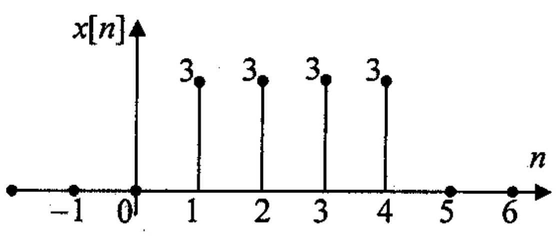
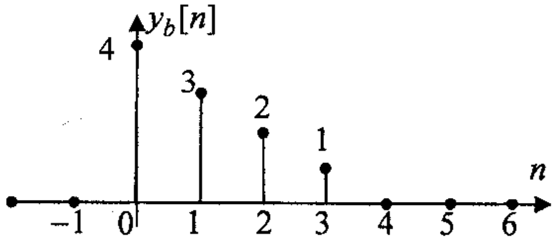
SİNYALLER VE SİSTEMLER ARASINAV SORULARI
Normal Öğretim, 20.11.2006, Süre: 80 dakika

1)





a) Yukarıdaki $x[n]$ sinyalini basamak sinyaller cinsinden yazınız. **(5 puan)**

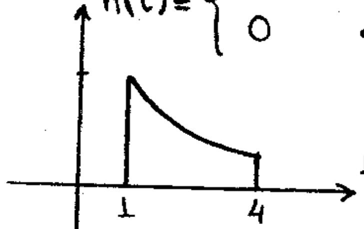
b) Doğrusal zamanla değişmez bir sistemin birim basamak tepkisi yukarıda verilen $y_b[n]$ ise, $x[n]$ girişi için çıkışı çiziniz. **(15 puan)**

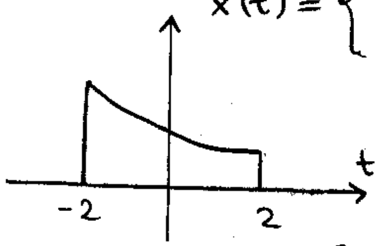
c) Bu sistemin birim darbe tepkisini çiziniz. **(10 puan)**

2) Giriş(x) çıkış(y) ilişkisi $y(t) = \int_0^t x(\tau)\,d\tau + 2x(t)$ ile verilen bir sistem doğrusal mıdır, bellekli midir, nedensel midir, kararlı mıdır, zamanla değişen midir? **(5×3=15 puan)**

3) Aşağıdaki konvolüsyon işlemlerinden istediğiniz birini yapınız ($\alpha \neq \beta$). **(30 puan)**

a) $h(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t} & 1 \leq t < 4 \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$ $\quad x(t) = \begin{cases} e^{-\beta t} & -2 \leq t < 2 \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$

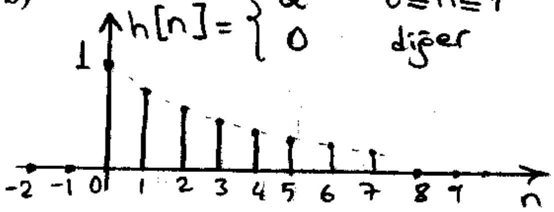


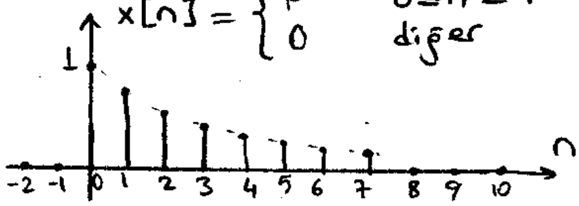


$\alpha > 0, \quad \beta > 0$

$y(t) = x(t) * h(t) = ?$

b) $h[n] = \begin{cases} \alpha^n & 0 \leq n \leq 7 \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$ $\quad x[n] = \begin{cases} \beta^n & 0 \leq n \leq 7 \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$





$0 < \alpha < 1$
$0 < \beta < 1$

$y[n] = x[n] * h[n] = ?$

4) Giriş(x) çıkış(y) ilişkisi

$$2\dot{y}(t) - 2y(t) = 4x(t)$$

ile verilen nedensel sistemin birim darbe tepkisini bulunuz. **(25 puan)** Bu sistem kararlı mıdır? **(5 puan)**

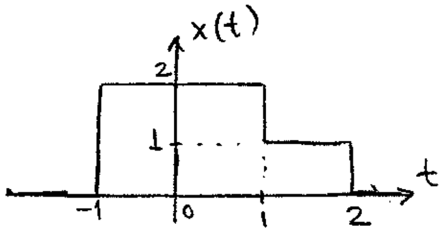
BAŞARILAR ...

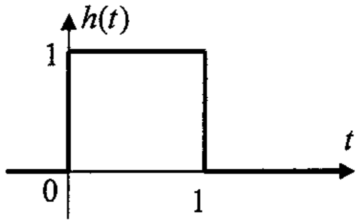
Yrd. Doç. Dr. Ata Sevinç

SİNYALLER VE SİSTEMLER ARASINAV SORULARI

İkinci Öğretim, 20.11.2006, Süre: 80 dakika

1)





a) Yukarıdaki $x(t)$ sinyalini basamak sinyaller cinsinden yazınız. **(5 puan)**

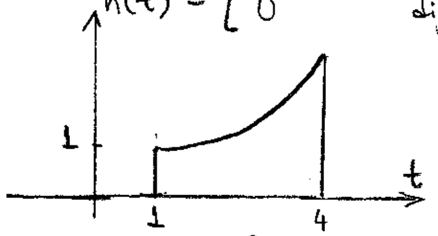
b) Doğrusal zamanla değişmez bir sistemin birim darbe tepkisi yukarıda verilen $h(t)$ ise, sistemin birim basamak tepkisini ($y_b(t)$) çiziniz. **(10 puan)**

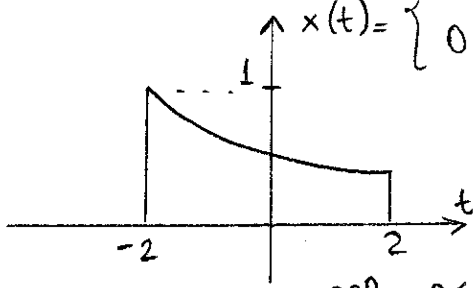
c) Bu sistemin çıkışını ($y(t)$) verilen $x(t)$ girişi için çiziniz. **(15 puan)**

2) Giriş(x) çıkış(y) ilişkisi $y[n]=\sum_{k=0}^{n} x[k]+x[n]\cdot x[n-1]$ ile verilen bir sistem doğrusal mıdır, bellekli midir, nedensel midir, kararlı mıdır, zamanla değişen midir? **(5×3=15 puan)**

3) Aşağıdaki konvolüsyon işlemlerinden istediğiniz birini yapınız ($\alpha \neq \beta$). **(30 puan)**

a) $h(t)=\begin{cases} e^{\alpha(t-1)} & 1\le t<4 \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$ $\qquad x(t)=\begin{cases} e^{-\beta(t+2)} & -2\le t<2 \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$

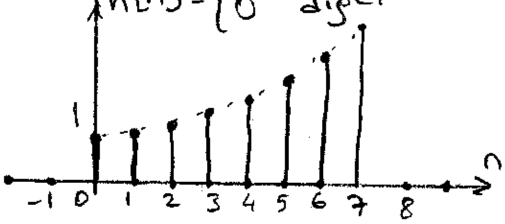


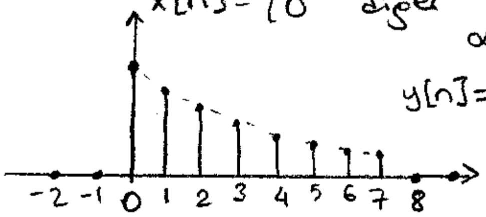


$\alpha>0,\ \beta>0$

$y(t)=x(t)*h(t)=?$

b) $h[n]=\begin{cases} \alpha^n & 0\le n\le 7 \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$ $\qquad x[n]=\begin{cases} \beta^n & 0\le n\le 7 \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$





$\alpha>1,\ 0<\beta<1$

$y[n]=x[n]*h[n]=?$

4) Giriş(x) çıkış(y) ilişkisi

$$2\dot{y}(t)+2y(t)=4x(t)$$

ile verilen <u>nedensel</u> sistemin birim darbe tepkisini bulunuz. **(25 puan)**

BAŞARILAR ...

