($t=-1$'de) $h(t) \neq 0$ olduğundan, nedensel değildir.

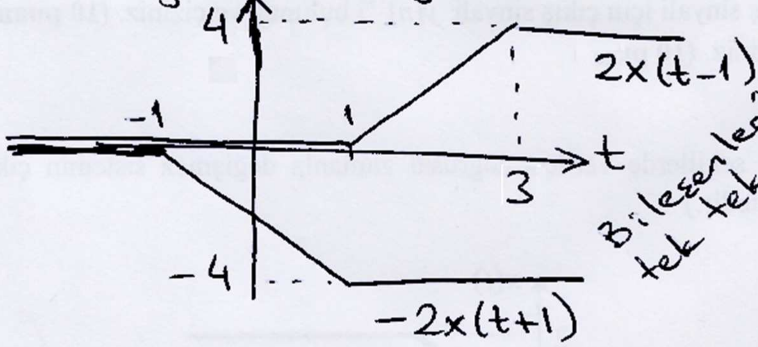
$$\int_{t=-\infty}^{+\infty} |h(t)|\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \big(2\delta(t+1) + 2\delta(t-1)\big)\,dt = 4 < \infty$$

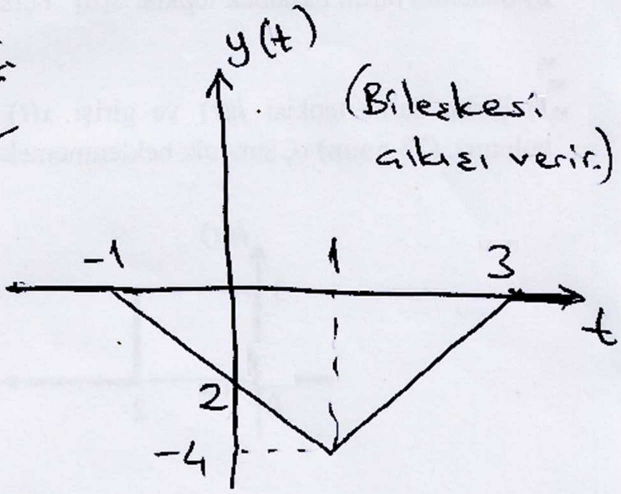
Sonlu olduğundan kararlıdır.

b) $h(t) = -2\delta(t+1) + 2\delta(t-1)$ olduğundan $\delta \to x$, $h \to y$

$y(t) = -2x(t+1) + 2x(t-1)$ bulunur.

Konvolüsyonla yapsaydık da $x(t) * \delta(t-t_0) = x(t-t_0)$ olduğundan aynı ifadeyi kolayca bulurduk.





2) <u>1. yol:</u> Sağda tek terim olduğu için

$n>5$ için: $4h[n+2] - 4h[n+1] + h[n] = 0$

denklemi $h[6]=0$ ve $h[7] = 12/4 = 3$ için

çözülüp $u[n-7]$ veya $u[n-6]$ ile çarpılır.

$4\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0 \;\rightarrow\; \lambda_1 = \lambda_2 = 1/2$

$$h[n] = a_1 \cdot \frac{1}{2^{n-7}} + a_2 n \cdot \frac{1}{2^{n-7}}$$

$$\left.\begin{aligned} h[6] &= 2a_1 + 12a_2 = 0 \\ h[7] &= a_1 + 7a_2 = 3 \end{aligned}\right\} \quad (12-14)a_2 = 0-6$$

$$a_2 = 3 \rightarrow a_1 = 3 - 7a_2$$

$$a_1 = -18$$

Tüm zamanlar için $h[n] = (-18+3n) \cdot \frac{1}{2^{n-7}} u[n-7]$

2. yol: $H(z) = \frac{12z^{-5}}{4z^2-4z+1}$

$$H(z) = \frac{3z^{-5}}{(z-\frac{1}{2})^2} = 3z^{-6} \cdot \frac{z}{(z-\frac{1}{2})^2} \qquad |z| > \frac{1}{2}$$

$\frac{z}{(z-\frac{1}{2})^2}$ terimini $-z\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{z-\frac{1}{2}}\right)$ cinsinden yazmalıyız.

$$= -z\frac{1\cdot(z-\frac{1}{2}) - 1\cdot z}{(z-\frac{1}{2})^2} = \frac{\frac{1}{2}z}{(z-\frac{1}{2})^2}$$

Yani $H(z) = \underbrace{6z^{-6}}_{\text{6 adım geriletir.}} \cdot \underbrace{\left[-z\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{z-\frac{1}{2}}\right)\right]}_{\mathcal{Z}\{\frac{1}{2^n} n u[n]\}}$

$$h[n] = 6(n-6)\frac{1}{2^{n-6}} u[n-6]$$

Dikkat edilirse önceki yolla bulunana eşit olduğu görülür.

3) Transfer fonksiyon : $H(\omega) = \dfrac{5(j\omega)+4}{(j\omega)^2+5(j\omega)+4}$

$$= \frac{5(j\omega)+4}{(j\omega+1)(j\omega+4)} = \frac{A}{j\omega+1} + \frac{B}{j\omega+4}$$

$$A = \frac{5(-1)+4}{-1+4} = \frac{-1}{3} \qquad B = \frac{5(-4)+4}{-4+1} = \frac{16}{3}$$

$$h(t) = \left(-\frac{1}{3}e^{-t} + \frac{16}{3}e^{-4t}\right)u(t)$$

4) $\mathcal{Z}\left\{\left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n]\right\} = \dfrac{z}{z-\left(-\frac{1}{3}\right)}$; $YB_1 : |z| > \left|-\frac{1}{3}\right|$

yani $|z| > \frac{1}{3}$

$\mathcal{Z}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1]\right\} = \dfrac{z}{z-\frac{1}{2}}$; $YB_2 : |z| < \frac{1}{2}$

çünkü bu bileşen sol taraflı sinyal.

$X(z) = \dfrac{z}{z+\frac{1}{3}} + \dfrac{z}{z-\frac{1}{2}}$; $YB = YB_1 \cap YB_2$

yani $\frac{1}{3} < |z| < \frac{1}{2}$

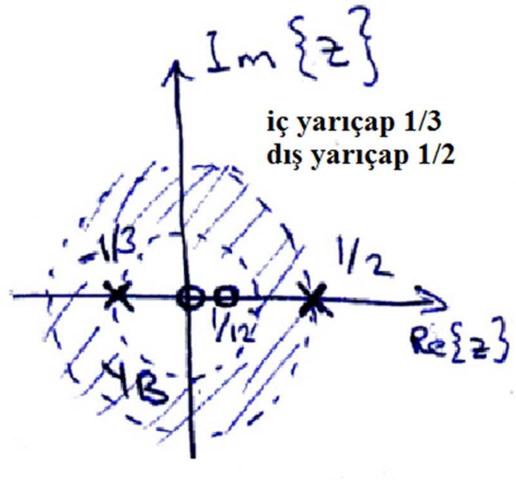
$$X(z) = \frac{z^2 - \frac{1}{2}z + z^2 + \frac{1}{3}z}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z+\frac{1}{3}\right)}$$

$$X(z) = \frac{2z^2 - \frac{1}{6}z}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z+\frac{1}{3}\right)} = \frac{2z\left(z-\frac{1}{12}\right)}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z+\frac{1}{3}\right)}$$

Sıfırlar : 0 ve 1/12 (payın kökleri)

Kutuplar : $\frac{1}{2}$ ve $-1/3$ (paydanın kökleri)

Karmaşık düzlemde sıfırlar "o", kutuplar "x" işaretiyle gösterilir.



5) 5 Puan

$T=2$ $\qquad \omega = \frac{2\pi}{T} = \pi$

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0<t<1 \\ 0, & 1<t<2 \end{cases}$$

15 Puan

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)dt = \frac{2}{2}\int_0^2 f(t)dt = \int_0^1 1dt + \int_1^2 0dt = 1-0 = 1$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^2 f(t)\cos n\omega t dt = \int_0^1 1\cos n\pi t dt + \int_1^2 0dt$$

$$= \left[\frac{\sin n\pi t}{n\pi}\right]_0^1 = \frac{\sin n\pi}{n\pi} = 0$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^2 f(t)\sin n\omega t dt = \int_0^1 1\sin n\pi t dt + \int_1^2 0dt$$

$$= \left[-\frac{\cos n\pi t}{n\pi}\right]_0^1$$

$\cos n\pi = (-1)^n$ olduğundan $\quad b_n = \frac{1-(-1)^n}{n\pi} \Rightarrow \begin{cases} 2/n\pi & n\ \text{tek} \\ 0 & n\ \text{çift} \end{cases}$

Sonuç (5 Puan)

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega t + b_n\sin n\omega t)$$

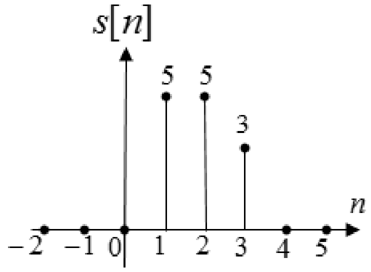
$$= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sin\pi t + \frac{2}{3\pi}\sin 3\pi t + \cdots$$

$f(t)-\frac{1}{2}$ 'nin tek sinyal olduğunu söyleyerek a_0 hariç $a_n=0$ yazabilirdiniz.

Karmaşık seri: $f(t) = \ldots + j\frac{1}{\pi}e^{-j\pi t} + \frac{1}{2} - j\frac{1}{\pi}e^{j\pi t} + \ldots$

Bilgisayar Mühendislği Bölümü
SİNYALLER VE SİSTEMLER FİNAL SINAVI SORULARI
01 Haziran 2017 Süre: 75 dakika

1) Yanda birim basamak tepkisi verilen doğrusal zamanla değişmez (DZD) sistemin birim darbe tepkisini çiziniz **(10 puan)**. Bu sistem bellekli midir, nedensel midir, kararlı mıdır? DZD sistemlere özel gerekçeleriyle cevaplayınız **(9 puan).**

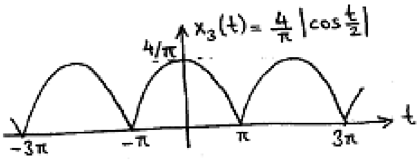


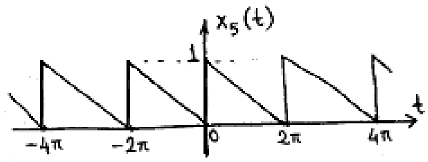
2) Giriş(x)-çıkış(y) ilişkisi aşağıda verilen nedensel sistemin birim darbe tepkisini bulunuz. **(13 puan)**
(Dikkat: Fourier dönüşümüyle yapmanız tavsiye edilmez.)

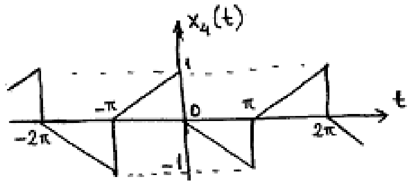
$$\ddot{y}(t) + 9y(t) = 2x(t)$$

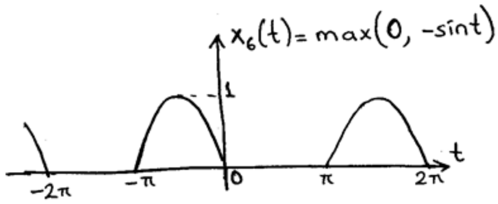
3) Fourier serisi ile katsayı formülleri aşağıda verilen sinyal, en az iki periyodu çizilmiş şekillerdeki sinyallerden hangisine ait olabilir? Nedenlerini belirterek yazınız **(10 puan)**.
(Dikkat: Bu soruda integralli bir şey yazılması istenmiyor. Simetri gibi özellikler kullanınız.)

$$x(t) = \frac{1}{2} + \left\{ \frac{1}{\pi}\sin t + \frac{1}{2\pi}\sin 2t + \frac{1}{3\pi}\sin 3t + \ldots \right\}, \qquad a_0 = 1, \quad a_k = 0 \quad (k \neq 0), \qquad b_k = \frac{1}{k\pi}.$$







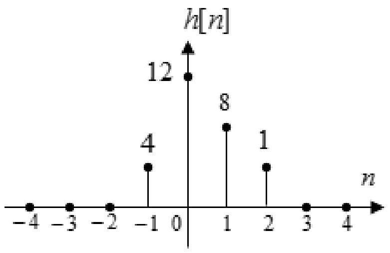


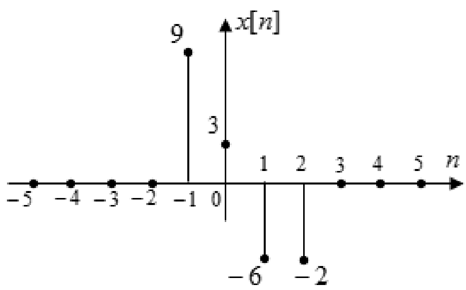
4) Giriş(x)-çıkış(y) ilişkisi

$$y[n+2] - y[n+1] + 0{,}24\, y[n] = 4x[n+1] - 2x[n]$$

ile verilen nedensel sistemin transfer fonksiyonunu **(5 puan)**, birim darbe tepkisini **(9 puan)** ve $x[n] = (0{,}5)^n u[n]$ girişi için enerjisiz başlangıçlı çıkışını **(14 puan)** Z ve/veya Z^{-1} dönüşümleriyle bulunuz.

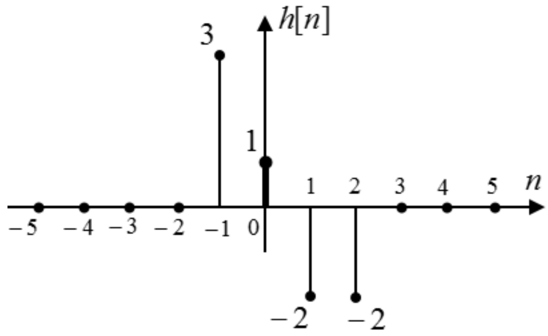
5) Birim darbe tepkisi $h[n]$ ile girişi $x[n]$ aşağıda verilen DZD sistemin çıkışı $y[n]$'dir. $h[n]$, $x[n]$ ve $y[n]$'in Z dönüşümlerini bulunuz ve $y[n]$'i <u>çiziniz</u>. **(20 puan)**





6) $x(t)$'nin Fourier dönüşümüne $X(\omega)$ dersek $\dfrac{dx(t)}{dt}$'nin Fourier dönüşümü ne olur? İspatlayınız. **(2+8 puan)**

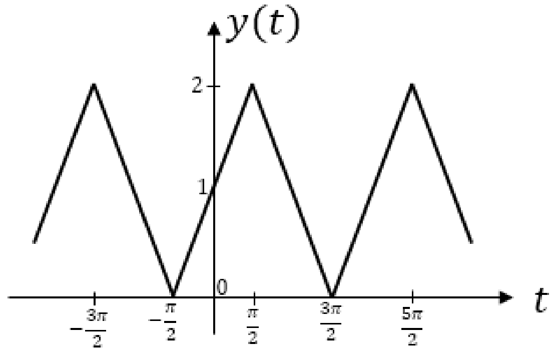
Bilgisayar Mühendislği Bölümü
SİNYALLER VE SİSTEMLER BÜTÜNLEME SINAVI SORULARI
23 Haziran 2017 Süre: 75 dakika



1) Yandaki şekilde birim darbe tepkisi verilen doğrusal zamanla değişmez (DZD) sistem bellekli midir, nedensel midir, kararlı mıdır? DZD sistemlere özel gerekçeleriyle cevaplayınız **(9 puan).** Bu sistemin birim basamak tepkisini ($s[n]$) çiziniz **(10 puan)**.

2) Giriş(x)-çıkış(y) ilişkisi aşağıda verilen nedensel sistemin birim darbe tepkisini bulunuz. **(13 puan)**
(Dikkat: Fourier dönüşümüyle yapmanız tavsiye edilmez.)

$$5\dot{y}(t) + 80\,y(t) = 100\,x(t)$$



3) Yanda şekli verilen sinyalin Fourier serisi, aşağıdakilerden hangisi olabilir? Nedenlerini belirterek yazınız **(10 puan)**.
(Dikkat: Bu soruda integralli bir şey yazılması istenmiyor. Simetri gibi özellikler kullanınız.)

$$y_P(t) = 1 + \frac{8}{\pi^2}\left\{\cos t + \frac{1}{9}\cos 3t + \frac{1}{25}\cos 5t + \ldots\right\}$$

$$y_B(t) = 1 + \frac{8}{\pi^2}\left\{\cos t - \frac{1}{4}\cos 2t + \frac{1}{9}\cos 3t - \frac{1}{16}\cos 4t + - \ldots\right\}$$

$$y_M(t) = 1 + \frac{8}{\pi^2}\left\{\sin t - \frac{1}{9}\sin 3t + \frac{1}{25}\sin 5t - + \ldots\right\}$$

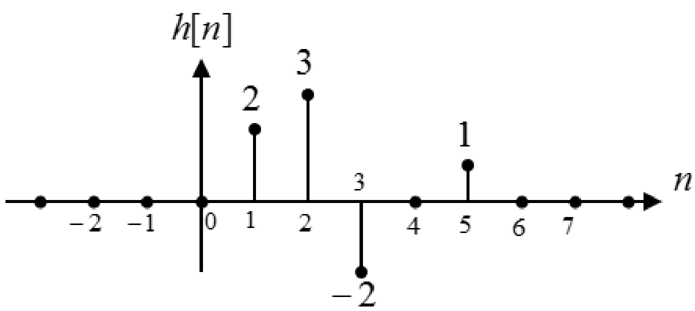
$$y_V(t) = 1 + \frac{8}{\pi^2}\left\{\sin t + \frac{1}{4}\sin 2t + \frac{1}{9}\sin 3t + \frac{1}{16}\sin 4t + \ldots\right\}$$

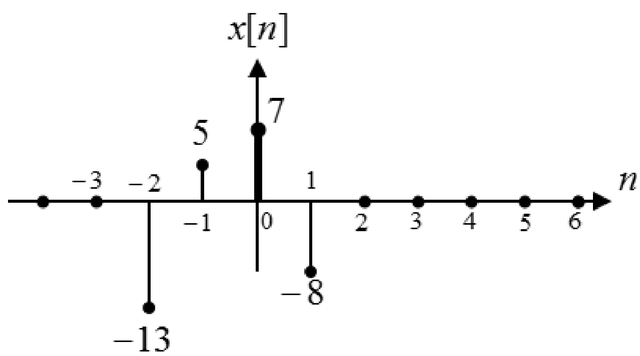
4) Giriş(x)-çıkış(y) ilişkisi

$$y[n+2] - y[n+1] + 0{,}21\,y[n] = 4x[n+1] - 2x[n]$$

ile verilen nedensel sistemin transfer fonksiyonunu **(5 puan)**, birim darbe tepkisini **(9 puan)** ve $x[n] = (0{,}5)^n\,u[n]$ girişi için enerjisiz başlangıçlı çıkışını **(14 puan)** Z ve/veya Z^{-1} dönüşümleriyle bulunuz.

