Makine Mühendisliği Bölümü

SİSTEM MODELLEME VE OTOMATİK KONTROL FİNAL SINAVI SORULARI

09.01.2019 Süre: 75 dakika

1. ve 2. sorular zorunlu, diğer (25 puanlık) sorular seçmelidir. İkiden fazla seçmeli soru cevaplarsanız lehinize olan ikisi dikkate alınacaktır.

1) Transfer fonksiyonu $1/(s^2+3s-4)$ olan bir sistemin çıkışını, istenen r değerine getirmek için gereken u değerini PI kontrol ile uygulamak için gereken düzenlemeyi blok şema ile gösteriniz **(6 puan)** ? PI kazançları K_P ve K_I hangi şartları sağlamalıdır **(14 puan)** ?

2) (a) Kontrolde başlıca amaç nedir? Örnek fiziksel bir sistem üzerinde açıklayınız. Açıklamanızda örnek sistemin giriş ve çıkış sinyallerinin hangi fiziksel büyüklükler olduğunu mutlaka belirtmelisiniz. (Bu şıkkın **puanı 0 ile 1 arasında katsayı** olup (b) ve (c) şıklarından aldığınız toplam puan ile bu katsayının çarpımı, bu sorudan alacağınız puan olacaktır.)

(b) Transfer fonksiyonu $\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{3s-5}{s^2+9s+2}$ olan sistemi, denetleyici kanonik biçime getirmek için durum değişkenlerini tanımlayarak durum uzayı modelinde matrisel olarak yazınız. (**15 puan**. Durum değişken tanımlarını vermeden ezbere yazana ise sadece 5 puan.)

(c) Sistem çıkışının sabit bir y^* skaler değerine $\lambda_1=-6$, $\lambda_2=-8$ özdeğerleriyle yakınsaması için giriş u ne olmalıdır? (Sadece katsayıları bulmanız yetmez, u girişinde yerine yazmalısınız.) **(15 puan)** *Yardımcı formül:* Tek girişli tek çıkışlı denetleyici kanonik biçimli sistem için $C_1 \neq 0$ şartıyla, $\boxed{K_r=\alpha_0/C_1}$ olup α_0 istenen karakteristik polinomun sabit terimidir.

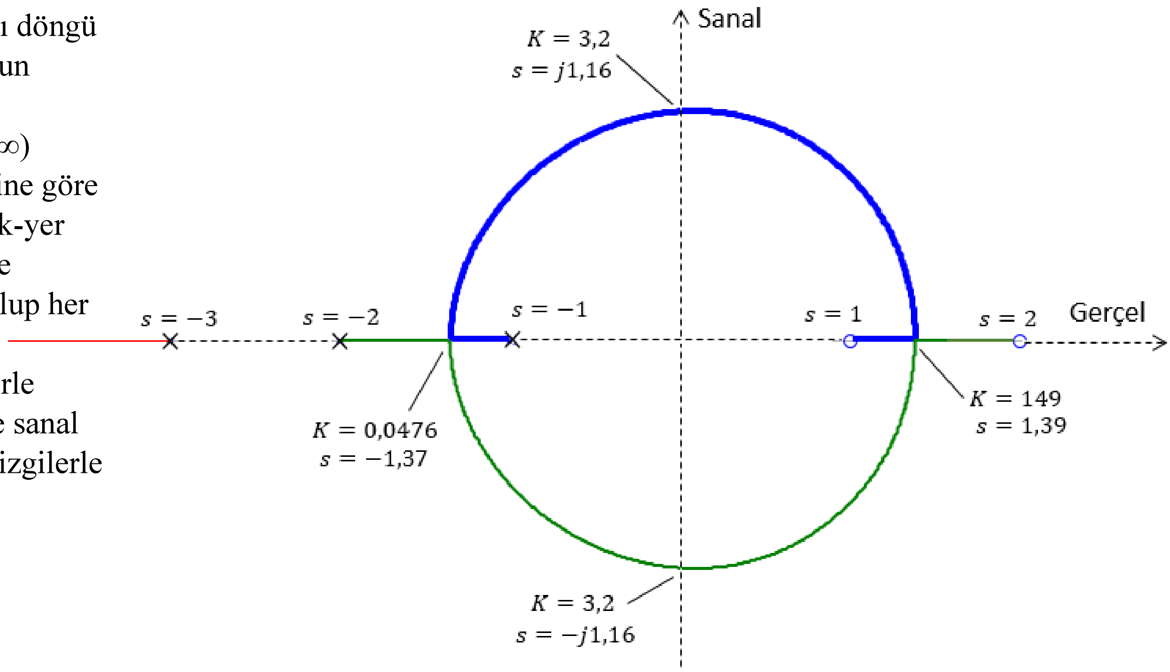
3) $A=\begin{bmatrix}-5 & -1\\ 3 & -1\end{bmatrix}$ için e^{At} matrisini istediğiniz yolla bulunuz. **(25 puan)**