Yrd. Doç. Dr. Ata Sevinç

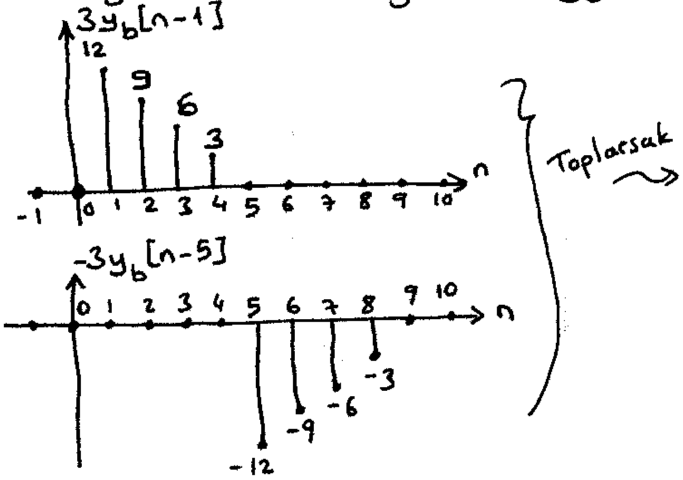
SİNYALLER VE SİSTEMLER ARASINAV CEVAP ANAHTARI

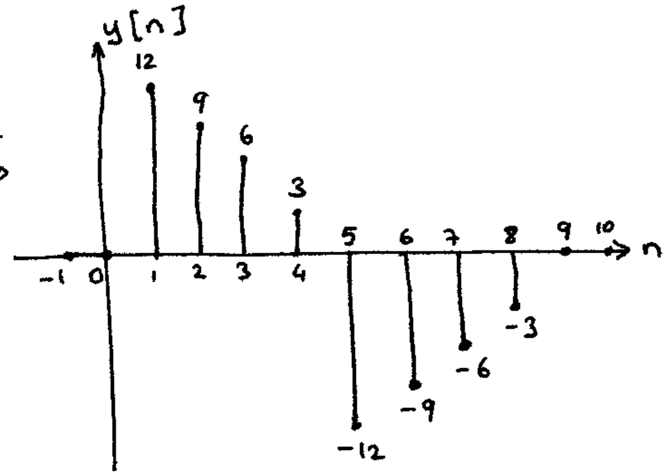
20.11.2006 Normal Öğretim

1) a) $x[n] = 3u[n-1] - 3u[n-5]$

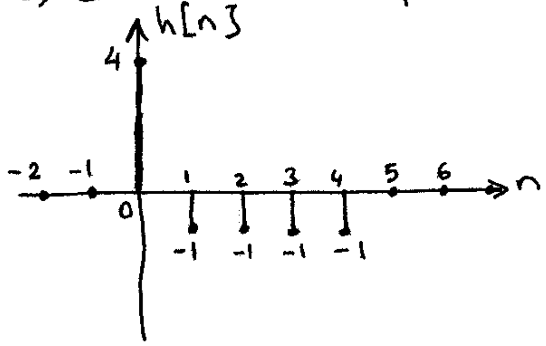
b) $x[n]$ 'in $u[n]$ cinsinden ifadesinde $u \longrightarrow y_b$, $x \longrightarrow y$

yazılarak $y[n] = 3y_b[n-1] - 3y_b[n-5]$ bulunur.





c) Birim darbe tepkisi : $h[n] = y_b[n] - y_b[n-1]$



$n \leq -1 \Rightarrow h[n] = 0 - 0 = 0$

$n = 0 \Rightarrow h[0] = 4 - 0 = 4$

$h[1] = 3 - 4 = -1$

$h[2] = 2 - 3 = -1$

$h[3] = 1 - 2 = -1$

$n = 4 \Rightarrow h[4] = 0 - 1 = -1$

$n \geqslant 5 \Rightarrow h[n] = 0 - 0 = 0$

2) Doğrusaldır. İntegral doğrusallığı bozmaz.

Belleklidir. İntegral için $[0,t]$ aralığındaki giriş bilgisi gerekiyor.

Nedensel değildir. Çünkü $t<0$ olsa bile $x(0)$ bilgisi gerekiyor. Ancak $t \geqslant 0$ bölgesi için çalışıldığı kabul ediliyorsa nedenseldir.

Kararsızdır. Çünkü $x(t) = u(t)$ (sonlu) örnek girişi uygulanırsa $t \geqslant 0$ için integral $= t$ olur ki bu da $t \to \infty$ için sonsuzdur, sınırlanamaz.

$x(t-t_0)$ için çıkış $= \int_0^t x(\underbrace{\tau - t_0}_{p \text{ olsun}})\,d\tau + 2x(t-t_0) = \int_{p=-t_0}^{t-t_0} x(p)\,dp + 2x(t-t_0)$

Diğer yandan $y(t-t_0) = \int_{\tau=0}^{t-t_0} x(\tau)\,d\tau + 2x(t-t_0)$ $\neq$

Zamanla değişendir.

3) **a)** SS-V-N.Ö.-2006-CA-2

$$y(t)=\begin{cases} 0 & \longrightarrow \quad t<-1 \text{ ise} \\ \dfrac{e^{2\beta-\alpha}}{\alpha-\beta}\left(e^{-\beta(t+1)}-e^{-\alpha(t+1)}\right) & -1\leq t<2 \text{ ise} \\ \left(\dfrac{e^{-\alpha-\beta}-e^{2\beta-4\alpha}}{\alpha-\beta}\right)e^{-\beta(t-2)} & 2\leq t<3 \text{ ise} \\ \dfrac{e^{-\alpha-2\beta}}{\alpha-\beta}\cdot e^{-\alpha(t-3)}-\dfrac{e^{\beta-4\alpha}}{\alpha-\beta}\cdot e^{-\beta(t-3)} & \longrightarrow \quad 3\leq t<6 \text{ ise} \\ 0 & \longrightarrow \quad t\geq 6 \text{ ise} \end{cases}$$

b)

$$y[n]=\begin{cases} 0 & \longrightarrow \quad n<0 \text{ ise} \\ \dfrac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta} & 0\leq n\leq 7 \text{ ise} \\ \dfrac{\alpha\cdot\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^7\cdot\beta^n-\beta\cdot\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^7\cdot\alpha^n}{\alpha-\beta} & \longrightarrow \quad 7\leq n\leq 14 \text{ ise} \\ 0 & \longrightarrow \quad n>14 \text{ ise} \end{cases}$$

Bu sorunun ayrıntılı çözümü 3. sayfadan itibaren gösterilmiştir.

4) Nedensellikten dolayı $t<0$ için $h(t)=0$

$t>0$ için $\quad 2\ddot{h}(t)-2h(t)=0\,,\quad h(0^+)=0\,,\ \dot{h}(0^+)=\frac{4}{2}=2$

$$2\lambda^2-2=0 \rightarrow \lambda^2=1 \rightarrow \lambda_1=-1\,,\ \lambda_2=+1$$

$$h(t)=A_1e^{-t}+A_2e^{t}$$

$$\left.\begin{aligned} h(0^+)&=A_1+A_2=0 \\ \dot{h}(0^+)&=-A_1+A_2=2 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &-A_1=A_2 \\ &2A_2=2 \rightarrow A_2=1\,,\ A_1=-1 \end{aligned}$$

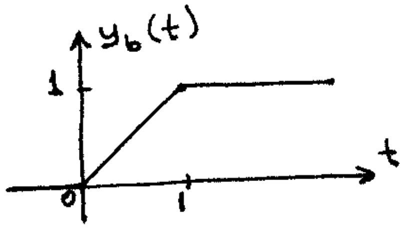
$$h(t)=-e^{-t}+e^{t}$$

Genel olarak ise $\boxed{h(t)=\left(e^{t}-e^{-t}\right)u(t)}$ $\rightarrow$ Tüm zamanlar için

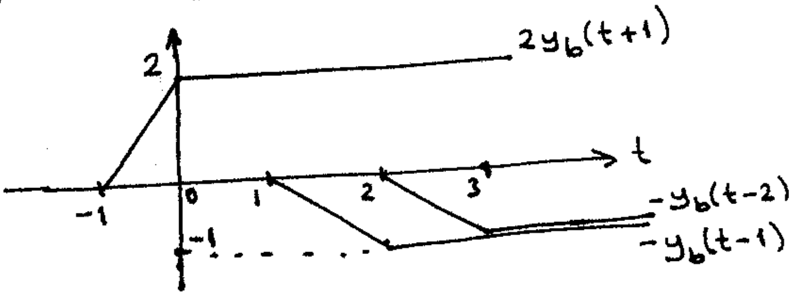
SİNYALLER VE SİSTEMLER ARASINAV CEVAP ANAHTARI
20.11.2006 İkinci Öğretim

1) a) $x(t) = 2u(t+1) - u(t-1) - u(t-2)$

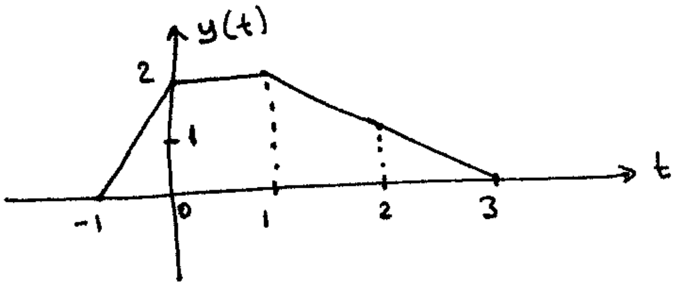
b) $y_b(t) = \int_{-\infty}^{t} h(\tau)\,d\tau$ Yani $h(t)$ 'nin integralini alacağız.



c) $y(t) = 2y_b(t+1) - y_b(t-1) - y_b(t-2)$ → x yerine y, u yerine y_b yazdık.



Bu üç bileşeni toplayarak $y(t)$ bulunur.



2) Doğrusal değildir, çünkü $x[n]x[n-1]$ çarpımı var.
Belleklidir.
Nedensel değildir. Çünkü $n<0$ için de $x[0]$ değerine bağlı. Ancak $n \geq 0$ bölgesi için çalışıldığı kabul ediliyorsa nedensel kabul edilebilir.
Sistem kararsızdır. Çünkü $x[n] = u[n]$ alınırsa $n \geq 0$ için toplam $n+1$ olur ve $n \to \infty$'a giderken $y[n] \to \infty$'a gider.