5) Birim darbe tepkisi $h[n]$ ile girişi $x[n]$ aşağıda verilen DZD sistemin çıkışı $y[n]$'dir. $h[n]$, $x[n]$ ve $y[n]$'in Z dönüşümlerini bulunuz ve $y[n]$'i <u>çiziniz</u>. **(20 puan)**





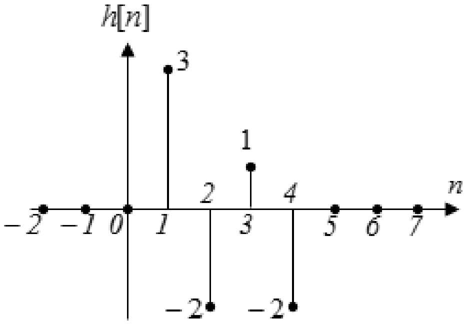
6) $x(t)$'nin Fourier dönüşümüne $X(\omega)$ dersek $\dfrac{dx(t)}{dt}$'nin Fourier dönüşümü ne olur? İspatlayınız. **(2+8 puan)**

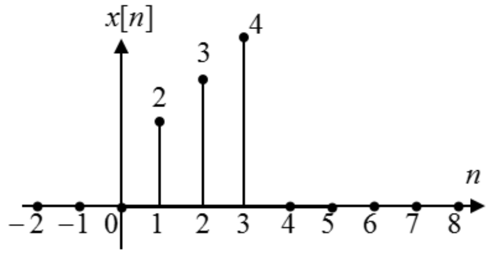
SİNYALLER VE SİSTEMLER FİNAL SINAVI SORULARI

02.01.2018 Süre: 60 dakika

Sorulardan istediğiniz 5 tanesini cevaplayınız. Fazla cevapların lehinize 5 tanesi dikkate alınır.

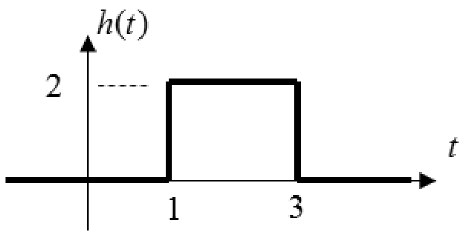
1) Doğrusal ve zamanla değişmez (DZD) bir sistemin birim darbe tepkisi $h[n]$ ve girişi $x[n]$ şekillerde verilmiştir. $h[n]$, $x[n]$ ve sistem çıkışı $y[n]$ 'in her birinin Z-dönüşümlerini bulunuz ve $y[n]$'i çiziniz. **(20 puan)**



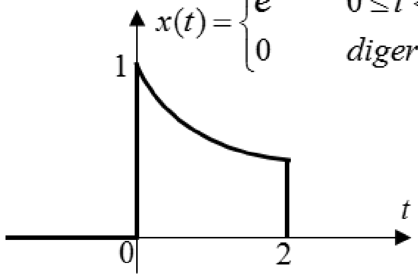


2) DZD bir sistemin birim darbe tepkisi $h[n]$ yukarıda verilmiştir. Bu sistemin birim basamak tepkisi $s[n]$'i çiziniz **(11 puan)**. Bu sistem nedensel midir, kararlı mıdır, bellekli midir? DZD sistemlere özel ifadelerle gerekçesini ortaya koyarak cevaplayınız **(9 puan)**.

3) DZD bir sistemin birim darbe tepkisi $h(t)$ ve girişi $x(t)$ aşağıdaki şekillerde verilmiştir. Sistem çıkışı $y(t)$'yi bulunuz. **(20 puan)**

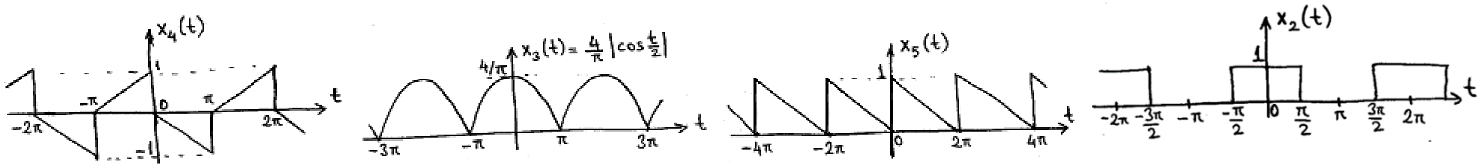


$$x(t)=\begin{cases} e^{-2t} & 0\le t<2 \\ 0 & diger \end{cases}$$



4) Fourier serisi ile katsayı formülleri aşağıda verilen sinyal, en az iki periyodu çizilmiş şekillerdeki sinyallerden hangisine ait olabilir? Nedenlerini belirterek yazınız **(10 puan)**. Bu sinyalin 4. ve daha yüksek numaralı harmoniklerini <u>ihmal</u> ederek kare ortalamasının karekökü (rms) değerini açık işlem haliyle yazınız **(10 puan).** (Dikkat: Bu sorunun iki şıkkında da integralli bir şey yazılması istenmiyor.)

$$x(t)=\frac{1}{2}+\left\{\frac{2}{\pi}\cos t-\frac{2}{3\pi}\cos 3t+\frac{2}{5\pi}\cos 5t\ -+\ldots\right\}\ ,\quad b_k=0\,,\qquad a_0=1\,,\qquad a_k=\begin{cases}\dfrac{2}{k\pi}(-1)^{(k-1)/2} & k \text{ tekse}\\ 0 & k \text{ çiftse}\quad (k\neq 0)\end{cases}$$



5) $x[0]=12$, $x[1]=0$, $x[2]=-4$, $x[3]=0$ ve $N=4$ ile periyodik olan $x[n]$ sinyalinin Fourier serisini, katsayılarını bulup yerine koyarak yazınız. **(20 puan)**

6) Giriş(x)-çıkış(y) ilişkisi

$$y[n+2]-4y[n]=3x[n+2]-x[n+1]$$

ile verilen nedensel sistemin transfer fonksiyonunu **(5 puan)** ve birim darbe tepkisini **(15 puan)** bulunuz.

7) Transfer fonksiyonu $H(\omega)=\dfrac{j\omega+1}{j\omega+2}$ olan nedensel sistemin birim darbe tepkisini **(8 puan)** ve $x(t)=e^{-3t}u(t)$ girişi için çıkışını **(12 puan)** bulunuz.

BAŞARILAR … **Yard. Doç. Dr. Ata SEVİNÇ**

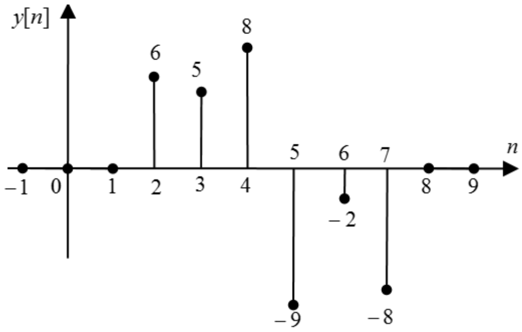
SİNYALLER VE SİSTEMLER FİNAL CEVAP ANAHTARI
02.01.2018

1) $H(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]\,z^{-n}=3z^{-1}-2z^{-2}+z^{-3}-2z^{-4}$ $\qquad$ $X(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\,z^{-n}=2z^{-1}+3z^{-2}+4z^{-3}$

Çıkış $y[n]=x[n]*h[n]$. Bunun Z dönüşümü alınırsa, $Y(z)=H(z)X(z)$ olur.

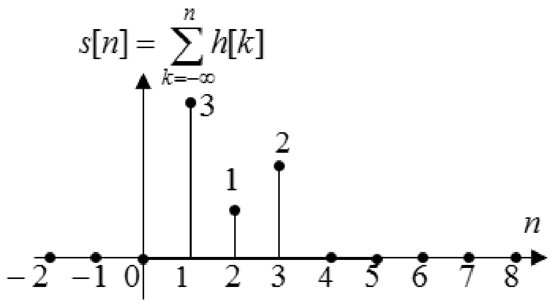
$$\begin{array}{rrrrrrl}
 & & 3 & -2 & 1 & -2 & \rightarrow \text{ sonuncusu } z^{-4}\text{'ün katsayısı}\\
\times & & & & 2 & 3 & 4 \quad \rightarrow \text{ sonuncusu } z^{-3}\text{'ün katsayısı}\\
\hline
 & & 12 & -8 & 4 & -8 & \\
 & 9 & -6 & 3 & -6 & & \\
+\;6 & -4 & 2 & -4 & & & \\
\hline
6 & 5 & 8 & -9 & -2 & -8 & \rightarrow \text{ sonuncusu } z^{-4-3}=z^{-7}\text{'in}
\end{array}$$

katsayısı. Soldakiler daha büyük üslülerin katsayılarıdır. Buna göre $Y(z)=6z^{-2}+5z^{-3}+8z^{-4}-9z^{-5}-2z^{-6}-8z^{-7}$ bulunur.



Bunu da $Y(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[n]\,z^{-n}=y[2]z^{-2}+y[3]z^{-3}+y[4]z^{-4}+y[5]z^{-5}+y[6]z^{-6}+y[7]\cdot z^{-7}$ biçiminde düşünerek yukarıda sağda çizilen $y[n]$ sinyalini buluruz.

2)



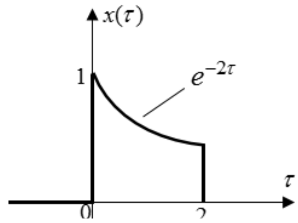
Sistem özellikleri için $s[n]$ 'e değil $h[n]$ 'e bakarız.

$\forall n<0$ için $h[n]=0$ $\rightarrow$ nedensel.

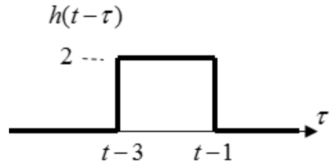
$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| = 8 < \infty$ olduğundan kararlı.

Bazı $n \neq 0$ için $h[n]\neq 0$ $\rightarrow$ bellekli.

3) $y(t)=x(t)*h(t)=\int_{\tau=-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$



$t-1<0$ yani $t<1$ ise: $x(\tau)h(t-\tau)=0 \quad \forall\,\tau \quad \rightarrow \quad y(t)=\int_{\tau=-\infty}^{+\infty} 0\,d\tau = 0$



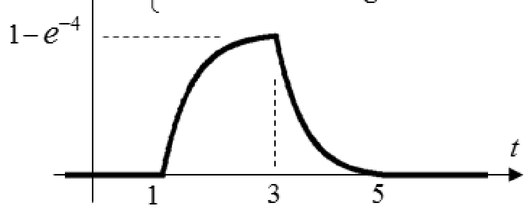
$0\le t-1<2$ yani $1\le t<3$ ise: $x(\tau)h(t-\tau)=\begin{cases} 2\cdot e^{-2\tau} & 0\le\tau\le t-1 \\ 0 & \text{diger}\end{cases}$

$$\rightarrow \quad y(t)=\int_{\tau=0}^{t-1} 2e^{-2\tau}d\tau=(-e^{-2\tau})\Big|_0^{t-1}=1-e^{-2(t-1)}$$

$$y(t)=\begin{cases} 1-e^{-2(t-1)} & 1\le t<3 \\ e^{-2(t-3)}-e^{-4} & 3\le t<5 \\ 0 & \text{diger}\end{cases}$$

$0\le t-3<2$ yani $3\le t<5$ ise: $x(\tau)h(t-\tau)=\begin{cases} 2\cdot e^{-2\tau} & t-3\le\tau\le 2 \\ 0 & \text{diger}\end{cases}$

$$\rightarrow \quad y(t)=\int_{\tau=t-3}^{2} 2e^{-2\tau}d\tau=(-e^{-2\tau})\Big|_{t-3}^{2}=e^{-2(t-3)}-e^{-4}$$



$t-3\ge 2$ yani $5\le t$ ise: $x(\tau)h(t-\tau)=0 \quad \forall\,\tau \quad \rightarrow \quad y(t)=\int_{\tau=-\infty}^{+\infty} 0\,d\tau = 0$

4) $x_4(t)$ olamaz, çünkü ortalaması sıfırdır. Halbuki serimizde DC bileşen var. Üstelik serimiz çift, bu çift değil.

$x_3(t)$ olamaz, çünkü DC bileşeni atılsa kalan kısmı tek harmonik simetrili olmuyor. Halbuki serimizdeki DC bileşen hariç kısım tek harmonik simetrili. Zaten ortalaması da tutmuyor.

$x_5(t)$ olamaz, çünkü çift sinyal değil. Halbuki serimizde sin terimleri olmadığı için çift bir sinyale ait.

$x_2(t)$ olabilir, çünkü çifttir, simetriden ortalamasının 1/2 olduğu açıkça görülüyor, ki serimizde de DC bileşen 1/2. Ayrıca DC bileşen atılırsa yani şekil 1/2 aşağı kaydırılırsa periyodun bir yarısı diğer yarısının negatifi olur; yani DC bileşen hariç tek harmonik simetrili, serimizdeki gibi.

Dolayısıyla $x(t) = x_2(t)$. Ayrıca Parseval eşitliğinden: $X_{rms} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{(2/\pi)^2 + (-2/(3\pi))^2}{2}}$

5) $\omega_o = \frac{2\pi}{N} = \frac{\pi}{2}$ olmak üzere $x[n] = \sum_{k=0}^{3} c_k e^{jk\pi n/2}$ Fourier serisidir. Katsayılar şöyle bulunur:

$$c_k = \frac{1}{4} \cdot \sum_{n=0}^{3} x[n] e^{-jk\pi n/2} = \frac{1}{4}\left(x[0]e^{-j\mathbf{k}\pi 0/2} + x[2]e^{-j\mathbf{k}\pi 2/2} \right) \text{ çünkü } x[1] = x[3] = 0 .$$

Ortalaması $\frac{12+0-4+0}{4} = 2 = c_0$

$$c_1 = \frac{1}{4} \cdot \sum_{n=0}^{3} x[n] e^{-j\mathbf{1}\pi n/2} = \frac{12 \cdot \overbrace{e^{-j\mathbf{1}\pi \cdot 0/2}}^{1} - 4 \cdot \overbrace{e^{-j\mathbf{1}\pi \cdot 2/2}}^{-1}}{4} = \frac{12+4}{4} = 4 = c_1 \qquad \rightarrow \quad c_1^* = c_3 = 4$$

$$c_2 = \frac{1}{4} \cdot \sum_{n=0}^{3} x[n] e^{-j\mathbf{2}\pi n/2} = \frac{12\overbrace{e^{-j\mathbf{2}\pi \cdot 0/2}}^{1} - 4\overbrace{e^{-j\mathbf{2}\pi \cdot 2/2}}^{1}}{4} = \frac{12-4}{4} = 2$$

Tüm katsayıları Fourier serisinde yerine yazalım:

$$x[n] = \sum_{k=0}^{3} c_k e^{jk\pi n/2} = c_0 e^{j\mathbf{0}\pi n/2} + c_1 e^{j\mathbf{1}\pi n/2} + c_2 e^{j\mathbf{2}\pi n/2} + c_3 \overbrace{e^{j\mathbf{3}\pi n/2}}^{\equiv -j\pi n/2} = \boxed{x[n] = 2 + 4e^{j\pi n/2} + 2e^{j\pi n} + 4e^{-j\pi n/2}}$$

6) Transfer fonksiyon: $H(z) = \frac{3z^2 - z}{z^2 - 4} \qquad \rightarrow \quad \frac{H(z)}{z} = \frac{3z-1}{(z-2)(z+2)} = \frac{A}{(z-2)} + \frac{B}{(z+2)}$

Köklerden ve nedensellikten anlaşıldığına göre $YB: |z| > 2$. $A = \frac{3 \cdot 2 - 1}{2+2} = \frac{5}{4}$, $B = \frac{3 \cdot (-2) - 1}{-2-2} = \frac{7}{4}$

$$\rightarrow \quad H(z) = \frac{5}{4} \cdot \frac{z}{z-2} + \frac{7}{4} \cdot \frac{z}{z-(-2)} \quad ; \quad YB: |z| > 2 \quad \rightarrow \quad \boxed{h[n] = \left(\frac{5}{4}\right) \cdot 2^n u[n] + \left(\frac{7}{4}\right) \cdot (-2)^n u[n]}$$

Diğer bir yolla da yapılabilir: $H(z) = 3 + \frac{a}{(z-2)} + \frac{b}{(z+2)}$, $a = \frac{3 \cdot 2^2 - 2}{2+2} = \frac{5}{2}$, $b = \frac{3 \cdot (-2)^2 - (-2)}{-2-2} = -\frac{7}{2}$

$$H(z) = 3 \cdot 1 + \frac{5}{2} z^{-1} \frac{z}{z-2} - \frac{7}{2} z^{-1} \frac{z}{z-(-2)}$$

1'in ters dönüşümü birim darbe ve z^{-1} çarpanı bir adım geriletici olduğundan

$\boxed{h[n] = 3\delta[n] + \frac{1}{2}\left(5 \cdot 2^{n-1} - 7 \cdot (-2)^{n-1}\right) \cdot u[n-1]}$ Diğer çözüm ifadesine eşit olduğunu görünüz.

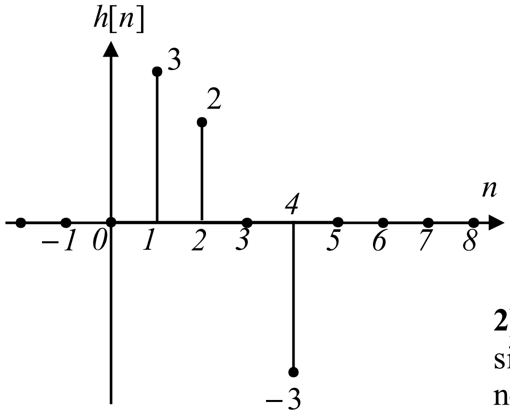
7) $H(\omega) = \frac{j\omega + 1}{j\omega + 2} = 1 - \frac{1}{j\omega + 2} \quad \rightarrow$ Birim darbe tepkisi: $\boxed{h(t) = \delta(t) - e^{-2t} u(t)}$

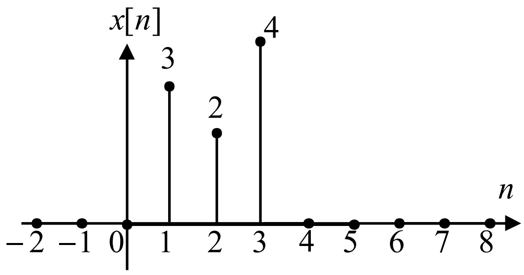
$$X(\omega) = \frac{1}{j\omega + 3} \quad \rightarrow \quad Y(\omega) = H(\omega) X(\omega) = \frac{j\omega + 1}{(j\omega + 3)(j\omega + 2)} = \frac{A}{j\omega + 3} + \frac{B}{j\omega + 2}$$

$$A = \frac{-3+1}{-3+2} = 2 \ , \quad B = \frac{-2+1}{-2+3} = -1 \quad \rightarrow \quad \boxed{y(t) = \left(2e^{-3t} - e^{-2t}\right) u(t)}$$

SİNYALLER VE SİSTEMLER BÜTÜNLEME SINAVI SORULARI
19.01.2018 Süre: 60 dakika
Sorulardan istediğiniz 5 tanesini cevaplayınız. Fazla cevapların lehinize 5 tanesi dikkate alınır.

