SİNYALLER VE SİSTEMLER FİNAL SINAVI SORULARI

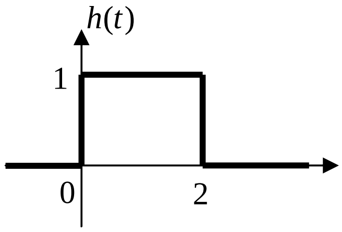
04.01.2012   Süre: 80 dakika

3. ve 4. sorular zorunludur. Diğer sorulardan istediğiniz 3 tanesini çözünüz.

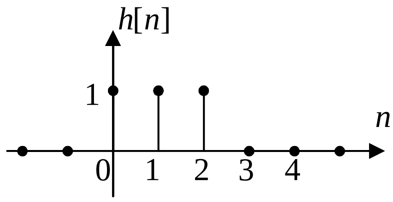
1) a) a bir tamsayı olmak üzere $x[n]*\delta[n-a]=x[n-a]$ olduğunu, konvolüsyon toplamı formülünü kullanarak ispatlayınız. **(10 puan)**

b) Birim darbe tepkisi aşağıdaki $h(t)$ olan doğrusal zamanla değişmez (DZD) sistem bellekli midir, nedensel midir, kararlı mıdır? Her birini DZD sistemlere özel kuralını uygulayarak belirtiniz. **(3+3+4=10 puan)**

2) Birim darbe tepkisi yandaki $h(t)$ olan (DZD) sistemin girişine $x(t)=h(t)$ sinyali uygulanırsa alınacak çıkış sinyalini ($y(t)$) çiziniz. **(20 puan)**



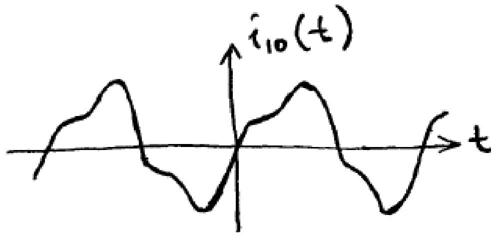
3) Birim darbe tepkisi $h[n]$ yanda verilen DZD sistemin girişine $x[n]=(-1)^n \quad \forall n$ sinyali uygulanırsa çıkış fonksiyonu ne olur? (Çizim beklenmemektedir.) **(25 puan)**



4) Primerine AC gerilim uygulanan yüksüz bir trafonun primer akımı şekildeki gibidir. Bu akımın gerçel ve karmaşık Fourier serileri

$$i_{10}(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{+\infty}\left(a_k\cos(k\omega t)+b_k\sin(k\omega t)\right)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}c_k e^{jk\omega t}$$

biçimlerinde düşünüldüğünde buradaki katsayıların hangilerinin sıfır olduğu söylenebilir? **(15 puan)**



("a_0", "c_0", "$a_k\ \forall k$", "$b_k\ \forall k$", "tek k'lar için hem a_k hem b_k hem c_k", "çift k'lar için hem a_k hem b_k hem c_k", "tüm negatif k'lar için c_k", "tüm pozitif k'lar için c_k" seçeneklerinden sıfır olanların hepsini seçiniz.)

5) Giriş(x)-çıkış(y) ilişkisi aşağıda verilen nedensel sistemin transfer fonksiyonunu **(6 puan)** ve birim darbe tepkisini **(14 puan)** bulunuz.

