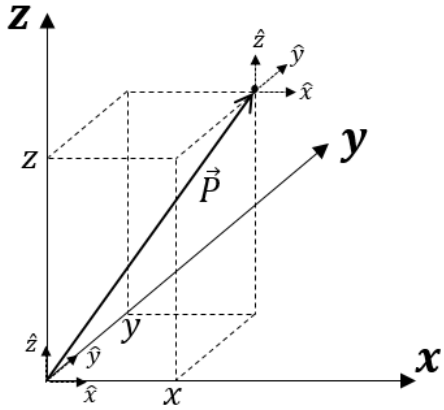
DİK KOORDİNAT SİSTEMLERİ

Birim vektörleri birbirine dik olan koordinat sistemleridir. Kartezyen, silindirik ve küresel koordinat sistemleri yaygın olarak kullanılmaktadır. $A = |\vec{A}|$ ve $\hat{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{\vec{a}}{a}$ anlamında kullanılacaktır.

Kartezyen Koordinat Sistemi:



Birim vektörleri $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{z}$, hep aynı yönlüdür, yani sabittir, türevleri sıfırdır.

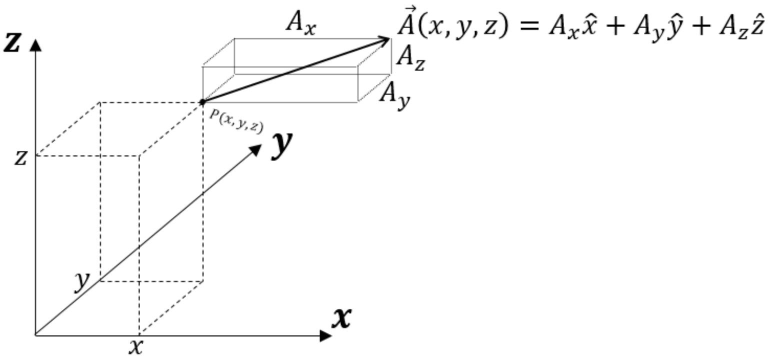
$\hat{x} \times \hat{y} = \hat{z}$ yön standardı kabul edilmiştir. Dolayısıyla

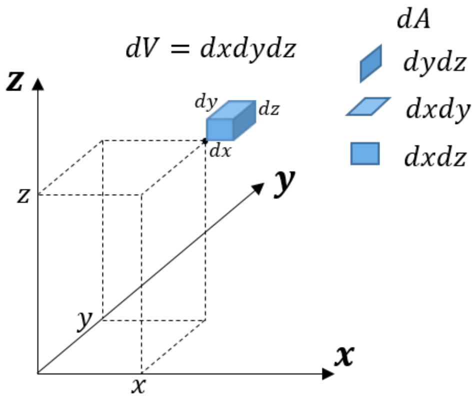
$\hat{y} \times \hat{z} = \hat{x}$ ve

$\hat{z} \times \hat{x} = \hat{y}$ olmaktadır.

Konum vektörü, orijinden ilgili $P(x, y, z)$ noktasına yönlenmiş vektördür. Yani: $\vec{P} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$

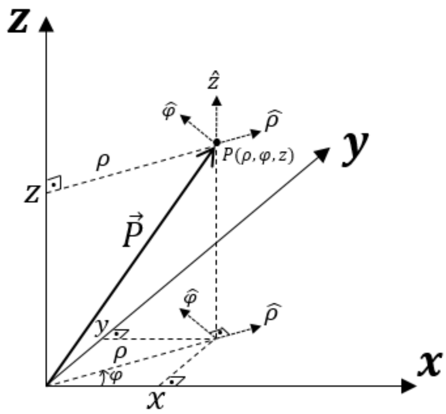
Ancak $P(x, y, z)$ noktasındaki herhangi bir vektör, kendi değerleriyle aşağıda soldaki gibi gösterilir ve yazılır:





Diferansiyel hacim ve taraflarına göre diferansiyel yüzey alanları da yukarıda sağdaki gibidir.