$\underbrace{x[n-n_0]}_{=v[n] \text{ diyelim}}$ için çıkış $= \sum_{k=0}^{n} v[k] + v[n]v[n-1]$

$= v[0] + \ldots + v[n] + v[n]v[n-1]$

$= x[-n_0] + \ldots + x[n-n_0] + x[n-n_0] \cdot x[n-n_0-1]$

Diğer yandan, $y[n-n_0] = x[0] + \ldots + x[n-n_0] + x[n-n_0] \cdot x[n-n_0-1]$

Son iki ifade eşit olmadığından sistem zamanla değişendir.

3) a)

$$y(t)=\begin{cases} 0 & \longrightarrow \quad t<-1 \text{ ise} \\ \dfrac{1}{\alpha+\beta}\left(e^{\alpha(t+1)}-e^{-\beta(t+1)}\right) & -1\leq t<2 \text{ ise} \\ \dfrac{e^{3\alpha}-e^{-3\beta}}{\alpha+\beta}\cdot e^{-\beta(t-2)} & 2\leq t<3 \text{ ise} \\ \dfrac{e^{-\beta+3\alpha}}{\alpha+\beta}\cdot e^{-\beta(t-3)}-\dfrac{e^{-4\beta}}{\alpha+\beta}\cdot e^{\alpha(t-3)} & \longrightarrow \quad 3\leq t<6 \text{ ise} \\ 0 & \longrightarrow \quad t\geqslant 6 \text{ ise} \end{cases}$$

b)

$$y[n]=\begin{cases} 0 & \longrightarrow \quad n<0 \text{ ise} \\ \dfrac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta} & 0\leq n\leq 7 \text{ ise} \\ \dfrac{\alpha\cdot\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{7}\cdot\beta^{n}-\beta\cdot\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{7}\cdot\alpha^{n}}{\alpha-\beta} & \longrightarrow \quad 7\leq n\leq 14 \text{ ise} \\ 0 & \longrightarrow \quad n>14 \text{ ise} \end{cases}$$

Bu sorunun ayrıntılı çözümü 3. sayfadan itibaren gösterilmiştir.

4) $t<0$ için $h(t)=0$

$t>0$ için $2\ddot{h}(t)+2h(t)=0$, $h(0)=0$, $\dot{h}(0)=\frac{4}{2}=2$

$2\lambda^2+2=0 \rightarrow \lambda_{1,2}=\mp j \rightarrow h(t)=A_1\cos t+A_2\sin t$

$\dot{h}(t)=-A_1\sin t+A_2\cos t$

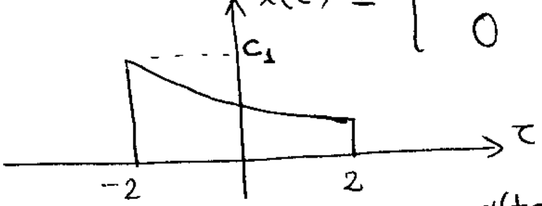
$h(0^+)=h(0)=A_1=0$

$\dot{h}(0^+)=2=-A_1\cdot 0+A_2=2 \rightarrow h(t)=2\sin t$ $\quad t>0$ için

Genel olarak ise $\boxed{h(t)=(2\sin t)u(t)}$

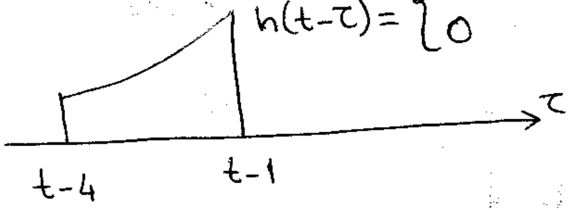
3) a) $y(t) = x(t) * h(t) = \underbrace{\int_{\tau=-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau}_{1.\text{yol}} = \underbrace{\int_{\tau=-\infty}^{+\infty} h(\tau) x(t-\tau) d\tau}_{2.\text{yol}}$

$$x(\tau) = \begin{cases} c_1 e^{-\beta(\tau+2)} & -2 \le \tau < 2 \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$$



Normal öğretim sorusunda $c_1 = e^{2\beta}$
İkinci öğretim sorusunda $c_1 = 1$

$$h(t-\tau) = \begin{cases} e^{-\alpha(t-\tau)} & 1 \le t-\tau < 4 \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$$



→ Normal öğretim sorusuna göre alalım. İleride α yerine $-\alpha$ yazarak İkinci öğretim sorusunun cevabına dönüştürülebilir.

Düzenlenirse

$$h(t-\tau) = \begin{cases} e^{\alpha(\tau-t)} & t-4 < \tau \le t-1 \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$$

$t-1 \geq -2$ ve $t-4 < -2$
yani $\underline{-1 \le t < 2}$ için

$$x(\tau)h(t-\tau) = \begin{cases} c_1 e^{-\beta(\tau+2)} \cdot e^{\alpha(\tau-t)} & -2 \le \tau \le t-1 \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$$

$$x(\tau)h(t-\tau) = \begin{cases} c_1 e^{-2\beta-\alpha t} \cdot e^{(\alpha-\beta)\tau} & -2 \le \tau \le t-1 \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$$

$$c_1 e^{-2\beta-\alpha t} \int_{\tau=-2}^{t-1} e^{(\alpha-\beta)\tau} d\tau = \frac{c_1}{\alpha-\beta} e^{-2\beta-\alpha t} \cdot e^{(\alpha-\beta)\tau} \Big|_{\tau=-2}^{t-1}$$

$$y(t) = \frac{c_1}{\alpha-\beta} e^{-2\beta-\alpha t} \left(e^{(\alpha-\beta)(t-1)} - e^{2\beta-2\alpha} \right)$$

$$y(t) = e^{-\beta(t+1)} \cdot \left(\frac{c_1}{\alpha-\beta} e^{-\alpha} \right) - e^{-\alpha(t+1)} \cdot \left(\frac{c_1}{\alpha-\beta} e^{-\alpha} \right)$$

$$y(t) = \frac{c_1}{\alpha-\beta} e^{-\alpha} \cdot \left[e^{-\beta(t+1)} - e^{-\alpha(t+1)} \right] \quad \rightarrow \quad -1 \le t < 2 \text{ ise}$$

$t-1<2$ ve $t-4 \geq -2$

yani $\underline{2 \leq t < 3}$ için :

Buna benzer sorularda bu ifade aynı kalıyor, yalnız geçerli olduğu τ aralığı değişiyor

$$x(\tau)h(t-\tau) = \begin{cases} c_1 e^{-2\beta-\alpha t} \cdot e^{(\alpha-\beta)\tau} & t-4 \leq \tau \leq t-1 \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$$

$$y(t) = c_1 e^{-2\beta-\alpha t} \int_{\tau=t-4}^{t-1} e^{(\alpha-\beta)\tau} d\tau = \frac{c_1}{\alpha-\beta} e^{-2\beta-\alpha t} \cdot e^{(\alpha-\beta)\tau} \Big|_{\tau=t-4}^{t-1}$$

belirsiz integral da sonucu aynı ama sınırlar değişiyor

$$y(t) = \frac{c_1}{\alpha-\beta} e^{-2\beta-\alpha t} \cdot \left(e^{(\alpha-\beta)(t-1)} - e^{(\alpha-\beta)(t-4)} \right)$$

$$y(t) = e^{-\beta(t-2)} \cdot \frac{c_1}{\alpha-\beta} \cdot \left(e^{-\alpha-3\beta} - e^{-4\alpha} \right) \rightarrow 2 \leq t < 3 \text{ ise.}$$

$t-4<2$ ve $t-1 \geq 2$ yani $\underline{3 \leq t < 6}$ için :

$$x(\tau)h(t-\tau) = \begin{cases} c_1 e^{-2\beta-\alpha t} \cdot e^{(\alpha-\beta)\tau} & t-4 \leq \tau \leq 2 \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$$

$$y(t) = \int_{\tau=t-4}^{2} \cdots = \frac{c_1}{\alpha-\beta} e^{-2\beta-\alpha t} \cdot e^{(\alpha-\beta)\tau} \Big|_{\tau=t-4}^{2}$$

$$y(t) = \frac{c_1}{\alpha-\beta} e^{-2\beta-\alpha t} \left(e^{2\alpha-2\beta} - e^{(\alpha-\beta)(t-4)} \right)$$

$$y(t) = e^{-\alpha(t-3)} \left(\frac{c_1}{\alpha-\beta} e^{-4\beta-\alpha} \right) - e^{-\beta(t-3)} \left(\frac{c_1}{\alpha-\beta} e^{-\beta-4\alpha} \right)$$

$\rightarrow 3 \leq t < 6$ ise

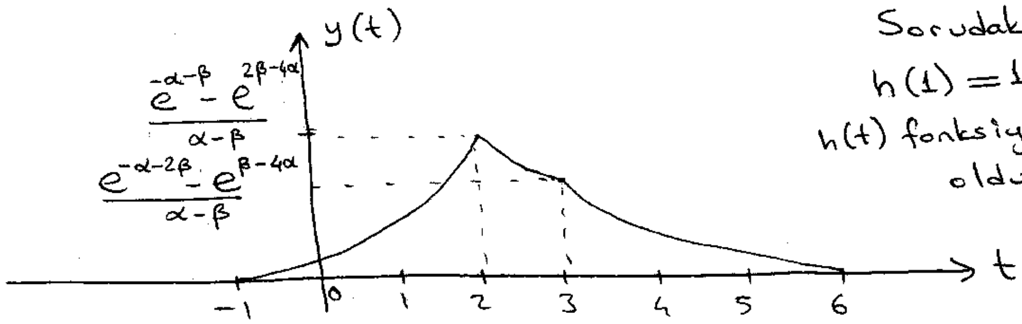
$t-1 < -2$ yani $\underline{t < -1}$ veya $t-4 \geq 2$ yani $\underline{t \geq 6}$ için