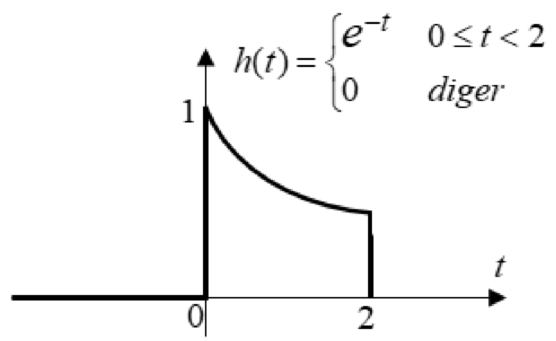
1) Doğrusal ve zamanla değişmez (DZD) bir sistemin birim darbe tepkisi $h[n]$ ve girişi $x[n]$ aşağıdaki şekillerde verilmiştir. $h[n]$, $x[n]$ ve sistem çıkışı $y[n]$ 'in her birinin Z-dönüşümlerini bulunuz ve $y[n]$'i çiziniz. **(20 puan)**

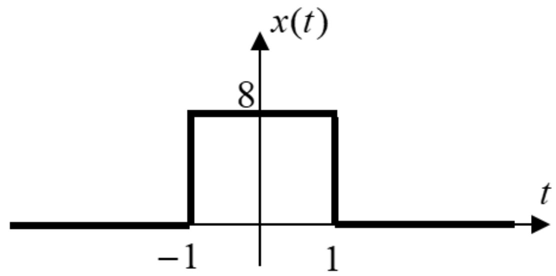




2) DZD bir sistemin birim darbe tepkisi $h[n]$ sol yukarıda verilmiştir. Bu sistemin birim basamak tepkisi $s[n]$'i çiziniz **(11 puan)**. Bu sistem nedensel midir, kararlı mıdır, bellekli midir? DZD sistemlere özel ifadelerle gerekçesini ortaya koyarak cevaplayınız **(9 puan)**.

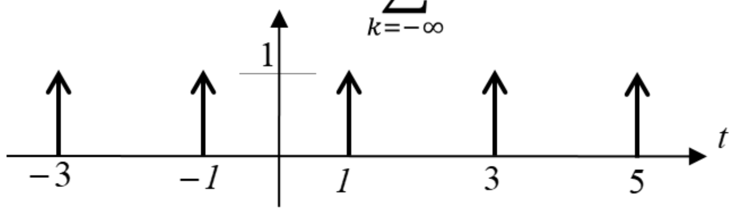
3) DZD bir sistemin birim darbe tepkisi $h(t)$ ve girişi $x(t)$ aşağıdaki şekillerde verilmiştir. Sistem çıkışı $y(t)$'yi bulunuz. **(20 puan)**





4) Yandaki şekilde verilen $T_0 = 2$ periyotlu $y(t)$ sinyalinin Fourier serisini yazınız. **(20 puan)**

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - 2k - 1)$$



5) $x[0] = 0$, $x[1] = -8$, $x[2] = 0$, $x[3] = 4$ ve $N = 4$ ile periyodik olan $x[n]$ sinyalinin Fourier serisini, katsayılarını bulup yerine koyarak yazınız. **(20 puan)**

6) Giriş(x)-çıkış(y) ilişkisi

$$y[n+2] - 0{,}25\, y[n] = 3x[n+2] + x[n+1]$$

ile verilen nedensel sistemin transfer fonksiyonunu **(5 puan)** ve birim darbe tepkisini **(15 puan)** bulunuz.

7) Transfer fonksiyonu $H(\omega) = \dfrac{j\omega + 3}{j\omega + 4}$ olan nedensel sistemin birim darbe tepkisini **(8 puan)** ve $x(t) = e^{-2t}u(t)$ girişi için çıkışını **(12 puan)** bulunuz.

BAŞARILAR … **Yard. Doç. Dr. Ata SEVİNÇ**

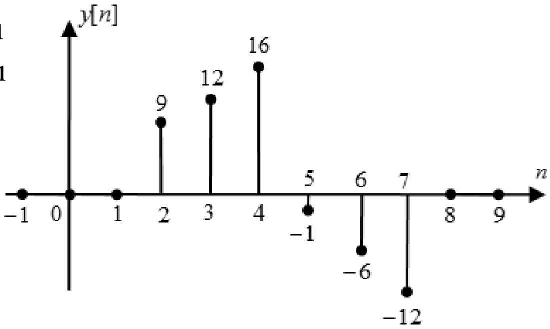
SİNYALLER VE SİSTEMLER BÜTÜNLEME CEVAP ANAHTARI
19.01.2018

1) $H(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]\,z^{-n}=3z^{-1}+2z^{-2}-3z^{-4}$ $\qquad$ $X(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\,z^{-n}=3z^{-1}+2z^{-2}+4z^{-3}$

Çıkış $y[n]=x[n]*h[n]$. Bunun Z dönüşümü alınırsa, $Y(z)=H(z)X(z)$ olur.

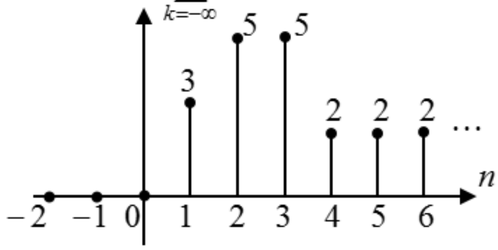
$$
\begin{array}{rrrrrrl}
 & & 3 & 2 & 0 & -3 & \rightarrow \text{ sonuncusu } z^{-4}\text{'ün katsayısı} \\
\times & & & & 3 & 2 \;\; 4 & \rightarrow \text{ sonuncusu } z^{-3}\text{'ün katsayısı} \\
\hline
 & & 12 & 8 & 0 & -12 & \\
 & 6 & 4 & 0 & -6 & & \\
+\;9 & 6 & 0 & -9 & & & \\
\hline
9 & 12 & 16 & -1 & -6 & -12 & \rightarrow \text{ sonuncusu } z^{-4-3}=z^{-7}\text{'in}
\end{array}
$$

katsayısı. Soldakiler daha büyük üslülerin katsayılarıdır. Buna göre $Y(z)=9z^{-2}+12z^{-3}+16z^{-4}-1z^{-5}-6z^{-6}-12z^{-7}$ bulunur.



Bunu da $Y(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[n]\,z^{-n}=y[2]z^{-2}+y[3]z^{-3}+y[4]z^{-4}+y[5]z^{-5}+y[6]z^{-6}+y[7]\cdot z^{-7}$ biçiminde düşünerek yukarıda sağda çizilen $y[n]$ sinyalini buluruz.

2) $s[n]=\sum_{k=-\infty}^{n} h[k]$



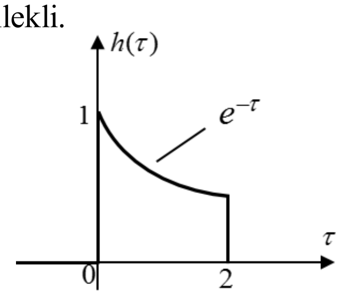
Sistem özellikleri için $s[n]$ 'e değil $h[n]$ 'e bakarız.

$\forall n<0$ için $h[n]=0$ $\rightarrow$ nedensel.

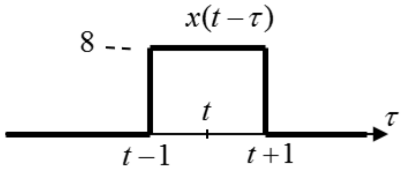
$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]|=8<\infty$ olduğundan kararlı.

Bazı $n\neq 0$ için $h[n]\neq 0$ $\rightarrow$ bellekli.

3) $y(t)=h(t)*x(t)=\int_{\tau=-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$



$t+1<0$ yani $t<-1$ ise: $h(\tau)x(t-\tau)=0 \quad \forall\tau \quad \rightarrow \quad y(t)=\int_{\tau=-\infty}^{+\infty} 0\,d\tau=0$



$0\le t+1<2$ yani $-1\le t<1$ ise: $h(\tau)x(t-\tau)=\begin{cases} 8\cdot e^{-\tau} & 0\le\tau\le t+1 \\ 0 & \text{diger}\end{cases}$

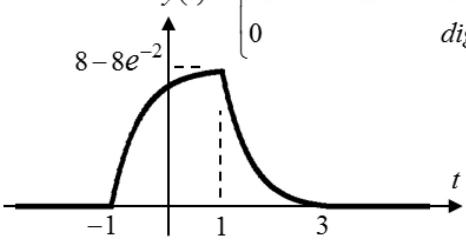
$$\rightarrow \quad y(t)=\int_{\tau=0}^{t+1} 8e^{-\tau}d\tau=(-8e^{-\tau})\Big|_0^{t+1}=8-8e^{-(t+1)}$$

$0\le t-1<2$ yani $1\le t<3$ ise: $h(\tau)x(t-\tau)=\begin{cases} 8\cdot e^{-\tau} & t-1\le\tau\le 2 \\ 0 & \text{diger}\end{cases}$

$$\rightarrow \quad y(t)=\int_{\tau=t-1}^{2} 8e^{-\tau}d\tau=(-8e^{-\tau})\Big|_{t-1}^{2}=8e^{-(t-1)}-8e^{-2}$$

$t-1\ge 2$ yani $3\le t$ ise: $h(\tau)x(t-\tau)=0 \quad \forall\tau \quad \rightarrow \quad y(t)=\int_{\tau=-\infty}^{+\infty} 0\,d\tau=0$

$$y(t)=\begin{cases} 8-8e^{-(t+1)} & -1\le t<1 \\ 8e^{-(t-1)}-8e^{-2} & 1\le t<3 \\ 0 & \text{diger}\end{cases}$$



4) $0\le t<2$ periyodu üzerinde işlem yapalım. Bu periyotta $y(t)=\delta(t-1)$ ve $\omega_0=2\pi/T_0=\pi$. Karmaşık seri katsayıları

$$c_k=\frac{1}{T_0}\int_0^2 y(t)e^{-j\pi t}dt=\frac{1}{2}\int_0^2 \underbrace{\delta(t-1)e^{-j\pi t}}_{\delta(t-1)e^{-j\pi 0}}dt=\frac{1}{2}\int_0^2 \delta(t-1)dt=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}=c_k \qquad \forall k$$

Buna göre karmaşık Fourier serisi: $y(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{j\omega_0 t}=\frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{j\pi t}$

İsteyen gerçel Fourier serisine de açabilirdi. Sinyal çift olduğundan $b_k = 0,\ a_k = 2c_k = 1\ \forall k$ ($k = 0$ dahil hiç bir k'da belirsizlik yok, yani $a_0 = 1$). Buna göre $y(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos\omega_0 t = \frac{1}{2} + 1 \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \cos\pi t$ bulunur.

(Dikkat: Çift sinyaller için a_k 'nın yarı periyot üzerinden integralli formülü burada hiç tavsiye edilmez; çünkü $t = T_0/2 = 1$ anı belirsizlik noktasıdır.)

5) $\omega_o = \frac{2\pi}{N} = \frac{\pi}{2}$ olmak üzere $x[n] = \sum_{k=0}^{3} c_k e^{jk\pi n/2}$ Fourier serisidir. Katsayılar şöyle bulunur:

$$c_k = \frac{1}{4} \cdot \sum_{n=0}^{3} x[n] e^{-jk\pi n/2} = \frac{1}{4}\left(x[1]e^{-j\mathbf{k}\pi 1/2} + x[3]e^{-j\mathbf{k}\pi 3/2} \right) \text{ çünkü } x[0] = x[2] = 0 .$$

Ortalaması $\frac{0 - 8 + 0 + 4}{4} = -1 = c_0$

$$c_1 = \frac{1}{4} \cdot \sum_{n=0}^{3} x[n] e^{-j\mathbf{1}\pi n/2} = \frac{-8 \cdot \overbrace{e^{-j\mathbf{1}\pi \cdot 1/2}}^{-j} + 4 \cdot \overbrace{e^{-j\mathbf{1}\pi \cdot 3/2}}^{j}}{4} = \frac{j8 + j4}{4} = j3 = c_1 \quad \rightarrow \quad c_1^* = c_3 = -j3$$

$$c_2 = \frac{1}{4} \cdot \sum_{n=0}^{3} x[n] e^{-j\mathbf{2}\pi n/2} = \frac{-8\overbrace{e^{-j\mathbf{2}\pi \cdot 1/2}}^{-1} + 4\overbrace{e^{-j\mathbf{2}\pi \cdot 3/2}}^{-1}}{4} = \frac{8 - 4}{4} = 1 = c_2$$

Tüm katsayıları Fourier serisinde yerine yazalım:

$$x[n] = \sum_{k=0}^{3} c_k e^{jk\pi n/2} = c_0 e^{j\mathbf{0}\pi n/2} + c_1 e^{j\mathbf{1}\pi n/2} + c_2 e^{j\mathbf{2}\pi n/2} + c_3 \overbrace{e^{j\mathbf{3}\pi n/2}}^{\equiv -j\pi n/2} = \boxed{x[n] = -1 + j3e^{j\pi n/2} + 1 \cdot e^{j\pi n} - j3e^{-j\pi n/2}}$$

6) Transfer fonksiyon: $H(z) = \frac{3z^2 + z}{z^2 - 0{,}25} \quad \rightarrow \quad \frac{H(z)}{z} = \frac{3z + 1}{(z - 0{,}5)(z + 0{,}5)} = \frac{A}{(z - 0{,}5)} + \frac{B}{(z + 0{,}5)}$

Köklerden ve nedensellikten anlaşıldığına göre $YB : |z| > 0{,}5$. $A = \frac{3 \cdot 0{,}5 + 1}{0{,}5 + 0{,}5} = \frac{5}{2}$, $B = \frac{3 \cdot (-0{,}5) + 1}{-0{,}5 - 0{,}5} = \frac{1}{2}$

$$\rightarrow \quad H(z) = \frac{5}{2} \cdot \frac{z}{z - 0{,}5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{z}{z - (-0{,}5)} \quad ; \quad YB : |z| > 0{,}5 \quad \rightarrow \quad \boxed{h[n] = \left(\frac{5}{2}\right) \cdot (0{,}5)^n u[n] + \left(\frac{1}{2}\right) \cdot (-0{,}5)^n u[n]}$$

Diğer bir yolla da yapılabilir: $H(z) = 3 + \frac{a}{(z - 0{,}5)} + \frac{b}{(z + 0{,}5)}$, $a = \frac{3 \cdot (0{,}5)^2 + 0{,}5}{0{,}5 + 0{,}5} = \frac{5}{4}$,

$b = \frac{3 \cdot (-0{,}5)^2 + (-0{,}5)}{-0{,}5 - 0{,}5} = -\frac{1}{4}$. $\qquad H(z) = 3 \cdot 1 + \frac{5}{4} z^{-1} \frac{z}{z - 0{,}5} - \frac{1}{4} z^{-1} \frac{z}{z - (-0{,}5)}$; $YB : |z| > 0{,}5$

1'in ters dönüşümü birim darbe ve z^{-1} çarpanı bir adım geriletici olduğundan

$\boxed{h[n] = 3\delta[n] + \frac{1}{4}\left(5 \cdot (0{,}5)^{n-1} - (-0{,}5)^{n-1}\right) \cdot u[n-1]}$ Diğer çözüm ifadesine eşit olduğunu görünüz.

7) $H(\omega) = \frac{j\omega + 3}{j\omega + 4} = 1 - \frac{1}{j\omega + 4} \quad \rightarrow$ Birim darbe tepkisi: $\boxed{h(t) = \delta(t) - e^{-4t}u(t)}$

$$X(\omega) = \frac{1}{j\omega + 2} \quad \rightarrow \quad Y(\omega) = H(\omega)X(\omega) = \frac{j\omega + 3}{(j\omega + 4)(j\omega + 2)} = \frac{A}{j\omega + 4} + \frac{B}{j\omega + 2}$$

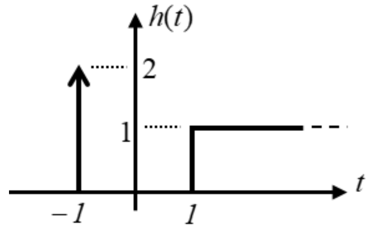
$$A = \frac{-4 + 3}{-4 + 2} = \frac{1}{2} \ , \quad B = \frac{-2 + 3}{-2 + 4} = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad \boxed{y(t) = \frac{1}{2}\left(e^{-4t} + e^{-2t}\right)u(t)}$$

SİNYALLER VE SİSTEMLER FİNAL SINAVI SORULARI

31 Mayıs 2018   Süre: 75 dakika

İlk 4 soru zorunludur. 5-8. sorulardan ise tam puanı 30 olan 2 ya da 3 soru seçiniz. Fazla seçerseniz lehinize olanlar dikkate alınır, ancak fazlalık yarım soruların puanları birleştiril<u>mez</u>.

1) Yanda birim darbe tepkisi verilen doğrusal zamanla değişmez (DZD) sistemin birim basamak tepkisini çiziniz **(10 puan)**. Bu sistem bellekli midir, nedensel midir, kararlı mıdır? DZD sistemlere özel gerekçeleriyle cevaplayınız **(9 puan).**



2) Giriş(x)-çıkış(y) ilişkisi aşağıda verilen nedensel sistemin birim darbe tepkisini bulunuz. **(13 puan)**
(Dikkat: Z-dönüşümüyle yapmanız tavsiye edilMEZ.)

$$y[n+2]-1{,}4\,y[n+1]+0{,}49\,y[n]=5x[n]$$

3) Giriş(x)-çıkış(y) ilişkisi

$$\ddot{y}(t)+6\dot{y}(t)+8y(t)=3\dot{x}(t)+2x(t)$$

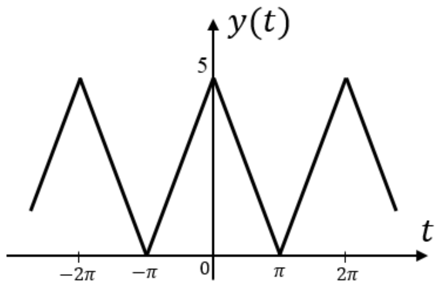
ile verilen nedensel sistemin transfer fonksiyonunu **(5 puan)** ve birim darbe tepkisini **(10 puan)** bulunuz.

4) Giriş(x)-çıkış(y) ilişkisi

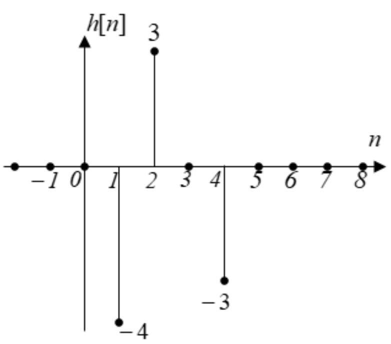
$$y[n+1]-0{,}6\,y[n]=4x[n+1]-2x[n]$$

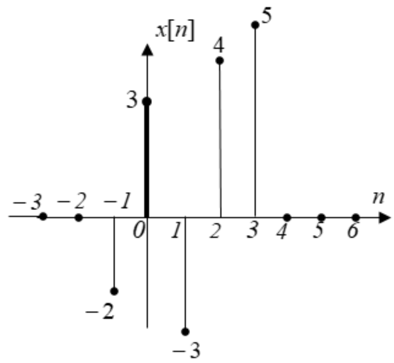
ile verilen nedensel sistemin transfer fonksiyonunu **(4 puan)**, birim darbe tepkisini **(7 puan)** ve $x[n]=(0{,}8)^n u[n]$ girişi için enerjisiz başlangıçlı çıkışını **(12 puan)** Z ve/veya Z^{-1} dönüşümleriyle bulunuz.

