1. KARMAŞIK SAYILAR

1.1. SANAL SAYILAR

Gerçel sayılar kümesinde eksi sayıların karekökleri mevcut değildir. Ancak gerçel sayılar kümesinin dışında "birim sanal sayı" diye adlandırılan

$$j = \sqrt{-1} \tag{1.1}$$

gibi bir sayı tanımlarsak, bütün eksi sayıların kareköklerini j cinsinden ifade edebiliriz.

Örnek 1.1:

$$(-4)^{1/2} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{4} = j \cdot 2 \quad \text{veya} \quad (-4)^{1/2} = -\sqrt{-1} \cdot \sqrt{4} = -j \cdot 2$$

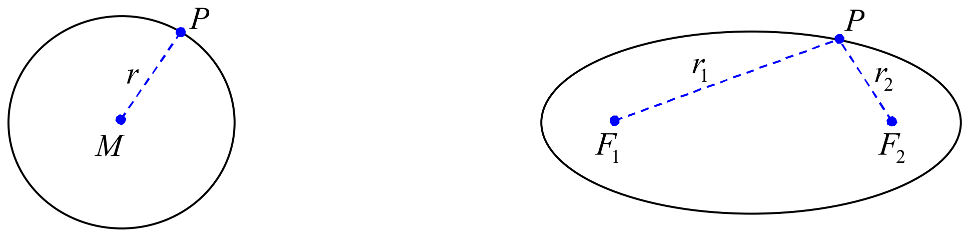
□

Genel olarak b bir gerçel sayı olmak üzere jb biçiminde ifade edilebilen sayılara "sanal sayı" denir. Sıfır hariç her sanal sayının karesi eksi bir gerçel sayıdır ve bütün eksi gerçel sayıların karekökleri sanal sayılar kümesindedir.

1.2. SANAL SAYILARIN GERÇEL SAYI DOĞRUSUNA GÖRE KONUMU

Sanal sayıların gerçel sayı doğrusuna göre nerede gösterilmesi gerektiğini bulmak için, geometrik yerini açıkça görebildiğimiz öyle bir büyüklük formülü üretelim ki bu formüldeki parametreleri ayarlayarak bu büyüklüğü istersek gerçel, istersek sanal yapabilelim. Böylece formüldeki parametreleri ayarlayarak sanal yapacağımız büyüklüğün uzayda gerçel sayı doğrusuna göre konumunu da görebiliriz. Bu amaca uygun bir formül, elipsin odak koordinatları formülüdür.

Bilindiği gibi, düzlemde "merkez" adı verilen bir noktadan (M) sabit uzaklıktaki noktalar kümesinin oluşturduğu şekle "çember" denilir.



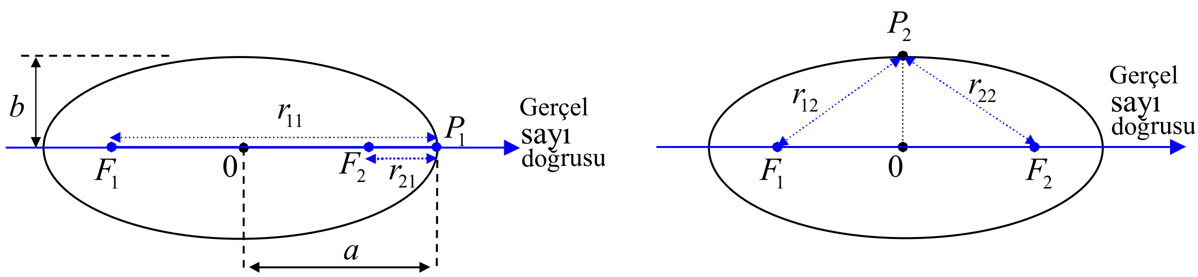
(a) Her P noktasında r sabit (b) Her P noktasında $r_1 + r_2$ sabit

Şekil 1.1: Çember ve elips tanımları

Benzer olarak, düzlemde “odak” adı verilen **iki** noktadan (F_1 ve F_2) uzaklıkları toplamı sabit olan noktalar kümesi de “elips” olarak adlandırılır (Şekil 1.1).

Aslında “uzunluk” veya mesafe, negatif olmayan gerçel sayı olarak tanımlıdır. Biz ise sanal sayıların anlamını yorumlamak istediğimiz için, uzunluk yerine, sonucu negatif veya karmaşık olsa bile, kartezyen koordinatlar arasındaki farkların kareleri toplamının karekökü ifadesini kullanalım.