$x(\tau)h(t-\tau) = 0$ her τ için.

$$y(t) = \int_{\tau=-\infty}^{+\infty} 0 \cdot d\tau = 0$$

Normal Öğretim sorusu için sonuç:

$$y(t)=\begin{cases} 0 \longrightarrow & t<-1 \text{ ise} \\ \dfrac{e^{2\beta-\alpha}}{\alpha-\beta}\left(e^{-\beta(t+1)}-e^{-\alpha(t+1)}\right) & -1\leq t<2 \text{ ise} \\ \left(\dfrac{e^{-\alpha-\beta}-e^{2\beta-4\alpha}}{\alpha-\beta}\right)e^{-\beta(t-2)} & 2\leq t<3 \text{ ise} \\ \dfrac{e^{-\alpha-2\beta}}{\alpha-\beta}\cdot e^{-\alpha(t-3)}-\dfrac{e^{\beta-4\alpha}}{\alpha-\beta}\cdot e^{-\beta(t-3)} \longrightarrow & 3\leq t<6 \text{ ise} \\ 0 \longrightarrow & t\geq 6 \text{ ise} \end{cases}$$



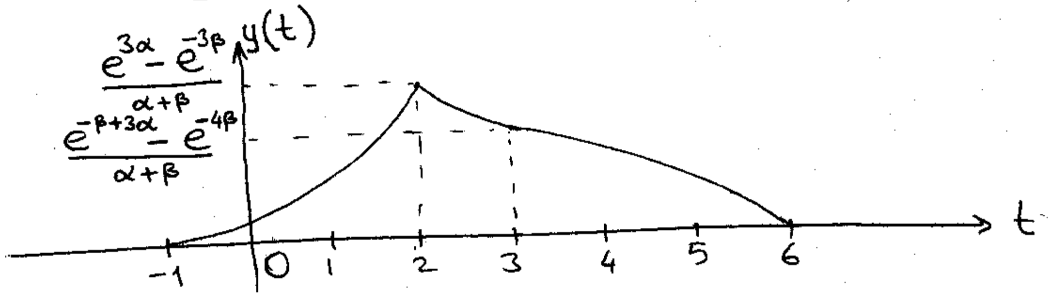
Sorudaki şekilde $h(1)=1$ bilgisinin yanlış, $h(t)$ fonksiyonunun doğru olduğu kabul edildi.

Eğer $h(1)=1$ bilgisi doğru, $h(t)$ fonksiyonunun yanlış yazıldığı ve doğrusunun ikinci öğretim sorusundaki ifadenin α yerine $-\alpha$ yazılanı olduğu kabul edilseydi, $y(t)$ bu bulunanın e^{α} katı olurdu.

İkinci Öğretim sorusu için sonuç:
N.Ö. için bulunan sonuçta önce bütün α'lar $-\alpha$ ile değiştirilir.
Bundan sonra da sonuç $e^{-\alpha}$ ile çarpılır.

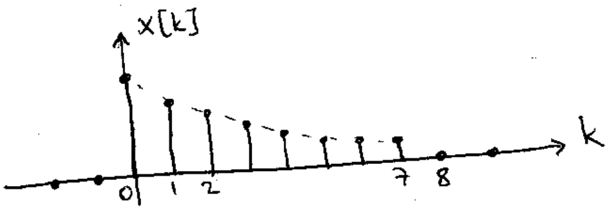
Ayrıca N.Ö. için $e^{2\beta}$ alınan c_1 burada 1 olduğundan sonuç ayrıca $e^{-2\beta}$ ile çarpılır:

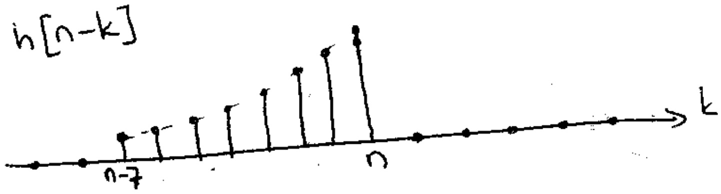
$$y(t)=\begin{cases} 0 & t<-1 \text{ ise} \\ \frac{1}{\alpha+\beta}\left(e^{\alpha(t+1)}-e^{-\beta(t+1)}\right) & -1\leq t<2 \text{ ise} \\ \frac{e^{3\alpha}-e^{-3\beta}}{\alpha+\beta}\cdot e^{-\beta(t-2)} & 2\leq t<3 \text{ ise} \\ \frac{e^{-\beta+3\alpha}}{\alpha+\beta}\cdot e^{-\beta(t-3)}-\frac{e^{-4\beta}}{\alpha+\beta}\cdot e^{\alpha(t-3)} & 3\leq t<6 \text{ ise} \\ 0 & t\geq 6 \text{ ise} \end{cases}$$



b) Fonksiyonların ifadesi N.Ö. ve İ.Ö. sorularında aynıdır. Buna göre α'nın 1'den büyük veya küçük olması sonuç ifadeleri değil, yalnız çizimi etkiler. Çizimleri N.Ö. sorusuna göre yapalım.

$$y[n]=x[n]*h[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]h[n-k]$$





$n<0$ ve

$n-7>7$ yani $n>14$

için her k için

$x[k]h[n-k]=0$

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}0=0$$

$0 \leq n \leq 7$ için :

$$x[k]h[n-k] = \begin{cases} \beta^k \alpha^{n-k} & 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$$

$$y[n] = \left(\sum_{k=0}^{n} (\beta/\alpha)^k\right) \cdot \alpha^n = \alpha^n \frac{1-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n+1}}{1-\frac{\beta}{\alpha}} = \frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta} = y[n]$$

$7 \leq n \leq 14$ için :

$$x[k]h[n-k] = \begin{cases} \beta^k \cdot \alpha^{n-k} & n-7 \leq k \leq 7 \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$$

$$y[n] = \alpha^n \cdot \sum_{k=n-7}^{7} (\beta/\alpha)^k \longrightarrow \begin{array}{l} m = k+7-n \Longrightarrow k = m+n-7 \\ k=n-7 \Longrightarrow m=0 \\ k=7 \Longrightarrow m=14-n \end{array}$$

$$y[n] = \alpha^n \cdot \sum_{m=0}^{14-n} (\beta/\alpha)^{m+n-7} = \alpha^n \cdot \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n-7} \cdot \sum_{m=0}^{14-n} (\beta/\alpha)^m$$

$$y[n] = \alpha^{+7} \cdot \beta^{n-7} \frac{1-(\beta/\alpha)^{15-n}}{1-\frac{\beta}{\alpha}} = \frac{\alpha^{+8} \cdot \beta^{n-7} - \alpha^{+8} \cdot \beta^{n-7} \cdot \beta^{15-n} \cdot \alpha^{n-15}}{\alpha-\beta}$$

$$y[n] = \frac{\alpha \cdot (\alpha/\beta)^7 \cdot \beta^n - \beta \cdot (\beta/\alpha)^7 \cdot \alpha^n}{\alpha-\beta} \longrightarrow 7 \leq n \leq 14 \text{ için}$$

Sonuç :

$$y[n] = \begin{cases} 0 & \longrightarrow n<0 \text{ ise} \\ \dfrac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta} & 0 \leq n \leq 7 \text{ ise} \\ \dfrac{\alpha \cdot \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^7 \cdot \beta^n - \beta \cdot \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^7 \cdot \alpha^n}{\alpha-\beta} & \longrightarrow 7 \leq n \leq 14 \text{ ise} \\ 0 & \longrightarrow n>14 \text{ ise} \end{cases}$$

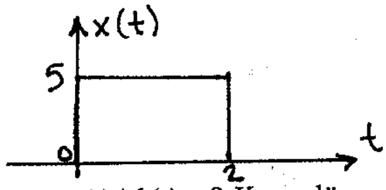
SİNYALLER VE SİSTEMLER SINAV SORULARI
18.01.2007 Süre: 75 dakika

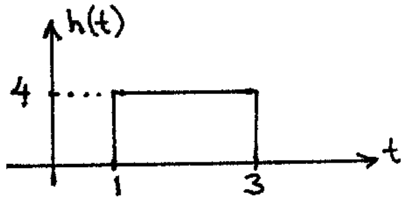
3. ve 4. soru mecburi* diğerleri seçmelidir. Toplam olarak yalnızca 5 soru cevaplayınız.
*2004-2005 öğretim yılı veya daha öncesinde açılan Sinyaller ve Sistemler-1 dersini almış ve devamsız olmamış olanlar (dersten ister geçsin ister kalsın) için 3. soru da seçmelidir. Yerine başka soru yapabilirler. Her soru eşit (20) puanlıdır.