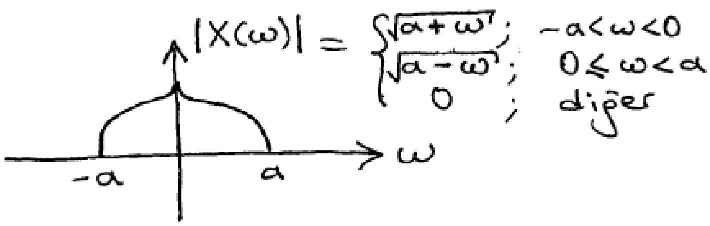
$$2\ddot{y}(t)+8\dot{y}(t)+6y(t)=12\dot{x}(t)+4x(t)$$

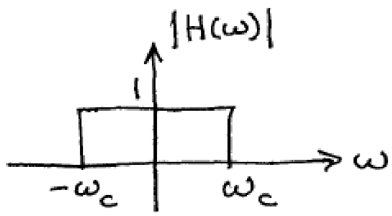
6) Giriş(x)-çıkış(y) ilişkisi

$$2y[n+1]-y[n]=x[n+1]+x[n]$$

ile verilen nedensel sistemin transfer fonksiyonunu **(5 puan)** ve $x[n]=u[n]$ girişi için enerjisiz başlangıçlı çıkışını **(15 puan)** Z ve/veya Z^{-1} dönüşümleriyle bulunuz.

7) Kaydedilmiş bir ses sinyalinin ($x(t)$) genlik spektrumu $|X(\omega)|$ aşağıdaki gibidir. Bu sinyali kazanç spektrumu $|H(\omega)|$ aşağıdaki gibi olan ideal bir alçak geçiren süzgeçten geçirerek $y(t)$ sinyali elde edilecektir. $y(t)$ sinyalinin enerjisinin, $x(t)$ sinyalinin enerjisinin yarısı olması isteniyorsa alt kesim frekansı ω_c ne olmalıdır? **(20 puan)**





BAŞARILAR …

Yard. Doç. Dr. Ata SEVİNÇ

SİNYALLER VE SİSTEMLER FİNAL SINAVI CEVAP ANAHTARI
04.01.2012

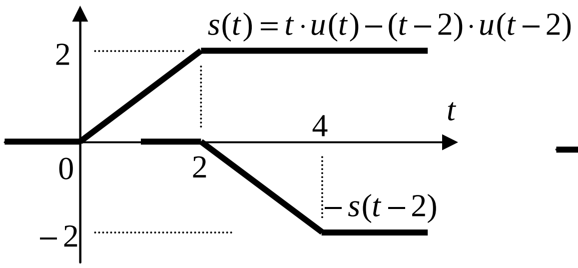
1) **a)** $x[n] * \delta[n-a] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[n-k] \cdot \delta[k-a]$ Darbe $k=a$ dışında sıfır olduğu için $x[n-k]$'da $k=a$ yazılır ve bu $x[n-a]$ sabit (k'ya göre) olduğu için toplamın dışına çıkar: $x[n] * \delta[n-a] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[n-a] \cdot \delta[k-a] = x[n-a] \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[k-a]}_{1} = x[n-a]$ olur.

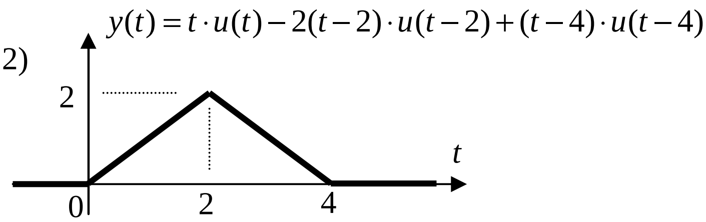
b) $h(t) = 0 \quad \forall t < 0$ olduğundan dolayı DZD sistem nedenseldir.

$h(t) \neq K\delta(t)$ olduğundan (yani $h(t)$ ötelenmemiş birim darbe cinsinden yazılamayacağı için) sistem belleklidir. Daha basitçesi: Bazı $t \neq 0$ için $h(t) \neq 0$ olduğu için.

$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|\, dt = 2 \times 1 = 2 < \infty$ olduğundan sistem kararlıdır.

