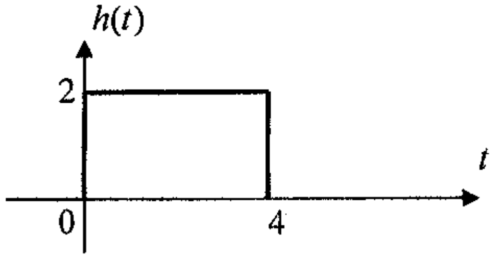
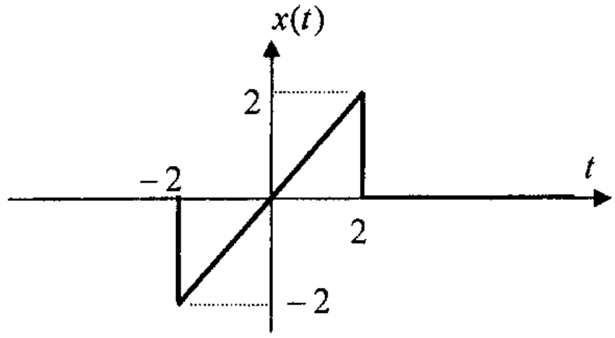
SİNYALLER VE SİSTEMLER ARASINAV SORULARI
26.11.2007 Süre:90 dakika

1) $y(t) = 2u(t+1) - 4u(t-2) + 2u(t-3)$ sinyalinin tek ve çift bileşenlerini çiziniz. **(15 puan)**

2) Giriş ve **çıkışı sürekli** sinyal olan bir sistem, düzenli olarak T periyotlarla girişten ölçüm alarak çıkışta en son alınan ölçümü veriyor (T pozitif bir sabittir). Bu sistem doğrusal mıdır, bellekli midir, nedensel midir, zamanla değişen midir, kararlı mıdır? **(5x3 = 15 puan)**

3) Birim darbe tepkisi $h(t)$ ve girişi $x(t)$ şekillerde verilen doğrusal zamanla değişmez sistemin çıkışını hesaplayınız. **(25 puan)**



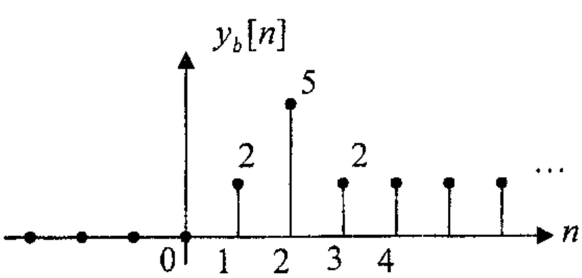


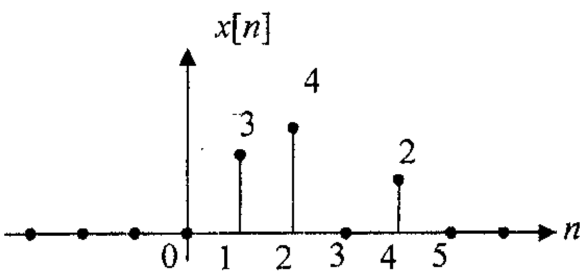
4) Giriş (x) çıkış (y) ilişkisi aşağıdaki fark denklemiyle verilen nedensel sistemin birim darbe tepkisini hesaplayınız. **(20 puan)**

$$y[n+2] - \sqrt{3}\,y[n+1] + y[n] = 2x[n]$$

5. ve 6. sorulardan yalnız birini cevaplamanız beklenmektedir. İkisini de cevaplarsanız, daha düşük puan aldığınız soru hesaba katılmayacaktır.

5) Birim basamak tepkisi $y_b[n]$ şekilde verilen doğrusal zamanla değişmez sistemin birim darbe tepkisini hesaplayınız **(8 puan)**. Bu sistemin girişine şekilde verilen $x[n]$ sinyali uygulanırsa çıkış $y[n]$ ne olur? Bulunuz ve çiziniz **(17 puan)**.





6) Giriş (x) çıkış (y) ilişkisi aşağıdaki diferansiyel denklemle verilen sistemin çıkışını $x(t) = e^{-2t}\,u(t)$ girişi ve $y(0) = 1$, $\dot{y}(0) = 1$ başlangıç şartları için hesaplayınız. **(25 puan)**

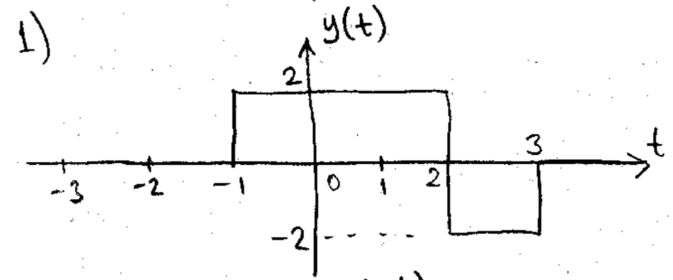
$$\ddot{y}(t) + 4\dot{y}(t) + 4y(t) = 4x(t)$$

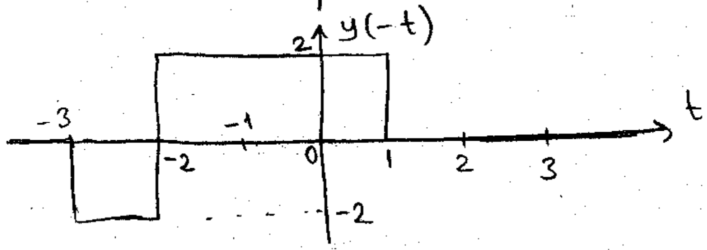
BAŞARILAR ...

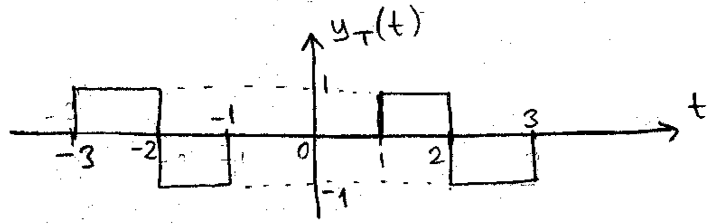
Yard. Doç. Dr. Ata SEVİNÇ

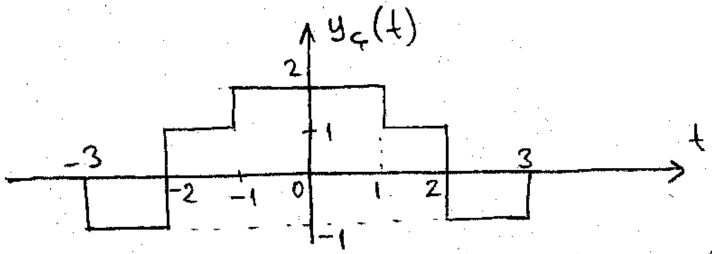
SİNYALLER VE SİSTEMLER ARASINAV CEVAP ANAHTARI:
26.11.2007

1)





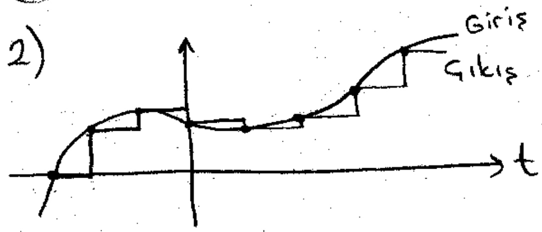




Tek bileşen $= y_T(t) = \dfrac{y(t)-y(-t)}{2}$

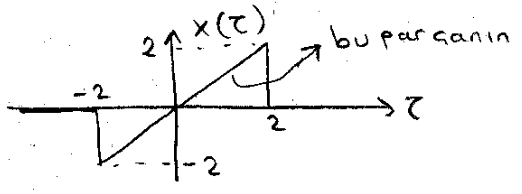
Çift bileşen $= y_ç(t) = \dfrac{y(t)+y(-t)}{2}$

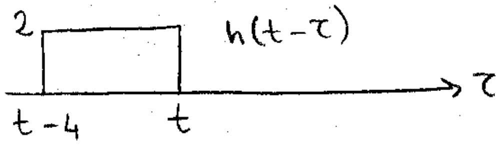
2)



Bellekli
Doğrusal
Nedensel
Zamanla değişen
Kararlı

3) Çıkış $= y(t) = x(t) * h(t) = h(t) * x(t) = \int_{\tau=-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$





$t < -2$ ise:

$x(\tau)h(t-\tau) = 0 \qquad \forall\tau$

$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} 0 \cdot d\tau = 0$

$-2 \leq t < 2$ ise:

$$x(\tau)h(t-\tau) = \begin{cases} 2\cdot\tau & -2 \leq \tau \leq t \text{ ise} \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$$

$$y(t) = \int_{\tau=-2}^{t} 2\tau\, d\tau = \tau^2 \Big|_{-2}^{t} = t^2 - 4$$

$-2 \leq t-4 < 2 \rightarrow$ yani: $2 \leq t < 6$ ise:

$$x(\tau)h(t-\tau) = \begin{cases} 2\tau & t-4 \leq \tau \leq 2 \text{ ise} \\ 0 & \text{diğer} \end{cases} \longrightarrow y(t) = \int_{\tau=t-4}^{2} 2\tau\, d\tau = \tau^2 \Big|_{t-4}^{2}$$

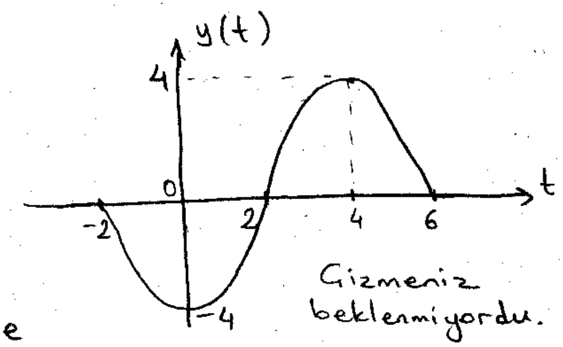
$$y(t) = 4 - (t-4)^2 = -t^2 + 8t - 12$$

$t-4 \geqslant 2$ yani $\underline{t \geqslant 6 \text{ ise}}$:

$$x(\tau)h(t-\tau)=0 \quad \forall \tau \quad \rightarrow \quad y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} 0 \cdot d\tau = 0$$

Sonuç:

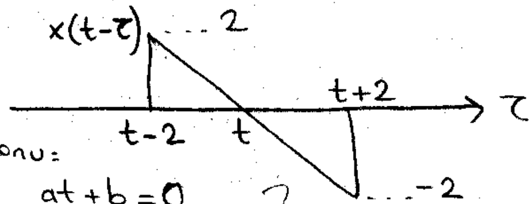
$$y(t)=\begin{cases} 0 & t<-2 \text{ ise} \\ t^2-4 & -2 \leq t < 2 \text{ ise} \\ -t^2+8t-12 & 2 \leq t < 6 \text{ ise} \\ 0 & t \geqslant 6 \text{ ise} \end{cases}$$



Çizmeniz beklenmiyordu.

Dikkat: $y(t)=\int_{\tau=-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$ formülüyle

yapanlar için:



Doğru parçasının fonksiyonu:

$a\tau+b \rightarrow \tau=t$ için $at+b=0$

$\hookrightarrow \tau=t-2$ için $at-2a+b=2$ $\Big\}$ Buradan $a=-1$, $b=t$

Yani $t-2 \leq \tau \leq t+2$ için $x(t-\tau)=t-\tau$. Aynı aralık için

belirsiz integral: $\int h(\tau)x(t-\tau)d\tau = \int 2(t-\tau)d\tau = -(t-\tau)^2 = -(\tau-t)^2$ olur.