5) Yanda gösterilen 2π periyotlu $y(t)$ sinyalinin hem gerçel hem karmaşık Fourier serisinde hangi katsayıların sıfır olduğunu nedenlerini belirterek yazınız **(10 puan)**.
(Dikkat: Bu soruda integralli bir şey yazılması istenmiyor. Simetri gibi özellikler kullanınız.)



6) Birim darbe tepkisi $h[n]$ ile girişi $x[n]$ aşağıda verilen DZD sistemin çıkışı $y[n]$'dir. $h[n]$, $x[n]$ ve $y[n]$'in Z dönüşümlerini bulunuz ve $y[n]$'i <u>çiziniz</u>. **(20 puan)**





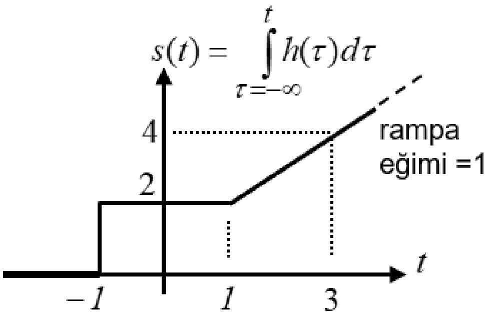
7) $x(t)$ 'nin Fourier dönüşümüne $X(\omega)$ dersek $e^{bt}x(t)$ 'nin Fourier dönüşümü ne olur? İspatlayınız. **(2+8 puan)**

8) $N=2$ ile periyodik bir $x[n]$ sinyalinin iki noktası $x[0]=-2$, $x[1]=8$ olduğuna göre bu sinyalin Fourier serisini yazınız. **(10 puan)**

BAŞARILAR …

Bilgisayar Mühendislği Bölümü
SİNYALLER VE SİSTEMLER FİNAL SINAVI CEVAP ANAHTARI
31 Mayıs 2018

1)



Bu sistem belleklidir, çünkü bazı $t \neq 0$ için $h(t) \neq 0$.
Nedensel değildir, çünkü bazı $t < 0$ için $h(t) \neq 0$.
Kararsızdır, çünkü $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt = \infty$.

2) $n > 0$ için $h[n+2] - 1{,}4h[n+1] + 0{,}49h[n] = 0$ denklemi

$h[1] = 0$, $h[2] = 5/1 = 5$ başlangıç şartlarıyla çözülür.

$\lambda^2 - 1{,}4\lambda + 0{,}49 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 0{,}7 \quad \rightarrow \quad h[n] = a(0{,}7)^n + bn(0{,}7)^n$

$h[1] = 0{,}7a + 0{,}7b = 0$
$h[2] = 0{,}49a + 0{,}98b = 5$

$a = -\frac{500}{49}$, $b = \frac{500}{49}$ bulunur. Tüm zamanları kapsayan çözüm $h[n] = \left\{-\frac{500}{49}(0{,}7)^n + \frac{500}{49}n(0{,}7)^n\right\}u[n-2]$ bulunur. Farklı görünümde ama eşit diğer bazı ifadeler: $h[n] = \left\{-\frac{50}{7}(0{,}7)^{n-1} + \frac{50}{7}n(0{,}7)^{n-1}\right\}u[n-1]$, $h[n] = \{-5(0{,}7)^{n-2} + 5n(0{,}7)^{n-2}\}u[n-2]$, $h[n] = \frac{50}{7}(n-1)(0{,}7)^{n-1}u[n-1]$

3) $H(\omega) = \dfrac{3(j\omega)+2}{(j\omega)^2 + 6(j\omega) + 8} = \dfrac{3(j\omega)+2}{(j\omega+4)(j\omega+2)} = \dfrac{A}{j\omega+4} + \dfrac{B}{j\omega+2}$

$A = \dfrac{3(-4)+2}{(-4+2)} = 5$, $B = \dfrac{3(-2)+2}{(-2+4)} = -2$

Birim darbe tepkisi: $\boxed{h(t) = 5e^{-4t}u(t) - 2e^{-2t}u(t)}$

4) Transfer fonksiyon: $H(z) = \dfrac{4z-2}{z-0{,}6}$, $YB: |z| > 0{,}6$ (nedensellikten dolayı)

$H(z) = 4 + \dfrac{a}{z-0{,}6} \quad \rightarrow \quad a = H(z)(z-0{,}6)\big|_{z=0{,}6} = 4\times 0{,}6 - 2 = 0{,}4$

$H(z) = 4\times 1 + 0{,}4 \times \dfrac{z}{z-0{,}6}\cdot z^{-1}$ 1'in ters dönüşümü birim darbe ve z^{-1} çarpanı bir adım geriletici olduğundan:

$\boxed{h[n] = 4\delta[n] + 0{,}4\cdot(0{,}6)^{n-1}u[n-1]}$ $\qquad X(z) = \dfrac{z}{z-0{,}8}$; $|z| > 0{,}8$ $\qquad Y(z) = H(z)X(z)$

$\dfrac{Y(z)}{z} = \dfrac{4z-2}{(z-0{,}6)(z-0{,}8)} = \dfrac{A}{z-0{,}6} + \dfrac{B}{z-0{,}8}$; $|z| > 0{,}8 \qquad A = \dfrac{4\times 0{,}6 - 2}{0{,}6 - 0{,}8} = -2 \qquad B = \dfrac{4\times 0{,}8 - 2}{0{,}8 - 0{,}6} = 6$

$Y(z) = -2\dfrac{z}{z-0{,}6} + 6\dfrac{z}{z-0{,}8} \quad \rightarrow \quad \boxed{y[n] = \left(-2\cdot(0{,}6)^n + 6\cdot(0{,}8)^n\right)\cdot u[n]}$

5) $y(t)$ çift sinyal olduğu için gerçel serideki sin terimlerinin katsayıları sıfırdır ($b_k = 0 \ \forall k$).s

$y(t) - \dfrac{5}{2}$ yani ortalama değeri atılmışı tek harmonik simetrili sinyal olduğu için hem gerçel hem karmaşık serideki ortalama değer hariç tüm çift k'lar için seri katsayıları sıfırdır ($a_k = b_k = c_k = 0$, $k \neq 0$).

6) $H(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]\, z^{-n} = -4z^{-1} + 3z^{-2} - 3z^{-4}$

$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, z^{-n} = -2z + 3 - 3z^{-1} + 4z^{-2} + 5z^{-3}$

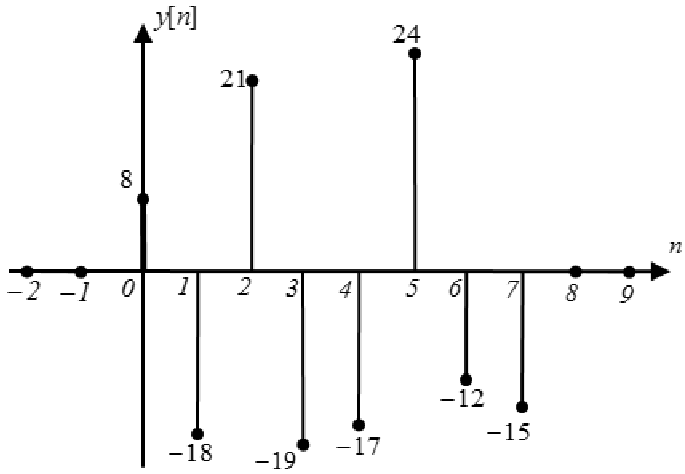
Çıkış $y[n] = x[n] * h[n]$. Bunun Z dönüşümü alınırsa, $Y(z) = H(z)X(z)$ olur.

				–2	3	–3	4	5	→ sonuncusu z^{-3}'ün katsayısı
×					–4	3	0	–3	→ sonuncusu'ün z^{-4}'ün katsayısı
				6	–9	9	–12	–15	
			0	0	0	0	0		
		–6	9	–9	12	15			
+	8	–12	12	–16	–20				
	8	–18	21	–19	–17	24	–12	–15	→ sonuncusu $z^{-3-4} = z^{-7}$'nin katsayısı.

Soldakiler daha büyük üslülerin katsayılarıdır. Buna göre
$Y(z) = 8 - 18z^{-1} + 21z^{-2} - 19z^{-3} - 17z^{-4} + 24^{-5} - 12z^{-6} - 15z^{-7}$ bulunur.

Bunu da $Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[n]\, z^{-n} = y[0]z^{0} + y[1]z^{-1} + y[2]z^{-2} + y[3]z^{-3} + y[4]z^{-4} + y[5]z^{-5} + y[6]z^{-6} + y[7]\cdot z^{-7}$

biçiminde düşünerek yukarıda aşağıda çizilen $y[n]$ sinyalini buluruz.



7) $\mathcal{F}\left\{e^{bt}x(t)\right\} = \int_{t=-\infty}^{+\infty} e^{bt}x(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{t=-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j(\omega+jb)t}dt$

Son ifade, $X(\omega) = \int_{t=-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$ ifadesindeki "ω" yerine "ω + jb" yazılmış halidir. Bu yüzden

$$\boxed{\mathcal{F}\left\{e^{bt}x(t)\right\} = X(\omega + jb)}$$

(Aslında soruyu hazırlarken kastettiğim $e^{jbt}x(t)$ 'nin Fourier dönüşümü idi; ama "j" yazmayı unutunca cevap böyle oldu. Yine de soru hatalı sayılmaz. Zaten sınavda kimse bu soruyla kayda değer bir uğraş göstermemiş. Fakat soruyu öyle sorsaydım cevabın ilk satırındaki en sağ taraf $\int_{t=-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j(\omega-b)t}dt$ ve sonuç da

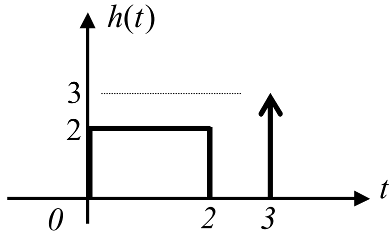
$\boxed{\mathcal{F}\left\{e^{jbt}x(t)\right\} = X(\omega - b)}$ olurdu.)

8) $N = 2$'ye özel kolaylıktan faydalanalım: $\omega_0 = 2\pi/N = \pi \quad \rightarrow \quad x[n] = c_0 + c_1 e^{j\pi n} = c_0 + c_1(-1)^n$
$c_0 = (-2+8)/2 = 3$ (ortalama değer)
$x[n] = 3 + c_1(-1)^n$. Meselâ $n = 0$ için $x[0] = 3 + c_1 = -2 \quad \rightarrow \quad c_1 = -5 \quad \rightarrow \quad \boxed{x[n] = 3 - 5e^{j\pi n}}$

Bilgisayar Mühendislği Bölümü
SİNYALLER VE SİSTEMLER BÜTÜNLEME SINAVI SORULARI
21 Haziran 2018 Süre: 75 dakika

İlk 4 soru zorunludur. 5-8. sorulardan ise tam puanı 30 olan 2 ya da 3 soru seçiniz. Fazla seçerseniz lehinize olanlar dikkate alınır, ancak fazlalık yarım soruların puanları birleştiril<u>mez</u>.

1) Yanda birim darbe tepkisi verilen doğrusal zamanla değişmez (DZD) sistemin birim basamak tepkisini çiziniz **(10 puan)**. Bu sistem bellekli midir, nedensel midir, kararlı mıdır? DZD sistemlere özel gerekçeleriyle cevaplayınız **(9 puan).**



2) Giriş(x)-çıkış(y) ilişkisi aşağıda verilen nedensel sistemin birim darbe tepkisini bulunuz. **(13 puan)**
(Dikkat: Z-dönüşümüyle yapmanız tavsiye edilMEZ.)

$$y[n+2]-1{,}2\,y[n+1]+0{,}36\,y[n]=4x[n]$$

3) Giriş(x)-çıkış(y) ilişkisi

$$\ddot{y}(t)+8\dot{y}(t)+15\,y(t)=4\dot{x}(t)-2x(t)$$

ile verilen nedensel sistemin transfer fonksiyonunu **(5 puan)** ve birim darbe tepkisini **(10 puan)** bulunuz.

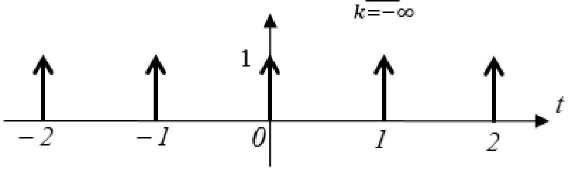
4) Giriş(x)-çıkış(y) ilişkisi

$$y[n+1]-0{,}4\,y[n]=3x[n+1]+6x[n]$$

ile verilen nedensel sistemin transfer fonksiyonunu **(4 puan)**, birim darbe tepkisini **(7 puan)** ve $x[n]=(0{,}5)^n u[n]$ girişi için enerjisiz başlangıçlı çıkışını **(12 puan)** Z ve/veya Z^{-1} dönüşümleriyle bulunuz.

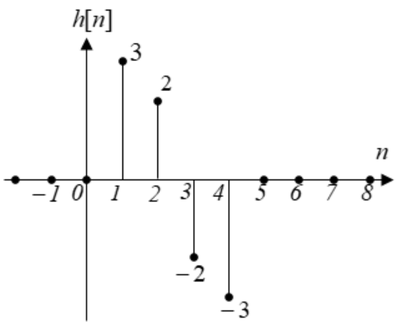
5)

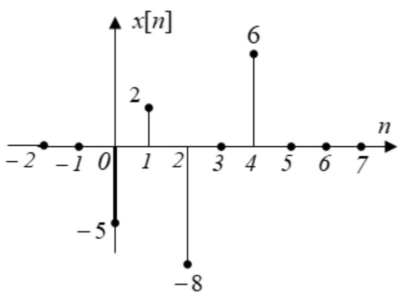
$$y(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-kT_0)$$



Yukarıda gösterilen $T_0 = 1$ periyotlu $y(t)$ darbe treni sinyalinin Fourier serisini yazınız **(10 puan)**.

6) Birim darbe tepkisi $h[n]$ ile girişi $x[n]$ aşağıda verilen DZD sistemin çıkışı $y[n]$'dir. $h[n]$, $x[n]$ ve $y[n]$'in Z dönüşümlerini bulunuz ve $y[n]$'i <u>çiziniz</u>. **(20 puan)**



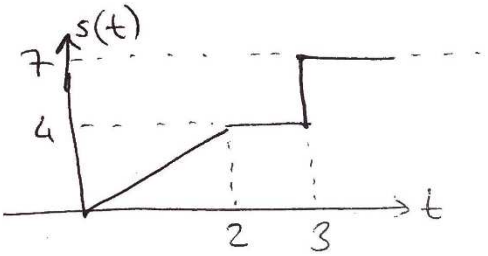


7) $x(t)$ 'nin Fourier dönüşümüne $X(\omega)$ dersek $t\cdot x(t)$ 'nin Fourier dönüşümü ne olur? İspatlayınız. **(2+8 puan)**

8) $N = 2$ ile periyodik bir $x[n]$ sinyalinin iki noktası $x[0] = 5$, $x[1] = 1$ olduğuna göre bu sinyalin Fourier serisini yazınız. **(10 puan)**

BAŞARILAR …

Bilgisayar Mühendislği Bölümü
SİNYALLER VE SİSTEMLER BÜTÜNLEME CEVAP ANAHTARI
21 Haziran 2018

1) 

Bellekli (bazı $t \neq 0$ için $h(t) \neq 0$)

Nedensel ($\forall t < 0$ için $h(t) = 0$)

Kararlı ($\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt = 2\times 2 + 3 = 7 < \infty$)

2) $n > 0$ için $h[n+2] - 1{,}2\, h[n+1] + 0{,}36\, h[n] = 0$

denklemi $h[1] = 0$, $h[2] = 4/1 = 4$ için çözülmeli.

$\lambda^2 - 1{,}2\lambda + 0{,}36 = 0 \longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0{,}6$ (İki katlı kök)

$h[n] = A_1 \times 0{,}6^{n-2} + A_2 \times 0{,}6^{n-2} \cdot n$

$h[1] = \dfrac{A_1}{0{,}6} + \dfrac{A_2}{0{,}6} = 0 \longrightarrow A_2 = -A_1$

$h[2] = A_1 + 2A_2 = -A_1 = 4 \longrightarrow A_1 = -4 \quad A_2 = 4$

Tüm zamanlar için ise $h[n] = 4(n-1)\, 0{,}6^{n-2}\, u[n-2]$

veya $h[n] = \dfrac{20}{3}(n-1)\, 0{,}6^{n-1}\, u[n-1]$

3) $H(\omega) = \dfrac{4(j\omega) - 2}{(j\omega)^2 + 8(j\omega) + 15} = \dfrac{4(j\omega) - 2}{(j\omega+3)(j\omega+5)}$

$H(\omega) = \dfrac{a}{j\omega+3} + \dfrac{b}{j\omega+5}$

$a = \dfrac{4\cdot(-3) - 2}{-3+5} = -7 \qquad b = \dfrac{4(-5) - 2}{-5+3} = 11$

$h(t) = \left(-7e^{-3t} + 11e^{-5t} \right) u(t)$

4) $H(z) = \dfrac{3z+6}{z-0{,}4} = 3 + \dfrac{c}{z-0{,}4}$ ↱ YB: $|z| > 0{,}4$ $\qquad c = H(z)(z-0{,}4)\Big|_{z=0{,}4} = 7{,}2$

$H(z) = 3 \cdot \underset{\mathcal{Z}\{\delta[n]\}}{1} + 7{,}2\, z^{-1} \underbrace{\dfrac{z}{z-0{,}4}}_{\mathcal{Z}\{0{,}4^n u[n]\}}$

z^{-1} çarpanı zamanda 1 adım geciktir.

$h[n] = 3\delta[n] + 7{,}2 \cdot (0{,}4)^{n-1} u[n-1]$

$$X(z) = \frac{z}{z-0{,}5} \; ; \; |z|>0{,}5 \quad \rightarrow \; Y(z) = H(z)X(z) = \frac{(3z+6)z}{(z-0{,}4)(z-0{,}5)}$$

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{3z+6}{(z-0{,}4)(z-0{,}5)} = \frac{A}{z-0{,}4} + \frac{B}{z-0{,}5} \quad \rightsquigarrow |z|>0{,}5$$

$$A = \frac{3\times0{,}4+6}{0{,}4-0{,}5} = -72 \qquad B = \frac{3\times0{,}5+6}{0{,}5-0{,}4} = 75$$

$$Y(z) = -72\,\frac{z}{z-0{,}4} + 75\,\frac{z}{z-0{,}5} \quad ; \quad |z|>0{,}5$$

$$y[n] = \left(-72\times0{,}4^n + 75\times0{,}5^n\right)u[n]$$

5) $-\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2}$ periyodu için $y(t) = \delta(t)$; $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 2\pi$

$\underset{k=0}{\downarrow}$

Çift sinyal olduğu için sin terimi yoktur ($b_n = 0 \quad \forall n \geq 1$).

$$a_n = \underbrace{\frac{2}{T_0}}_{1} \int_{-1/2}^{1/2} \underbrace{\delta(t)\cos 2\pi nt}_{\delta(t)\cos 0} \cdot dt = 2 \cdot \underbrace{\int_{-1/2}^{1/2} \delta(t)\,dt}_{1} = 2$$

(a_0 dahil, çünkü $n=0$ için belirsizlik olmadı.)

$$y(t) = \underbrace{1}_{a_0/2} + \sum_{n=1}^{+\infty} 2\cos 2\pi nt$$

(n yerine k da diyebilirdik.)

$$y(t) = 1 + 2\cos 2\pi t + 2\cos 4\pi t + 2\cos 6\pi t + \ldots$$

veya $c_n = \frac{a_n}{2}$ (çift sinyal olduğu için) $\rightarrow c_n = 1 \quad \forall n$

veya

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underbrace{c_n}_{1} e^{jn\omega_0 t} = \ldots + e^{-j4\pi t} + e^{-j2\pi t} + 1 + e^{j2\pi t} + e^{j4\pi t} + \ldots$$

diye de yazılabilir.