Silindirik Koordinatlar:



x ve y koordinatları yerine kutupsal karşılığı kullanılır. z koordinatı ise Kartezyen koordinatlardaki gibidir. Birim vektörlerinden $\hat{\rho}$ ve $\hat{\varphi}$ yönleri, bulunduğu yere göre değişir; bu yüzden türevleri sıfır zannedilmemelidir. $\hat{z}$ ise hep aynı yönlüdür, yani türevi sıfırdır.

$\hat{\rho} \times \hat{\varphi} = \hat{z}$ yön standardı kabul edilmiştir. Dolayısıyla

$\hat{\varphi} \times \hat{z} = \hat{\rho}$ ve

$\hat{z} \times \hat{\rho} = \hat{\varphi}$ olmaktadır.

Hatırlatma kelimesi "zarf"

$\hat{z} \times \hat{\rho} = \hat{\varphi}$

$= \quad \times$

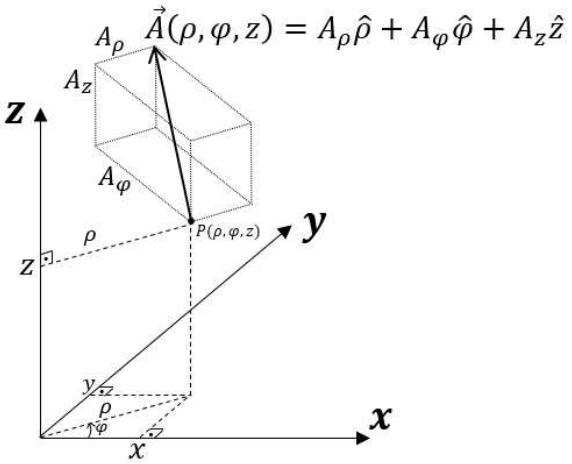
Konum vektörü, orijinden ilgili $P(\rho, \varphi, z)$ noktasına yönlenmiş vektör olup $\hat{\varphi}$ yönünde bileşeni yoktur:

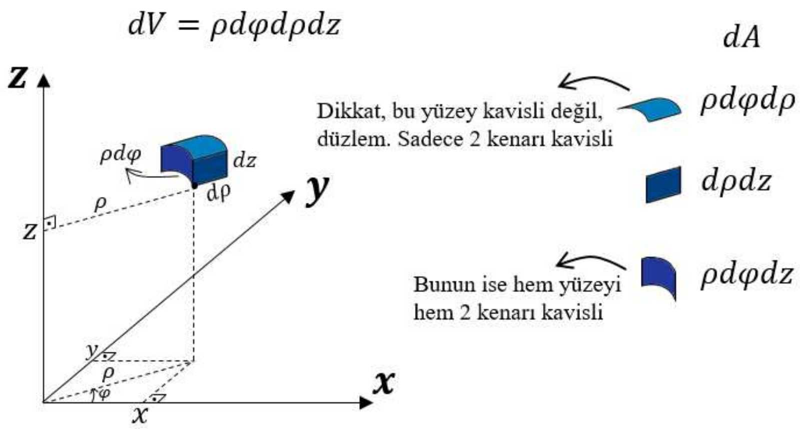
$$\vec{P} = \rho\hat{\rho} + z\hat{z}$$

φ açısına “azimut açısı” denir (Arapçadaki “semt” = “yön” veya “es-sümût” = “yönler” kelimesinden bozularak gelmiştir). Dünyanın merkezini orijin, $+z$ eksenini kuzey kutbunu delip geçen, $+x$ eksenini de Greenwich meridyenini ekvatorda delip geçen eksen olarak düşünürsek, φ açısı, doğu meridyeni açısıdır; ancak $0 \leq \varphi < 2\pi$

$(0° \leq \varphi < 360°)$ aralığında seçilir (10° batı meridyeni için 350°). Bu benzetmede ρ ise ilgili noktanın, dünyanın dönme eksenine uzaklığıdır (ρ negatif seçilemez).