4) $n>0$ için:

$$h[n+2]-\sqrt{3}\,h[n+1]+h[n]=0$$

$$h[1]=0 \qquad h[2]=2/1=2$$

$$\lambda^2-\sqrt{3}\lambda+1=0 \Rightarrow \lambda_{1,2}=\frac{\sqrt{3}\mp\sqrt{3-4\cdot 1}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\mp j\frac{1}{2}=1\cdot e^{\mp j30^\circ}$$

$$h[n]=A\cdot 1^n\cos(n\times 30^\circ)+B\cdot 1^n\sin(n\times 30^\circ)$$

$$h[1]=A\cos 30^\circ+B\sin 30^\circ=0=\frac{\sqrt{3}}{2}A+\frac{1}{2}B$$

$$h[2]=A\cos 60^\circ+B\sin 60^\circ=2=\frac{1}{2}A+\frac{\sqrt{3}}{2}B$$

$\Big\}$ $B=-\sqrt{3}A$, $4=(1-3)A$, $A=-2$, $B=2\sqrt{3}$

$$h[n]=\left[-2\cos(n\times 30^\circ)+2\sqrt{3}\sin(n\times 30^\circ)\right]u[n-2]$$

$\hookrightarrow$ sıfırdan farklı ilk nokta $n=2$'de

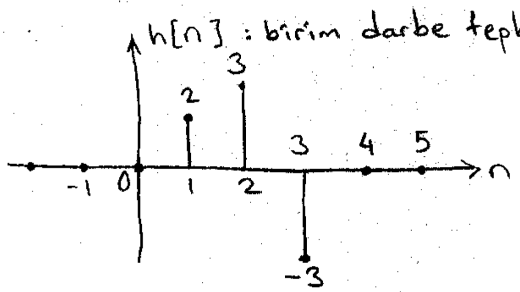
Diğer bazı çözümler ise:

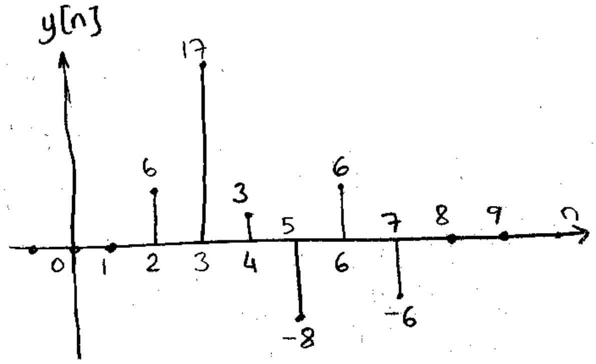
$$h[n]=4\left[\sin([n-1]\times 30^\circ)\right]u[n-2]$$

$$h[n]=\left[2\cos([n-2]\cdot 30^\circ)+2\sqrt{3}\sin([n-2]\cdot 30^\circ)\right]\cdot u[n-2]$$

Buradaki $u[n-2]$ yerine $u[n-1]$ de yazılabilir; çünkü $n=1$ için büyük parantez $[\ldots]$ içi zaten sıfır çıkacak şekilde katsayılar belirlendi.

5) $h[n] = y_b[n] - y_b[n-1]$ (Çünkü $\delta[n] = u[n] - u[n-1]$)





$y[n] = x[n] * h[n]$

her ikisi de sonlu adet noktada sıfırdan farklı.

$x[1]$ $\quad$ $x[4]$

$h[1]$ $\quad$ $h[3]$

$$
\begin{array}{r}
(3)(4)(0)(2) \\
\times \quad (2)(3)(-3) \\
\hline
(-9)(-12)(0)(-6) \\
(9)(12)(0)(6) \quad \\
+ \quad (6)(8)(0)(4) \qquad \\
\hline
(6)(17)(3)(-8)(6)(-6)
\end{array}
$$

Elde aktarımı yapmıyoruz.

$y[1+1] = y[2]$ $\quad$ $y[4+3] = y[7]$

Öncesinde ve sonrasında sıfır.

6) $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0 \rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -2$

$t<0$ için denklem homojen. $\rightarrow y = y_h = A_1 e^{-2t} + A_2 t e^{-2t}$

Sağda darbe bulunmadığı için, $y(0^-) = y(0) = A_1 = 1$, $\dot{y}(0^-) = \dot{y}(0) = -2A_1 + A_2 = 1$ $\Big\}$ $A_1 = 1$, $A_2 = 3$

$$y(t) = e^{-2t}(1+3t) \qquad t<0 \text{ için.}$$

$t \geq 0$ için $\quad y_h(t) = B_1 e^{-2t} + B_2 t e^{-2t}$

Sağda $4e^{-2t}$ var. $-2 = \lambda_1 = \lambda_2$: iki katlı özdeğer olduğu için:

$$y_ö(t) = ct^2 e^{-2t} \rightarrow \dot{y}_ö = 2ct \cdot e^{-2t} - 2ct^2 e^{-2t}$$

$$\ddot{y}_ö = 2c e^{-2t} - 8ct e^{-2t} + 4ct^2 e^{-2t}$$

$$\ddot{y}_ö + 4\dot{y}_ö + 4y_ö = 4e^{-2t} = e^{-2t}\left([4-8+4]ct^2 + [-8+8]ct + 2c\right)$$

$$2c = 4 \rightarrow c = 2 \rightarrow y_ö(t) = 2t^2 e^{-2t}$$

$y = y_h + y_ö = (B_1 + B_2 t + 2t^2)\, e^{-2t}$

$\dot{y}(t) = \left[(B_2 + 4t) - 2(B_1 + B_2 t + 2t^2)\right] e^{-2t}$

$y(0) = 1 = B_1$

$\dot{y}(0) = 1 = B_2 - 2B_1$ $\Big\}$ $B_1 = 1$, $B_2 = 3$

Sonuç:

$$y(t) = \begin{cases} (1+3t)\, e^{-2t} & t<0 \text{ ise} \\ (1+3t+2t^2)\, e^{-2t} & t \geq 0 \text{ ise} \end{cases}$$

SİNYALLER VE SİSTEMLER SINAV SORULARI

09.01.2008 Süre: 80 dakika

3. soru mecburidir*. 4. ve 5. sorudan istediğiniz birisi zorunludur. Diğer sorular (ve isterseniz 4. ve 5. sorunun diğeri de) seçmelidir. Toplam olarak yalnızca 5 soru cevaplayınız. Her soru eşit (20) puanlıdır.
*2004-2005 öğretim yılı veya daha öncesinde açılan Sinyaller ve Sistemler-1 dersini almış ve devamsız olmamış olanlar (dersten ister geçsin ister kalsın) için 3. soru da seçmelidir. Yerine başka soru yapabilirler.

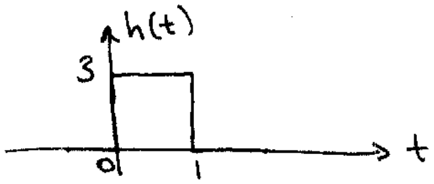
1) $x(t) = 2u(t) + 2u(t-1) - 6u(t-2)$ sinyalini

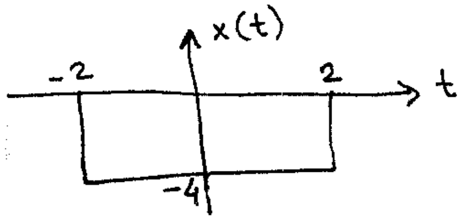
a) Çiziniz. **(5 puan)** **b)** Tek ve çift bileşenlerine ayırınız. **(15 puan)**

2) a) Giriş(x) çıkış(y) ilişkisi $y(t) = x(t) + \dfrac{dx(t)}{dt}$ ile verilen bir sistem doğrusal mıdır, bellekli midir, nedensel midir, zamanla değişen midir, kararlı mıdır? **(5x3 = 15 puan)**

b) $v[n] = \cos\left(\dfrac{n\pi}{4}\right) + \sin\left(\dfrac{n\pi}{7}\right)$ kesikli zaman sinyali periyodik midir? Periyodikse periyodu nedir? **(5 puan)**

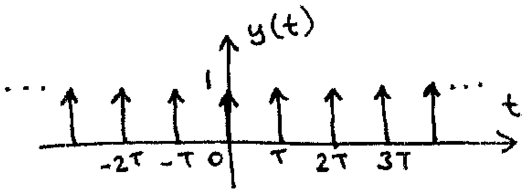
3)





$y(t) = x(t) * h(t) = ?$ (Çizmenize gerek yoktur.)

4) a) Şekilde verilen $y(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(t - mT)$ sinyalinin karmaşık Fourier serisinin $y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \dfrac{1}{T} e^{j\frac{2k\pi}{T}t}$ olduğunu gösteriniz. **(15 puan)**



b)Bu sinyalin gerçel Fourier serisinde; dc bileşen, sinüslü terimler, kosinüslü terimler, tek harmonikler, çift harmoniklerden hangileri **sıfırdır?** **(5 puan)**

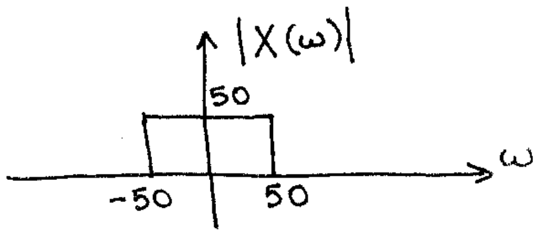
5) 4. soruda verilen sinyalin Fourier dönüşümünün yine bir darbe treni olduğunu gösteriniz. Dönüşümü tam olarak bulunuz. (**Yol gösterme:** Verilen karmaşık Fourier **serisini** kullanınız.)

6) Giriş(x) çıkış(y) ilişkisi aşağıda verilen iki sistemden yalnız birisinin transfer fonksiyonunu ve birim darbe tepkisini bulunuz.

a) $y[n+2] - 1{,}5y[n+1] + 0{,}5y[n] = x[n+1] - 2x[n]$

b) $\ddot{y}(t) + 5\dot{y}(t) + 4y(t) = \dot{x}(t) - 2x(t)$

7) Spektrumu ($|X(\omega)|$) şekildeki gibi olan bir $x(t)$ sinyali, $y(t) = x(t)\cos(200t)$ biçiminde modüle ediliyor.



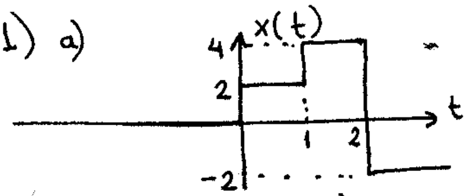
a) Modüleli sinyalin spektrumunu ($|Y(\omega)|$) çiziniz. **(10 puan)**

b) $\int_{-\infty}^{+\infty} |y(t)|^2 \, dt = ?$ **(10 puan)**

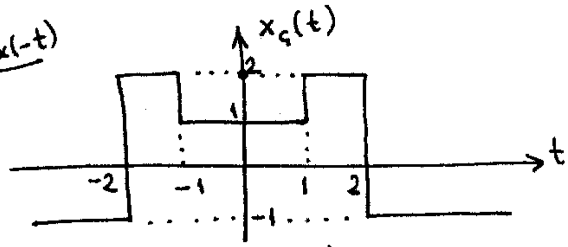
BAŞARILAR ... **Yrd. Doç. Dr. Ata SEVİNÇ**

SİNYALLER VE SİSTEMLER FİNAL CEVAP ANAHTARI:
09. 01. 2008

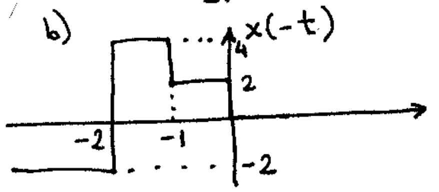
1) a)



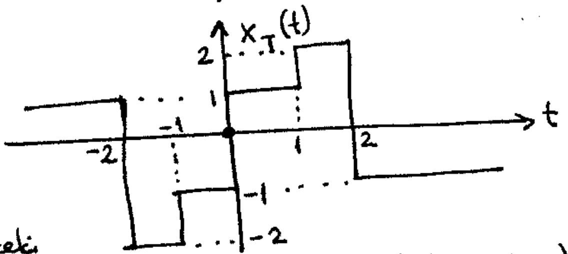
Çift bileşen:
$$x_ç(t) = \frac{x(t)+x(-t)}{2}$$



b)



Tek bileşen
$$x_T(t) = \frac{x(t)-x(-t)}{2}$$



2) a) Doğrusaldır (türev de doğrusal bir işlemdir)

Belleklidir (fakat yalnız o anki ve bir an önceki giriş değerlerine bağlı) sonuçta bir anlık da olsa bellek gerekiyor)

Nedenseldir

Zamanla değişmez ve kararsızdır. Çünkü kendisi sonlu ama türevi sonsuza gidebilen sinyaller vardır. Örneğin $x(t)=u(t) \Rightarrow y(t) = u(t)+\delta(t)$ olur, yani $t=0$ için $y(t) \to \infty$.