Şimdi, odakları gerçel sayı doğrusu üzerinde orijine göre simetrik F_1 ve F_2 koordinatlarında bulunan ve bu odaklar ile koordinat farklarının kareleri toplamının karekökleri toplamı ($r_1 + r_2$) sabit olan noktalar kümesinden oluşan düzlemsel şekli düşünelim (r_1 ve r_2 negatif olmayan gerçel sayı diye kısıtlansaydı, kastedilen elips idi). Şeklin yatay ve düşey olarak orijinden en büyük uzaklıkları sırasıyla a ve b (negatif olmayan gerçel) olsun (Şekil 1.2).



(a) $r_{11} = a + F$, $r_{21} = a - F$ (b) $r_{12} = r_{22} = \sqrt{F^2 + b^2}$

Şekil 1.2: Odakların yerlerinin iki özel nokta (P_1 ve P_2) kullanılarak bulunması

Odakların orijine uzaklığına F dersek, Şekil 1.2 yardımıyla odakların koordinatları şöyle bulunur:

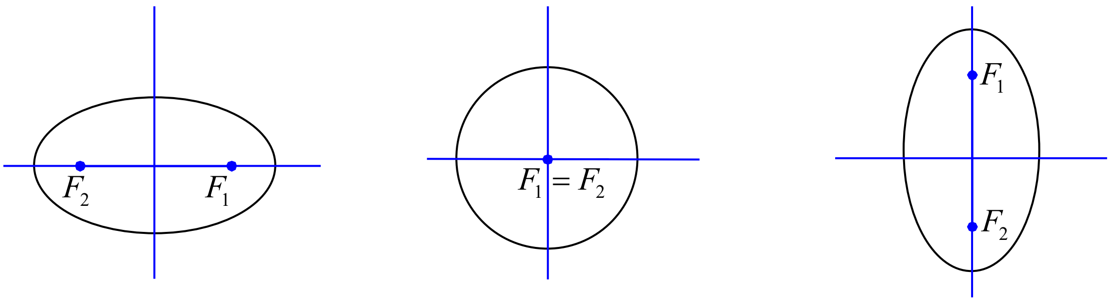
$$r_{11} + r_{21} = r_{12} + r_{22}$$

$$(a-F)+(a+F)=2a=2\sqrt{F^2+b^2}$$

$$F=\mp\sqrt{a^2-b^2}$$

$$F_1=-\sqrt{a^2-b^2} \quad , \qquad F_2=+\sqrt{a^2-b^2} \tag{1.2}$$

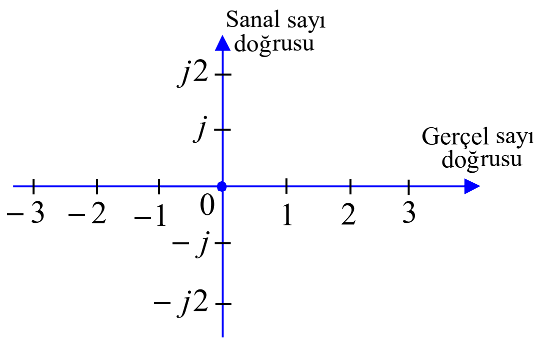
Baştan da amaçladığımız gibi, a ve b değerleri uygun bir biçimde seçilirse bu koordinatlar sanal sayı olabilmektedir. $a>b$ için Şekil 1.3(a)'daki biçimde olan bu elips, $a=b$ için elipsin özel bir hali olan çember biçimini alır ve odakları üst üste çakışarak çemberin merkezi haline gelirler(Şekil 1.3(b)). $a<b$ olduğunda ise (1.2) formüllerine göre odak koordinatları sanal sayı olur. Bu durumda şeklin biçimi, Şekil 1.3(a)'daki elipsin 90° döndürülmüşü gibi olmaktadır. O halde yeni şeklin odakları da 90° döndürülmüş olacaktır(Şekil 1.3(c)).



(a) $a>b$, (b) $a=b$ (c) $a<b$

Şekil 1.3: Şeklin boyutları değiştirilirken odaklarının yer değiştirmesi

Bu kurgu problemden görüldüğü gibi sanal sayılar, gerçel sayı doğrusuna dik ve orijinden geçen bir doğru üzerinde yer almaktadır. Gerçel ve sanal sayı doğruları tarafından belirlenen düzleme "karmaşık düzlem" denir (Şekil 1.4).