4) Giriş (u) – çıkış (y) ilişkisi $\ddot{y}+4\dot{y}+29y=-6\dot{u}+5u$ diferansiyel denklemiyle verilen sistemi,

a) Gözleyici kanonik biçime getirmek için durum değişkenlerini tanımlayarak durum uzayı modelinde matrisel olarak yazınız. **(13 puan)** (Durum değişken tanımlarını vermeden ezbere yazana ise sadece 5 puan.)

b) Bu biçimin x durum değişkenini tahmin eden gözleyiciyi, tahminleri -7 ve -9 özdeğerleriyle yakınsayacak şekilde tasarlayıp (gözleyici kazanç matrisini bulup) matris diferansiyel denklemi şeklinde yazınız. **(12 puan)**

5) Bir sistemin kapalı döngü transfer fonksiyonunun paydasını sıfır yapan köklerin, K 'nın $[0,+\infty)$ aralığındaki değişimine göre yerlerini gösteren kök-yer eğrisi yandaki şekilde verilmiştir. Üç kök olup her birinin grafiği farklı kalınlıkta düz çizgilerle verilmiştir. Gerçel ve sanal eksenler ise kesikli çizgilerle gösterilmiştir.



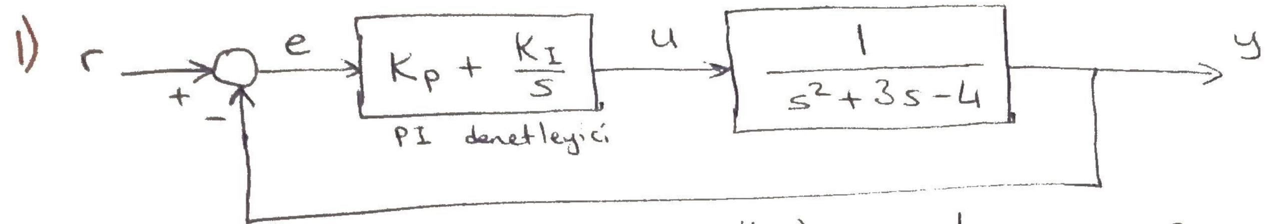
a) Açık döngü sıfır ve açık döngü kutupların değerlerini ve kök-yer eğrisinde bu noktalarda K 'nın değerlerini belirtiniz. **(7 puan)**

b) K 'nın negatif olmayan hangi değerleri için sistem kararlıdır? **(8 puan)**

c) En sağdaki kapalı döngü kutbun veya kutup çiftinin mümkün olduğunca solda olmasını istiyorsak K ne seçilmelidir ve bu seçim için en sağdaki kapalı döngü kutup(lar) ne olur? **(10 puan)**

SİSTEM MODELLEME VE OTOMATİK KONTROL BÜTÜNLEME
CEVAP ANAHTARI 09.01.2019

1)