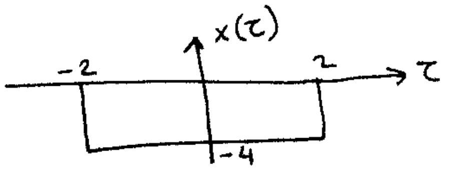
b) $\cos\frac{n\pi}{4} = \cos\left([n+N_1]\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow N_1\frac{\pi}{4} = 2k\pi$ (k tamsayı) en küçük pozitif $N_1 = 8$

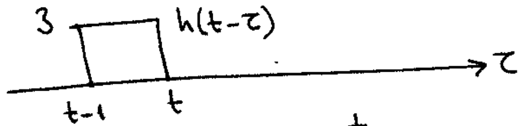
$\sin\frac{n\pi}{7} = \sin\left([n+N_2]\frac{\pi}{7}\right) \Rightarrow N_2\frac{\pi}{7} = 2k\pi$ en küçük pozitif $N_2 = 14$

v[n] 'in her iki bileşeni de periyodik ve bileşenlerin periyodlarının ~~OKEK~~ ortak bir katı mevcut

OKEK(8, 14) = N = 56 ile periyodiktir.

3) $y(t) = x(t) * h(t) = \int_{\tau=-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau$





$\underline{t<-2} \Rightarrow x(\tau)h(t-\tau) = 0$ her τ için

$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} 0 \cdot d\tau = 0$

$\underline{-2 \le t < -1} \Rightarrow x(\tau)h(t-\tau) = \begin{cases} -3 \times 4 & -2 \le \tau \le t \\ 0 & \text{diğer} \end{cases} \Rightarrow y(t) = \int_{\tau=-2}^{t} -12\,d\tau = -12(t+2)$

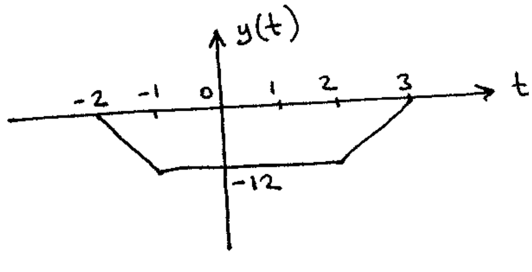
$\underline{-1 \le t < 2} \Rightarrow x(\tau)h(t-\tau) = \begin{cases} -4 \times 3 & t-1 \le \tau \le t \\ 0 & \text{diğer} \end{cases} \rightarrow y(t) = \int_{\tau=t-1}^{t} -12\,d\tau = -12$

$\underline{2 \le t < 3} \Rightarrow x(\tau)h(t-\tau) = \begin{cases} -4 \times 3 & t-1 \le \tau \le 2 \\ 0 & \text{diğer} \end{cases} \rightarrow y(t) = \int_{\tau=t-1}^{2} -12\,d\tau = -12(3-t)$

$\underline{3 \le t} \Rightarrow x(\tau)h(t-\tau) = 0$ her τ için

$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} 0 \cdot d\tau = 0$

Sonuç:
$$y(t) = \begin{cases} 0 & t<-2 \text{ ise} \\ -12(t+2) & -2 \le t < -1 \text{ ise} \\ -12 & -1 \le t < 2 \text{ ise} \\ -12(3-t) & 2 \le t < 3 \text{ ise} \\ 0 & 3 \le t \text{ ise} \end{cases}$$



4) a) $y(t)$, T ile periyodik, $w_0 = 2\pi/T$

$-T/2 < t < \frac{T}{2}$ için $y(t) = \delta(t)$

$$c_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} y(t)\, e^{-jkw_0 t}\, dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \underbrace{\delta(t)\cdot e^{-jkw_0 t}}_{\delta(t)\cdot e^{0}}\, dt = \frac{1}{T}\underbrace{\int_{-T/2}^{T/2}\delta(t)dt}_{1} = \frac{1}{T} = c_k$$

$$\rightarrow y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{jkw_0 t} = \boxed{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T}\cdot e^{jk\cdot\frac{2\pi}{T}t} = y(t)}$$

b) Sinyal çift olduğundan sinüslü terimler sıfırdır, kosinüslüler vardır. Tek harmonik simetrisi yoktur. Yani hem tek hem çift harmonikler vardır. Ortalaması = dc bileşen sıfırdan farklıdır, çünkü hiç negatif olmamaktadır.

Sonuç: Yalnız sinüslü terimler sıfırdır.

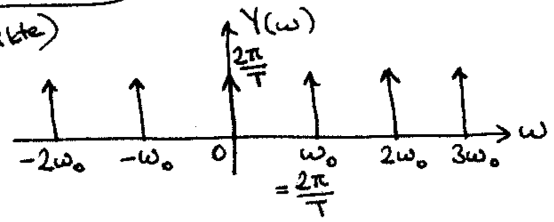
5) $e^{jw_0 t} \xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi\delta(w - w_0)$

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} e^{jkw_0 t} \xrightarrow{\mathcal{F}} Y(w) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2\pi}{T}\delta(w - kw_0) \rightarrow w_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$= \boxed{\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(t - mT) \xrightarrow{\mathcal{F}} Y(w) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{2\pi}{T}\delta\left(w - \frac{2m\pi}{T}\right)}$$

→ Toplamı m ya da k değişkenine göre yazmak farketmez.

Not: Bu sonuca ileride Haberleşme dersinde "örnekleme" konusunda ihtiyaç duyacaksınız. (4. ve 5. soruların cevaplarına birlikte)



Zaman uzayındaki periyod (T) azaltılırsa frekans uzayındaki periyod ($w_0 = 2\pi/T$) artar.

6) a) $y[n+2] - 1{,}5\,y[n+1] + 0{,}5\,y[n] = x[n+1] - 2x[n]$

z-dönüşümü alınırsa $Y(z)(z^2 - 1{,}5z + 0{,}5) = X(z)(z-2)$

Transfer fonksiyon: $H(z) = \dfrac{Y(z)}{X(z)} = \dfrac{z-2}{z^2 - 1{,}5z + 0{,}5} = \dfrac{z-2}{(z-1)(z-0{,}5)}$

Nedensel olduğu için YB: $|z| > 1$

$$H(z) = \underbrace{\frac{A}{z-1}}_{H_1(z)} + \underbrace{\frac{B}{z-0{,}5}}_{H_2(z)} \;; \quad A = (z-1)H(z)\Big|_{z=1} = \frac{1-2}{1-0{,}5} = -2$$

$B = (z-0{,}5)H(z)\Big|_{z=0{,}5}$

$B = \dfrac{0{,}5-2}{0{,}5-1} = 3$

$YB_1: |z| > 1$

$YB_2: |z| > 0{,}5$ dememizde bir sakınca yoktur. Çünkü $YB_1 \cap YB_2 = YB$ değişmedi

$$h[n] = \mathcal{Z}^{-1}\left\{z^{-1}\cdot\frac{-2z}{z-1}\right\} + \mathcal{Z}^{-1}\left\{z^{-1}\cdot\frac{3z}{z-0{,}5}\right\} = -2\times 1^{n-1}u[n-1] + 3\times(0{,}5)^{n-1}u[n-1]$$

~~h[n] = -2u[n]~~ $\boxed{h[n] = \left(3\times(0{,}5)^{n-1} - 2\right)u[n-1]}$

6) b) $\ddot{y}(t) + 5\dot{y}(t) + 4y(t) = \dot{x}(t) - 2x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} Y(\omega)\left((j\omega)^2 + 5j\omega + 4\right) = X(\omega)(j\omega - 2)$

Transfer fonksiyon: $H(\omega) = \dfrac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \dfrac{(j\omega) - 2}{(j\omega)^2 + 5(j\omega) + 4} = \dfrac{(j\omega - 2)}{(j\omega + 1)(j\omega + 4)}$

$$H(\omega) = \frac{A}{j\omega + 1} + \frac{B}{j\omega + 4}$$

$$A = (j\omega + 1)H(\omega)\Big|_{j\omega = -1} = \frac{-1-2}{-1+4} = -1 = A$$

$$B = (j\omega + 4)H(\omega)\Big|_{j\omega = -4} = \frac{-4-2}{-4+1} = 2 = B$$

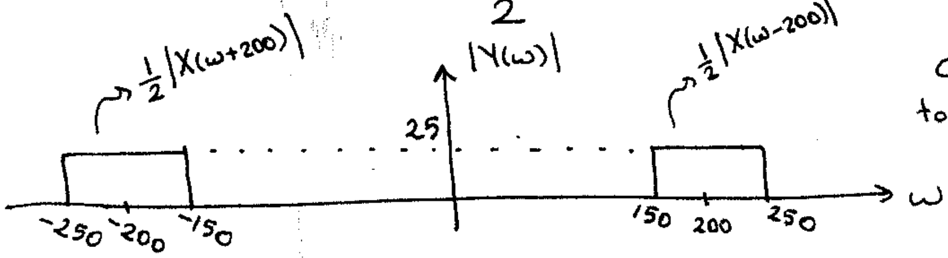
$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{-1}{j\omega + 1}\right\} + \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{2}{j\omega + 4}\right\} = -e^{-t}u(t) + 2e^{-4t}u(t)$$

$$\boxed{h(t) = \left(2e^{-4t} - e^{-t}\right)u(t)}$$

7) a) $y(t) = x(t)\cos 200t \xrightarrow{\mathcal{F}} Y(\omega) = \dfrac{1}{2\pi} X(\omega) * \mathcal{F}\Big\{\underbrace{\dfrac{e^{j200t} + e^{-j200t}}{2}}_{\cos 200t}\Big\}$

$$Y(\omega) = \frac{1}{4\pi} X(\omega) * \left(2\pi\delta(\omega - 200) + 2\pi\delta(\omega + 200)\right)$$

$$Y(\omega) = \frac{X(\omega) * \delta(\omega - 200) + X(\omega) * \delta(\omega + 200)}{2} = \frac{X(\omega - 200) + X(\omega + 200)}{2}$$



Çakışma olmadığı için toplamın mutlak değeri = mutlak değerlerin toplamı

b) $$\int_{-\infty}^{+\infty} |y(t)|^2\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |Y(\omega)|^2\, d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-250}^{-150} 25^2\, d\omega + \frac{1}{2\pi}\int_{150}^{250} 25^2\, d\omega$$

$$= \frac{625}{2\pi}(-150 + 250) + \frac{625}{2\pi}(250 - 150) = \frac{62500}{\pi}$$

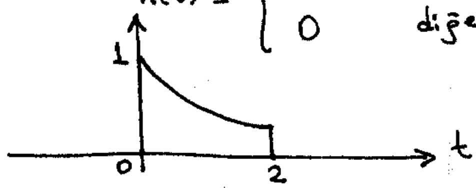
SİNYALLER VE SİSTEMLER BÜTÜNLEME SINAV SORULARI
23.01.2008 Süre: 80 dakika

3. soru mecburidir*. 4. ve 5. sorudan istediğiniz birisi zorunludur. Diğer sorular (ve isterseniz 4. ve 5. sorunun diğeri de) seçmelidir. Toplam olarak yalnızca 5 soru cevaplayınız. Her soru eşit (20) puanlıdır.
*2004-2005 öğretim yılı veya daha öncesinde açılan Sinyaller ve Sistemler-1 dersini almış ve devamsız olmamış olanlar (dersten ister geçsin ister kalsın) için 3. soru da seçmelidir. Yerine başka soru yapabilirler.