Şekil 1.4: Gerçel ve sanal sayı doğruları, ve karmaşık düzlem

1.3. KARMAŞIK SAYILAR

Gerçel ve sanal birer sayının toplamı olarak ifade edilebilen sayılardır. Yani a ve b gerçel olmak üzere,

$$c = a + jb \tag{1.3}$$

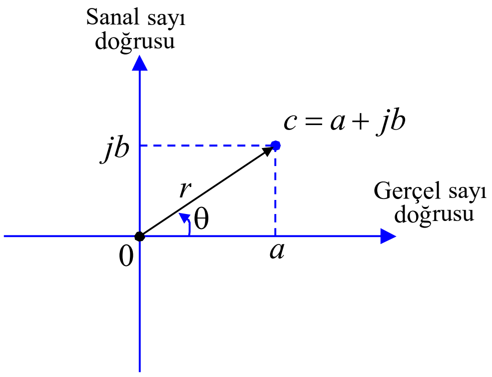
biçiminde yazılabilen her c sayısı karmaşık sayıdır. Burada a ve b, karmaşık sayının sırasıyla gerçel ve sanal kısmıdır. (1.3) biçimdeki gösterime, “karmaşık sayının kartezyen gösterimi” denir.

Bir karmaşık sayının gerçel ve sanal kısımlarını veren fonksiyonları sırasıyla

$$\mathrm{Re}\{c\} = a \tag{1.4}$$

$$\mathrm{Im}\{c\} = b \tag{1.5}$$

olarak tanımlanır.



Şekil 1.5: Karmaşık sayıların karmaşık düzlem üzerindeki yeri

Karmaşık sayılar, karmaşık düzlem üzerinde yatay koordinatı sayının gerçel kısmı, düşey koordinatı da sanal kısmı olan birer noktayla gösterilirler. Karmaşık sayılar ayrıca, orijinden bu noktaya giden birer vektörle de gösterilebilirler. Bu noktanın orijine olan mesafesi r, gerçel eksenin artı kısmıyla Şekil 1.5’de gösterilen yönde yaptığı açı da θ ile gösterilerek “karmaşık sayının kutupsal gösterimi” şöyle tanımlanır:

$$c = r\angle\theta \tag{1.6}$$

Burada r ’ye “karmaşık sayının modülü”, θ ’ya da “karmaşık sayının açısı” denir. θ açısı birimiyle birlikte dikkate alınmalıdır. Birimi belirtilmemişse radyan kabul edilir. Kartezyen gösterimden kutupsal gösterime şöyle geçilir:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} \tag{1.7}$$

$$\theta = \begin{cases} -\pi/2 & a=0 \;\; ve \;\; b<0 \;\; ise \\ \pi/2 & a=0 \;\; ve \;\; b>0 \;\; ise \\ \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{b}{a}\right) & a>0 \;\; ise \\ \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{b}{a}\right)-\pi & a<0 \;\; ise \end{cases} \tag{1.8}$$

Dikkat 1.1: Sanal sayı doğrusu üzerindeki sayıların j ile beraber gösterilmesi, sanallığın vurgulanması içindir. Ancak vektörün uzunluğunu Pisagor formülünden hesaplarken, sanal kısım j hariç hesaba katılır. Diğer yandan Sa fonksiyonunun çıkışı da j 'sizdir.

Dikkat 1.2: (1.8) denklemindeki Arctan fonksiyonu, hesap makinelerinin $\tan^{-1}$ fonksiyonu olup $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ aralığında değer alır (Değer kümesi bu aralıkta sınırlanmış $\tan^{-1}$ işlemi bir fonksiyon haline gelir ve ilk harfini büyük yazarak bu fonksiyonu "Arctan" biçiminde göstereceğiz) Fakat bazı hesap makinalarında kartezyen koordinatlardaki a ve b (veya x ve y)verildiğinde kutupsal gösterime çeviren hazır fonksiyonlar bulunur ki bunlar (1.8) denklemindeki ihtimalleri dikkate alarak doğru sonuç verirler. Örneğin MATLAB'ın "[r, theta]=atan2(a, b)" fonksiyonu böyledir. a ve b'nin her ikisi de sıfır ise açı aslında belirsizdir ama herhangi bir değer kabul edilebilir, limit olarak önemi yoksa hiç farketmez.