7) $X(\omega) = \int_{t=-\infty}^{+\infty} x(t)\,e^{-j\omega t}\,dt \quad \xrightarrow{\frac{d}{d\omega}} \quad \frac{dX(\omega)}{d\omega} = \int_{t=-\infty}^{+\infty} x(t)\cdot(-jt)\,e^{-j\omega t}\,dt$

$$\rightarrow j\,\frac{dX(\omega)}{d\omega} = \int_{t=-\infty}^{+\infty} t\,x(t)\,e^{-j\omega t}\,dt = \mathcal{F}\{t\,x(t)\}$$

Sonuç: $\mathcal{F}\{t\,x(t)\} = j\,\frac{dX(\omega)}{d\omega}$

6) $H(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n] z^{-n} = 3z^{-1} + 2z^{-2} - 2z^{-3} - 3z^{-4}$

$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n} = -5 + 2z^{-1} - 8z^{-2} + 6z^{-4}$

↳ arada $0 \cdot z^{-3}$ düşünülmeli.

Her ikisi için de YB, $z \neq 0$ çünkü z'nin eksi kuvvetleri var.

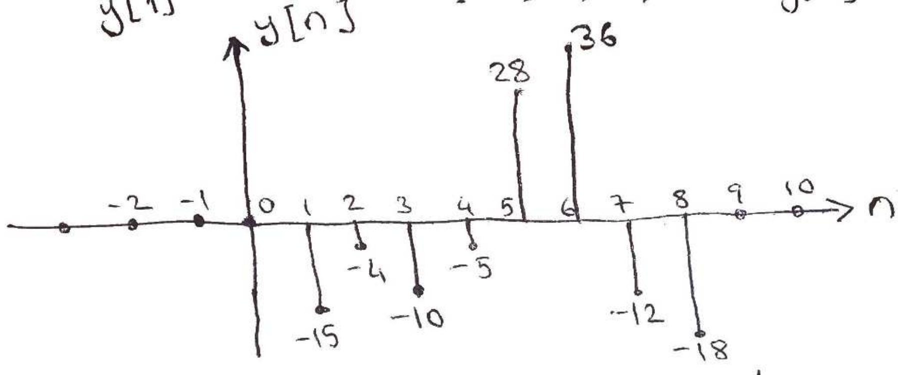
$Y(z) = H(z)X(z)$

$$
\begin{array}{rrrrrrrrl}
 & & & -5 & 2 & -8 & 0 & 6 & \rightsquigarrow z^{-4}\text{'ün katsayısı} \\
 & & & & 3 & 2 & -2 & -3 & \rightsquigarrow z^{-4}\text{'ün katsayısı} \\
\times & & & & & & & & \\
\hline
 & & & 15 & -6 & 24 & 0 & -18 & \\
 & & 10 & -4 & 16 & 0 & -12 & & \\
 & -10 & 4 & -16 & 0 & 12 & & & \\
+\; -15 & 6 & -24 & 0 & 18 & & & & \\
\hline
-15 & -4 & -10 & -5 & 28 & 36 & -12 & -18 & \rightarrow z^{-4-4} = z^{-8}\text{'in katsayısı}
\end{array}
$$

↳ z^{-1}'in katsayısı . . . . ↳ z^{-7}'nin katsayısı

$Y(z) = \underbrace{-15}_{y[1]} z^{-1} - 4z^{-2} - 10z^{-3} - 5z^{-4} + 28z^{-5} + \underbrace{36}_{y[6]} z^{-6} \underbrace{-12}_{y[7]} z^{-7} \underbrace{-18}_{y[8]} z^{-8}$

. . . . .



8) $N = 2 \rightarrow \omega_0 = 2\pi/N = \pi \rightarrow x[n] = \sum_{k=0}^{1} c_k e^{jk\pi n}$

Yani $x[n] = c_0 + c_1 e^{j\pi n} = c_0 + c_1 (-1)^n$

$c_0 = \text{ortalama} = \dfrac{x[0] + x[1]}{2} = \dfrac{5+1}{2} = 3$

$x[n] = 3 + c_1 (-1)^n$. Mesela $x[0] = 3 + c_1 (-1)^0 = 3 + c_1 = 5$

↳ $c_1 = 2$

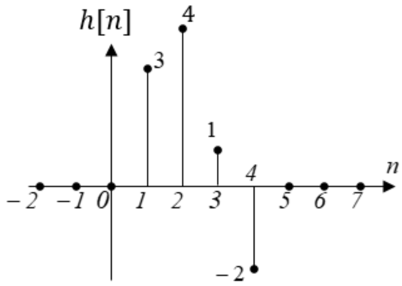
$x[n] = 3 + 2 \cdot (-1)^n \longrightarrow \boxed{x[n] = 3 + 2e^{j\pi n}}$

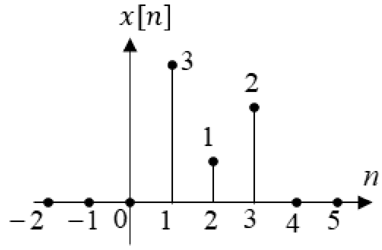
SİNYALLER VE SİSTEMLER FİNAL SINAVI SORULARI

07.01.2019 Süre: 75 dakika

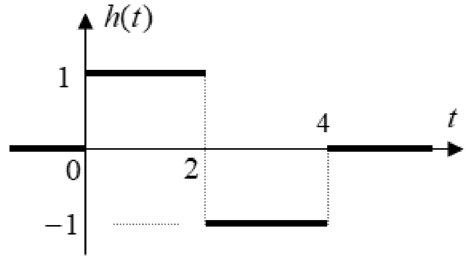
Sorulardan istediğiniz 5 tanesini cevaplayınız. Fazla cevapların lehinize 5 tanesi dikkate alınır.

1) Doğrusal ve zamanla değişmez (DZD) bir sistemin birim darbe tepkisi $h[n]$ ve girişi $x[n]$ yandaki şekillerde verilmiştir. $h[n]$, $x[n]$ ve sistem çıkışı $y[n]$ 'in her birinin Z-dönüşümlerini bulunuz ve $y[n]$'i çiziniz. **(20 puan)**



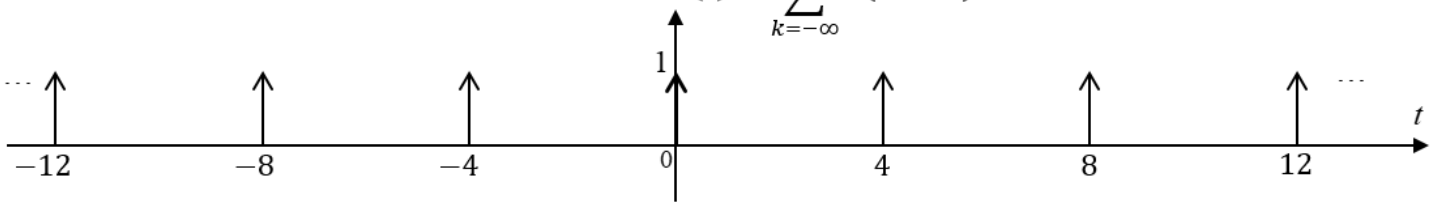


2) DZD bir sistemin birim darbe tepkisi $h(t)$ yanda verilmiştir. Bu sistemin birim basamak tepkisi $s(t)$'yi çiziniz **(11 puan)**. Bu sistem nedensel midir, kararlı mıdır, bellekli midir? DZD sistemlere özel ifadelerle gerekçesini ortaya koyarak cevaplayınız **(9 puan)**.



3) 2. Soruda verilen $h(t)$ birim darbe tepkisine sahip DZD bir sistemin girişine aşağıdaki şekildeki 4 ile periyodik $x(t)$ uygulanırsa sistem çıkışı $y(t)$ ne olur? Çiziniz. **(20 puan)**

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-4k)$$

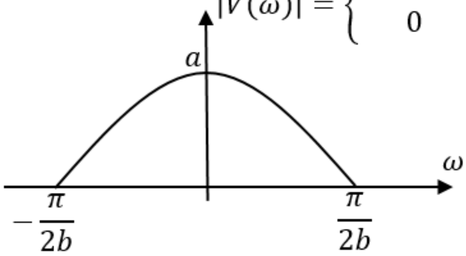


4) Yukarıdaki şekildeki $T_0 = 4$ ile periyodik $x(t)$ sinyalini Fourier serisine açınız. **(20 puan)**

5) $x[0] = -8$, $x[1] = 0$, $x[2] = 4$, $x[3] = 0$ ve $N = 4$ ile periyodik olan $x[n]$ sinyalinin Fourier serisini, katsayılarını bulup yerine koyarak yazınız. **(20 puan)**

6) $R = 12\Omega$ 'luk bir direnç üzerindeki $v(t)$ gerilim sinyalinin genlik spektrumu aşağıda verilmiş olup, $a = 60Vs$ ve $b = 0{,}01s$ 'dir. Bu direnç üzerinde $-\infty < t < +\infty$ zaman aralığında harcanan toplam enerjiyi bulunuz. **(20 puan)**

$$|V(\omega)| = \begin{cases} a\cos b\omega & |\omega| < \pi/(2b) \ \ ise \\ 0 & |\omega| \geq \pi/(2b) \ \ ise \end{cases}$$



7) Giriş(x)-çıkış(y) ilişkisi

$$y[n+2] - y[n] = 3x[n+2] + 4x[n+1]$$

ile verilen nedensel sistemin transfer fonksiyonunu **(5 puan)** ve birim darbe tepkisini **(15 puan)** bulunuz.

8) Transfer fonksiyonu $H(\omega) = \frac{5(j\omega)+1}{j\omega+3}$ olan nedensel sistemin birim darbe tepkisini **(8 puan)** ve $x(t) = e^{-2t}u(t)$ girişi için çıkışını **(12 puan)** bulunuz.

BAŞARILAR …

SİNYALLER VE SİSTEMLER FİNAL CEVAP ANAHTARI
07.01.2019

1) $H(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n] z^{-n} = 3z^{-1} + 4z^{-2} + 1 \cdot z^{-3} - 2 \cdot z^{-4}$

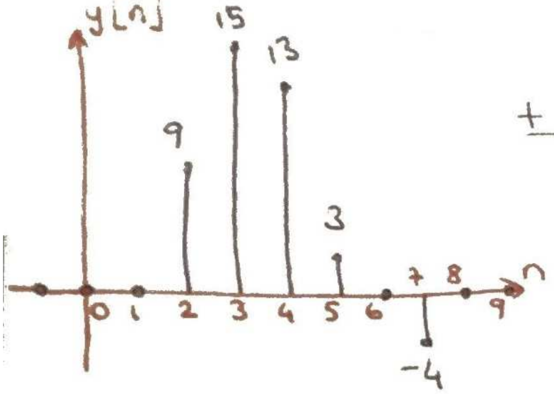
$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n} = 3z^{-1} + 1 \cdot z^{-2} + 2 z^{-3}$

$y[n] = h[n] * x[n] \xrightarrow{\mathcal{Z}} Y(z) = H(z)X(z)$

polinom çarpım yöntemi

$$
\begin{array}{rrrrrrl}
 & & 3 & 4 & 1 & -2 & \leftarrow z^{-4}\text{'ün katsayısı} \\
 & & & 3 & 1 & 2 & \leftarrow z^{-3}\text{'ün} \\
\times & & & & & & \\
\hline
 & & 6 & 8 & 2 & -4 & \\
 & 3 & 4 & 1 & -2 & & \\
+\ 9 & 12 & 3 & -6 & & & \\
\hline
9 & 15 & 13 & 3 & 0 & -4 &
\end{array}
$$

z^{-2}'nin ... z^{-6}'nın $z^{-4}z^{-3} = z^{-7}$'nin

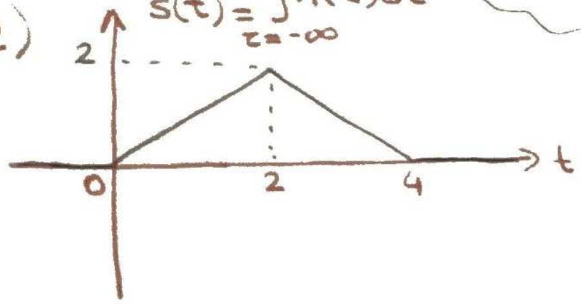


$Y(z) = 9z^{-2} + 15z^{-3} + 13z^{-4} + 3z^{-5} + 0 \cdot z^{-6} - 4z^{-7}$

$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[n] z^{-n}$ yani $y[2]$, $y[3]$ ... $y[6]$, $y[7]$

diğer n anlarında $y[n] = 0$

2) $s(t) = \int_{\tau=-\infty}^{t} h(\tau) d\tau$



$\forall t < 0$ için $h(t) = 0 \rightarrow$ nedenseldir

$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt = \int_0^2 1 \cdot dt + \int_2^4 |-1| dt = 2 + 2 = 4 < \infty$ yani kararlı.

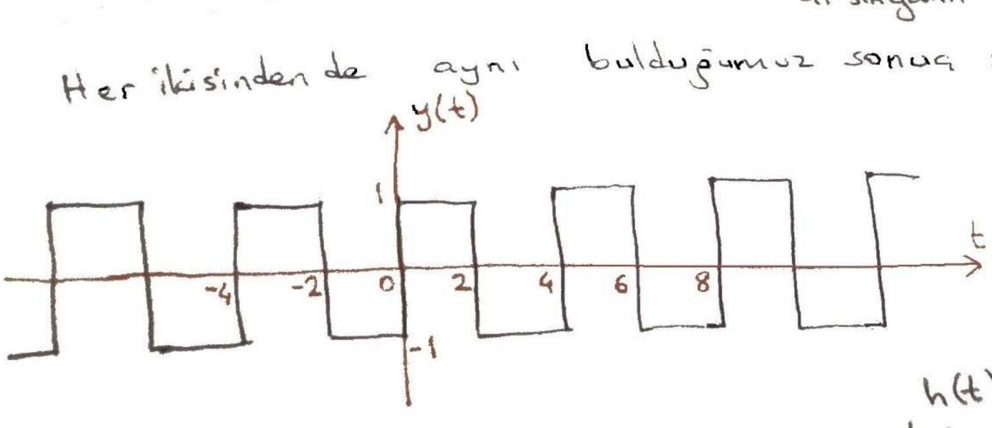
Bazı $t \neq 0$ için $h(t) \neq 0 \rightarrow$ bellekli

3) 1. yol: $x = f(\delta)$ gibi DZD bir ifadeyle yazılabildiği için

$y = f(h) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(t - 4k)$

2. yol: $y(t) = h(t) * x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \underbrace{h(t) * \delta(t-4k)}_{\text{bir sinyalin bir darbeyle konvolüsyonu}} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(t-4k)$

Her ikisinden de aynı bulduğumuz sonuç şöyle çizilir:



Her bir k için bulunan sıfırdan farklı kısımlar birbiriyle hiç çakışmadığı için $h(t)$'nin sıfırdan farklı kısmı tekrarlanarak elde ediliyor.

4) $-2 < t < 2$ için $x(t) = \delta(t)$ ve $x(t)$ 4 ile periyodik.

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} \quad ; \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{\pi}{2}$$

t yerine darbenin etkidiği an yazılır.

$$c_k = \frac{1}{4}\int_{-2}^{2} \underbrace{x(t)}_{\delta(t)} e^{-jk\frac{\pi}{2}t}\,dt = \frac{1}{4}\int_{-2}^{2}\delta(t)\cdot e^{-jk\frac{\pi}{2}0}\,dt = \frac{1}{4}\cdot 1 = \frac{1}{4}$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{4}\cdot e^{jk\frac{\pi}{2}t} = \frac{1}{4}\cdot\left(\dots + e^{-j\pi t} + e^{-j\frac{\pi}{2}t} + 1 + e^{j\frac{\pi}{2}t} + e^{j\pi t} + \dots\right)$$

Reel seri ise yalnız cos ve sabit terimlerden oluşur, çift olduğu için.

$$a_k = 2c_k = 1/2 \rightarrow x(t) = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2} + \cos\frac{\pi}{2}t + \cos\pi t + \cos\frac{3\pi}{2}t + \dots\right)$$

5) $N = 4 \rightarrow \omega_0 = 2\pi/N = \pi/2 \rightarrow x[n] = \sum_{k=0}^{3} c_k e^{jk\frac{\pi}{2}\cdot n}$

$$c_k = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3} x[n]\, e^{-jk\frac{\pi}{2}n}$$

$$c_0 = \frac{1}{4}(-8 + 0 + 4 + 0) = -1 \quad \text{(ortalama)}$$

$$c_1 = \frac{1}{4}\Big(-8 + \underbrace{0\cdot \underbrace{e^{-j1\cdot\frac{\pi}{2}\cdot 1}}_{-j}}_{0} + \underbrace{4\cdot\underbrace{e^{-j1\cdot\frac{\pi}{2}\cdot 2}}_{-1}}_{-4} + \underbrace{0\cdot\underbrace{e^{-j1\frac{\pi}{2}\cdot 3}}_{j}}_{0}\Big) = -3$$

$$c_2 = \frac{1}{4}\Big(-8 + \underbrace{0\cdot\underbrace{e^{-j2\frac{\pi}{2}\cdot 1}}_{-1}}_{0} + \underbrace{4\cdot\underbrace{e^{-j2\frac{\pi}{2}\cdot 2}}_{1}}_{4} + \underbrace{0\cdot\underbrace{e^{-j2\frac{\pi}{2}\cdot 3}}_{-1}}_{0}\Big) = -1$$

$c_3 = c_1^* = -3$ çünkü $x[n]$ gerçel.