1) $x(t) = 2u(t+2) + 2u(t-1) - 4u(t-2)$ sinyalini
a) Çiziniz. **(5 puan)** **b)** Tek ve çift bileşenlerine ayırınız. **(15 puan)**

2) a) Giriş(x) çıkış(y) ilişkisi $y[n+1] = n \cdot x[n] + 1$ ile verilen bir sistem doğrusal mıdır, bellekli midir, nedensel midir, zamanla değişen midir, kararlı mıdır? **(5x3 = 15 puan)**
b) $v[n] = \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{n}{4}\right)$ kesikli zaman sinyali periyodik midir? Periyodik ise periyodu nedir? **(5 puan)**

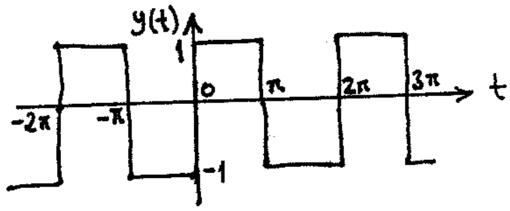
3)





$y(t) = x(t) * h(t) = ?$ Konvolüsyon işlemiyle bulunuz. (Başka yolla tam doğru çözmek 10 puandır.)

4) Şekilde verilen $y(t)$ sinyalini bir Fourier serisi biçiminde yazınız. (Gerçel veya karmaşık olabilir.)

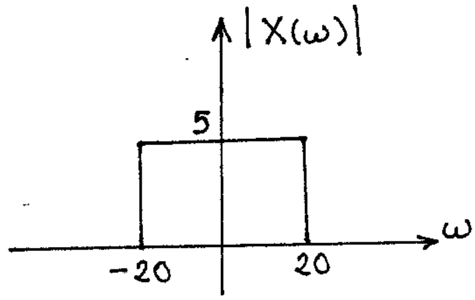


5) Giriş(x) çıkış(y) ilişkisi aşağıda verilen iki sistemden yalnız birisinin transfer fonksiyonunu ve birim darbe tepkisini bulunuz. Sistemler nedenseldir.

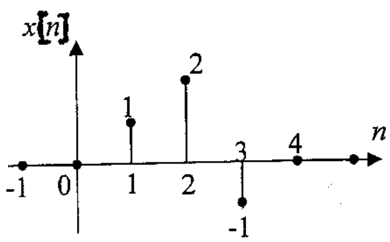
a) $y[n+2] - 1{,}2y[n+1] + 0{,}35y[n] = x[n+1] - x[n]$

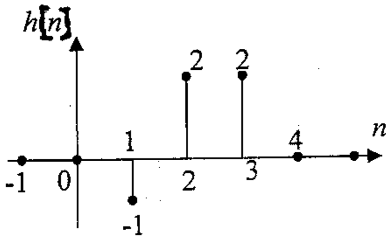
b) $\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 2y(t) = \dot{x}(t) - 3x(t)$

6) Spektrumu ($|X(\omega)|$) şekildeki gibi olan bir $x(t)$ sinyali, $y(t) = x(t)\cos(100t)$ biçiminde modüle ediliyor.
a) Modüleli sinyalin spektrumunu ($|Y(\omega)|$) çiziniz. **(10 puan)**
b) $\int_{-\infty}^{+\infty} |y(t)|^2 dt = ?$ **(10 puan)**



7)





$y[n] = x[n] * h[n] = ?$ İstediğiniz yöntemle bulunuz.

BAŞARILAR ... **Yrd. Doç. Dr. Ata SEVİNÇ**

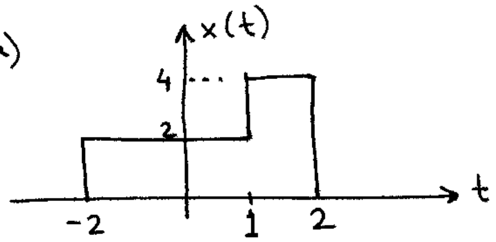
SİNYALLER VE SİSTEMLER FİNAL CEVAP ANAHTARI: 18.01.2007

1) a)

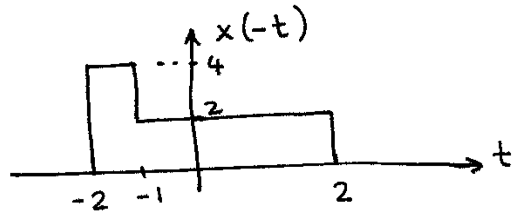
$$x_T(t) = \frac{x(t) - x(-t)}{2}$$

$$x_ç(t) = \frac{x(t) + x(-t)}{2}$$

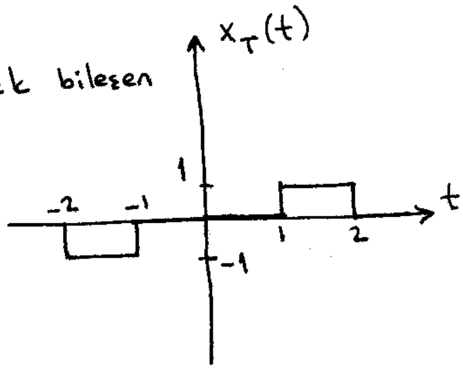
a)

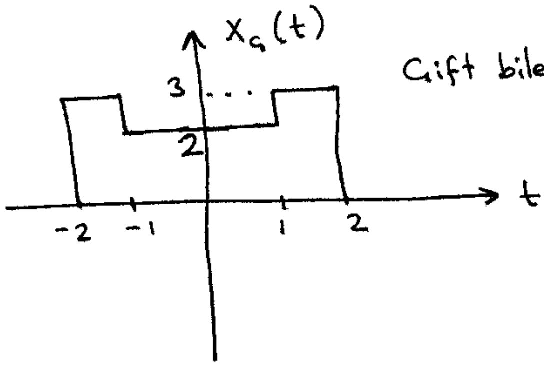


b)



Tek bileşen





Çift bileşen

2) a) $y[n] = (n-1)\,x[n-1] + 1$ olur.

Doğrusal değildir. 1 sabiti doğrusallığı bozuyor.

Belleklidir. $y[n]$, $x[n-1]$'e bağlı.

Nedenseldir.

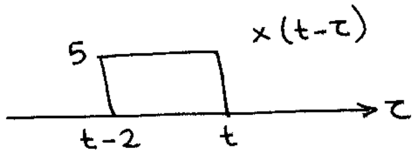
Zamanla değişendir. ((n-1) katsayısından dolayı)

Kararsızdır. Giriş sabit (>0) olsa bile çıkış (n-1) ile birlikte sınırlanamaz biçimde artıyor.

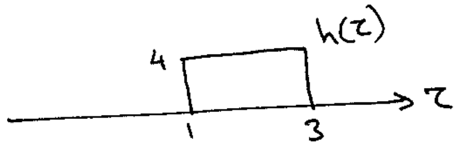
b) $\cos(\frac{n\pi}{2}) \rightarrow N_1 = 4$ ile periyodik. Ancak,

$\sin(\frac{n}{4}) \rightarrow$ periyodik olmadığından <u>v[n] periyodik değildir.</u>

3) $y(t) = x(t) * h(t) = \int_{\tau=-\infty}^{+\infty} x(t-\tau)\,h(\tau)\,d\tau$



$t < 1$ veya $t-2 > 3$ $(t > 5)$ ise



her τ için $x(t-\tau)h(\tau) = 0$ olacağından,

$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} 0 \cdot d\tau = 0$ olur.

$1 \leq t < 3$ ise :

$$x(t-\tau)h(\tau) = \begin{cases} 20 & 1 \leq \tau \leq t \\ 0 & \text{diğer} \end{cases} \rightarrow y(t) = \int_1^t 20\, d\tau = 20\tau \Big|_{\tau=1}^{t}$$

$$y(t) = 20(t-1)$$

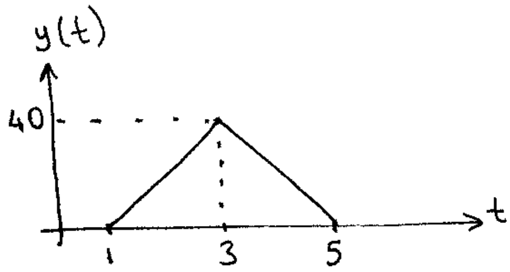
$1 \leq t-2 \leq 3$ yani $3 \leq t \leq 5$ ise :

$$x(t-\tau)h(\tau) = \begin{cases} 20 & t-2 \leq \tau \leq 3 \\ 0 & \text{diğer} \end{cases} \rightarrow y(t) = \int_{t-2}^{3} 20 \cdot d\tau = 20\tau \Big|_{t-2}^{3}$$

$$y(t) = 20 \times 3 - 20 \times (t-2) = 60 - 20(t-2) = y(t) = 100 - 20t$$

Genel olarak:

$$y(t) = \begin{cases} 0 & t < 1 \text{ ise} \\ 20(t-1) & 1 \leq t < 3 \text{ ise} \\ 60 - 20(t-2) & 3 \leq t \leq 5 \text{ ise} \\ 0 & t > 5 \text{ ise} \end{cases}$$