1) Doğrusal zamanla değişmez bir sistemin birim darbe tepkisi $h(t) = -2u(t+1) + 6u(t) - 4u(t-1)$'dir.
a) $h(t)$'yi çiziniz. **(5 puan)** **b)** Sistemin birim basamak tepkisini çiziniz. **(15 puan)**

2) a) 1. soruda verilen sistem nedensel midir, kararlı mıdır? Nedenleriyle birlikte yazınız. **(8 puan)**
b) 1. soruda verilen $h(t)$'yi tek ve çift bileşenlerine ayırınız. **(12 puan)**

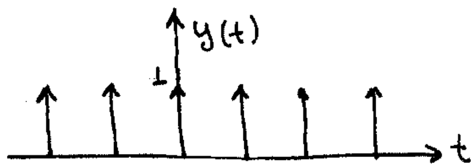
3) $h(t) = \begin{cases} e^{-t} & 0 \le t < 2 \text{ ise} \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$



$x(t) = -h(t)$

$y(t) = x(t) * h(t) = ?$ (Çizmenize gerek yoktur.)

4) a) Şekilde verilen $y(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(t-m)$ sinyalinin karmaşık Fourier serisinin $y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{j2k\pi t}$ olduğunu gösteriniz. **(15 puan)**



b)Bu sinyalin gerçel Fourier serisinde; dc bileşen, sinüslü terimler, kosinüslü terimler, tek harmonikler, çift harmoniklerden hangileri **sıfırdır? (5 puan)**

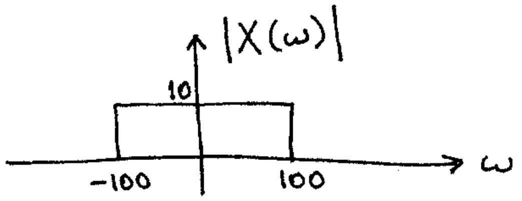
5) 4. soruda verilen sinyalin Fourier dönüşümünün yine bir darbe treni olduğunu gösteriniz. Dönüşümü tam olarak bulunuz. **(Yol gösterme:** Verilen karmaşık Fourier serisini kullanınız.)

6) Giriş(x) çıkış(y) ilişkisi aşağıda verilen iki sistemden yalnız birisinin transfer fonksiyonunu ve birim darbe tepkisini bulunuz.

a) $y[n+2] - y[n+1] + 0{,}24y[n] = x[n+1] - x[n]$

b) $\ddot{y}(t) + 6\dot{y}(t) + 5y(t) = \dot{x}(t) + 3x(t)$

7) Spektrumu ($|X(\omega)|$) şekildeki gibi olan bir $x(t)$ sinyali, $y(t) = x(t)\cos(100t)$ biçiminde modüle ediliyor.
a) Modüleli sinyalin spektrumunu ($|Y(\omega)|$) çiziniz. **(10 puan)**
b) $\int_{-\infty}^{+\infty} |y(t)|^2 dt = ?$ **(10 puan)**



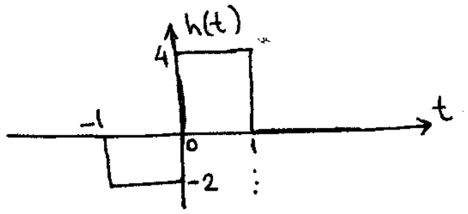
BAŞARILAR ...

Yrd. Doç. Dr. Ata SEVİNÇ

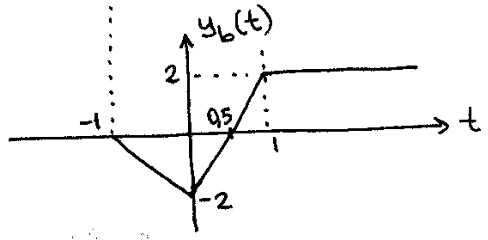
SİNYALLER VE SİSTEMLER BÜTÜNLEME CEVAP ANAHTARI:

23.01.2008

1) a)



b)



Birim basamak tepkisi:

$$y_b(t) = \int_{\tau=-\infty}^{t} h(\tau)\,d\tau$$

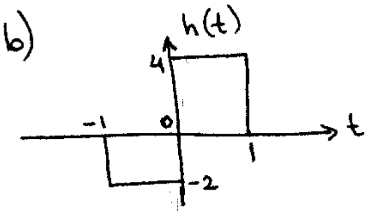
Çünkü $\quad u(t) = \int_{\tau=-\infty}^{t} \delta(\tau)\,d\tau$

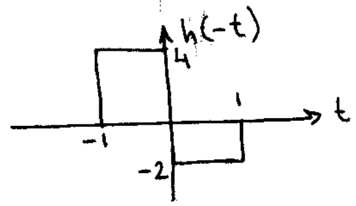
ve sistem doğrusal zamanla değişmez.

2) a) Bazı $t<0$ için $h(t) \neq 0$ olduğu için nedensel değildir.

$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|\,dt$ = sonlu bir değer olduğu için kararlıdır.

b)





Tek bileşen

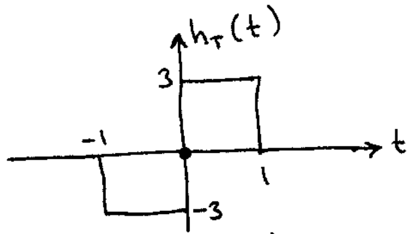
$$h_T(t) = \frac{h(t)-h(-t)}{2}$$

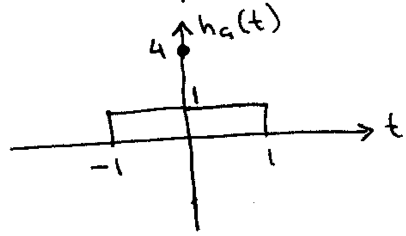
$h_T(0) = 0$

Çift bileşen

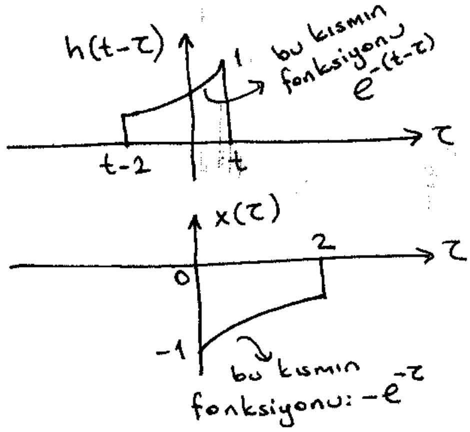
$$h_Ç(t) = \frac{h(t)+h(-t)}{2}$$

$h_Ç(0) = h(0) = -2+6+0 = 4$





3)



$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{\tau=-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau$$

<u>$t<0$ ise:</u>

Her τ için $x(\tau)h(t-\tau) = 0$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} 0 \cdot d\tau = 0$$

<u>$0 \leq t < 2$ ise:</u>

$$x(\tau)h(t-\tau) = \begin{cases} -e^{-\tau} \cdot e^{-(t-\tau)} = -e^{-t} & 0 \leq \tau \leq t \text{ ise} \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$$

$$\rightarrow y(t) = \int_{\tau=0}^{t} -e^{-t}\,d\tau = -e^{-t} \cdot \tau \Big|_{\tau=0}^{t} = -te^{-t} = y(t)$$

τ'ya göre sabit

<u>$2 \leq t < 4$ ise:</u>

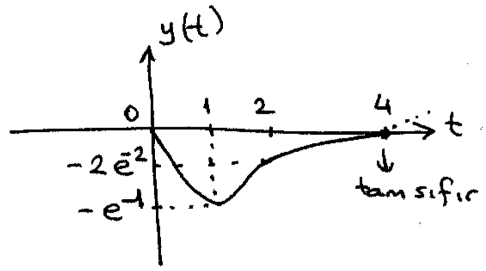
$$x(\tau)h(t-\tau) = \begin{cases} -e^{-\tau} \cdot e^{-(t-\tau)} = -e^{-t} & t-2 \leq \tau \leq 2 \text{ ise} \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$$

$$y(t) = \int_{\tau=t-2}^{2} -e^{-t}\,d\tau = -e^{-t}\int_{t-2}^{2} d\tau = -e^{-t}\big(2-(t-2)\big) = (t-4)e^{-t}$$

$t \geq 4$ ise :

Her τ için $x(\tau)h(t-\tau) = 0$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} 0 \cdot d\tau = 0$$



Sonuç:

$$y(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \text{ ise} \\ -te^{-t} & 0 \leq t < 2 \text{ ise} \\ (t-4)e^{-t} & 2 \leq t < 4 \text{ ise} \\ 0 & 4 \leq t \text{ ise} \end{cases}$$

4) a) $-\frac{1}{2} \leq t < \frac{1}{2}$ için $y(t) = \delta(t)$

ve $T_0 = 1$ ile periyodik $\rightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 2\pi$

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} \quad ; \quad c_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} y(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

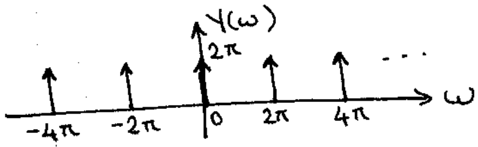
1

$$c_k = \int_{-1/2}^{1/2} \underbrace{\delta(t) e^{-jk \cdot 2\pi t}}_{= \delta(t) \cdot e^0} dt = \int_{-1/2}^{1/2} \delta(t) dt = 1 \rightarrow \boxed{y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 1 \cdot e^{jk2\pi t}}$$

b) $c_0 = 1 \neq 0$, tek harmonik simetrisi yok. Sinyal çift.
Dolayısıyla yalnız sinüslü terimler sıfırdır.

5) $e^{j\omega_0 t} \xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi \delta(\omega - \omega_0)$ formülünü ω_0 yerine $2k\pi$ için kullanırsak, doğrusallıkla birlikte,

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{j2k\pi t} \xrightarrow{\mathcal{F}} Y(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi \delta(\omega - 2k\pi)$$



$\rightarrow$ Bu da bir darbe trenidir.