Yerine yazılırsa $x[n] = -1 - 3e^{j\frac{\pi}{2}n} - e^{j\pi n} - 3e^{j\frac{3\pi}{2}n}$

6) Toplam enerji $E = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|v(t)|^2}{R}\,dt = \frac{1}{2\pi R}\int_{\omega=-\infty}^{+\infty}|V(\omega)|^2\,d\omega$

$$= \frac{1}{2\pi R}\int_{-\frac{\pi}{2b}}^{\frac{\pi}{2b}} a^2 \underbrace{\cos^2(b\omega)}_{\frac{1+\cos(2b\omega)}{2}}\,d\omega = \frac{a^2}{4\pi R}\int_{-\frac{\pi}{2b}}^{\frac{\pi}{2b}}(1+\cos 2b\omega)\,d\omega$$

$$= \frac{a^2}{4\pi R}\left[\omega + \frac{1}{2b}\sin(2b\omega)\right]_{-\frac{\pi}{2b}}^{\frac{\pi}{2b}} = \frac{a^2}{4\pi R}\left[\frac{\pi}{2b} + \frac{1}{2b}\underbrace{\sin\pi}_{0} - \left(\frac{-\pi}{2b}\right) - \frac{1}{2b}\underbrace{\sin(-\pi)}_{0}\right]$$

$$E = \frac{a^2}{4\pi R}\cdot 2\cdot\frac{\pi}{2b} = \frac{a^2}{4Rb} = \frac{60^2}{4\times 12\times 0{,}01}\,J = \boxed{E = 7500\ J}$$

7) $H(z) = \dfrac{3z^2+4z}{z^2-1}$; $|z|>1$ ↳ nedensellikten

1. yol: $\dfrac{H(z)}{z} = \dfrac{3z+4}{(z-1)(z+1)} = \dfrac{a}{z-1} + \dfrac{b}{z+1}$

$$a = \frac{3\cdot 1+4}{1+1} = \frac{7}{2} \qquad b = \frac{3\cdot(-1)+4}{-1-1} = \frac{-1}{2}$$

$$H(z) = \frac{7}{2}\,\frac{z}{z-1} - \frac{1}{2}\,\frac{z}{z-(-1)} \quad ; \quad |z|>1$$

$\mathcal{Z}^{-1}$

$$h[n] = \frac{7}{2}1^n u[n] - \frac{1}{2}(-1)^n u[n] = \frac{1}{2}\left(7-(-1)^n\right)u[n]$$

2. yol: $H(z) = \dfrac{3z^2+4z}{(z-1)(z+1)} = \underset{\text{başkatsayıların oranı (dereceleri eşitse geçerli)}}{3} + \dfrac{A}{z-1} + \dfrac{B}{z+1}$

$$A = \frac{3\cdot 1^2+4\cdot 1}{1+1} = \frac{7}{2} \qquad B = \frac{3\cdot(-1)^2+4\cdot(-1)}{-1-1} = \frac{1}{2}$$

$$H(z) = \underbrace{3\cdot 1}_{\mathcal{Z}\{\delta[n]\}} + \frac{7}{2}\,\frac{z}{z-1}\cdot z^{-1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{z}{z-(-1)}\cdot z^{-1} \quad ; \quad |z|>1$$

↳ bir adım geriletir

$\mathcal{Z}^{-1}$

$$h[n] = 3\delta[n] + \frac{7}{2}\cdot 1^{n-1}u[n-1] + \frac{1}{2}(-1)^{n-1}u[n-1]$$

$$h[n] = 3\delta[n] + \frac{1}{2}\left(7+(-1)^{n-1}\right)u[n-1]$$ (diğer çözüme eşittir)

8) $H(\omega) = \dfrac{5(j\omega)+1}{j\omega+3} = \underbrace{5}_{5\cdot 1 \,\to\, \mathcal{F}\{\delta(t)\}} + \dfrac{c}{j\omega+3}$; $c = 5\cdot(-3)+1 = -14$

$$\boxed{h(t) = 5\delta(t) - 14e^{-3t}u(t)}$$

Soruda $x(t) = e^{-2t}u(t)$ kastedilmişti.

$$X(\omega) = \frac{1}{j\omega+2}$$

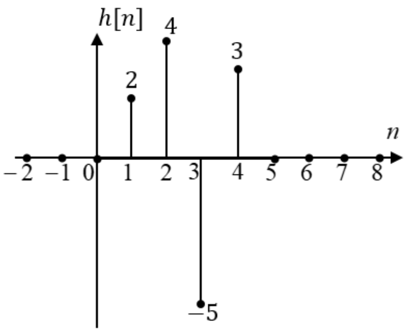
$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega) = \frac{5(j\omega)+1}{(j\omega+3)(j\omega+2)} = \frac{a}{j\omega+2} + \frac{b}{j\omega+3}$$

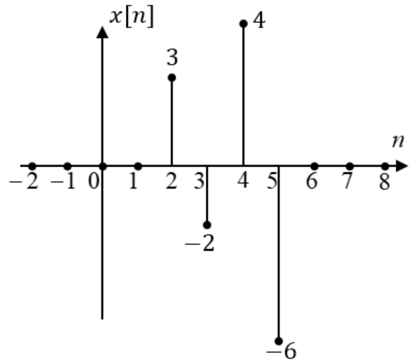
$$a = \frac{5(-2)+1}{-2+3} = -9 \qquad b = \frac{5(-3)+1}{-3+2} = 14$$

$$y(t) = -9e^{-2t}u(t) + 14e^{-3t}u(t) = \left(14e^{-3t} - 9e^{-2t}\right)u(t)$$

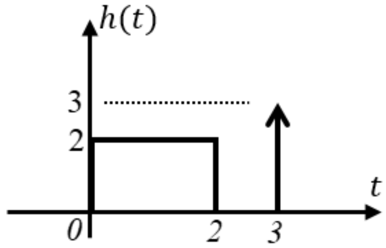
SİNYALLER VE SİSTEMLER BÜTÜNLEME SINAVI SORULARI
24.01.2019 Süre: 75 dakika
Sorulardan istediğiniz 5 tanesini cevaplayınız. Fazla cevapların lehinize 5 tanesi dikkate alınır.

1) Doğrusal ve zamanla değişmez (DZD) bir sistemin birim darbe tepkisi $h[n]$ ve girişi $x[n]$ yandaki şekillerde verilmiştir. $h[n]$, $x[n]$ ve sistem çıkışı $y[n]$ 'in her birinin Z-dönüşümlerini bulunuz ve $y[n]$'i çiziniz. **(20 puan)**



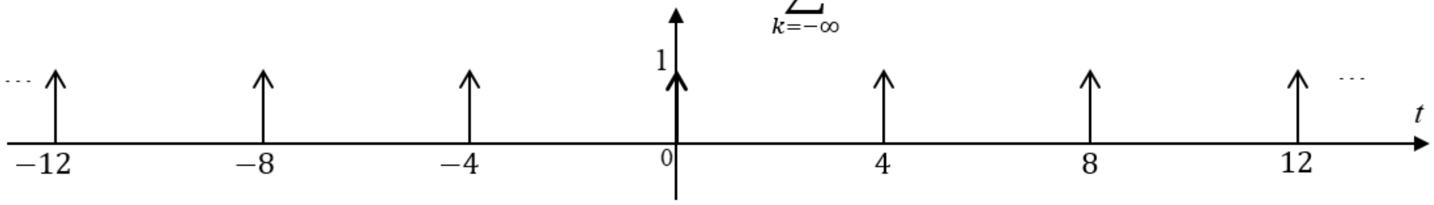


2) DZD bir sistemin birim darbe tepkisi $h(t)$ yanda verilmiştir. Bu sistemin birim basamak tepkisi $s(t)$'yi çiziniz **(11 puan)**. Bu sistem nedensel midir, kararlı mıdır, bellekli midir? DZD sistemlere özel ifadelerle gerekçesini ortaya koyarak cevaplayınız **(9 puan)**.



3) 2. Soruda verilen $h(t)$ birim darbe tepkisine sahip DZD bir sistemin girişine aşağıdaki şekildeki 4 ile periyodik $x(t)$ uygulanırsa sistem çıkışı $y(t)$ ne olur? Çiziniz. **(20 puan)**

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-4k)$$

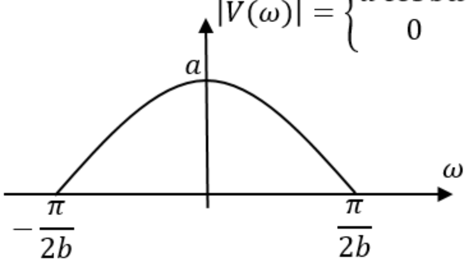


4) Yukarıdaki şekildeki $T_0 = 4$ ile periyodik $x(t)$ sinyalini Fourier serisine açınız. **(20 puan)**

5) $x[0] = -8$, $x[1] = 0$, $x[2] = 4$, $x[3] = 0$ ve $N = 4$ ile periyodik olan $x[n]$ sinyalinin Fourier serisini, katsayılarını bulup yerine koyarak yazınız. **(20 puan)**

6) $R = 12\Omega$ 'luk bir direnç üzerindeki $v(t)$ gerilim sinyalinin genlik spektrumu aşağıda verilmiş olup, $a = 60Vs$ ve $b = 0{,}01s$ 'dir. Bu direnç üzerinde $-\infty < t < +\infty$ zaman aralığında harcanan toplam enerjiyi bulunuz. **(20 puan)**

$$|V(\omega)| = \begin{cases} a\cos b\omega & |\omega| < \pi/(2b) \;\; ise \\ 0 & |\omega| \geq \pi/(2b) \;\; ise \end{cases}$$



7) Giriş(x)-çıkış(y) ilişkisi

$$y[n+2] - y[n] = 3x[n+2] + 4x[n+1]$$

ile verilen nedensel sistemin transfer fonksiyonunu **(5 puan)** ve birim darbe tepkisini **(15 puan)** bulunuz.

8) Transfer fonksiyonu $H(\omega) = \frac{5(j\omega)+1}{j\omega+3}$ olan nedensel sistemin birim darbe tepkisini **(8 puan)** ve $x(t) = e^{-2t}u(t)$ girişi için çıkışını **(12 puan)** bulunuz.

BAŞARILAR …

Bilgisayar Mühendislği Bölümü
SİNYALLER VE SİSTEMLER FİNAL SINAVI SORULARI
17 Haziran 2019 Süre: 75 dakika
5-6. sorulardan yalnız birisini yapınız. Her ikisini de yaparsanız sadece lehinize olan dikkate alınır.

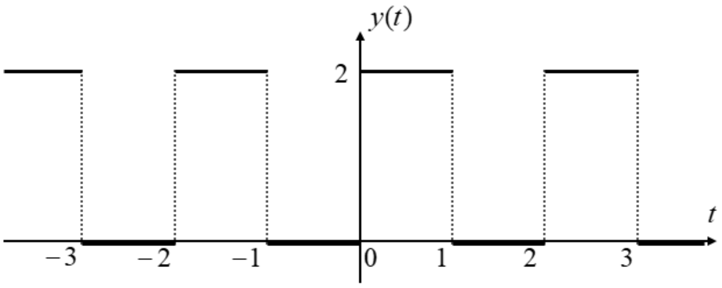
1) Birim darbe tepkisi $h[n] = \delta[n+1] + 2u[n]$ ile verilen doğrusal zamanla değişmez (DZD) sistemin birim basamak tepkisini çiziniz **(10 puan)**. Bu sistem bellekli midir, nedensel midir, kararlı mıdır? DZD sistemlere özel gerekçeleriyle cevaplayınız **(9 puan).**

2) Giriş(x)-çıkış(y) ilişkisi aşağıda verilen nedensel sistemin birim darbe tepkisini bulunuz. **(13 puan)**
(Dikkat: Z-dönüşümüyle yapmanız tavsiye edil**MEZ**.)
$$y[n+2] - y[n+1] + 0{,}25y[n] = 4x[n]$$

3) Giriş(x)-çıkış(y) ilişkisi
$$\ddot{y}(t) + 5\dot{y}(t) + 6y(t) = 2\dot{x}(t) - 4x(t)$$
ile verilen nedensel sistemin transfer fonksiyonunu **(5 puan)** ve birim darbe tepkisini **(10 puan)** bulunuz.

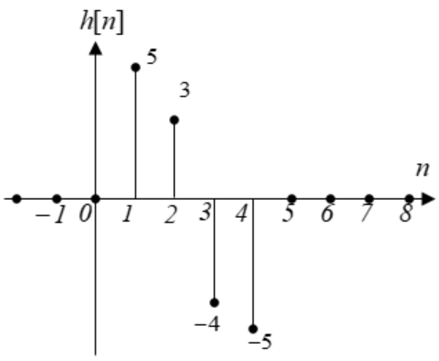
4) Giriş(x)-çıkış(y) ilişkisi
$$y[n+1] + 0{,}5y[n] = 5x[n+1] + 3x[n]$$
ile verilen nedensel sistemin transfer fonksiyonunu **(4 puan)**, birim darbe tepkisini **(7 puan)** ve $x[n] = (0{,}8)^n u[n]$ girişi için enerjisiz başlangıçlı çıkışını **(12 puan)** Z ve/veya Z^{-1} dönüşümleriyle bulunuz.

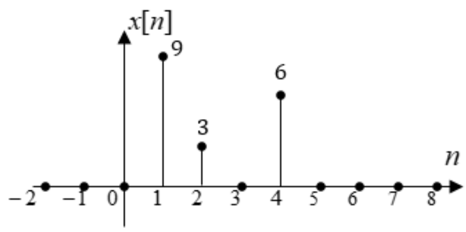
5) Aşağıda gösterilen 2π periyotlu $y(t)$ sinyalinin hem gerçel hem karmaşık Fourier serisinde hangi katsayıların sıfır olduğunu nedenlerini belirterek yazınız **(10 puan)**.
(Dikkat: Bu soruda integralli bir şey yazılması istenmiyor. Simetri gibi özellikler kullanınız.)



6) $x(t)$ 'nin Fourier dönüşümüne $X(\omega)$ dersek $x(t-a)$ 'nın Fourier dönüşümü ne olur? İspatlayınız. **(2+8 puan)**

7) Birim darbe tepkisi $h[n]$ ile girişi $x[n]$ aşağıda verilen DZD sistemin çıkışı $y[n]$ 'dir. $h[n]$, $x[n]$ ve $y[n]$ 'in Z dönüşümlerini bulunuz ve $y[n]$ 'i <u>çiziniz</u>. **(20 puan)**

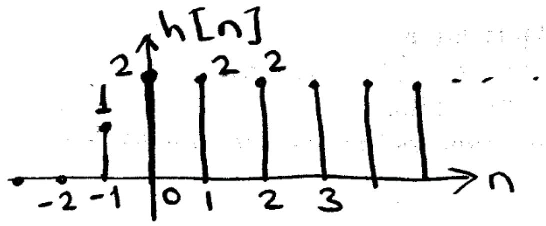




BAŞARILAR …

Bilgisayar Mühendislği Bölümü
SİNYALLER VE SİSTEMLER FİNAL CEVAP ANAHTARI
17 Haziran 2019

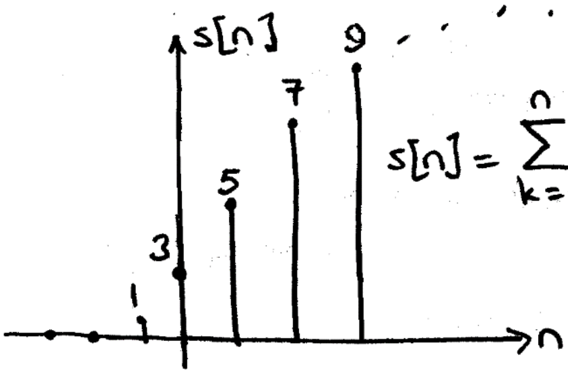
1)



Bellekli, çünkü bazı $n \neq 0$ için $h[n] \neq 0$

Nedensel değil, çünkü bazı $n<0$ için $h[n] \neq 0$

Kararsız, çünkü $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| = \infty$



$s[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} h[n]$

2) $n>0$ için $h[n+2]-h[n+1]+0{,}25h[n]=0$ denklemi $h[1]=0$, $h[2]=4/1=4$ için çözülmeli.

$\lambda^2 - \lambda + 0{,}25 = 0 \longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0{,}5$

$h[n] = A \times 0{,}5^n + B \times 0{,}5^n \times n$

$h[1] = A \times 0{,}5 + B \times 0{,}5 \times 1 = 0 \rightarrow B = -A$

$h[2] = 0{,}25(A+2B) = 0{,}25(A-2A) = -0{,}25A = 4 \rightarrow A = -16$

$h[n] = 16(n-1) \times 0{,}5^n u[n-2] \quad \forall n$

3) $H(\omega) = \dfrac{2(j\omega)-4}{(j\omega)^2+5(j\omega)+6} = \dfrac{2(j\omega)-4}{(j\omega+2)(j\omega+3)} = \dfrac{A}{j\omega+2} + \dfrac{B}{j\omega+3}$

$A = \dfrac{2 \times (-2) - 4}{-2+3} = -8 \qquad B = \dfrac{2 \times (-3) - 4}{-3+2} = 10$

$h(t) = -8 \times e^{-2t} u(t) + 10 e^{-3t} u(t)$

$h(t) = \left(10 e^{-3t} - 8 e^{-2t}\right) u(t)$

4) $H(z) = \dfrac{5z+3}{z+0{,}5} = 5 + \dfrac{a}{z+0{,}5}$ $\quad a = 5\times(-0{,}5)+3 = 0{,}5$

$H(z) = 5\times 1 + 0{,}5 \times \dfrac{z}{z-(-0{,}5)} \times z^{-1} \quad ; \quad |z| > 0{,}5$

$h[n] = 5\delta[n] + 0{,}5 \times (-0{,}5)^{n-1} u[n-1]$

$h[n] = 5\delta[n] - (-0{,}5)^{n} u[n-1]$

$X(z) = \dfrac{z}{z-0{,}8} \quad ; \quad |z| > 0{,}8$

$Y(z) = H(z)X(z)$ $\qquad \dfrac{Y(z)}{z} = \dfrac{5z+3}{(z+0{,}5)(z-0{,}8)} = \dfrac{A}{z+0{,}5} + \dfrac{B}{z-0{,}8}$ $\quad |z| > 0{,}8$

$A = \dfrac{5\times(-0{,}5)+3}{-0{,}5-0{,}8} = \dfrac{-5}{13}$ $\qquad B = \dfrac{5\times(0{,}8)+3}{0{,}8+0{,}5} = \dfrac{70}{13}$

$Y(z) = -\dfrac{5}{13} \cdot \dfrac{z}{z-(-0{,}5)} + \dfrac{70}{13} \times \dfrac{z}{z-0{,}8} \quad ; \quad |z| > 0{,}8$

$y[n] = \left(70 \times 0{,}8^{n} - 5 \times (-0{,}5)^{n}\right) \times \dfrac{1}{13} \times u[n]$

5) $y(t) = \dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \left(a_k \cos k\omega_0 t + b_k \sin k\omega_0 t\right) = \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{k\omega_0 t}$

$T_0 = 2 \longrightarrow \omega_0 = 2\pi / T_0 = \pi$

Simetriden ortalamanın 1 olduğu anlaşılıyor ($c_0 \neq 0$, $a_0 \neq 0$)

$y(t) - 1$ hem tek sinyal, hem de tek harmonik simetrili.

Bu yüzden $k \neq 0$ için $a_k = 0$

Ayrıca 0 hariç tüm çift k'lar için $a_k = b_k = c_k = 0$.