$P(\rho, \varphi, z)$ noktasındaki herhangi bir vektör, kendi değerleriyle aşağıda soldaki gibi gösterilir ve yazılır:

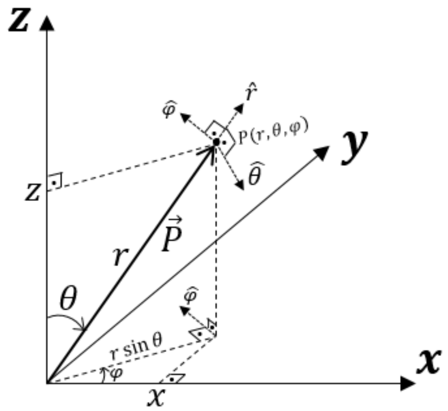




Diferansiyel hacim ve taraflarına göre diferansiyel yüzey alanları da yukarıda sağdaki gibidir.
Zamana göre türevleri, sembol üzerine nokta ile gösterirsek birim vektörlerin türevleri şöyledir:

$$\dot{\hat{\rho}} = \dot{\varphi}\hat{\varphi} \qquad \dot{\hat{\varphi}} = -\dot{\varphi}\hat{\rho} \qquad \dot{\hat{z}} = 0$$

Küresel Koordinatlar:



Yandaki şekildeki gibi $\hat{r}$, $\hat{\theta}$, $\hat{\varphi}$ birim vektörleri kullanılır ve üçünün de yönleri, bulunduğu yere göre değişir; bu yüzden türevleri sıfır zannedilmemelidir. $\hat{\varphi}$ ve φ tanımı silindirik koordinatlardaki gibidir. Yine "azimut açısı" adını alır. Ancak yarıçap r tanımı silindirikteki ρ tanımından farklı ($\rho = r\sin\theta$) olduğundan, farklı sembol kullanılması daha kullanışlıdır.

$\hat{r} \times \hat{\theta} = \hat{\varphi}$ yön standardı kabul edilmiştir. Dolayısıyla

$\hat{\theta} \times \hat{\varphi} = \hat{r}$ ve

$\hat{\varphi} \times \hat{r} = \hat{\theta}$ olmaktadır.

Hatırlatma kelimesi "fırt"

$\hat{\varphi} \times \hat{r} = \hat{\theta}$
$= \quad \times$

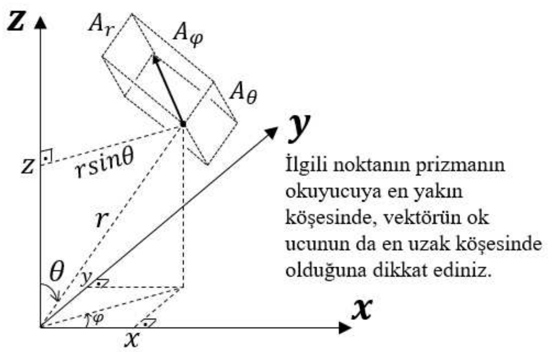
Konum vektörü, orijinden ilgili $P(r, \theta, \varphi)$ noktasına yönlenmiş vektör olup, sadece radyal yöndedir:

$$\vec{P} = r\hat{r} = \vec{r}$$

θ açısına "zenith açısı" denir (Arapçadaki "semt-ür-ras" = "kafa yönü" kelimelerinden çok bozularak gelmiştir). Yine dünyanın merkezini orijin, +*z* eksenini kuzey kutbunu delip geçen, +*x* eksenini de Greenwich meridyenini ekvatorda delip geçen eksen olarak düşünürsek, φ açısı, doğu meridyeni açısı (batı meridyeni için "360°–batı meridyeni açısı" demektir), θ açısı ise "90°–kuzey paralel açısı" olur (güney paralel açısını eksi sayıyla ifade ederek). Yani θ, yeryüzünde ayakta dik duran bir insanın kafa yönünün, dünyanın dönüş ekseninin kuzey tarafıyla yaptığı açıdır. $0 \leq \varphi < 2\pi$ $(0° \leq \varphi < 360°)$ ve $0 \leq \theta \leq \pi$ $(0° \leq \theta \leq 180°)$ aralığında seçilir. r ise dünyanın merkezine uzaklık olup negatif seçilemez).