6) a) $y[n+2] - y[n+1] + 0{,}24y[n] = x[n+1] - x[n] \xrightarrow{\mathcal{Z}} Y(z)(z^2 - z + 0{,}24) = X(z)(z-1)$

Transfer fonksiyon: $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z-1}{z^2 - z + 0{,}24} = \frac{z-1}{(z-0{,}4)(z-0{,}6)}$

$$H(z) = \frac{A_1}{z-0{,}4} + \frac{A_2}{z-0{,}6} \; ; \qquad A_1 = \left.\frac{z-1}{z-0{,}6}\right|_{z=0{,}4} = \frac{0{,}4-1}{0{,}4-0{,}6} = 3$$

$$A_2 = \left.\frac{z-1}{z-0{,}4}\right|_{z=0{,}6} = \frac{0{,}6-1}{0{,}6-0{,}4} = -2$$

$$\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{z-a}\right\} = a^n u[n]$$

(Nedensellikten dolayı sağ taraflı çözümle ilgileniyoruz)

$$H(z) = 3z^{-1} \cdot \frac{z}{z-0{,}4} - 2z^{-1} \frac{z}{z-0{,}6}$$

zamanda öteleme yapar

$$h[n] = \left[3 \times (0{,}4)^{n-1} - 2 \times (0{,}6)^{n-1}\right] u[n-1]$$

$\rightarrow$ Sistem nedensel ise birim darbe tepkisi

6) b) $\ddot{y}(t)+6\dot{y}(t)+5y(t)=\dot{x}(t)+3x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} Y(\omega)\left((j\omega)^2+6j\omega+5\right)=X(\omega)(j\omega+3)$

Transfer fonksiyon: $H(\omega)=\dfrac{Y(\omega)}{X(\omega)}=\dfrac{(j\omega)+3}{(j\omega)^2+6(j\omega)+5}$

$$H(\omega)=\frac{j\omega+3}{(j\omega+1)(j\omega+5)}=\frac{B_1}{j\omega+1}+\frac{B_2}{j\omega+5}$$

$$B_1=\left.\frac{j\omega+3}{j\omega+5}\right|_{j\omega=-1}=\frac{-1+3}{-1+5}=\frac{1}{2}=B_1$$

$$B_2=\left.\frac{j\omega+3}{j\omega+1}\right|_{j\omega=-5}=\frac{-5+3}{-5+1}=\frac{1}{2}=B_2$$

$$h(t)=\mathcal{F}^{-1}\{H(\omega)\}=\frac{1}{2}\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{j\omega+1}\right\}+\frac{1}{2}\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{j\omega+5}\right\}$$

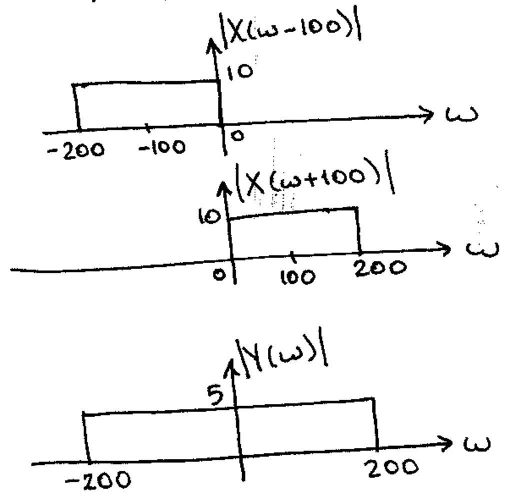
$h(t)=\frac{1}{2}\left(e^{-t}+e^{-5t}\right)u(t) \rightarrow$ Sistem nedensel ise birim darbe tepkisi

7) a) $y(t)=x(t)\cos 100t \xrightarrow{\mathcal{F}} Y(\omega)=\frac{1}{2\pi}X(\omega)*\mathcal{F}\{\cos 100t\}$

$$\cos 100t=\frac{e^{j100t}+e^{-j100t}}{2}\xrightarrow{\mathcal{F}}\frac{2\pi\delta(\omega-100)+2\pi\delta(\omega+100)}{2}$$

$$Y(\omega)=\frac{1}{2\pi}X(\omega)*\left[\pi\delta(\omega-100)+\pi\delta(\omega+100)\right]$$

$X(\omega)*\delta(\omega-\omega_0)=X(\omega-\omega_0)$ olduğundan, $Y(\omega)=\dfrac{X(\omega-100)+X(\omega+100)}{2}$



ω=0 noktası hariç çakışma olmadığı için mutlak değerler toplamı = toplamın mutlak değeri.

~~ω=0 'da~~

b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}|y(t)|^2dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|Y(\omega)|^2d\omega$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-200}^{200}5^2d\omega=\left.\frac{25\omega}{2\pi}\right|_{-200}^{200}$$

$$=\frac{25\times 400}{2\pi}=\boxed{\frac{5000}{\pi}=\int_{-\infty}^{+\infty}|y(t)|^2dt}$$

ω=0 'daki çakışmayla ilgilenmedik ama çakışmadan dolayı $|Y(0)|\neq 5$ olsaydı bile bu, integralin sonucunu etkilemezdi, tek nokta olduğu için.

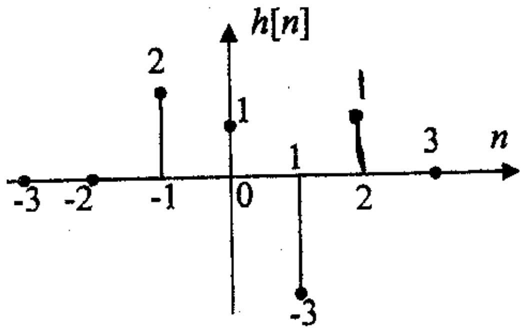
SİNYALLER VE SİSTEMLER ARASINAV SORULARI

24.11.2008 Süre: 80 dakika

1) a) Yanda görülen $h[n]$ sinyalinin tek ve çift bileşenlerini çiziniz.**(12 puan).**

b) Eğer $h[n]$, doğrusal zamanla değişmez bir sistemin birim darbe tepkisi ise o sistem nedensel midir, kararlı mıdır? **(2×3 = 6 puan)**

c) O sistemin birim basamak tepkisini çiziniz. **(10 puan)**

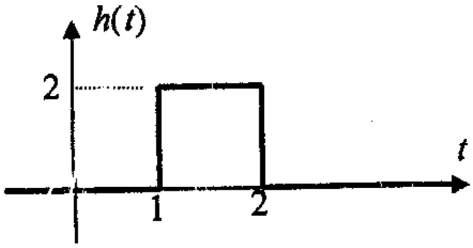


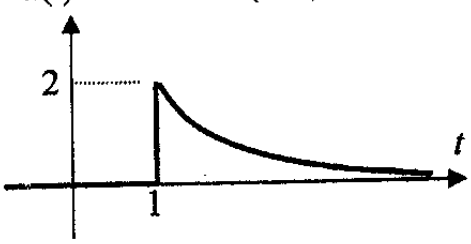
2) Giriş(x) – çıkış (y) ilişkisi $y(t) = x(t+1)\cdot u(t-2) + t^2 \dfrac{dx(t)}{dt}$ olan bir sistem, doğrusal mıdır, zamanla değişen midir, nedensel midir, bellekli midir, kararlı mıdır? **(5×3 = 15 puan)**

3) Aşağıdaki sinyallerin herbirinin periyodik olup olmadığını, periyodik iseler ana periyotlarının ne olduğunu yazınız. **(9 puan)**

a) $h[n] = \sin\left(\dfrac{\pi n}{5}\right) + (-1)^n$ **b)** $x(t) = \sin\left(\dfrac{\pi t}{5}\right) + \cos 5t$

4) Birim darbe tepkisi $h(t)$ ve girişi $x(t)$ şekillerde verilen doğrusal zamanla değişmez bir sistemin çıkışını hesaplayınız. **(25 puan)**





5) Giriş(x) – çıkış (y) ilişkisi

$$\ddot{y}(t) + 5\dot{y}(t) + 6y(t) = x(t-1)$$

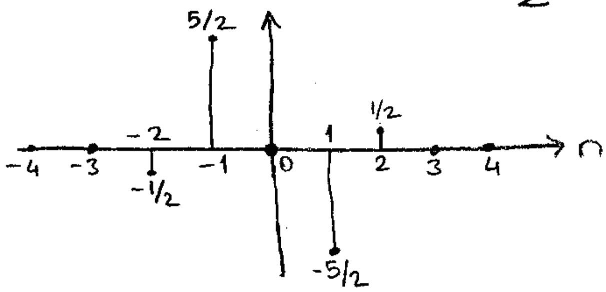
ile verilen nedensel sistemin birim darbe tepkisini bulunuz. **(23 puan)**

BAŞARILAR ...

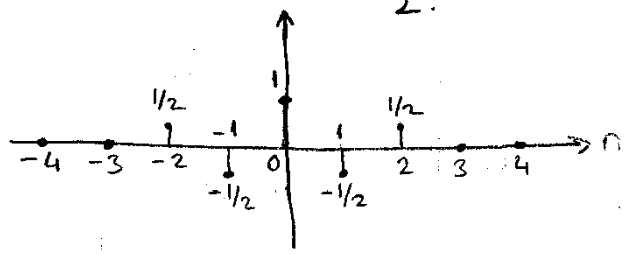
Yard. Doç. Dr. Ata SEVİNÇ

SİNYALLER VE SİSTEMLER ARASINAV CEVAP ANAHTARI
24.11.2008

1) a) Tek bileşen : $h_T[n] = \dfrac{h[n]-h[-n]}{2}$



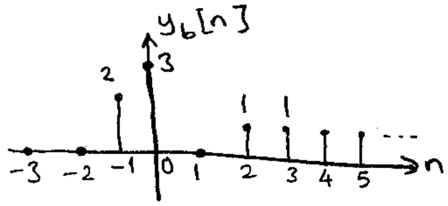
Çift bileşen : $h_Ç[n] = \dfrac{h[n]+h[-n]}{2}$



b) Nedensel DEĞİLDİR.
Çünkü bazı $n<0$ $(n=-1)$ için $h[n] \neq 0$

KARARLIDIR. Çünkü
$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| = \text{sonlu } (=7)$$

c) $y_b[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} h[k]$

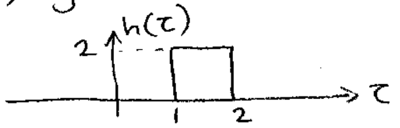


2) Doğrusaldır.
Zamanla değişendir; çünkü $x(\ )$ parantezinin dışında t bağımlılığı var.
Nedensel değildir; çünkü $t \geq 2$ için gelecekteki giriş $(x(t+1))$ bilgisi gerekiyor.
Belleklidir (hem türevden, hem $x(t+1)$'den dolayı).
Kararsızdır (hem türevden, hem t^2'den dolayı).

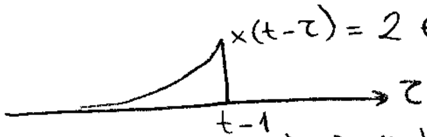
3) a) $\sin\left(\frac{\pi n}{5}\right) \longrightarrow N_1 = 10$ ile periyodik
$(-1)^n \longrightarrow N_2 = 2$ ile periyodik
Ortak tam katlarının en küçüğü $N=10$ ile $h[n]$ periyodiktir.

b) $\sin\left(\frac{\pi t}{5}\right) \rightarrow T_1 = 10$ ile periyodik
$\cos 5t \longrightarrow T_2 = \frac{2\pi}{5}$ ile periyodik
T_1/T_2 : irrasyonel, ortak tam kat yok
$x(t)$ periyodik DEĞİL.