6) $\mathcal{F}\{x(t-a)\} = \int\limits_{t=-\infty}^{+\infty} x(t-a)\, e^{-j\omega t}\, dt$

$p = t - a$ dersek $t = p + a$, $dt = dp$

$t = -\infty \Rightarrow p = -\infty$ $\qquad t = +\infty \Rightarrow p = +\infty$

$\mathcal{F}\{x(t-a)\} = \int\limits_{p=-\infty}^{+\infty} x(p)\, e^{-j\omega(p+a)}\, dp = e^{-j\omega a} \underbrace{\int\limits_{p=-\infty}^{+\infty} x(p)\, e^{-j\omega p}\, dp}_{X(\omega)}$

$= e^{-ja\omega} X(\omega)$

BSS-F-2019-CA3

7) $y[n] = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{konvolüsyon}}}{x[n] * h[n]} \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} Y(z) = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{çarpım}}}{X(z)H(z)}$

Dikkat:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n} = 9z^{-1} + 3z^{-2} + 0\cdot z^{-3} + 6\cdot z^{-4}$$

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n] z^{-n} = 5z^{-1} + 3z^{-2} - 4z^{-3} - 5z^{-4}$$

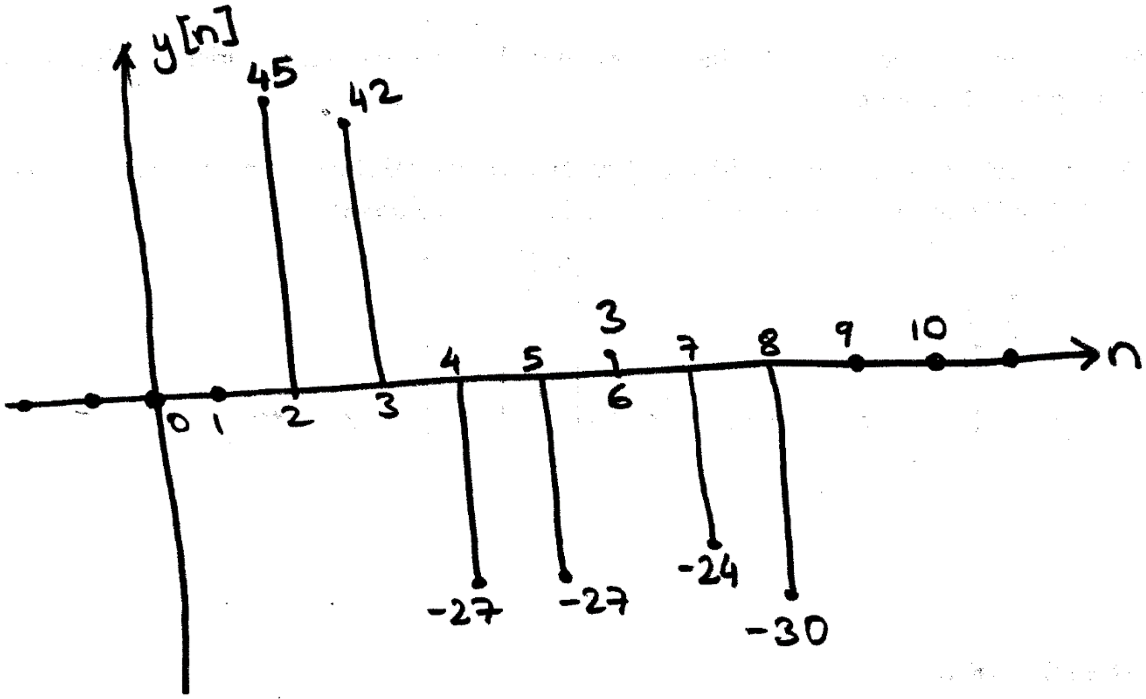
$$\begin{array}{rrrrrrrl}
 & & & 9 & 3 & 0 & 6 & \to z^{-4}\text{'ün katsayısı} \\
 & & & 5 & 3 & -4 & -5 & \to z^{-4}\text{'ün ''} \\
\times & & & & & & & \\
\hline
 & & & -45 & -15 & 0 & -30 & \\
 & & -36 & -12 & 0 & -24 & & \\
 & 27 & 9 & 0 & 18 & & & \\
45 & 15 & 0 & 30 & & & & \\
+ & & & & & & & \\
\hline
45 & 42 & -27 & -27 & 3 & -24 & -30 & \to z^{-4-4} = z^{-8}\text{'in katsayısı}
\end{array}$$

45 ↓ z^{-2} 'nin katsayısı

-24 ↳ z^{-7} 'nin katsayısı

$$Y(z) = \underset{\substack{\downarrow\\ y[2]}}{45}z^{-2} + \underset{\substack{\downarrow\\ y[3]}}{42}z^{-3} - 27z^{-4} - 27z^{-5} + 3z^{-6} \underbrace{-24}_{y[7]}z^{-7} \underbrace{-30}_{y[8]}z^{-8} \ \ldots$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[n] z^{-n}$$



Bilgisayar Mühendislği Bölümü
SİNYALLER VE SİSTEMLER BÜTÜNLEME SINAVI SORULARI
05 Temmuz 2019 Süre: 75 dakika

1) Birim darbe tepkisi $h(t) = 2u(t-1) - 3u(t-4)$ ile verilen doğrusal zamanla değişmez (DZD) sistemin birim basamak tepkisini çiziniz **(10 puan)**. Bu sistem bellekli midir, nedensel midir, kararlı mıdır? DZD sistemlere özel gerekçeleriyle cevaplayınız **(9 puan).**

2) Giriş(x)-çıkış(y) ilişkisi aşağıda verilen nedensel sistemin birim darbe tepkisini bulunuz. **(13 puan)** (Dikkat: Z-dönüşümüyle yapmanız tavsiye edil**MEZ**.)

$$y[n+2] - 2y[n+1] + y[n] = 4x[n]$$

3) Giriş(x)-çıkış(y) ilişkisi

$$\ddot{y}(t) + 5\dot{y}(t) + 4y(t) = 3\dot{x}(t) - 6x(t)$$

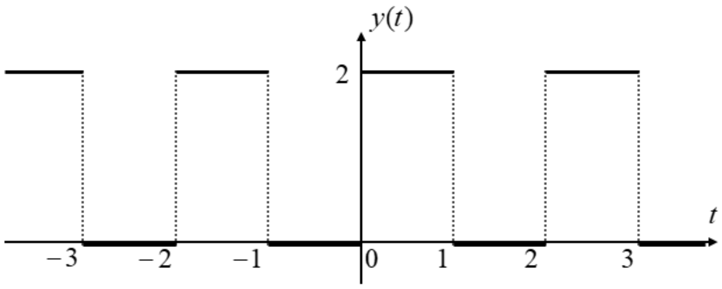
ile verilen nedensel sistemin transfer fonksiyonunu **(4 puan)** ve birim darbe tepkisini **(10 puan)** bulunuz.

4) Giriş(x)-çıkış(y) ilişkisi

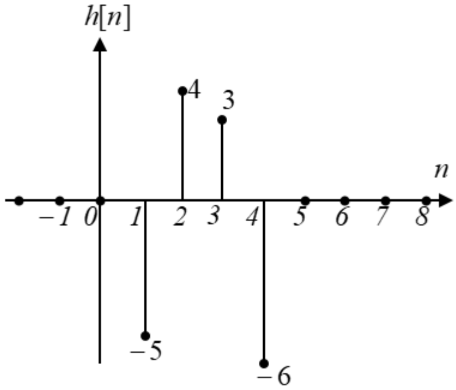
$$y[n+1] + 3y[n] = 4x[n+1] - x[n]$$

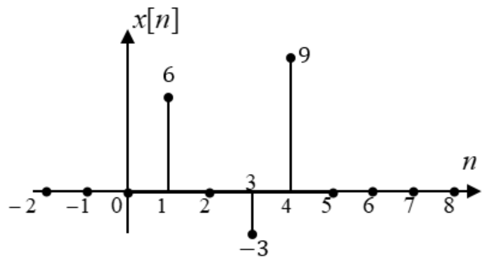
ile verilen nedensel sistemin transfer fonksiyonunu **(4 puan)** ve $x[n] = 2^n u[n]$ girişi için enerjisiz başlangıçlı çıkışını **(12 puan)** Z ve/veya Z^{-1} dönüşümleriyle bulunuz.

5) Aşağıda gösterilen 2π periyotlu $y(t)$ sinyalinin Fourier serisini bulunuz. Sıfırdan farklı en az 4 katsayısını yerine koyarak yazınız **(18 puan)**.



6) Birim darbe tepkisi $h[n]$ ile girişi $x[n]$ aşağıda verilen DZD sistemin çıkışı $y[n]$'dir. $h[n]$, $x[n]$ ve $y[n]$'in Z dönüşümlerini bulunuz ve $y[n]$'i <u>çiziniz</u>. **(20 puan)**

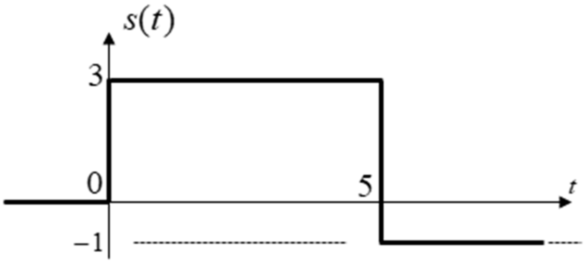


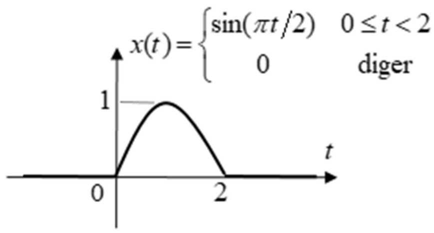


BAŞARILAR …

SİNYALLER VE SİSTEMLER FİNAL SINAVI SORULARI
03.01.2020 Süre: 75 dakika
1. ve 2. sorular zorunlu, diğerleri seçmelidir. Üçten fazla seçmeli cevaplarsanız en iyi üçü dikkate alınır.

1)

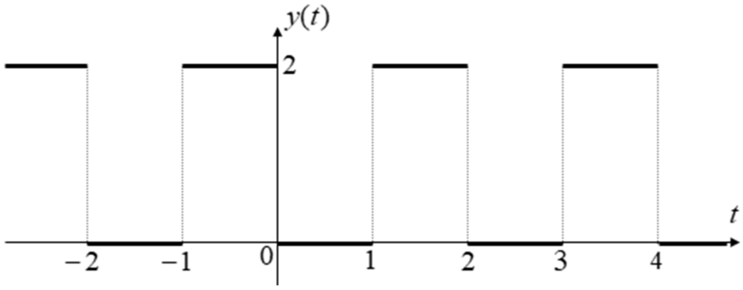




DZD bir sistemin birim basamak tepkisi $s(t)$ ve girişi $x(t)$ yukarıda verilmiştir. Sistem çıkışı $y(t)$ ne olur? Çiziniz **(10 puan).** Bu sistemin birim darbe tepkisi $h(t)$'yi çiziniz **(6 puan)**. Bu sistem nedensel midir, kararlı mıdır, bellekli midir? DZD sistemlere özel ifadelerle gerekçesini ortaya koyarak cevaplayınız **(9 puan)**.

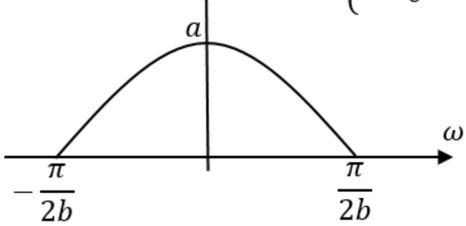
2) Giriş(x)-çıkış(y) ilişkisi $\dot{y}(t) + 2y(t) = x(t-3)$ ile verilen nedensel sistemin transfer fonksiyonunu ve birim darbe tepkisini bulunuz. **(7+8 puan)**

3) Sağdaki şekildeki $T_0 = 2$ ile periyodik $y(t)$ sinyalini Fourier serisine açınız (sıfırdan farklı en az 4 terimi ile seriyi yazınız). **(20 puan)**



4) $R = 5\Omega$ 'luk bir direnç üzerindeki $v(t)$ gerilim sinyalinin genlik spektrumu sağda verilmiştir. $a = 20Vs$ ve $b = 0{,}004s$ 'dir. Bu direnç üzerinde $-\infty < t < +\infty$ zaman aralığında harcanan toplam enerjiyi bulunuz. **(20 puan)**

$$|V(\omega)| = \begin{cases} a\cos b\omega & |\omega| < \pi/(2b) \ \ ise \\ 0 & |\omega| \geq \pi/(2b) \ \ ise \end{cases}$$



5) Doğrusal ve zamanla değişmez (DZD) bir sistemin birim darbe tepkisi $h[n]$ ve girişi $x[n]$ aşağıda verilmiştir.

$$h[0] = 5\,,\quad h[1] = -3\,,\quad h[2] = -7\,,\quad h[3] = 4\,; \qquad \forall n < 0 \text{ ve } \forall n > 3 \text{ için } h[n] = 0$$
$$x[-1] = 6\,,\quad x[0] = 2\,,\quad x[1] = 0\,,\quad x[2] = -1\,; \qquad \forall n < -1 \text{ ve } \forall n > 2 \text{ için } x[n] = 0$$

$h[n]$, $x[n]$ ve sistem çıkışı $y[n]$ 'in her birinin Z-dönüşümlerini bulunuz ve $y[n]$'i çiziniz. **(20 puan)**

6) Giriş(x)-çıkış(y) ilişkisi

$$y[n+2] - y[n+1] - 6y[n] = 5x[n+2] + 4x[n+1]$$

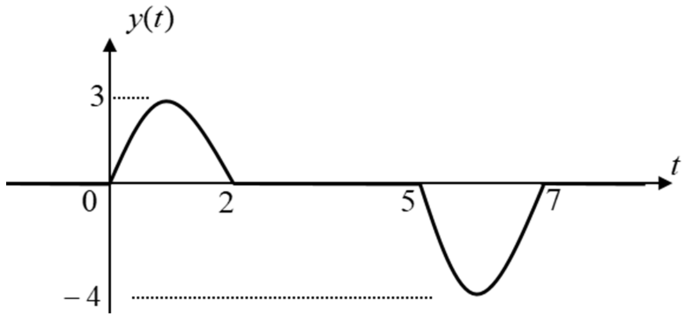
ile verilen nedensel sistemin transfer fonksiyonunu **(5 puan)** ve birim darbe tepkisini **(15 puan)** bulunuz.

7) $x[0] = 0$, $x[1] = 12$, $x[2] = 0$, $x[3] = -8$ ve $N = 4$ ile periyodik olan $x[n]$ sinyalinin Fourier serisini, katsayılarını bulup yerine koyarak yazınız. **(20 puan)**

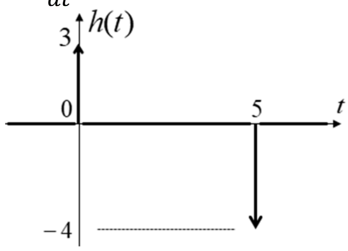
BAŞARILAR …

SİNYALLER VE SİSTEMLER FİNAL SINAVI CEVAP ANAHTARI
03.01.2020

1) $s(t) = 3u(t) - 4u(t-5)$ diye yazılabilir. Bu yüzden $y(t) = 3x(t) - 4x(t-5)$ olur.



Ayrıca $h(t) = \frac{ds(t)}{dt} = 3\delta(t) - 4\delta(t-5)$



$\forall t < 0$ için $h(t) = 0$ olduğundan nedenseldir. $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt = 3 + 4 = 7 < \infty$ yani sonlu olduğundan kararlıdır.

Bazı $t \neq 0$ için $h(t) \neq 0$, bu yüzden belleklidir.

2) $j\omega Y(\omega) + 2Y(\omega) = e^{-j3\omega}X(\omega)$ (zamanda ötelenme özelliği) $\rightarrow$ $\frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = H(\omega) = \frac{1}{j\omega+2}e^{-j3\omega}$ transfer fonksiyondur. $F(\omega) = \frac{1}{j\omega+2}$ dersek $H(\omega) = e^{-j3\omega}F(\omega)$ $\rightarrow$ $h(t) = f(t-3)$ olur.

$f(t) = e^{-2t}u(t)$ olduğu açıkça görülmektedir. Dolayısıyla birim darbe tepkisi $h(t) = e^{-2(t-3)}u(t-3)$

3) $y(t)$ tek de değildir çift de değildir; fakat $y(t) - 1 = x(t)$ sinyali tektir. Bu yüzden $x(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin(k\omega_0 t)$
Ayrıca $\omega_0 = 2\pi/2 = \pi$.

$$b_k = \frac{4}{T_0}\int_0^1 x(t)\sin(k\omega_0 t)\,dt = \frac{4}{2}\int_0^1 (0-1)\sin(k\pi t)\,dt = \frac{2}{k\pi}[\cos(k\pi t)]_0^1 = \frac{2}{k\pi}[\cos k\pi - 1]$$

$b_k = \frac{2}{k\pi}((-1)^k - 1) = \begin{cases} -4/(k\pi) & k \text{ tekse} \\ 0 & k \text{ çiftse} \end{cases}$ (zaten $x(t)$ kısmı aynı zamanda tek harmonik simetrilidir.)

$y(t) = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin(k\omega_0 t)$ yani $a_0 = 2$ ve $a_k = 0$ $\forall k > 0$. Sonuç:

$$y(t) = 1 - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin \pi t}{1} + \frac{\sin 3\pi t}{3} + \frac{\sin 5\pi t}{5} + \cdots\right)$$

4) $$E = \frac{1}{R}\int_{-\infty}^{+\infty} |v(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi R}\int_{-\infty}^{+\infty} |V(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi R}\int_{-\pi/(2b)}^{\pi/(2b)} a^2\cos^2 b\omega\, d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi R}\int_{-\pi/(2b)}^{\pi/(2b)} \frac{a^2}{2}[1 + \cos(2b\omega)]d\omega = \frac{a^2}{4\pi R}\left[\omega + \frac{\sin(2b\omega)}{2b}\right]_{-\pi/(2b)}^{\pi/(2b)}$$

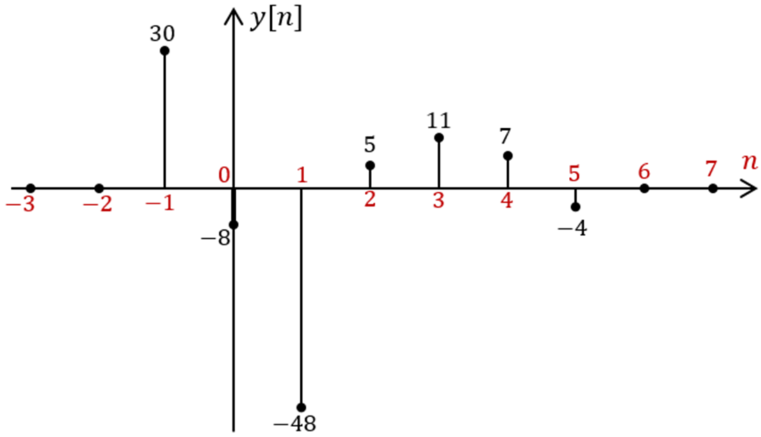
$$= \frac{a^2}{4\pi R}\left(\frac{\pi}{2b} + \frac{\sin\pi}{2b} - \frac{-\pi}{2b} - \frac{\sin(-\pi)}{2b}\right) = \frac{a^2}{4\pi R}\frac{\pi}{b} = E = \frac{a^2}{4bR} = \frac{20^2}{4 \times 0{,}004 \times 5}\text{ J} = 5\text{ kJ} = E$$

5) $\mathcal{Z}\{h[n]\} = H(z) = 5 - 3z^{-1} - 7z^{-2} + 4z^{-3}$ $\qquad$ $\mathcal{Z}\{x[n]\} = X(z) = 6z + 2 + 0z^{-1} - 1z^{-2}$

$$Y(z) = H(z)X(z) = 30z - 8 - 48z^{-1} + 5z^{-2} + 11z^{-3} + 7z^{-4} - 4z^{-5}$$

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[n]\, z^{-n}$$

(Burada doğrudan sonuç yazıldı ama öğrenciden bunun çıkartılışı da isteniyordu (önceki cevap anahtarlarındaki gibi).