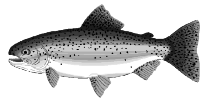
2) $x(t) = u(t) - u(t-2)$ olduğundan $y(t) = s(t) - s(t-2)$ olur, burada $s(t)$ sistemin birim basamak tepkisi olup $s(t) = \int_{\tau=-\infty}^{t} h(\tau) d\tau$ biçiminde hesaplanır. Yani t anındaki değeri h fonksiyonu grafiğinde t'nin sol tarafında biriken alandır. Buna göre $s(t)$ ile $-s(t-2)$ aşağıda soldaki şekildeki gibi olur. Bu iki bileşenin toplamıyla da $y(t)$ aşağıda sağdaki gibi bulunur.





3) Çıkış: $y[n] = h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k] \cdot x[n-k] = h[0] \cdot x[n] + h[1] \cdot x[n-1] + h[2] \cdot x[n-2]$

$y[n] = x[n] + x[n-1] + x[n-2] = (-1)^n + \underbrace{(-1)^{n-1} + (-1)^{n-2}}_{0} = \boxed{y[n] = (-1)^n \quad \forall n}$



4) Sinyalin ortalaması sıfırdır ($c_0 = a_0/2 = 0$). Tek sinyal değildir (orijinle sağdaki ilk tepe arasında büküm var, soldaki ilk tepe arasında yok). Çift sinyal hiç değildir (orijinin hemen sağı pozitif, hemen solu negatif). Yani her a_k veya her b_k'nın sıfır olduğu söylenemez. Sinyalin bir yarı periyodu, diğer yarı periyodunun negatifi değerlidir ($x(t + \frac{T_0}{2}) = -x(t)$), yani tek harmonik simetrisi vardır. Sonuçta sıfır olanlar:

"a_0", "c_0", "çift k'lar için hem a_k hem b_k hem c_k"

Son iki seçenek ise sıfır sinyal hariç gerçel sinyallerde olmaz. Çünkü gerçel sinyallerde $c_{-k} = c_k^*$ olduğundan herhangi bir k için c_k sıfır olsa c_{-k} da sıfır olurdu.

5) Transfer fonksiyon : $\dfrac{12(j\omega)+4}{2(j\omega)^2 + 8(j\omega) + 6} = \boxed{H(\omega) = \dfrac{6(j\omega)+2}{(j\omega+1)(j\omega+3)}} = \dfrac{A}{(j\omega+1)} + \dfrac{B}{(j\omega+3)}$

$$A = \left.\frac{6(j\omega)+2}{(j\omega+3)}\right|_{j\omega \leftarrow -1} = \frac{-6+2}{-1+3} = -2 \qquad B = \left.\frac{6(j\omega)+2}{(j\omega+1)}\right|_{j\omega \leftarrow -3} = \frac{-18+2}{-3+1} = 8$$

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{-2}{(j\omega+1)} + \frac{8}{(j\omega+3)}\right\} = -2e^{-t}u(t) + 8e^{-3t}u(t) = \boxed{h(t) = \left(8e^{-3t} - 2e^{-t}\right)u(t)}$$

6) Transfer fonksiyon : $\dfrac{z+1}{2z-1} = \boxed{H(z) = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{z+1}{z-(1/2)} \quad ; \quad |z| > 1/2}$

$$x[n] = u[n] = 1^n u[n] \quad \Rightarrow \quad X(z) = \frac{z}{z-1} \quad ; \quad |z| > 1$$

$$Y(z) = X(z)H(z) = \frac{1}{2}\cdot\frac{z(z+1)}{(z-1)(z-1/2)} \quad ; \quad |z| > 1$$

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{1}{2}\cdot\frac{(z+1)}{(z-1)(z-1/2)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-1/2} \qquad A = \left.\frac{1}{2}\frac{z+1}{(z-1/2)}\right|_{z=1} = \frac{1}{2}\times\frac{1+1}{1-1/2} = 2 = A$$

$$B = \left.\frac{1}{2}\frac{z+1}{(z-1)}\right|_{z=1/2} = \frac{1}{2}\times\frac{1/2+1}{1/2-1} = -3/2 = B \qquad Y(z) = 2\frac{z}{z-1} - \frac{3}{2}\cdot\frac{z}{z-1/2} \quad ; \quad |z| > 1$$