□

Örnek 1.2:

$$1+j=\sqrt{2}\,\angle\big(\mathrm{Arctan}(1)\big)=\sqrt{2}\,\angle 45^\circ=\sqrt{2}\,\angle(\pi/4) \qquad 1=1\angle 0^\circ, \qquad -1=1\angle 180^\circ=1\angle\pi$$

$$1-j=\sqrt{2}\,\angle\big(\mathrm{Arctan(\text{-}1)}\big)=\sqrt{2}\,\angle(-45^\circ)$$

$$-1+j=\sqrt{2}\,\angle\big(\mathrm{Arctan(\text{-}1)}+180^\circ\big)=\sqrt{2}\,\angle 135^\circ$$

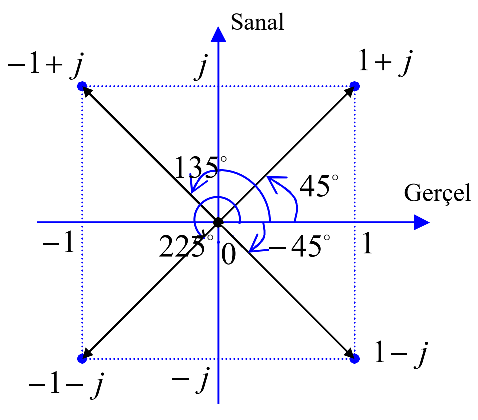
$$-1-j=\sqrt{2}\,\angle\big(\mathrm{Arctan}(1)+180^\circ\big)=\sqrt{2}\,\angle 225^\circ$$

$$0=0+j0=0\,\angle(belirsiz)=0\,\angle 30^\circ=0\,\angle 90^\circ$$

$$\lim_{x\to 0} x+j\sqrt{3}x=0\angle\mathrm{Arctan}\sqrt{3}=0\angle 60^\circ$$

$$j=1\angle 90^\circ=1\angle(\pi/2)\,, \qquad j4=4\angle 90^\circ$$

$$-j=1\angle-90^\circ=1\angle(-\pi/2)\,, \quad -j5=5\angle-90^\circ$$



Şekil 1.6: Bazı karmaşık sayılar

□

Kutupsal gösterimden kartezyen gösterime ise, Şekil 1.5'ten kolayca görülebileceği gibi şöyle geçilir:

$$a = r\cos\theta \ , \quad b = r\sin\theta \tag{1.9}$$

yani

$$a + jb = r\angle\theta = r\cos\theta + jr\sin\theta \tag{1.10}$$

yazılabilir.

1.4. KARMAŞIK SAYILARDA TEMEL İŞLEMLER

$$c_1 = a_1 + jb_1 = r_1\angle\theta_1 \ , \quad c_2 = a_2 + jb_2 = r_2\angle\theta_2 \tag{1.11}$$

karmaşık sayılarını ele alalım.

1.4.1. Karmaşık Sayıların Eşitliği

İki karmaşık sayının birbirine eşit olması, bunların gerçel ve sanal kısımlarının karşılıklı olarak birbirine eşit olması demektir:

$$c_1 = c_2 \quad \Leftrightarrow \quad a_1 = a_2 \ \ \text{ve} \ \ b_1 = b_2 \tag{1.12}$$

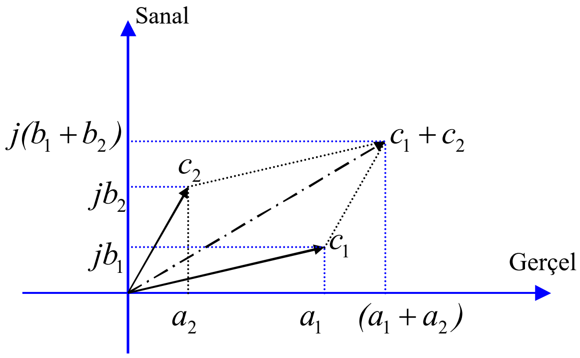
Ancak karmaşık sayıların eşit olması, kutupsal gösterimdeki modül veya açılarının karşılıklı olarak eşit olmasını gerektirmez. Çünkü k herhangi bir tamsayı olmak üzere açının $2k\pi$ kadar değiştirilmesi karmaşık sayıyı değiştirmez. Ayrıca açıyı $(2k+1)\pi$ kadar değiştirirken modülü de -1 ile çarparsak karmaşık sayı yine aynı kalır.