4) $y(t) = x(t) * h(t) = \displaystyle\int_{\tau=-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)\,d\tau \longrightarrow$ çıkış



$x(t-\tau) = 2e^{-(t-\tau-1)}u(t-\tau-1)$



$\rightarrow$ çünkü $t-\tau = 1 \Rightarrow \tau = t-1$

$h(\tau)x(t-\tau)$ çarpımının yazılış biçimi
$t-1<1$,
$1 \leq t-1 < 2$ ve
$2 \leq t-1$ için
farklı olduğundan,

4 (devamı)

$t-1<1$ yani $\underline{t<2 \text{ için:}}$

$$h(\tau)x(t-\tau)=0 \quad \forall\tau \quad \longrightarrow y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}0\cdot d\tau=0$$

$1\leq t-1<2$ yani $\underline{2\leq t<3 \text{ için:}}$

$$h(\tau)x(t-\tau)=\begin{cases}2\times 2\times e^{-(t-\tau-1)} & 1\leq\tau\leq t-1 \text{ ise}\\ 0 & \text{diğer}\end{cases}$$

$$y(t)=\int_{\tau=1}^{t-1}4\,e^{-(t-\tau-1)}d\tau=4\,e^{-(t-1)}\int_{\tau=1}^{t-1}e^{\tau}d\tau=4e^{-(t-1)}\left[e^{\tau}\right]_1^{t-1}$$

$$=4e^{-(t-1)}\left[e^{(t-1)}-e\right]=y(t)=4-4e^{-(t-2)}$$

$2\leq t-1$ yani $\underline{t\geq 3 \text{ için:}}$

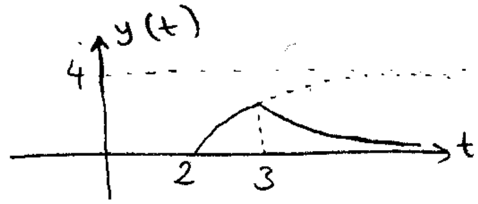
$$h(\tau)x(t-\tau)=\begin{cases}4e^{-(t-\tau-1)} & 1\leq\tau\leq 2 \text{ ise}\\ 0 & \text{diğer}\end{cases}$$

$$y(t)=\int_{\tau=1}^{2}4e^{-(t-\tau-1)}d\tau=4\,e^{-(t-1)}\left[e^{\tau}\right]_1^{2}=4\,e^{-(t-1)}(e^2-e)$$

$$=y(t)=4e^{-(t-3)}(1-e^{-1})\underset{\text{veya}}{=}4e^{-t}(e^3-e^2)$$

Sonuç:

$$y(t)=\begin{cases}0 & t<2 \text{ ise}\\ 4-4e^{-(t-2)} & 2\leq t<3 \text{ ise}\\ 4e^{-(t-3)}(1-e^{-1}) & 3\leq t \text{ ise}\end{cases}$$



5) $\underline{t>1 \text{ için:}}$ $\ddot{h}(t)+5\dot{h}(t)+6h(t)=0$, $h(1)=0$, $\dot{h}(1)=\frac{1}{1}=1$

$$\lambda^2+5\lambda+6=0 \longrightarrow \lambda_1=-2,\ \lambda_2=-3 \longrightarrow h(t)=A_1e^{-2(t-1)}+A_2e^{-3(t-1)}$$

$$\left.\begin{aligned}h(1)&=A_1+A_2=0\\ \dot{h}(1)&=-2A_1-3A_2=1\end{aligned}\right\}\ -A_2=1 \longrightarrow \begin{aligned}A_2&=-1\\ A_1&=1\end{aligned}$$

Tüm zamanlar için yazılırsa:

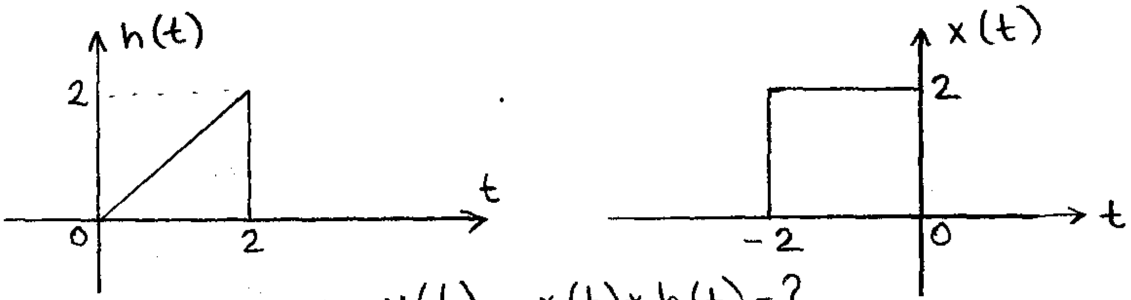
$$h(t)=\left[e^{-2\cdot(t-1)}-e^{-3\cdot(t-1)}\right]\cdot u(t-1)$$

SİNYALLER VE SİSTEMLER FİNAL SINAVI SORULARI
07.01.2009 Süre 80 dakika

1) Bir mağaza, müşterilerinin alışverişlerini şöyle bir <u>ayrık</u> zamanlı sistemle taksitlendiriyor:
Alımdan önceki iki ayın herbirinde peşin fiyatının %10'u,
Alım ayında ve ondan sonraki 4 ayın her birinde peşin fiyatının %20'si ödenmektedir.
Sistemin girişi alınan malın peşin fiyatı, çıkışı ödeme planı olmak üzere

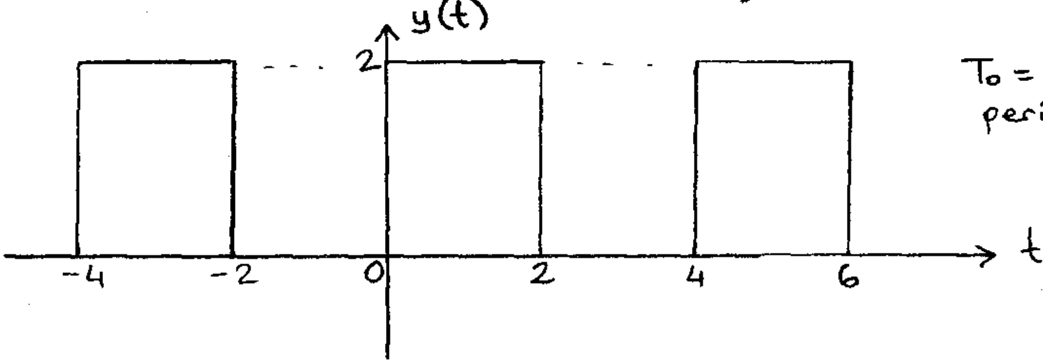
a) Sistemin birim darbe tepkisini çiziniz. **(8 puan)**
b) Sistem nedensel midir, kararlı mıdır? **(2x3=6 puan)**
c) 0. aydan itibaren her ay peşin fiyatıyla 1 birimlik alım yapan müşterinin bu sisteme göre taksitlendirilmiş ödeme planını çiziniz. **(11 puan)**

2)



$y(t) = x(t) * h(t) = ?$ Hesaplayınız. (25 puan)

3) Şekilde verilen sinyali Fourier serisine açınız. (25 puan)



$T_0 = 4$ ile periyodik

4) Giriş(x) – çıkış(y) ilişkisi aşağıda verilen nedensel sistemin transfer fonksiyonunu**(5 puan)**, birim darbe tepkisini**(7 puan)** ve $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 0$ olmak üzere $x(t) = e^{-2t}u(t)$ girişi için çıkışını **(13 puan)** hesaplayınız.

$$\ddot{y}(t) + 4\dot{y}(t) + 3y(t) = \dot{x}(t) + x(t)$$

5) Giriş(x) – çıkış(y) ilişkisi aşağıda verilen nedensel sistemin transfer fonksiyonunu**(7 puan)**, ve birim darbe tepkisini**(18 puan)** hesaplayınız.

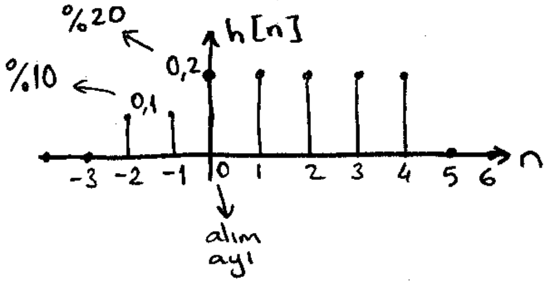
$$y[n+2] + 3y[n+1] + 2y[n] = x[n+2] - x[n+1]$$

BAŞARILAR ... **Yard. Doç. Dr. Ata SEVİNÇ**

TOPLAM 4 SORU CEVAPLAMANIZ YETERLİDİR.
5 SORUYU DA CEVAPLARSANIZ, EN DÜŞÜK PUANLISI SAYILMAYACAKTIR.

SİNYALLER VE SİSTEMLER FİNAL CEVAP ANAHTARI
07.01.2009

1) a) Giriş $\delta[n]$ demek yalnız 0. ayda 1 birim (peşin fiyatı) alım yapılmasıdır. $h[n]$ ise bu alımın taksitli ödeme planıdır.



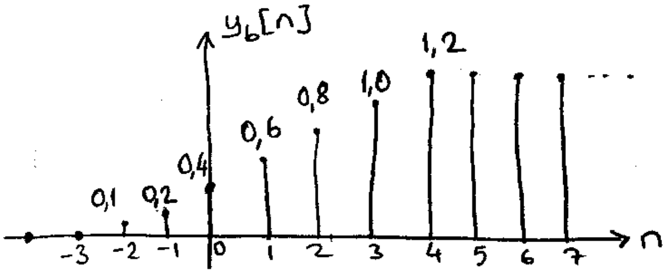
b) Bazı $n<0$ ($n=-1$ ve $n=-2$) için $h[n]\neq 0 \rightarrow$ Nedensel Değil.

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|h[n]| = \sum_{n=-2}^{4}|h[n]| = 1{,}2 < \infty$$

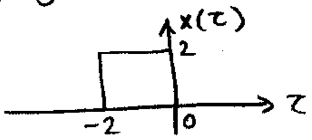
Kararlı

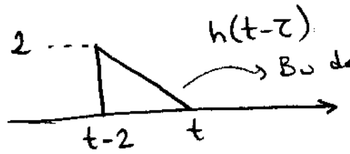
c) Giriş birim basamak denilmek isteniyor. Çıkış da birim basamak tepkisi ($y_b[n]$) olur.

$$y_b[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} h[k]$$



2) $y(t) = x(t)*h(t) = \int_{\tau=-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$





Bu doğru parçasının denklemi: $a\tau+b$

$a = -2/2 = -1$

$\rightarrow b-\tau\big|_{\tau=t} = 0 \rightarrow b = t$

Yani denklemi $(t-\tau)$

$t \leq -2$ için:

$x(\tau)h(t-\tau) = 0 \quad \forall\tau$

$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} 0\cdot d\tau = 0$

$-2 < t \leq 0$ için:

$$x(\tau)h(t-\tau) = \begin{cases} 2\cdot(t-\tau) & -2\leq\tau\leq t \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$$

$$y(t) = \int_{\tau=-2}^{t} 2\cdot\underbrace{(t-\tau)}_{p}\underbrace{d\tau}_{-dp} = \underbrace{-(t-\tau)^2}_{-p^2}\Big|_{\tau=-2}^{t} = (t+2)^2 = y(t)$$

$0 < t \leq 2$ için:

$$x(\tau)h(t-\tau) = \begin{cases} 2\cdot(t-\tau) & t-2\leq\tau\leq 0 \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$$

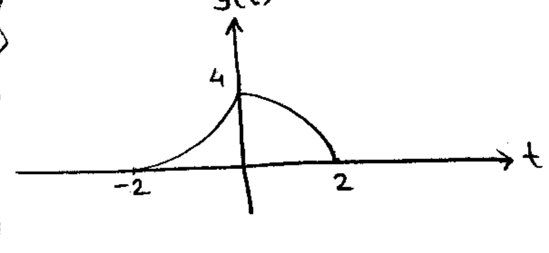
$$\rightarrow y(t) = \int_{\tau=t-2}^{0} 2(t-\tau)d\tau = -(t-\tau)^2\Big|_{\tau=t-2}^{0}$$

$y(t) = 4 - t^2$

$t > 2$ için: $x(\tau)h(t-\tau) = 0 \quad \forall\tau$

$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} 0\cdot d\tau = 0$

$$\rightarrow \text{Sonuç: } y(t) = \begin{cases} 0 & t\leq -2 \\ (t+2)^2 & -2<t\leq 0 \\ 4-t^2 & 0<t\leq 2 \\ 0 & t>2 \end{cases}$$



3) $\omega_0 = 2\pi/T_0 = \pi/2$

Dikkat edilirse $y(t)-1$ 'in tek sinyal olduğu görülür. Yani

$$y(t) = \underbrace{1}_{a_0/2} + \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin(k\tfrac{\pi}{2}t)$$

$a_0/2 \longrightarrow a_0 = 2, \quad a_k = 0 \ (k\neq 0)$

$$b_k = \frac{2}{4}\int_{-2}^{2} y(t)\sin(k\tfrac{\pi}{2}t)\,dt = \frac{1}{2}\int_{0}^{2} 2\sin\frac{k\pi t}{2}\,dt = \frac{-2}{k\pi}\cos\left(k\pi\frac{t}{2}\right)\Big|_0^2 = \frac{-2}{k\pi}(\underbrace{\cos k\pi}_{(-1)^k}-1)$$

$b_k = \frac{4}{k\pi}$ k tekse ; $b_k = 0$ k çiftse (Zaten $y(t)-1$ 'in tek harmonik simetrisine sahip olduğu görülüyor.)