4) $y(t) = -y(-t) \rightarrow$ Tek sinyal $\rightarrow a_0 = a_k = 0$

$T_0 = 2\pi \qquad -\pi < t < \pi$ için $\quad y(t) = \begin{cases} -1 & -\pi < t < 0 \\ +1 & 0 < t < \pi \end{cases}$

$$b_k = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} y(t) \sin k\omega_0 t \, dt \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 1$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} y(t) \sin kt\, dt = -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} \sin kt\, dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin kt\, dt$$

veya kısaca $\quad b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin kt\, dt = \frac{-2}{k\pi} \cos kt \Big|_0^{\pi} = \frac{2}{k\pi} (1 - \underbrace{\cos k\pi}_{(-1)^k})$

$$b_k = \frac{2}{k\pi}\left(1 - (-1)^k\right) \longrightarrow b_k = \begin{cases} 4/k\pi & k \text{ tekse} \\ 0 & k \text{ çiftse} \end{cases}$$

$$y(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(a_k \cos kt + b_k \sin kt\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin kt$$

$$y(t) = \frac{4}{\pi} \left(\frac{\sin t}{1} + \frac{\sin 3t}{3} + \frac{\sin 5t}{5} + \cdots \right)$$

Karmasık seriye açsaydık:

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} \qquad c_0 = 0 \quad (\text{Tek sinyal}) \quad , \quad \omega_0 = 1,\ T_0 = 2\pi$$

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} y(t) e^{-jkt} dt = \frac{-1}{2\pi} \int_{-\pi}^{0} e^{-jkt} dt + \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\pi} e^{-jkt} dt$$

$$\int_{T_0}$$

$$c_k = \frac{1}{j2k\pi} \left(e^{-jkt} \right) \Big|_{-\pi}^{0} - \frac{1}{j2k\pi} \left(e^{-jkt} \right) \Big|_{0}^{\pi}$$

$$c_k = \frac{e^0 - e^{jk\pi} - e^{-jk\pi} + e^0}{j2k\pi} \qquad e^{\mp jk\pi} = (-1)^k$$

$$c_k = \frac{2}{j2k\pi} \left(1 - (-1)^k \right) = c_k = \begin{cases} \dfrac{-j2}{k\pi} & k \text{ tekse} \\ 0 & k \text{ çiftse} \end{cases}$$

$$y(t) = \dots + j\frac{2}{3\pi} e^{-j3t} + j\frac{2}{\pi} e^{-jt} - j\frac{2}{\pi} e^{jt} - j\frac{2}{3\pi} e^{j3t} - \dots$$

5) a) $\mathcal{Z}\left\{ y[n+2] - 1{,}2\, y[n+1] + 0{,}35\, y[n] \right\} = \mathcal{Z}\left\{ x[n+1] - x[n] \right\}$

$$(z^2 - 1{,}2z + 0{,}35) Y(z) = (z-1) X(z)$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = H(z) = \frac{z-1}{z^2 - 1{,}2z + 0{,}35} = \frac{z-1}{(z-0{,}7)(z-0{,}5)} \quad : \text{Transfer fonksiyon}$$

Yakınsama bölgesi nedensellikten dolayı : $|z| > 0{,}7$
(en dış çemberin dışı)

$$H(z) = \frac{A}{z-0{,}7} + \frac{B}{z-0{,}5} \longrightarrow A = \frac{z-1}{z-0{,}5}\Big|_{z=0{,}7} = \frac{0{,}7-1}{0{,}7-0{,}5} = \frac{-3}{2} = A$$

$$B = \frac{z-1}{z-0{,}7}\Big|_{z=0{,}5} = \frac{0{,}5-1}{0{,}5-0{,}7} = \frac{5}{2} = B$$

$$H(z) = -\frac{3}{2} z^{-1} \cdot \underbrace{\frac{z}{z-0{,}7}}_{\mathcal{Z}\{0{,}7^n u[n]\}} + \frac{5}{2} z^{-1} \underbrace{\frac{z}{z-0{,}5}}_{\mathcal{Z}\{0{,}5^n u[n]\}}$$

$YB_1 : |z| > 0{,}7$

$YB_2 : |z| > 0{,}5$ kabul edebiliriz, çünkü $YB_1 \cap YB_2 = YB$

$$h[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{H(z)\} = \left[-\frac{3}{2}(0{,}7)^{n-1} + \frac{5}{2}(0{,}5)^{n-1} \right] u[n-1] \rightarrow \text{birim darbe tepkisi}$$

b) $\mathcal{F}\{\ddot{y}(t)+3\dot{y}(t)+2y(t)\} = \mathcal{F}\{\dot{x}(t)-3x(t)\}$

$$\left[(j\omega)^2+3(j\omega)+2\right]Y(\omega) = \left[(j\omega)-3\right]X(\omega)$$

$$\frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = H(\omega) = \frac{j\omega-3}{(j\omega)^2+3(j\omega)+2} = \frac{j\omega-3}{(1+j\omega)(2+j\omega)}$$: Transfer fonksiyon

Birim darbe tepkisi: $h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H(\omega)\}$

$$H(\omega) = \frac{A}{1+j\omega} + \frac{B}{2+j\omega} \longrightarrow A = \left.\frac{j\omega-3}{2+j\omega}\right|_{j\omega=-1} = \frac{-1-3}{2-1} = -4 = A$$

$$B = \left.\frac{j\omega-3}{1+j\omega}\right|_{j\omega=-2} = \frac{-2-3}{1+(-2)} = 5 = B$$

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{-4}{1+j\omega}\right\} + \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{5}{2+j\omega}\right\} = \left(-4e^{-t}+5e^{-2t}\right)u(t) = h(t)$$

6) $Y(\omega) = \frac{1}{2\pi} X(\omega) * \mathcal{F}\{\cos 100t\}$

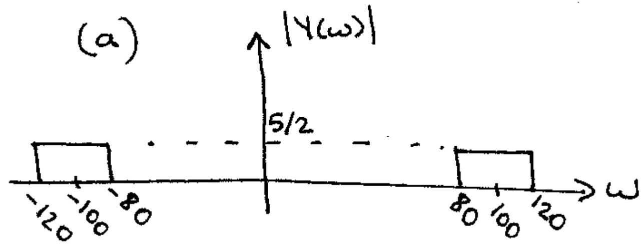
$\hookrightarrow \dfrac{e^{j100t}+e^{-j100t}}{2}$

$$\mathcal{F}\{\cos 100t\} = \frac{1}{2}\left(2\pi\,\delta(\omega-100)+2\pi\,\delta(\omega+100)\right) = \pi\left(\delta(\omega-100)+\delta(\omega+100)\right)$$

$$Y(\omega) = \frac{1}{2}X(\omega)*\delta(\omega-100) + \frac{1}{2}X(\omega)*\delta(\omega+100)$$

$$Y(\omega) = \frac{X(\omega-100)+X(\omega+100)}{2}$$

(a)



(b) $$\int_{-\infty}^{+\infty}|y(t)|^2dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|Y(\omega)|^2d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-120}^{-80}(5/2)^2d\omega + \frac{1}{2\pi}\int_{80}^{120}(5/2)^2d\omega \quad \text{veya kısaca} \quad = \frac{2}{2\pi}\int_{80}^{120}(5/2)^2d\omega$$

$$= \frac{1}{\pi}\cdot\frac{25}{4}\,\omega\Big|_{80}^{120} = \frac{25}{4\pi}(120-80) = \boxed{\frac{250}{\pi} = \int_{-\infty}^{+\infty}|y(t)|^2dt}$$

SS-F-2007-CA-5

7) $y[n] = x[n] * h[n] \xrightarrow{\mathcal{Z}} Y(z) = X(z)H(z) \xrightarrow{\mathcal{Z}^{-1}} y[n]$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n} = 1\cdot z^{-1} + 2\cdot z^{-2} - 1\cdot z^{-3}$$

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]z^{-n} = -1\cdot z^{-1} + 2\cdot z^{-2} + 2z^{-3}$$

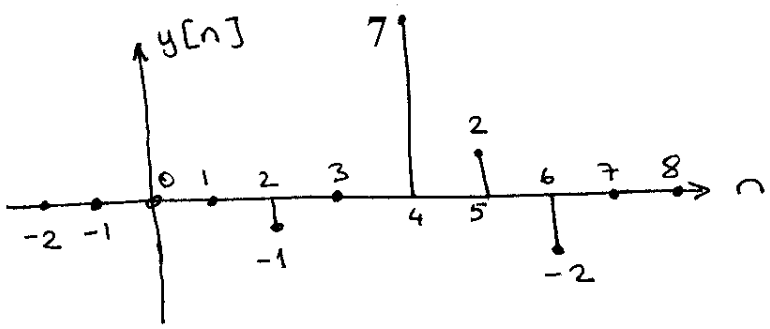
$$Y(z) = (1\cdot z^{-1} + 2z^{-2} - 1\cdot z^{-3})(-1\cdot z^{-1} + 2\cdot z^{-2} + 2z^{-3})$$

$$= z^{-2}\cdot(1\cdot(-1)) + z^{-3}\cdot(1 2 - 2\cdot 1) + z^{-4}(1\cdot 2 + 2\cdot 2 + (-1)(-1))$$

$$+ z^{-5}(2\cdot 2 - 1\cdot 2) + z^{-6}\cdot(-1\cdot 2)$$

$$Y(z) = \underbrace{-1\cdot z^{-2}}_{y[2]} + \underbrace{0\cdot z^{-3}}_{y[3]} + \underbrace{7z^{-4}}_{y[4]} + \underbrace{2z^{-5}}_{y[5]} \underbrace{- 2z^{-6}}_{y[6]} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[n]z^{-n}$$

diğer n'ler için $y[n] = 0$ olur.