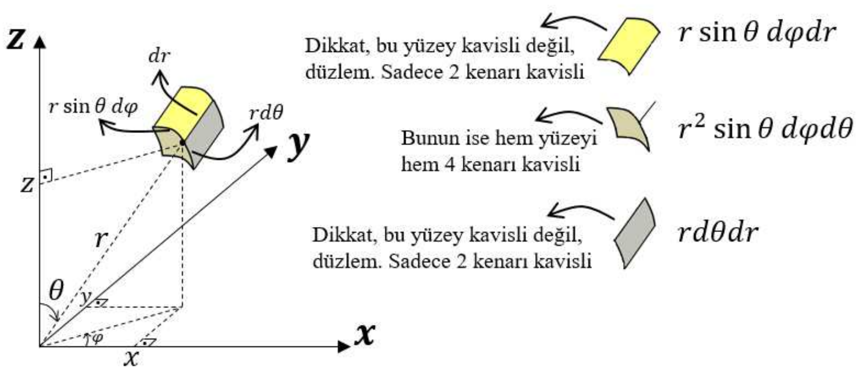
$P(r, \theta, \varphi)$ noktasındaki herhangi bir vektör, kendi değerleriyle aşağıda soldaki gibi gösterilir ve yazılır:

$$\vec{A}(r, \theta, \varphi) = A_r \hat{r} + A_\theta \hat{\theta} + A_\varphi \hat{\varphi}$$



$$dV = r^2 \sin\theta \, d\varphi d\theta dr$$

dA



Diferansiyel hacim ve taraflarına göre diferansiyel yüzey alanları da yukarıda sağdaki gibidir.

Birim vektörlerin zamana göre türevleri şöyledir:

$$\dot{\hat{r}} = \dot{\theta}\hat{\theta} + (\sin\theta)\dot{\varphi}\hat{\varphi} \qquad \dot{\hat{\theta}} = -\dot{\theta}\hat{r} + (\cos\theta)\dot{\varphi}\hat{\varphi}$$

$$\dot{\hat{\varphi}} = -(\sin\theta)(\cos 2\varphi)\dot{\varphi}\hat{r} - (\cos\theta)(\cos 2\varphi)\dot{\varphi}\hat{\theta} - (\sin 2\varphi)\dot{\varphi}\hat{\varphi}$$

Silindirik Koordinatlar ile Kartezyen Koordinatlar Arasında Dönüşümler:

Konum koordinatları dönüşümüyle, ilgili noktadaki herhangi bir vektörün dönüşümünü karıştırmamak gerekir.

Silindirik koordinatlardan Kartezyen koordinatlara geçiş:

Konum koordinatları için:

$$x = \rho\cos\varphi \qquad y = \rho\sin\varphi \qquad z = z$$

Vektör dönüşümü ise:

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_\rho \\ A_\varphi \\ A_z \end{bmatrix}$$

Kartezyen koordinatlardan silindirik koordinatlara geçiş:

Konum koordinatları için:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \varphi = \begin{cases} \tan^{-1}(y/x) & x > 0 \text{ ve } y > 0 \text{ ise} \\ \tan^{-1}(y/x) + 2\pi & x > 0 \text{ ve } y < 0 \text{ ise} \\ \tan^{-1}(y/x) + \pi & x < 0 \text{ ise} \\ \pi/2 & x = 0 \text{ ve } y > 0 \text{ ise} \\ 3\pi/2 & x = 0 \text{ ve } y < 0 \text{ ise} \\ \text{keyfi} & x = 0 \text{ ve } y = 0 \text{ ise} \end{cases} \qquad z = z$$

açısı bulunur. φ formülü aslında göründüğü kadar karışık değildir. Basit "arctan" fonksiyonu bize $[-\pi/2, \pi/2]$ aralığında değer verdiği için, $A_x < 0$ durumunda açıyı π kadar çevirmek gerekir. Ayrıca $0 \leq \varphi < 2\pi$ şartına uymak için gerektiğinde 2π ilave edilir.