$b_1 = \frac{4}{\pi}$, $b_3 = \frac{4}{3\pi}$, $b_5 = \frac{4}{5\pi}$, ...

Sonuç: $y(t) = 1 + \frac{4}{\pi}\left(\sin(\frac{\pi}{2}t) + \frac{1}{3}\sin(\frac{3\pi}{2}t) + \frac{1}{5}\sin(\frac{5\pi}{2}t) + \dots\right)$

Karmaşık seriye açılsaydı: $y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{jk\frac{\pi}{2}t}$ $\longrightarrow$ $c_0 = \frac{a_0}{2} = 1$

Tek k'lar için:

$c_k = \frac{a_k - jb_k}{2} = -j\frac{2}{k\pi} = c_k$ $(k>0)$ ve $c_{-k} = \frac{a_k + jb_k}{2} = j\frac{2}{k\pi}$ (yine $k>0$)

veya $c_k = -j\frac{2}{k\pi}$ $(k<0)$ Yani genel olarak

$$c_k = \begin{cases} 1 & k=0 \text{ ise} \\ 0 & k \text{ çift } (\neq 0) \text{ ise} \\ -j\frac{2}{k\pi} & k \text{ tekse} \end{cases}$$

4) $Y(\omega)\big(\underbrace{(j\omega)^2 + 4(j\omega) + 3}_{(j\omega+1)(j\omega+3)}\big) = X(\omega)(j\omega+1)$

$\boxed{H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{1}{j\omega+3}}$: Transfer fonksiyon.

Birim darbe tepkisi $h(t) = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{j\omega+3}\right\} = \boxed{e^{-3t}u(t) = h(t)}$

$X(\omega) = \mathcal{F}\{e^{-2t}u(t)\} = \frac{1}{j\omega+2}$ $\longrightarrow$ $Y(\omega) = H(\omega)X(\omega) = \frac{1}{(j\omega+3)(j\omega+2)}$

$Y(\omega) = \frac{A}{j\omega+3} + \frac{B}{j\omega+2}$ $\longrightarrow$ $A = \frac{1}{-3+2} = -1$, $B = \frac{1}{-2+3} = 1$

$y(t) = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{+1}{j\omega+2} - \frac{1}{j\omega+3}\right\} = \boxed{\left(e^{-2t} - e^{-3t}\right)u(t) = y(t)}$: çıkış

5) $Y(z)(z^2+3z+2) = X(z)(z^2-z)$ $\longrightarrow$ $\boxed{H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z(z-1)}{(z+1)(z+2)}}$: transf fnk

$\frac{H(z)}{z} = \frac{A_1}{z+1} + \frac{A_2}{z+2} = \frac{z-1}{(z+1)(z+2)}$ $\longrightarrow$ $A_1 = \frac{-1-1}{-1+2} = -2$

$A_2 = \frac{-2-1}{-2+1} = 3$ $\longrightarrow$ $H(z) = -2\frac{z}{z-(-1)} + 3\frac{z}{z-(-2)}$

Birim darbe tepkisi : $\boxed{h[n] = \left[-2\times(-1)^n + 3\times(-2)^n\right]u[n]}$

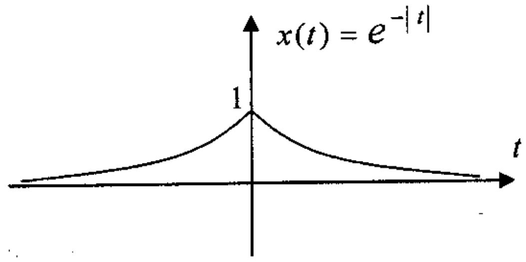
Dikkat: $H(z) = 1 - \frac{4z+2}{(z+1)(z+2)} = 1 + \frac{2}{z+1} - \frac{6}{z+2} = 1 + 2z^{-1}\frac{z}{z-(-1)} - 6z^{-1}\frac{z}{z-(-2)}$

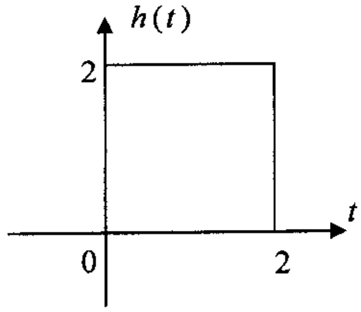
yoluyla bulunan $\boxed{h[n] = \delta[n] + 2\times(-1)^{n-1}u[n-1] - 6\times(-2)^{n-1}u[n-1]}$ çözümü de görünümü farklı olsa da aynıdır.

SİNYALLER VE SİSTEMLER BÜTÜNLEME SINAVI SORULARI
21.01.2009 Süre 80 dakika

Aşağıdaki sorulardan 4 tanesini çözünüz. Fazla soru cevaplanması halinde en yüksek puanlı 4 tanesi dikkate alınacaktır. Her soru 25 puandır.

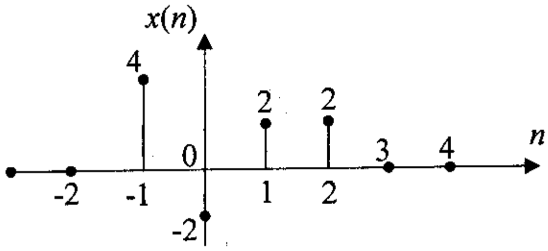
1) $y(t) = x(t) * h(t) = ?$

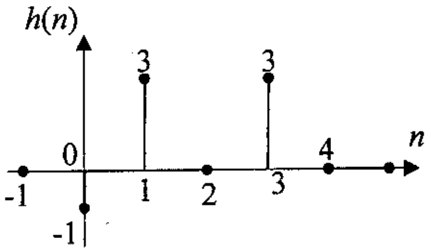




2) a) $y[n] = x[n] * h[n]$ sinyalini çiziniz. **(13 puan)**

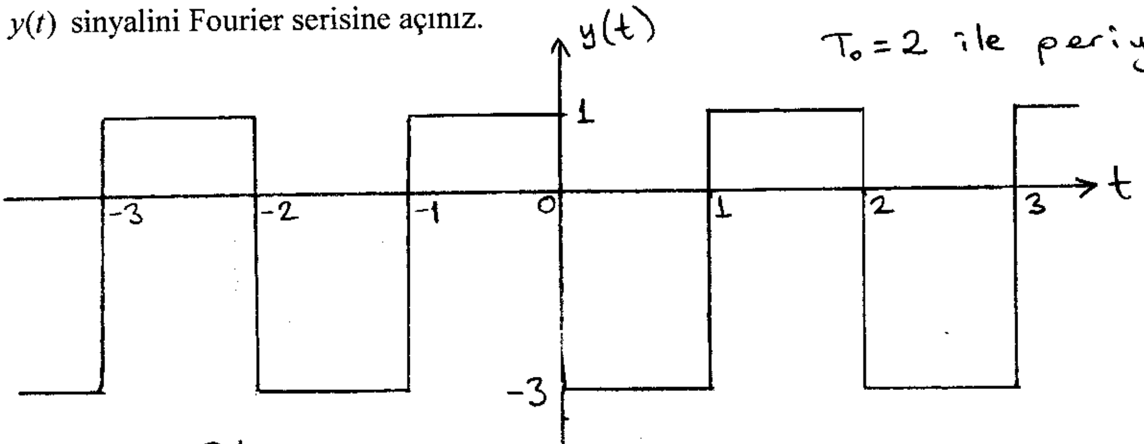
b) $x[n]$ sinyalinin tek ve çift bileşenlerini çiziniz. **(12 puan)**





3) $y(t)$ sinyalini Fourier serisine açınız.

$T_0 = 2$ ile periyodik



4) a) $t\,x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} j\dfrac{dX(\omega)}{d\omega}$ olduğunu gösteriniz. **(12 puan)**

b) Bu özelliği kullanarak $\mathcal{F}\left\{t e^{-3t} u(t)\right\} = ?$ bulunuz. **(13 puan)**

5) Giriş (x) – çıkış (y) ilişkileri aşağıda verilen denklemlerle tanımlı doğrusal zamanla değişmez ve nedensel sistemlerden **<u>yalnız birisinin</u>** transfer fonksiyonunu **(5 puan),** birim darbe tepkisini **(6 puan)** ve verilen giriş için çıkışını (Sıfır anındaki standart biçimdeki başlangıç şartları sıfır iken) **(14 puan)** hesaplayınız.

a)

$$\ddot{y}(t) + 6\dot{y}(t) + 8y(t) = 2\dot{x}(t) + 4x(t)$$
$$x(t) = e^{-3t}u(t)$$

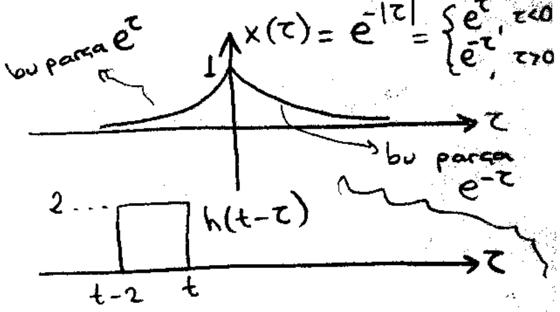
b)

$$y[n+2] - 0{,}7y[n+1] + 0{,}01y[n] = 2x[n+1] - x[n]$$
$$x[n] = (0{,}4)^n u[n]$$

BAŞARILAR...

Yard. Doç. Dr. Ata SEVİNÇ

SİNYALLER VE SİSTEMLER BÜTÜNLEME CEVAP ANAHTARI:
21.01.2009



1) $y(t)=x(t)*h(t)=\int_{\tau=-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$

t<0 ise: $x(\tau)h(t-\tau)=\begin{cases} 2e^{\tau} & t-2\leq\tau\leq t \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$

$$y(t)=\int_{\tau=t-2}^{t} 2e^{\tau}d\tau = 2e^{\tau}\Big|_{t-2}^{t} = 2e^{t}-2e^{t-2}$$

$$\boxed{y(t)=2e^{t}(1-e^{-2}) \quad t<0 \text{ ise}}$$

$0\leq t<2$ ise: $x(\tau)h(t-\tau)=\begin{cases} 2e^{\tau} & t-2\leq\tau<0 \\ 2e^{-\tau} & 0\leq\tau\leq t \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$

$$y(t)=\int_{\tau=t-2}^{0} 2e^{\tau}d\tau + \int_{0}^{t} 2e^{-\tau}d\tau$$

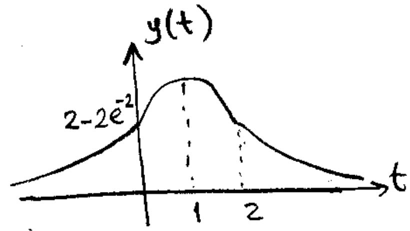
$$y(t)=2e^{\tau}\Big|_{t-2}^{0} + (-2e^{-\tau})\Big|_{0}^{t} = 2-2e^{t-2}-2e^{-t}+2 = \boxed{y(t)=4-2e^{t-2}-2e^{-t} \quad 0\leq t<2 \text{ ise}}$$