SİNYALLER VE SİSTEMLER BÜTÜNLEME SINAVI SORULARI

01.02.2007 Süre: 75 dakika

3. ve 4. soru mecburi* diğerleri seçmelidir. Toplam olarak yalnızca 4 soru cevaplayınız.
*2004-2005 öğretim yılı veya daha öncesinde açılan Sinyaller ve Sistemler-**1** dersini almış ve devamsız olmamış olanlar (dersten ister geçsin ister kalsın) için 3. soru da seçmelidir. Yerine başka soru yapabilirler. Her soru eşit (20) puanlıdır.

1) $x[n] = 4u[n+2] - 2u[n-1]$ sinyalini

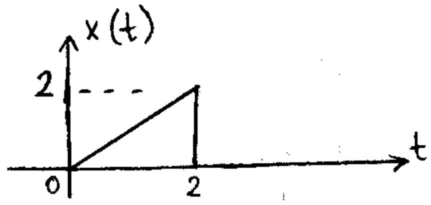
a) Çiziniz. **(5 puan)** **b)** Tek ve çift bileşenlerine ayırınız. **(20 puan)**

2) a) Giriş(x) çıkış(y) ilişkisi $y(t) = \int_{\tau=-\infty}^{t+1} x(\tau)d\tau$ ile verilen bir sistem doğrusal mıdır, bellekli midir, nedensel midir, zamanla değişen midir, kararlı mıdır? **(5x3 = 15 puan)**

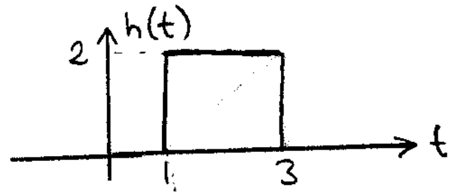
b) $v[n] = \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{n}{7}\right)$ kesikli zaman sinyali periyodik midir? Periyodik ise periyodu nedir? **(5 puan)**

c) $x(t) = \sin\left(\sqrt{2}\, t\right) + \cos 2t$ sürekli zaman sinyali periyodik midir? Periyodik ise periyodu nedir? **(5 puan)**

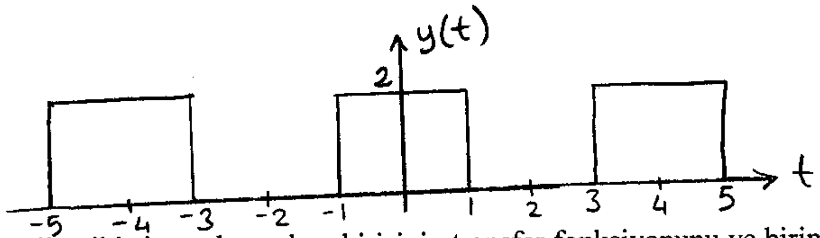
3)



$y(t) = x(t) * h(t) = ?$



4) Şekilde verilen $y(t)$ sinyalini bir Fourier serisi biçiminde yazınız. (Gerçel veya karmaşık olabilir.)



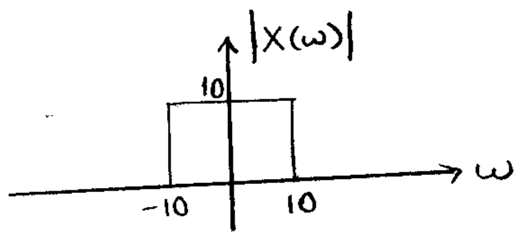
5) Giriş(x) çıkış(y) ilişkisi aşağıda verilen iki sistemden yalnız birisinin transfer fonksiyonunu ve birim darbe tepkisini bulunuz.

a) $y[n+2] + 0{,}5y[n+1] - 0{,}5y[n] = x[n+1] - 0{,}6x[n]$ **b)** $\ddot{y}(t) + 6\dot{y}(t) + 8y(t) = \dot{x}(t) - x(t)$

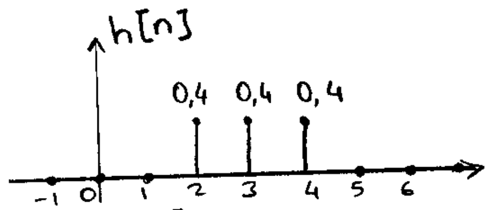
6) Spektrumu ($|X(\omega)|$) şekildeki gibi olan bir $x(t)$ sinyali, $y(t) = x(t)\cos(100t)$ biçiminde modüle ediliyor.

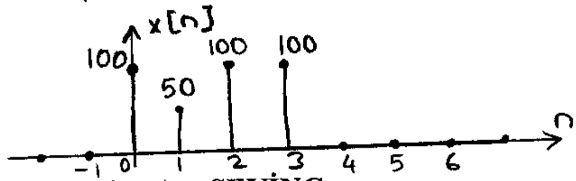
a) Modüleli sinyalin spektrumunu ($|Y(\omega)|$) çiziniz. **(12 puan)**

b) $\int_{-\infty}^{+\infty} |y(t)|^2 dt = ?$ **(13 puan)**



7) Bir kişi taksitli alışverişlerini şöyle bir sisteme göre yapıyor: Aldığı malın peşin fiyatının 1,2 katını 2 ay sonra başlayan 3 eşit taksitle ödüyor. Yani aylara göre aldığı malın peşin fiyatını giriş, ödeme planını çıkış olarak gösterirsek sistemin birim darbe tepkisi şekildeki $h[n]$ 'dir. Bu kişinin bu sisteme göre aylık alışverişleri şekildeki $x[n]$ ile verildiğine göre ödeme planı ($y[n]$) ne olur? İstediğiniz yolla bulunuz.





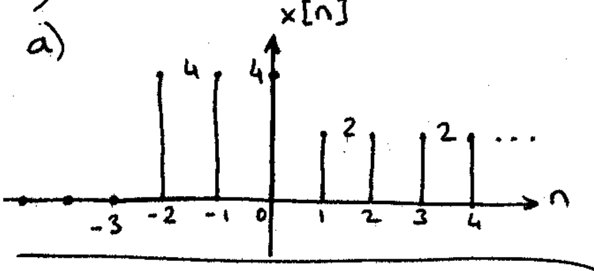
BAŞARILAR ...

Yrd. Doç. Dr. Ata SEVİNÇ

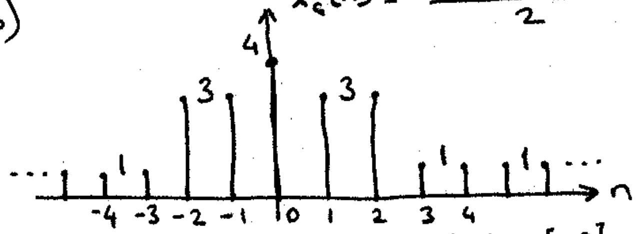
SİNYALLER VE SİSTEMLER BÜTÜNLEME CEVAP ANAHTARI
01.02.2007

1)

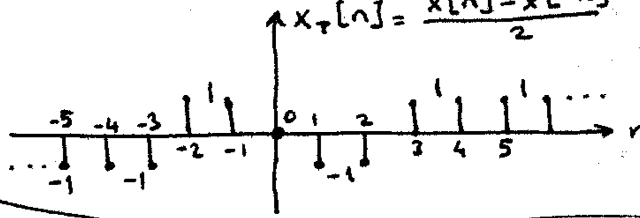
a)



b) $x_e[n] = \dfrac{x[n] + x[-n]}{2}$



$x_o[n] = \dfrac{x[n] - x[-n]}{2}$

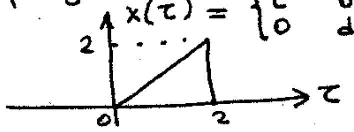


2) a) Doğrusal, bellekli, nedensel değil, zamanla değişmez, kararsız.

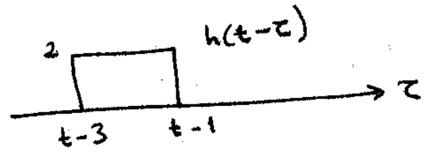
b) Periyodik değil

c) Periyodik değil. Çünkü bileşenlerinin periyodları oranı irrasyonel

$x(\tau) = \begin{cases} \tau & 0 \le \tau \le 2 \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$



3) $y(t) = x(t) * h(t) = \int_{\tau=-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t-\tau)\, d\tau$



$t-1 < 0$ yani $\underline{t < 1}$ ise $x(\tau)h(t-\tau) = 0$

$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} 0 \cdot d\tau = 0$

$0 \le t-1 < 2$ yani $\underline{1 \le t < 3}$ ise

$x(\tau)h(t-\tau) = \begin{cases} 2\tau & 0 \le \tau \le t-1 \\ 0 & \text{diğer} \end{cases} \longrightarrow y(t) = \int_0^{t-1} 2\tau\, d\tau = \tau^2 \Big|_0^{t-1} = (t-1)^2$

$0 \le t-3 < 2$ yani $\underline{3 \le t < 5}$ ise

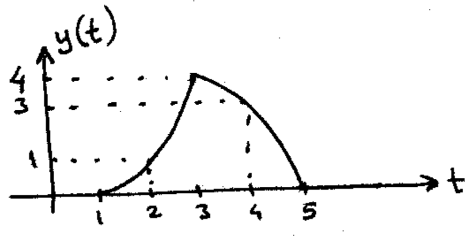
$x(\tau)h(t-\tau) = \begin{cases} 2\tau & t-3 \le \tau \le 2 \\ 0 & \text{diğer} \end{cases} \longrightarrow y(t) = \int_{t-3}^{2} 2\tau\, d\tau = \tau^2 \Big|_{t-3}^{2} = 4-(t-3)^2$