Uzunlukları aynı alan dik koordinat sistemleri arasındaki dönüşüm matrisleri daima ortogonaldir; yani tersi, transpozuna eşittir. “Ortogonal”, “dik” demektir ve bu matrislerin bu ismi almasının bir nedeni de budur. Buna göre Kartezyen koordinatlardaki bir vektörün silindirik koordinatlara dönüşümü kolayca şöyle bulunur (φ bulunduktan sonra):

$$\begin{bmatrix} A_\rho \\ A_\varphi \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}$$

Küresel Koordinatlar ile Kartezyen Koordinatlar Arasında Dönüşümler:

Küresel koordinatlardan Kartezyen koordinatlara geçiş:

Konum koordinatları için:

$$x = r\sin\theta\cos\varphi \qquad y = r\sin\theta\sin\varphi \qquad z = r\cos\theta$$

Vektör dönüşümü ise:

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \cos\theta\cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\sin\varphi & \cos\varphi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\varphi \end{bmatrix}$$

Kartezyen koordinatlardan küresel koordinatlara geçiş:

Konum koordinatları için:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \qquad \theta = \cos^{-1}(z/r) \qquad \varphi = \begin{cases} \tan^{-1}(y/x) & x > 0 \text{ ve } y > 0 \text{ ise} \\ \tan^{-1}(y/x) + 2\pi & x > 0 \text{ ve } y < 0 \text{ ise} \\ \tan^{-1}(y/x) + \pi & x < 0 \text{ ise} \\ \pi/2 & x = 0 \text{ ve } y > 0 \text{ ise} \\ 3\pi/2 & x = 0 \text{ ve } y < 0 \text{ ise} \\ \text{keyfi} & x = 0 \text{ ve } y = 0 \text{ ise} \end{cases}$$

Vektör koordinatları için:

$$\begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}$$

Küresel Koordinatlar ile Silindirik Koordinatlar Arasında Dönüşümler:

Küresel koordinatlardan silindirik koordinatlara geçiş:

Konum koordinatları için:

$$\rho = r\sin\theta \qquad \varphi = \varphi \qquad z = r\cos\theta$$

Vektör dönüşümü ise:

$$\begin{bmatrix} A_\rho \\ A_\varphi \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\varphi \end{bmatrix}$$

Silindirik koordinatlardan küresel koordinatlara geçiş:

Konum koordinatları için:

$$r = \sqrt{\rho^2 + z^2} \qquad \theta = \cos^{-1}(z/r) \qquad \varphi = \varphi$$

Vektör dönüşümü ise:

$$\begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta & 0 & \cos\theta \\ \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_\rho \\ A_\varphi \\ A_z \end{bmatrix}$$

VEKTÖR ALANI

Uzayın her noktasında vektörel bir değere sahip olan fonksiyondur. Elektrik alan, manyetik alan, gaz taneciklerinin veya akışkanların hızı gibi. Tanım uzayı ile değer uzayı farklı sayıda boyutlu olabilir. Mesela zamana göre değişen elektrik ve manyetik alan fonksiyonları, 4 boyutlu uzayda tanımlı 3 boyutlu vektör alanlardır. Aslında skalerler de tek boyutlu vektörlerdir (bunlar için $\hat{x}$ gibi birim vektör yazmak gereksizdir) ve bu yüzden uzaydaki skaler bir fonksiyon, 3 boyuta veya zamana göre değişkense 4 boyutlu uzayda tanımlı tek boyutlu bir vektör alanıdır.