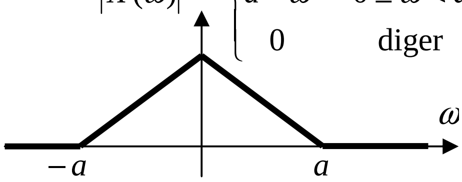
$$\rightarrow \quad y[n] = 2\times 1^n u[n] - \frac{3}{2}\times\frac{1}{2^n}u[n] = \boxed{y[n] = \left(2 - \frac{3}{2}\times\frac{1}{2^n}\right)u[n]}$$

7) $x(t)$ sinyalinin enerjisi: $E_x = \int_{t=-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \, dt$ (Sinyalin bir ses çıkış elemanı üzerine bırakacağı enerjinin bununla orantılı olduğu anlamına gelir. Akım veya gerilim sinyalinin direnç üzerinde bıraktığı enerji gibi.) Parseval eşitliğine göre:

$$\int_{t=-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{\omega=-\infty}^{+\infty} |X(\omega)|^2 \, d\omega = E_x \quad \text{ve}$$

$$\int_{t=-\infty}^{+\infty} |y(t)|^2 \, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{\omega=-\infty}^{+\infty} |Y(\omega)|^2 \, d\omega = E_y$$

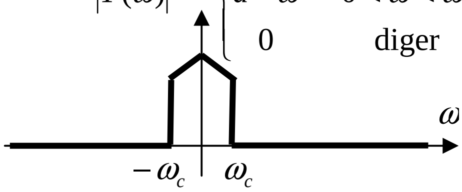
$$|X(\omega)|^2 = \begin{cases} a+\omega & -a < \omega < 0 \\ a-\omega & 0 \le \omega < a \\ 0 & \text{diger} \end{cases}$$



$$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega) \quad \rightarrow \quad |Y(\omega)|^2 = |X(\omega)|^2 |H(\omega)|^2$$

$|H(\omega)|^2$ grafiği $|H(\omega)|$'nınkiyle aynı olduğundan çarpımın grafiği yanda gösterildiği gibi olur.

$$|Y(\omega)|^2 = \begin{cases} a+\omega & -\omega_c < \omega < 0 \\ a-\omega & 0 < \omega < \omega_c \\ 0 & \text{diger} \end{cases}$$



$y(t)$ sinyalinin enerjisi:

$$E_y = \frac{1}{2\pi}\int_{\omega=-\omega_c}^{0}(a+\omega)\,d\omega + \frac{1}{2\pi}\int_{\omega=0}^{\omega_c}(a-\omega)\,d\omega$$

$$= \frac{1}{4\pi}(a+\omega)^2\Big|_{-\omega_c}^{0} - \frac{1}{4\pi}(a-\omega)^2\Big|_{0}^{\omega_c} = \frac{a^2 - (a-\omega_c)^2 - (a-\omega_c)^2 - (-a^2)}{4\pi} = \frac{a^2 - (a-\omega_c)^2}{2\pi} = E_y$$

E_x integralinin bundan tek farkı ω_c yerine de a yazılması olduğu için $E_x = \dfrac{a^2}{2\pi}$ bulunur.

$$\rightarrow \quad \frac{E_y}{E_x} = \frac{1}{2} = \frac{a^2 - (a-\omega_c)^2}{a^2} \qquad \rightarrow \quad a^2 = 2a^2 - 2(a-\omega_c)^2 \qquad \rightarrow \quad 2(a-\omega_c)^2 = a^2$$

$$\rightarrow \quad a - \omega_c = a/\sqrt{2} \qquad \rightarrow \quad \boxed{\omega_c = \left(1 - 1/\sqrt{2}\right)\cdot a \approx 0{,}29a}$$