6) Transfer fonksiyon $H(z) = \frac{5z^2+4z}{z^2-z-6}$; $|z| > 3$

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{5z+4}{(z+2)(z-3)} = \frac{A}{z-(-2)} + \frac{B}{z-3}$$

$$A = \frac{5(-2)+4}{-2-3} = \frac{6}{5} \qquad B = \frac{5\times3+4}{3-(-2)} = \frac{19}{5}$$

$$H(z) = \frac{6}{5}\cdot\frac{z}{z-(-2)} + \frac{19}{5}\cdot\frac{z}{z-3}\ ;\ |z| > 3 \qquad \rightarrow \qquad h[n] = \left(\frac{6}{5}(-2)^n + \frac{19}{5}3^n\right)u[n]$$

7) $\omega_o = \frac{2\pi}{N} = \frac{\pi}{2}$ olmak üzere $x[n] = \sum_{k=0}^{3} c_k e^{jk\pi n/2}$ Fourier serisidir. Katsayılar şöyle bulunur:

$$c_k = \frac{1}{4}\cdot\sum_{n=0}^{3} x[n]e^{-jk\pi n/2}$$

Ortalama değer: $c_0 = \frac{x[0]+x[1]+x[2]+x[3]}{4} = \frac{0+12+0-8}{4} = 1 = c_0$

$$c_1 = \frac{1}{4}\cdot\sum_{n=0}^{3} x[n]e^{-j1\pi n/2} = \frac{x[0]\overbrace{e^{-j1\pi\cdot 0/2}}^{1} + x[1]\overbrace{e^{-j1\pi\cdot 1/2}}^{-j} + x[2]\overbrace{e^{-j1\pi\cdot 2/2}}^{-1} + x[3]\overbrace{e^{-j1\pi\cdot 3/2}}^{j}}{4}$$

$$c_1 = \frac{0 - j12 - 0 + j(-8)}{4} = -j5 = c_1 \qquad \rightarrow \qquad c_1^* = c_3 = j5$$

$$c_2 = \frac{1}{4}\cdot\sum_{n=0}^{3} x[n]e^{-j2\pi n/2} = \frac{x[0]\overbrace{e^{-j2\pi\cdot 0/2}}^{1} + x[1]\overbrace{e^{-j2\pi\cdot 1/2}}^{-1} + x[2]\overbrace{e^{-j2\pi\cdot 2/2}}^{1} + x[3]\overbrace{e^{-j2\pi\cdot 3/2}}^{-1}}{4}$$

$$c_2 = \frac{0 - 12 + 0 - (-8)}{4} = -1 = c_2$$

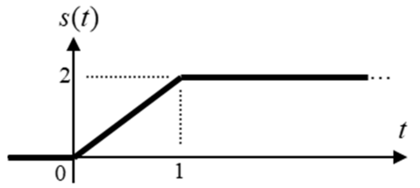
Tüm katsayıları Fourier serisinde yerine yazalım:

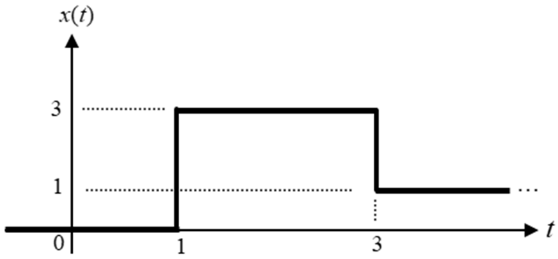
$$x[n] = \sum_{k=0}^{3} c_k e^{jk\pi n/2} = c_0 e^{j0\pi n/2} + c_1 e^{j1\pi n/2} + c_2 e^{j2\pi n/2} + c_3 e^{\overbrace{j3\pi n/2}^{\equiv -j\pi n/2}}$$

$$\boxed{x[n] = 1 - j5e^{j\pi n/2} - e^{j\pi n} + j5e^{-j\pi n/2}}$$

SİNYALLER VE SİSTEMLER BÜTÜNLEME SINAVI SORULARI
23.01.2020 Süre: 75 dakika
1. ve 2. sorular zorunlu, diğerleri seçmelidir. Üçten fazla seçmeli cevaplarsanız en iyi üçü dikkate alınır.

1)

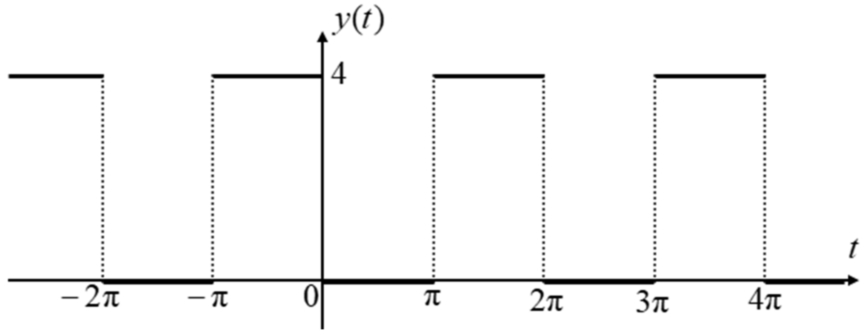




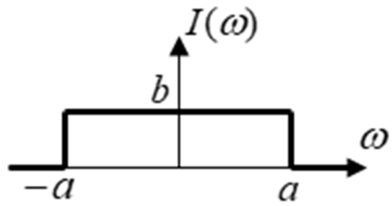
DZD bir sistemin birim basamak tepkisi $s(t)$ ve girişi $x(t)$ yukarıda verilmiştir. Sistem çıkışı $y(t)$ ne olur? Çiziniz **(10 puan).** Bu sistemin birim darbe tepkisi $h(t)$'yi çiziniz **(6 puan)**. Bu sistem nedensel midir, kararlı mıdır, bellekli midir? DZD sistemlere özel ifadelerle gerekçesini ortaya koyarak cevaplayınız **(9 puan)**.

2) Giriş(x)-çıkış(y) ilişkisi $\dot{y}(t) + 5y(t) = x(t-2)$ ile verilen nedensel sistemin transfer fonksiyonunu ve birim darbe tepkisini bulunuz. **(7+8 puan)**

3) Sağdaki şekildeki $T_0 = 2\pi$ ile periyodik $y(t)$ sinyalini Fourier serisine açınız (sıfırdan farklı en az 4 terimi ile seriyi yazınız). **(20 puan)**



4) $R = 5\Omega$ 'luk bir direnç üzerindeki $i(t)$ akım sinyalinin genlik spektrumu sağda verilmiştir. $a = 1000\pi$ rad/s ve $b = 6As$ 'dir. Bu direnç üzerinde $-\infty < t < +\infty$ zaman aralığında harcanan toplam enerjiyi bulunuz. **(20 puan)**



5) Doğrusal ve zamanla değişmez (DZD) bir sistemin birim darbe tepkisi $h[n]$ ve girişi $x[n]$ aşağıda verilmiştir.

$$h[1] = 7, \quad h[2] = 4, \quad h[3] = -6, \quad h[4] = 2; \qquad \forall n < 1 \text{ ve } \forall n > 4 \text{ için } h[n] = 0$$
$$x[-2] = -5, \quad x[-1] = 0, \quad x[0] = -8, \quad x[1] = 3; \qquad \forall n < -2 \text{ ve } \forall n > 1 \text{ için } x[n] = 0$$

$h[n]$, $x[n]$ ve sistem çıkışı $y[n]$ 'in her birinin Z-dönüşümlerini bulunuz ve $y[n]$'i çiziniz. **(20 puan)**

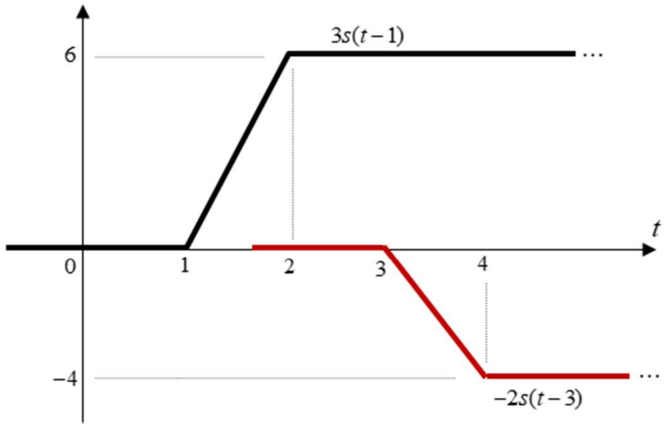
6) Giriş(x)-çıkış(y) ilişkisi
$$y[n+2] + 3y[n+1] - 4y[n] = x[n+2] - 5x[n+1]$$
ile verilen nedensel sistemin transfer fonksiyonunu **(5 puan)** ve birim darbe tepkisini **(15 puan)** bulunuz.

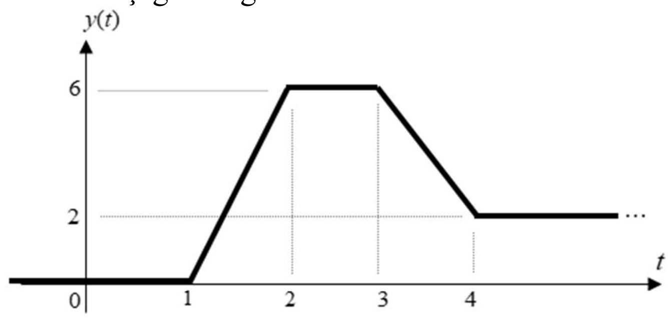
7) $x[0] = 0$, $x[1] = -12$, $x[2] = 0$, $x[3] = 20$ ve $N = 4$ ile periyodik olan $x[n]$ sinyalinin Fourier serisini, katsayılarını bulup yerine koyarak yazınız. **(20 puan)**

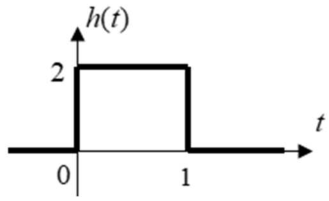
BAŞARILAR …

SİNYALLER VE SİSTEMLER BÜTÜNLEME SINAVI CEVAP ANAHTARI
23.01.2020

1) $x(t) = 3u(t-1) - 2u(t-3)$ diye yazılabilir. Bu yüzden
$y(t) = 3s(t-1) - 2s(t-3)$ olur. Tek tek ve bileşke grafikleri aşağıdaki gibi bulunur.







Ayrıca $h(t) = \frac{ds(t)}{dt} = \begin{cases} 2 & 0 \le t < 1 \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$

$\forall t < 0$ için $h(t) = 0$ olduğundan nedenseldir. $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt = 2 < \infty$ yani sonlu olduğundan kararlıdır.
Bazı $t \neq 0$ için $h(t) \neq 0$, bu yüzden belleklidir.

2) $j\omega Y(\omega) + 5Y(\omega) = e^{-j2\omega} X(\omega)$ (zamanda ötelenme özelliği) $\rightarrow$ $\frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = H(\omega) = \frac{1}{j\omega+5} e^{-j2\omega}$ transfer fonksiyondur. $F(\omega) = \frac{1}{j\omega+5}$ dersek $H(\omega) = e^{-j2\omega} F(\omega)$ $\rightarrow$ $h(t) = f(t-2)$ olur.
$f(t) = e^{-5t} u(t)$ olduğu açıkça görülmektedir. Dolayısıyla birim darbe tepkisi $h(t) = e^{-5(t-2)} u(t-2)$

3) $y(t)$ tek de değildir çift de değildir; fakat $y(t) - 2 = x(t)$ sinyali tektir. Bu yüzden $x(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin(k\omega_0 t)$
Ayrıca $\omega_0 = 2\pi/2\pi = 1$.

$$b_k = \frac{4}{T_0} \int_0^{\pi} x(t) \sin(kt)\, dt = \frac{4}{2\pi} \int_0^{\pi} (0-2) \sin(kt)\, dt = \frac{4}{\pi} \left[\frac{\cos(kt)}{k}\right]_0^{\pi} = \frac{4}{k\pi} [\cos k\pi - 1]$$

$b_k = \frac{4}{k\pi}((-1)^k - 1) = \begin{cases} -8/(k\pi) & k \text{ tekse} \\ 0 & k \text{ çiftse} \end{cases}$ (zaten $x(t)$ kısmı aynı zamanda tek harmonik simetrilidir.)

$y(t) = 2 + \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin kt$ yani $a_0 = 4$ ve $a_k = 0 \;\forall k > 0$. Sonuç:

$$y(t) = 2 - \frac{8}{\pi}\left(\frac{\sin \pi t}{1} + \frac{\sin 3\pi t}{3} + \frac{\sin 5\pi t}{5} + \cdots\right)$$

4) $$E = R \int_{-\infty}^{+\infty} |i(t)|^2 dt = \frac{R}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |I(\omega)|^2 d\omega = \frac{R}{2\pi} \int_{-a}^{a} b^2 d\omega = \frac{R}{2\pi} [b^2 \omega]_{-a}^{+a} = \frac{R}{2\pi} 2ab^2 = \frac{ab^2 R}{\pi}$$

$$E = \frac{1000\pi \times 6^2 \times 5}{\pi} J = 180 \text{ kJ}$$

5) $\mathcal{Z}\{h[n]\} = H(z) = 7z^{-1} + 4z^{-2} - 6z^{-3} + 2z^{-4}$

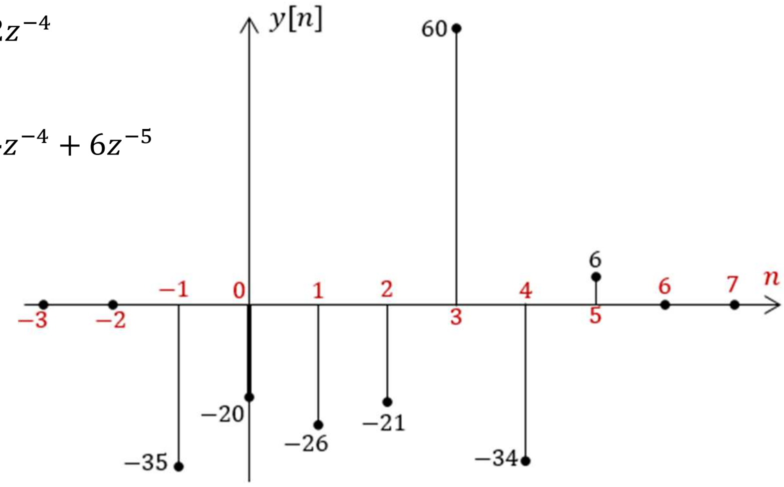
$\mathcal{Z}\{x[n]\} = X(z) = -5z^2 + 0 \cdot z - 8 + 3z^{-1}$

$Y(z) = H(z)X(z)$

$= -35z - 20 - 26z^{-1} - 21z^{-2} + 60z^{-3} - 34z^{-4} + 6z^{-5}$

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[n]\, z^{-n}$$

(Burada doğrudan sonuç yazıldı ama öğrenciden bunun çıkartılışı da isteniyordu (önceki cevap anahtarlarındaki gibi).



6) Transfer fonksiyon $H(z) = \frac{z^2-5z}{z^2+3z-4}$; $|z| > 4$

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{z-5}{(z-1)(z+4)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-(-4)}$$

$$A = \frac{1-5}{1+4} = -\frac{4}{5} \qquad B = \frac{-4-5}{-4-1} = \frac{9}{5}$$

$$H(z) = -\frac{4}{5}\cdot\frac{z}{z-1} + \frac{9}{5}\cdot\frac{z}{z-(-4)}\ ; \quad |z| > 4 \qquad \to \qquad h[n] = \left(-\frac{4}{5}1^n + \frac{9}{5}(-4)^n\right)u[n] = \left(-\frac{4}{5} + \frac{9}{5}(-4)^n\right)u[n]$$

7) $\omega_o = \frac{2\pi}{N} = \frac{\pi}{2}$ olmak üzere $x[n] = \sum_{k=0}^{3} c_k e^{jk\pi n/2}$ Fourier serisidir. Katsayılar şöyle bulunur:

$$c_k = \frac{1}{4}\cdot\sum_{n=0}^{3} x[n]e^{-jk\pi n/2}$$

Ortalama değer: $c_0 = \frac{x[0]+x[1]+x[2]+x[3]}{4} = \frac{0-12+0+20}{4} = 2 = c_0$

$$c_1 = \frac{1}{4}\cdot\sum_{n=0}^{3} x[n]e^{-j\mathbf{1}\pi n/2} = \frac{x[0]\overbrace{e^{-j\mathbf{1}\pi\cdot 0/2}}^{1} + x[1]\overbrace{e^{-j\mathbf{1}\pi\cdot 1/2}}^{-j} + x[2]\overbrace{e^{-j\mathbf{1}\pi\cdot 2/2}}^{-1} + x[3]\overbrace{e^{-j\mathbf{1}\pi\cdot 3/2}}^{j}}{4}$$

$$c_1 = \frac{0 - j(-12) - 0 + j20}{4} = j8 = c_1 \quad \to \quad c_1^* = c_3 = -j8$$

$$c_2 = \frac{1}{4}\cdot\sum_{n=0}^{3} x[n]e^{-j\mathbf{2}\pi n/2} = \frac{x[0]\overbrace{e^{-j\mathbf{2}\pi\cdot 0/2}}^{1} + x[1]\overbrace{e^{-j\mathbf{2}\pi\cdot 1/2}}^{-1} + x[2]\overbrace{e^{-j\mathbf{2}\pi\cdot 2/2}}^{1} + x[3]\overbrace{e^{-j\mathbf{2}\pi\cdot 3/2}}^{-1}}{4}$$

$$c_2 = \frac{0-(-12)+0-20}{4} = -2 = c_2$$

Tüm katsayıları Fourier serisinde yerine yazalım:

$$x[n] = \sum_{k=0}^{3} c_k e^{jk\pi n/2} = c_0 e^{j\mathbf{0}\pi n/2} + c_1 e^{j\mathbf{1}\pi n/2} + c_2 e^{j\mathbf{2}\pi n/2} + c_3 e^{\overbrace{j\mathbf{3}\pi n/2}^{\equiv -j\pi n/2}}$$

$$\boxed{x[n] = 2 + j8e^{j\pi n/2} - 2e^{j\pi n} - j8e^{-j\pi n/2}}$$