Kapalı döngü kökler $1 + \left(K_p + \frac{K_I}{s}\right) \cdot \frac{1}{s^2+3s-4} = 0$

denkleminden bulunur. Yani

$$s^3 + 3s^2 - 4s + K_p s + K_I = 0$$

$$= s^3 + 3s^2 + (K_p - 4)s + K_I = 0$$

Routh-Hurwitz testine göre

s^3	1	K_p-4	0
s^2	3	K_I	0
s^1	$K_p - 4 - \frac{K_I}{3}$	0	
s^0	K_I		

↳ ilk sütunun hep aynı işaretli olması için

$\boxed{K_I > 0}$

$K_p - 4 - \frac{K_I}{3} > 0$ yani

$\boxed{K_p > \frac{K_I}{3} + 4}$

olmalıdır.

2) a) Ezberciliğe karşı herhangi bir cevap burada verilmeyecektir. Ders notlarınızdan faydalanınız.

b) $X_1 = \frac{1}{s^2+9s+2} U$ $\qquad Y = (3s-5)X_1$

$X_2 = sX_1 \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} x_2 = \dot{x}_1$

$\underbrace{s^2X_1}_{sX_2} + 9\underbrace{sX_1}_{X_2} + 2X_1 = U \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \dot{x}_2 + 9x_2 + 2x_1 = u$

Y denkleminden $Y = 3\underbrace{sX_1}_{X_2} - 5X_1 \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y = 3x_2 - 5x_1$

Matris olarak düzenlenirse:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -9 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B} u, \qquad y = \underbrace{\begin{bmatrix} -5 & 3 \end{bmatrix}}_{C} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{x}$$

$(D = 0)$

(2'nin devamı) SMOK-F-2019-CA-2

c) $u = K_r y^* - Kx$, $K = [k_1 \quad k_2]$

$$0 = (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2) = (\lambda+6)(\lambda+8) = \lambda^2 + \underbrace{14}_{\alpha_1}\lambda + \underbrace{48}_{\alpha_0} = 0$$

A matrisinden
$-a_0 = -2$, $-a_1 = -9$. C matrisinden $c_1 = -5$

$k_1 = \alpha_0 - a_0 = 48 - 2 = 46$

$k_2 = \alpha_1 - a_1 = 14 - 9 = 5$

$K_r = \dfrac{\alpha_0}{c_1} = -\dfrac{48}{5}$

Gereken giriş = $\boxed{u = -\frac{48}{5} y^* - 46x_1 - 5x_2}$

3) $$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda+5 & 1 \\ -3 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda+5)(\lambda+1) - (-3)\cdot 1$$
$$= \lambda^2 + 6\lambda + 8 = 0$$

$\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -4$

$e^{\lambda_1 t} = c_0 + c_1\lambda_1 \longrightarrow e^{-2t} = c_0 - 2c_1$

$e^{\lambda_2 t} = c_0 + c_1\lambda_2 \longrightarrow e^{-4t} = c_0 - 4c_1$

$2e^{-2t} - e^{-4t} = c_0$ bulunur.

1. yol

Ayrıca $e^{-2t} - e^{-4t} = -2c_1 - (-4c_1) = 2c_1 \rightarrow c_1 = \frac{1}{2}e^{-2t} - \frac{1}{2}e^{-4t}$ bulunur.

$$e^{At} = c_0 I + c_1 A = (2e^{-2t} - e^{-4t})\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \left(\tfrac{1}{2}e^{-2t} - \tfrac{1}{2}e^{-4t}\right)\begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{3}{2}e^{-4t} & -\frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-4t} \\ \frac{3}{2}e^{-2t} - \frac{3}{2}e^{-4t} & \frac{3}{2}e^{-2t} - \frac{1}{2}e^{-4t} \end{bmatrix}$$