$t\geq 2$ ise: $x(\tau)h(t-\tau)=\begin{cases} 2e^{-\tau} & t-2\leq\tau\leq t \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$

$$y(t)=\int_{t-2}^{t} 2e^{-\tau}d\tau = -2e^{-\tau}\Big|_{t-2}^{t} = \boxed{y(t)=2e^{-(t-2)}-2e^{-t} \quad t\geq 2 \text{ ise}}$$

Sonuç:

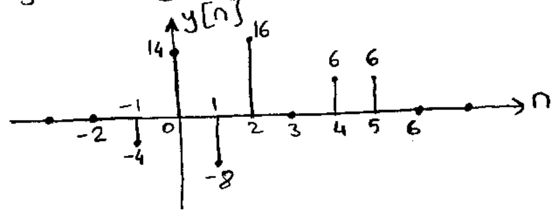
$$y(t)=\begin{cases} 2e^{t}(1-e^{-2}) & t<0 \text{ ise} \\ 4-2e^{t-2}-2e^{-t} & 0\leq t<2 \text{ ise} \\ 2e^{-t}(e^{2}-1) & t\geq 2 \text{ ise} \end{cases}$$



2) a)

```
x[-1]        x[2]
  4/-2/2/2
 -1/3/0/3
h[0]         h[3]
x ----------
   12/-6/6/6
   0/0/0/0
 12/-6/6/6
-4/2/-2/-2
+ ---------------------
-4/14/-8/16/0/6/6  → y[2+3]=y[5]
↳ y[-1+0]=y[-1]
```

Elde aktarımı yapmadan her değeri bir rakam gibi düşünerek klasik çarpma benzeri işlem yapıyoruz. En soldaki değer, iki sinyalin en soldaki değerlerinin anları toplamı anına, en sağdaki değer de iki sinyalin en sağdaki değerlerinin anları toplamı anına karşılık getirilir. Diğer kısımlarda ise sıfırdır.



b) $x_T[n]=\dfrac{x[n]-x[-n]}{2}$: Tek bileşen

$x_Ç[n]=\dfrac{x[n]+x[-n]}{2}$: Çift bileşen

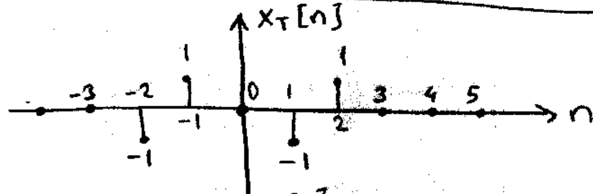
$|n|\geq 3$ için $x_T[n]=x_Ç[n]=0$

SS-B-2009-CA-2

$x_T[0]=0 \rightarrow$ Daima böyledir.

$x_T[1]=(2-4)/2=-1$

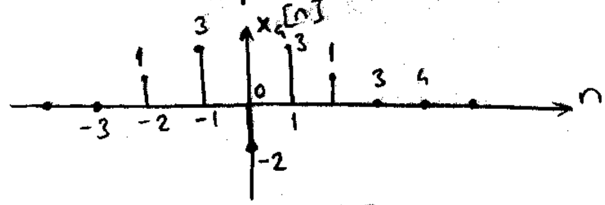
$x_T[2]=(2-0)/2=1$



$x_G[0]=x[0]=-2$

$x_G[1]=(2+4)/2=3$

$x_G[2]=(2+0)/2=1$



3) $y(t)+1$ tek sinyal olduğundan a_0 hariç $\boxed{a_k=0}$ ← kosinüslülerin katsayıları

$$y(t)=\underbrace{-1}_{a_0/2}+\sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin k\omega_0 t$$

$a_0/2 \rightarrow \boxed{a_0=-2}$ $\qquad T_0=2 \rightarrow \omega_0=2\pi/T_0=\pi$

$$b_k=\frac{2}{T_0}\int_{-1}^{0} 1\cdot \sin k\pi t\,dt+\frac{2}{T_0}\int_{0}^{1} -3\cdot \sin k\pi t\,dt$$

$$b_k=\frac{1}{k\pi}(-\cos k\pi t)\Big|_{-1}^{0}-\frac{3}{k\pi}(-\cos k\pi t)\Big|_{0}^{1}=\frac{1}{k\pi}\left\{-1+\cos(-k\pi)+3\cos k\pi-3\right\}$$

$$b_k=\frac{-4}{k\pi}\left(1-(-1)^k\right)=\begin{cases}0 & k \text{ çiftse}\\ -8/k\pi & k \text{ tekse}\end{cases}$$

Sonuç: $$\boxed{y(t)=-1-\frac{8}{\pi}\left(\frac{\sin\pi t}{1}+\frac{\sin 3\pi t}{3}+\frac{\sin 5\pi t}{5}+\dots\right)}$$

Karmaşık seriye açılırsa: $y(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{jk\pi t} \rightarrow \boxed{c_0=-1}$

$$c_k=\frac{1}{\underset{T_0}{2}}\int_{-1}^{0} 1\cdot e^{-jk\pi t}dt+\frac{1}{2}\int_{0}^{1} -3\cdot e^{-jk\pi t}dt=\frac{-1}{j2k\pi}e^{-jk\pi t}\Big|_{-1}^{0}+\frac{3}{j2k\pi}e^{-jk\pi t}\Big|_{0}^{1}$$

$$c_k=\frac{1}{j2k\pi}\left\{-1+e^{+jk\pi}+3e^{-jk\pi}-3\right\}= \quad c_k=\frac{-4}{j2k\pi}\left(1-(-1)^k\right)$$

$$\boxed{c_k=\begin{cases}0 & k \text{ çiftse } (k\neq 0)\\ -\frac{4}{jk\pi} & k \text{ tekse}\end{cases}}$$

$$\boxed{y(t)=\dots+\frac{4}{j3\pi}e^{-j3\pi t}+\frac{4}{j\pi}e^{-j\pi t}-1-\frac{4}{j\pi}e^{j\pi t}-\frac{4}{j3\pi}e^{j3\pi t}-\dots}$$

4) a) $X(\omega)=\mathcal{F}\{x(t)\}=\int_{t=-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$

$$dX(\omega)/d\omega=\int_{t=-\infty}^{+\infty} x(t)\cdot\frac{d}{d\omega}\left\{e^{-j\omega t}\right\}\cdot dt$$

→ çünkü yalnız burada ω var.

$$j\,dX(\omega)/d\omega=\underset{\text{dersek}}{Y(\omega)}=j\cdot\int_{t=-\infty}^{+\infty} -jtx(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{t=-\infty}^{+\infty}\underbrace{t\,x(t)}_{y(t)}e^{-j\omega t}dt$$ olur.

b) $x(t)=e^{-3t}u(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega)=\dfrac{1}{j\omega+3}$

$y(t)=\underbrace{te^{-3t}u(t)}_{\text{dersek}}=t\,x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} Y(\omega)=j\dfrac{d}{d\omega}\left(\dfrac{1}{j\omega+3}\right)$

$Y(\omega)=-j(j\omega+3)^{-2}\cdot j = \boxed{\mathcal{F}\{te^{-3t}u(t)\}=\dfrac{1}{(j\omega+3)^2}}$

5) a) $Y(\omega)\left((j\omega)^2+6(j\omega)+8\right)=\left(2\cdot(j\omega)+4\right)X(\omega)$

$\dfrac{Y(\omega)}{X(\omega)}=H(\omega)=\dfrac{2\cdot[j\omega+2]}{(j\omega)^2+6\cdot j\omega+8}=\boxed{\dfrac{2}{j\omega+4}=H(\omega)}$ Transfer fonksiyon

$(j\omega+2)(j\omega+4)$

$h(t)=\mathcal{F}^{-1}\left\{\dfrac{2}{j\omega+4}\right\}=\boxed{2e^{-4t}u(t)=h(t)}$ Birim darbe tepkisi

$x(t)=e^{-3t}u(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega)=\dfrac{1}{j\omega+3}$ $\qquad Y(\omega)=H(\omega)X(\omega)$

$Y(\omega)=\dfrac{2}{(j\omega+4)(j\omega+3)}=\dfrac{A}{j\omega+4}+\dfrac{B}{j\omega+3}$ $\rightarrow$ $A=\dfrac{2}{-4+3}=-2$, $B=\dfrac{2}{-3+4}=2$

$$\boxed{y(t)=2\left(e^{-3t}-e^{-4t}\right)u(t)}$$

b) $Y(z)\left(z^2-0{,}7z+0{,}01\right)=(2z-1)X(z)$

$\dfrac{Y(z)}{X(z)}=\boxed{H(z)=\dfrac{2z-1}{z^2-0{,}7z+0{,}01}}=\dfrac{A}{z-(0{,}35+\sqrt{0{,}1125})}+\dfrac{B}{z-(0{,}35-\sqrt{0{,}1125})}$

köktleri $0{,}35\mp\sqrt{0{,}1125}$

$Az-A\cdot(0{,}35-\sqrt{0{,}1125})+Bz-B\cdot(0{,}35+\sqrt{0{,}1125})=2z-1$

$A+B=2 \rightarrow B=2-A \rightarrow A\cdot(0{,}35-\sqrt{0{,}1125})+(2-A)\cdot(0{,}35+\sqrt{0{,}1125})=1$

$-2A\cdot\sqrt{0{,}1125}=0{,}3-2\sqrt{0{,}1125} \rightarrow \boxed{A=\dfrac{-0{,}15}{\sqrt{0{,}1125}}+1}$ $\quad \boxed{B=1+\dfrac{0{,}15}{\sqrt{0{,}1125}}}$

$\mathcal{Z}^{-1}\left\{\dfrac{a}{z-b}\right\}=\mathcal{Z}^{-1}\left\{\underbrace{z^{-1}}_{\text{zamanda 1 birim geciktirir}}\cdot\dfrac{az}{z-b}\right\}=a\cdot b^{n-1}u[n-1]$ olduğu için

$$\boxed{h[n]=\left[A\cdot(0{,}35+\sqrt{0{,}1125})^{n-1}+B\cdot(0{,}35-\sqrt{0{,}1125})^{n-1}\right]u[n-1]}$$ Birim darbe tepkisi

SS-B-2009-CA-4

$$x[n]=(0{,}4)^n u[n] \xrightarrow{\mathcal{Z}} X(z)=\frac{z}{z-0{,}4}$$

$$Y(z)=H(z)X(z)=\frac{z(2z-1)}{(z^2-0{,}7z+0{,}01)(z-0{,}4)}$$

$$Y(z)=\frac{A_1}{z-(0{,}35+\sqrt{0{,}1125})}+\frac{A_2}{z-(0{,}35-\sqrt{0{,}1125})}+\frac{A_3}{z-0{,}4}$$

$$A_1=\frac{(0{,}35+\sqrt{0{,}1125})(2\cdot[0{,}35+\sqrt{0{,}1125}]-1)}{[(0{,}35+\sqrt{0{,}1125})-(0{,}35-\sqrt{0{,}1125})][0{,}35+\sqrt{0{,}1125}-0{,}4]}$$

$$A_2=\frac{(0{,}35-\sqrt{0{,}1125})(2\cdot[0{,}35-\sqrt{0{,}1125}]-1)}{[(0{,}35-\sqrt{0{,}1125})-(0{,}35+\sqrt{0{,}1125})][0{,}35-\sqrt{0{,}1125}-0{,}4]}$$

$$A_3=\frac{0{,}4\times(2\times 0{,}4-1)}{0{,}4^2-0{,}7\times 0{,}4+0{,}01}=\frac{-0{,}08}{0{,}16-0{,}28+0{,}01}=8/11$$

$$y[n]=\left[A_1\cdot(0{,}35+\sqrt{0{,}1125})^{n-1}+A_2\cdot(0{,}35-\sqrt{0{,}1125})^{n-1}+\frac{8}{11}(0{,}4)^{n-1}\right]u[n-1]$$

Bu sorudaki kökler biraz zor olmuş. Bu durum değerlendirmede öğrenci lehine dikkate alınır.