$\vec{\nabla}$ OPERATÖRÜ

Vektör alanlar üzerinde tanımlı olup, Kartezyen koordinatlardaki tanımı şöyledir:

$$\vec{\nabla}= \hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z}$$

"Nabla" veya "del" operatörü denir. Üzerinde vektör oku olmadan da aynı anlamda kullanıldığı olur. Türevler sağına yazılan terime uygulanır ve "del" diye okunur. Silindirik ve küresel koordinatlardaki kullanımı Kartezyen koordinatlardaki gibi tekdüze değildir; dikkat edilmelidir. Birkaç farklı kullanımı vardır. Bunlardan rotasyonel dışında hepsi keyfi sayıda boyutlu uzaya genelleştirilebilir.

Gradyen

Yükseklik veya elektrik potansiyeli gibi skaler bir fonksiyon üzerine uygulanarak vektör sonuç verir. Kartezyen koordinatlarda şöyle tanımlıdır:

$$\vec{\nabla}v = \frac{\partial v}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial v}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial v}{\partial z}\hat{z}$$

Yönü, o skaler fonksiyonun o noktada hangi yönde en çok değiştiğini, büyüklüğü de bu eğimin büyüklüğü anlamındadır. Haritacılıkta yükseklik fonksiyonuna uygulanarak eğim vektörünü, nümerik analizde minimumu bulunacak fonksiyona uygulanarak ve eksi işaretiyle kullanılarak en iyi azalış yönünü bulmada kullanılır.

Elektrik alana($\vec{E}$) zıt yönde giderken elektriksel potansiyel(v) arttığı için $\vec{E} = -\vec{\nabla}v$ olur.

Silindirik koordinatlarda:

$$\vec{\nabla}v = \frac{\partial v}{\partial \rho}\hat{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial \varphi}\hat{\varphi} + \frac{\partial v}{\partial z}\hat{z}$$

Küresel Koordinatlarda:

$$\vec{\nabla}v = \frac{\partial v}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v}{\partial \varphi}\hat{\varphi}$$

Diverjans

Vektör üzerine uygulanarak skaler sonuç verir. Kartezyen koordinatlarda

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

diye tanımlıdır. Anlamı, ilgilenilen noktada o vektörün akısından üreten ne kadar yoğun kaynak olduğudur. Artı değerliyse, o noktadan dışa doğru vektör akısı üreten kaynak yoğunluğu vardır; yani o noktadan uzaklaşırken ilgili vektörün büyüklüğünde artış baskındır (Bazı yönler için azalabilir ama yönlere göre ortalama olarak uzaklaştıkça vektör büyüklüğünde artış görülür). Eksi değerliyse, o noktadan içe doğru vektör akısı üreten kaynak yoğunluğu vardır; yani o noktadan uzaklaşırken ilgili vektörün büyüklüğünde azalış baskındır (Bazı yönler için artabilir ama yönlere göre ortalama olarak uzaklaştıkça vektör büyüklüğünde azalış görülür). Sıfır ise ilgili noktada o vektör akısından net olarak üreten kaynak yoğunluğu yoktur; yani o noktadan uzaklaşırken vektör büyüklüğü bazı yönlerde artabilir, bazı yönlerde azalabilir, fakat yönlere göre ortalama olarak uzaklaştıkça vektör büyüklüğündeki değişim sıfırdır.

Mesela ilgili vektörümüz tek tip gaz taneciklerinin hız vektörü olsun. Isı kaynağı olan bölgelerde bu vektörün diverjansı artı, soğutucu olan bölgelerde eksi, diğer bölgelerde sıfırdır. Mesela ilgili vektörümüz bir küvetteki su moleküllerinin iki boyutlu (yere paralel düzlemde) hız vektörü olsun. Çeşme suyunun küvete döküldüğü bölgede iki boyutlu diverjans artı, gider deliği bölgesinde eksi, diğer yerlerde sıfırdır.