---

2. yol

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\{(sI-A)^{-1}\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\begin{bmatrix} s+5 & 1 \\ -3 & s+1 \end{bmatrix}^{-1}\right\}$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+5)(s+1)-(-3)\cdot 1}\begin{bmatrix} s+1 & -1 \\ 3 & s+5 \end{bmatrix}\right\}$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+6s+8}\begin{bmatrix} s+1 & -1 \\ 3 & s+5 \end{bmatrix}\right\}$$

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\begin{bmatrix} \frac{s+1}{(s+2)(s+4)} & \frac{-1}{(s+2)(s+4)} \\ \frac{3}{(s+2)(s+4)} & \frac{s+5}{(s+2)(s+4)} \end{bmatrix}\right\}$$

(3. soru, 2. yol devamı)

$$\frac{s+1}{(s+2)(s+4)} = \frac{a_1}{s+2} + \frac{b_1}{s+4} \; ; \quad a_1 = \frac{-2+1}{-2+4} = \frac{-1}{2} \; , \quad b_1 = \frac{-4+1}{-4+2} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{-1}{(s+2)(s+4)} = \frac{a_2}{s+2} + \frac{b_2}{s+4} \; ; \quad a_2 = \frac{-1}{-2+4} = \frac{-1}{2} \; , \quad b_2 = \frac{-1}{-4+2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{3}{(s+2)(s+4)} = \frac{a_3}{s+2} + \frac{b_3}{s+4} \; ; \quad a_3 = \frac{3}{-2+4} = \frac{3}{2} \; , \quad b_3 = \frac{3}{-4+2} = \frac{-3}{2}$$

$$\frac{s+5}{(s+2)(s+4)} = \frac{a_4}{s+2} + \frac{b_4}{s+4} \; ; \quad a_4 = \frac{-2+5}{-2+4} = \frac{3}{2} \; , \quad b_4 = \frac{-4+5}{-4+2} = \frac{-1}{2}$$

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s+2} + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{s+4} & -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s+2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s+4} \\ \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{s+2} - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{s+4} & \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{s+2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s+4} \end{bmatrix}\right\}$$

$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+c}\right\} = e^{-ct}$ olduğu için

$$e^{At} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{3}{2}e^{-4t} & -\frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-4t} \\ \frac{3}{2}e^{-2t} - \frac{3}{2}e^{-4t} & \frac{3}{2}e^{-2t} - \frac{1}{2}e^{-4t} \end{bmatrix}$$

4) a)

$x_2 = y$

$x_1 = \dot{x}_2 + 4\underset{x_2}{y} + 6u$

$0 = \dot{x}_1 + 29\underset{x_2}{y} - 5u$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -29 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} 5 \\ -6 \end{bmatrix}}_{B} u$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}}_{C} x$$

b) $(\lambda+7)(\lambda+9) = \lambda^2 + \underset{\alpha_1}{16}\lambda + \underset{\alpha_0}{63} = 0$

A'dan görünen $-a_0 = -29$, $-a_1 = -4$

$$L = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix}$$

$l_1 = \alpha_0 - a_0 = 63 - 29 = 34$

$l_2 = \alpha_1 - a_1 = 16 - 4 = 12$

Gözleyici :

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 \end{bmatrix} = A \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix}}_{\hat{x}} + Bu + \begin{bmatrix} 34 \\ 12 \end{bmatrix} (y - \hat{x}_2)$$

↳ $C\hat{x}$ diye de yazılabilir.

5) a) Açık döngü sıfırlar $s=1$ ve $s=2$ olup bunlarda $K=+\infty$

Açık döngü kutuplar $s=-1$, $s=-2$ ve $s=-3$ olup bunlarda $K=0$.

b) $0 \leq K < 3{,}2$ için tüm kökler (her üçü de) sol yarı bölgededir. Yani sistem bu aralıkta kararlıdır.

c) $K = 0{,}0476$'da sağdaki iki kutup (eşlenik çift) en solda çakışır.

Bu seçimde en sağdaki iki kutup $s=-1{,}37$'dir (her ikisi de).