$2 \le t-3$ yani $\underline{t \ge 5}$ ise

$x(\tau)h(t-\tau) = 0 \longrightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} 0 \cdot d\tau = 0$

Sonuç:

$$y(t) = \begin{cases} 0 & t < 1 \text{ ise} \\ (t-1)^2 & 1 \le t < 3 \text{ ise} \\ 4-(t-3)^2 & 3 \le t < 5 \text{ ise} \\ 0 & 5 \le t \text{ ise} \end{cases}$$



4) $y(t) = \dfrac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos k\omega_0 t + b_k \sin k\omega_0 t)$ $\qquad T_0 = 4 \qquad \omega_0 = \dfrac{2\pi}{T_0} = \dfrac{\pi}{2}$

Çift sinyal olduğundan, $b_k = 0$ $\qquad a_0 = \dfrac{4}{T_0}\int_0^2 y(t)\,dt = \dfrac{4}{4}\int_0^1 2 \cdot dt = \underline{\underline{2 = a_0}}$

$k \neq 0$ için

$a_k = \dfrac{4}{T_0}\int_0^2 y(t)\cos k\omega_0 t\, dt = \dfrac{4}{4}\int_0^1 2\cos\left(\dfrac{k\pi}{2}t\right)dt = \dfrac{4}{k\pi}\sin\left(\dfrac{k\pi}{2}t\right)\Big|_0^1 = \dfrac{4}{k\pi}\sin\dfrac{k\pi}{2} - 0$

$a_k = \begin{cases} (-1)^{\frac{k-1}{2}} \cdot 4/k\pi & k \text{ tekse} \\ 0 & k \text{ çiftse } (k \neq 0) \end{cases}$ $\qquad a_1 = 4/\pi \quad a_3 = -4/3\pi \quad a_5 = 4/5\pi \quad a_7 = -4/7\pi$

Sonuç: $y(t) = 1 + \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{1}\cos\frac{\pi t}{2} - \frac{1}{3}\cos\frac{3\pi t}{2} + \frac{1}{5}\cos\frac{5\pi t}{2} - + \dots\right)$

Karmaşık seri ise:

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} \qquad c_k = \frac{1}{T_0}\int_{-2}^{2} y(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} 2\, e^{-jk\frac{\pi}{2}t} dt$$

$k \neq 0$ için

$$c_k = \frac{1/2}{-jk\pi/2} e^{-jk\frac{\pi}{2}t}\Big|_{-1}^{1} = \frac{j}{k\pi}\left(e^{-jk\frac{\pi}{2}} - e^{jk\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{2}{k\pi}\left(\frac{e^{jk\frac{\pi}{2}} - e^{-jk\frac{\pi}{2}}}{j2}\right) = \frac{2}{k\pi}\sin\frac{k\pi}{2}$$

$$c_0 = \text{ortalama değer} = \frac{2\cdot[1-(-1)]}{T_0} = 1$$

$$c_k = \begin{cases} 1 & k=0 \text{ ise} \\ 0 & k \text{ çiftse } (\neq 0) \\ (-1)^{\frac{k-1}{2}} \cdot \frac{2}{k\pi} & k \text{ tekse} \end{cases} \quad \rightarrow \quad c_1 = \frac{2}{\pi} \quad c_{-1} = -\frac{2}{\pi} \quad c_3 = \frac{-2}{3\pi} \quad c_{-3} = \frac{2}{3\pi} \quad \dots$$

$$y(t) = \dots + \frac{2}{3\pi}e^{-j3\frac{\pi}{2}t} - \frac{2}{\pi}e^{-j\frac{\pi}{2}t} + 1 + \frac{2}{\pi}e^{j\frac{\pi}{2}t} - \frac{2}{3\pi}e^{j3\frac{\pi}{2}t} + - \dots$$

5) a) $\mathcal{Z}\{y[n+2]+0,5y[n+1]-0,5y[n]\} = \mathcal{Z}\{x[n+1]-0,6x[n]\}$

$$(z^2+0,5z-0,5)Y(z) = (z-0,6)X(z)$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = H(z) = \frac{z-0,6}{z^2+0,5z-0,5} = \frac{z-0,6}{(z+1)(z-0,5)} = \text{Transfer fonksiyon}$$

Birim darbe tepkisi $= h[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{H(z)\}$

$$H(z) = \frac{A}{z+1} + \frac{B}{z-0,5} \qquad A = \frac{(-1)-0,6}{(-1)-0,5} = \frac{16}{15}$$

$$B = \frac{0,5-0,6}{0,5+1} = \frac{-1}{15} \quad \rightarrow \quad H(z) = z^{-1}\Bigg(\frac{16}{15}\cdot\underbrace{\frac{z}{z-(-1)}}_{\mathcal{F}\{(-1)^n u[n]\}} - \frac{1}{15}\cdot\underbrace{\frac{z}{z-0,5}}_{\mathcal{F}\{0,5^n u[n]\}}\Bigg)$$

$$h[n] = \left[(-1)^{n-1}\cdot\frac{16}{15} - \frac{1}{15}(0,5)^{n-1}\right]u[n-1]$$

b) $\mathcal{F}\{\ddot{y}(t)+6\dot{y}(t)+8y(t)\} = \mathcal{F}\{\dot{x}(t)-x(t)\}$

$$\left((j\omega)^2+6(j\omega)+8\right)Y(\omega) = \left((j\omega)-1\right)X(\omega)$$

$$\frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = H(\omega) = \frac{(j\omega)-1}{(j\omega)^2+6(j\omega)+8} = \frac{(j\omega)-1}{(j\omega+4)(j\omega+2)} = \text{Transfer fonksiyon}$$

$$H(\omega) = \frac{A}{j\omega+2} + \frac{B}{j\omega+4} \qquad A = \frac{(-2)-1}{(-2)+4} = -\frac{3}{2} \qquad B = \frac{(-4)-1}{(-4)+2} = \frac{5}{2}$$

$$h(t)=\mathcal{F}^{-1}\{H(\omega)\}=-\frac{3}{2}\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{j\omega+2}\right\}+\frac{5}{2}\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{j\omega+4}\right\}$$

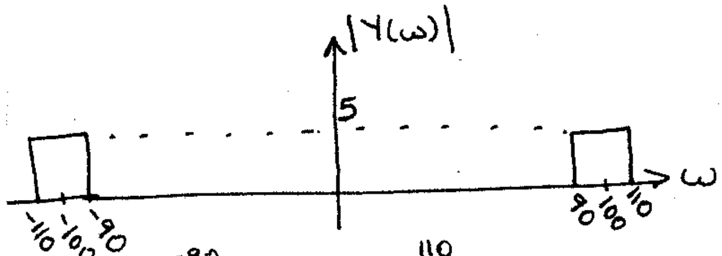
$$h(t)=\left(-\frac{3}{2}e^{-2t}+\frac{5}{2}e^{-4t}\right)u(t)$$: Birim darbe tepkisi

6) a) $$Y(\omega)=\mathcal{F}\{y(t)\}=\mathcal{F}\{x(t)\cos(100t)\}=\frac{1}{2\pi}X(\omega)*\mathcal{F}\{\cos(100t)\}$$

$$\cos 100t=\frac{1}{2}e^{j100t}+\frac{1}{2}e^{-j100t}\xrightarrow{\mathcal{F}}\frac{1}{2}\left(2\pi\,\delta(\omega-100)+2\pi\,\delta(\omega+100)\right)$$
$$=\pi\left(\delta(\omega-100)+\delta(\omega+100)\right)$$

$$Y(\omega)=\frac{\pi}{2\pi}X(\omega)*\delta(\omega-100)+\frac{\pi}{2\pi}X(\omega)*\delta(\omega+100)$$

$$Y(\omega)=\frac{X(\omega-100)+X(\omega+100)}{2}$$



b) $$\int_{-\infty}^{+\infty}|y(t)|^2dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|Y(\omega)|^2d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-110}^{-90}5^2d\omega+\frac{1}{2\pi}\int_{90}^{110}5^2d\omega$$

$$=\left(25\omega\Big|_{-110}^{-90}+25\omega\Big|_{90}^{110}\right)\cdot\frac{1}{2\pi}=\frac{500}{\pi}$$

7) $$x[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]\,\delta[n-k]\longrightarrow y[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]h[n-k]=x[n]*h[n]$$

$$Y(z)=X(z).H(z)$$
$$X(z)=\sum_{k=0}^{3}x[k]z^{-k}=100+50z^{-1}+100z^{-2}+100z^{-3}$$
$$H(z)=\sum_{k=2}^{4}h[k]z^{-k}=0{,}4z^{-2}+0{,}4z^{-3}+0{,}4z^{-4}$$

$$Y(z)=X(z)H(z)=\underbrace{40z^{-2}}_{y[2]}+\underbrace{60z^{-3}}_{y[3]}+\underbrace{100z^{-4}}_{y[4]}+\underbrace{100z^{-5}}_{y[5]}+\underbrace{80z^{-6}}_{y[6]}+\underbrace{40z^{-7}}_{y[7]}$$

$$Y(z)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}y[k]z^{-k}\Longrightarrow$$ Diğer k'lar için $y[k]=0$