Elektromanyetikte deplasman vektörünün ($\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$) diverjansı, $\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho_e$ elektriksel yük yoğunluğudur. Manyetik tek kutuplu olmadığı için manyetik endüksiyon ($\vec{B}$ = manyetik akı yoğunluğu) vektörünün diverjansı hep sıfırdır: $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$

Silindirik koordinatlarda diverjans:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial\left(\rho A_\rho\right)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Küresel koordinatlarda:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(A_\theta \sin\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}$$

Rotasyonel (*curl*)

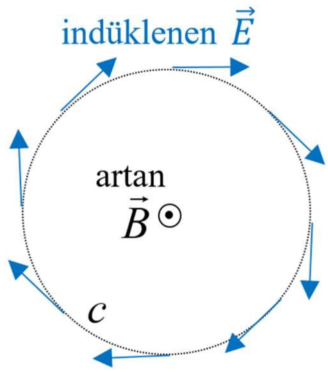
Vektör üzerine uygulanarak vektör sonuç verir. Kartezyen koordinatlarda

$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\hat{x} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\hat{y} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\hat{z}$$

diye tanımlıdır. İlgili nokta komşuluğunda serbestçe dönebilen homojen bir parçacık ve ilgili vektörü de kuvvet gibi hayal edersek, rotasyonelin anlamı, o vektörün döndürme etkisidir. Yönü ise dönen parçacık standart bir vida olsa ilerleyeceği yöndür. Dikkat edilirse xy düzlemindeki vektör bileşenlerinin ve bunların yine bu düzlemdeki değişimlerinin etkisi bu düzlemde döndürme etkisi meydana getireceği için buna dik olan z ekseninde, yz düzlemindekilerinki x ekseninde, zx düzlemindekilerinki de y ekseninde rotasyonel bileşenleri üretir.

Mesela bir nehrin akışı kıyıya yakın yerde yavaş, kıyıdan uzaklaştıkça hızlı ise bu, su düzlemine dik yönde bir rotasyonel üretir, yani su üzerindeki bir tahta çubuğun kıyıya yakın tarafı yavaş, uzak tarafı hızlı gideceğinden, çubuk dönerek akış yönünde ilerleyecektir. İlgili vektör türünün akı çizgileri kapalı halka şeklinde ise, o halka içinde en azından bir yerlerde o akı çizgileri gibi dönen standart bir vidanın ilerleme yönünde rotasyonel mevcuttur.

Elektromanyetikte $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ denklemindeki eksi işaretinden dolayı, yandaki şekilde görülen elektrik alanın rotasyoneli şekil düzleminden içe doğru olduğu halde, dışa doğru artan bir $\vec{B}$ vektörüne karşılık gelmektedir.



Silindirik koordinatlarda rotasyonel:

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right)\hat{\rho} + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho}\right)\hat{\varphi} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial(\rho A_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi}\right)\hat{z}$$

Küresel koordinatlarda:

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{1}{r \sin\theta}\left(\frac{\partial(A_\varphi \sin\theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi}\right)\hat{r} + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r}\right)\hat{\theta} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\hat{\varphi}$$

Laplasyen

Skaler Laplasyen: Gradyenin diverjansı demektir. Dolayısıyla ilgili noktada, o skaler fonksiyondan elde edilen gradyen vektörün akısını üreten kaynak yoğunluğu bilgisini verir. Mesela haritacılıkta yükseklik fonksiyonunun iki boyutlu (deniz seviyesine paralel düzlemde) Laplasyeni, dağların zirvesinde eksi, çukurların dibinde artı değerlidir. Çünkü yükseklik, her yöne zirveden uzaklaşırken azalmakta, dipten uzaklaşırken ise artmaktadır.

Kartezyen koordinatlarda:

$$\nabla^2 v = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} v) = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$$

Silindirik koordinatlarda:

$$\nabla^2 v = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} v) = \frac{\partial^2 v}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$$

Küresel koordinatlarda:

$$\nabla^2 v = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} v) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial v}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial v}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2}$$

Vektörel Laplasyen: Kartezyen koordinatlarda, vektörün her bir bileşeninin skaler Laplasyeninin, aynı yönde bileşen olarak alınmasıyla elde edilen vektördür:

$$\nabla^2 \vec{A} = \hat{x}\,\nabla^2 A_x + \hat{y}\,\nabla^2 A_y + \hat{z}\,\nabla^2 A_z = \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial z^2}$$

Silindirik ve küresel koordinatlarda ise temel vektör bağıntılarından çekilmiş halinden hesaplanır.

$$\nabla^2 \vec{A} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A})$$

Buna göre silindirik koordinatlarda:

$$\nabla^2\vec{A} = \left(\frac{\partial^2 A_\rho}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 A_\rho}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 A_\rho}{\partial z^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\rho}{\partial\rho} - \frac{2}{\rho^2}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi} - \frac{A_\rho}{\rho^2}\right)\hat{\rho}$$
$$+ \left(\frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial z^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\rho} + \frac{2}{\rho^2}\frac{\partial A_\rho}{\partial\varphi} - \frac{A_\varphi}{\rho^2}\right)\hat{\varphi}$$
$$+ \left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 A_z}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial\rho}\right)\hat{z}$$

Küresel koordinatlarda ise:

$$\nabla^2\vec{A} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2(rA_r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 A_r}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 A_r}{\partial\varphi^2} + \frac{\cot\theta}{r^2}\frac{\partial A_r}{\partial\theta} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial A_\theta}{\partial\theta} - \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi} - \frac{2}{r^2}A_r - \frac{2\cot\theta}{r^2}A_\theta\right)\hat{r}$$
$$+ \left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2(rA_\theta)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 A_\theta}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 A_\theta}{\partial\varphi^2} + \frac{\cot\theta}{r^2}\frac{\partial A_\theta}{\partial\theta} - \frac{2\cot\theta}{r^2\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial A_r}{\partial\theta} - \frac{1}{r^2\sin^2\theta}A_\theta\right)\hat{\theta}$$
$$+ \left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2(rA_\varphi)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial\varphi^2} + \frac{\cot\theta}{r^2}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\theta} + \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} + \frac{2\cot\theta}{r^2\sin\theta}\frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi} - \frac{1}{r^2\sin^2\theta}A_\varphi\right)\hat{\varphi}$$

Çeşitli Vektör Formülleri

$\vec{\nabla}\cdot(\vec{A}+\vec{B}) = \vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \vec{\nabla}\cdot\vec{B}$

$\vec{\nabla}\times(\vec{A}+\vec{B}) = \vec{\nabla}\times\vec{A} + \vec{\nabla}\times\vec{B}$

$\vec{\nabla}(fg) = f\vec{\nabla}g + g\vec{\nabla}f$

$\vec{\nabla}\cdot(\phi\vec{A}) = \phi(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) + \vec{A}\cdot(\vec{\nabla}\phi)$

$\vec{\nabla}\times(\phi\vec{A}) = \phi(\vec{\nabla}\times\vec{A}) + (\vec{\nabla}\phi)\times\vec{A}$

$\vec{\nabla}\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{B}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A}) - \vec{A}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{B})$

$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) - \nabla^2\vec{A}$

$\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = 0$

$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\phi) = 0$

$\int_V (\vec{\nabla}\cdot\vec{A})dV = \int_S \vec{A}\cdot\vec{dS}$ (Gauss yasası)

$\int_S (\vec{\nabla}\times\vec{A})\cdot\vec{dS} = \int_c \vec{A}\cdot\vec{dl}$ (Stoke yasası)

$\vec{\nabla}\times(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{A}(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}) + (\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{A} - \vec{B}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) - (\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{B}$

$(\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C} = (\vec{A}\cdot\vec{C})\vec{B} - (\vec{B}\cdot\vec{C})\vec{A}$

$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{B}\cdot(\vec{C}\times\vec{A}) = \vec{C}\cdot(\vec{A}\times\vec{B})$