$$r\angle\theta = r\angle(\theta + 2k\pi) = (-r)\angle(\theta + 2k\pi + \pi) \tag{1.13}$$

1.4.2. Toplama ve Çıkartma

Karmaşık sayıların toplanması ve çıkartılması, vektörlerdeki gibi bileşenlerinin kendi aralarında toplanması veya çıkartılmasıyla yapılır. Bu yüzden toplama ve çıkartma işlemlerinde kartezyen gösterim daha kullanışlıdır:

$$\begin{aligned} c_1 \mp c_2 &= (a_1 + jb_1) \mp (a_2 + jb_2) \\ &= (a_1 \mp a_2) + j(b_1 \mp b_2) \end{aligned} \tag{1.14}$$



Şekil 1.7: Karmaşık sayıların toplanmasının vektörel ifadesi

Kutupsal gösterimle toplama veya çıkartma ise şöyledir:

$$\begin{aligned} c_1 \mp c_2 &= r_1\angle\theta_1 \mp r_2\angle\theta_2 \\ &= (r_1\cos\theta_1 \mp r_2\cos\theta_2) + j(r_1\sin\theta_1 \mp r_2\sin\theta_2) \end{aligned} \tag{1.15}$$

Kartezyen koordinatlarda elde edilen bu sonucu kutupsala dönüştürmek gerekirse yine (1.7) ve (1.8) denklemleri kullanılır.

Örnek 1.3:

$$(3+j2)-(5-j6)=-2+j8$$

$$(3+j4)+(\sqrt{2}\angle 45^\circ)=(3+\sqrt{2}\cos 45^\circ)+j(4+\sqrt{2}\sin 45^\circ)=(3+1)+j(4+1)=4+j5$$

$$(4\angle 30^\circ)+(6\angle 60^\circ)=(4\cos 30^\circ+6\cos 60^\circ)+j(4\sin 30^\circ+6\sin 60^\circ)=(2\sqrt{3}+3)+j(2+3\sqrt{3})$$

□

1.4.3. Çarpma

Karmaşık sayıların çarpılması, çok terimlilerin çarpılması gibidir; ancak $j \cdot j$ yerine -1 yazılır. Kartezyen koordinatlarda şöyle bulunur:

$$\begin{aligned} c_1 \cdot c_2 &= (a_1 + jb_1)\cdot(a_2 + jb_2) \\ &= (a_1a_2 - b_1b_2) + j(a_1b_2 + a_2b_1) \end{aligned} \tag{1.16}$$

Çarpma işlemi kutupsal gösterimle çok daha kolaydır:

$$\begin{aligned} c_1 \cdot c_2 &= (r_1 \angle \theta_1) \cdot (r_2 \angle \theta_2) \\ &= (r_1 \cdot r_2) \angle (\theta_1 + \theta_2) \end{aligned} \tag{1.17}$$

Yani modüller çarpılıp açılar toplanır ve çarpımın sırasıyla modülü ve açısı bulunur. Bu kural şöyle ispatlanabilir:

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= (r_1 \cos\theta_1 + jr_1 \sin\theta_1) \cdot (r_2 \cos\theta_2 + jr_2 \sin\theta_2) \\ &= (r_1 \cdot r_2)(\cos\theta_1 + j\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + j\sin\theta_2) \\ &= (r_1 r_2)\big((\cos\theta_1 \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \sin\theta_2) + j(\sin\theta_1 \cos\theta_2 + \cos\theta_1 \sin\theta_2)\big) \\ &= (r_1 r_2)\big(\cos(\theta_1 + \theta_2) + j\sin(\theta_1 + \theta_2)\big) \\ &= (r_1 r_2) \angle (\theta_1 + \theta_2) \end{aligned}$$

Örnek 1.4:

$$j \cdot (-j) = (1\angle 90^\circ)(1\angle -90^\circ) = 1\angle 0^\circ = 1$$

$$(1 + j\sqrt{3})(6\angle -15^\circ) = (2\angle 60^\circ)(6\angle -15^\circ) = 12\angle 45^\circ = 6\sqrt{2} + j6\sqrt{2}$$

$$(3 + j4)(2 + j) = (3 \cdot 2 - 4 \cdot 1) + j(4 \cdot 2 + 3 \cdot 1) = 2 + j11$$

$$(5\angle 48^\circ)(3\angle 17^\circ) = 15\angle 65^\circ$$

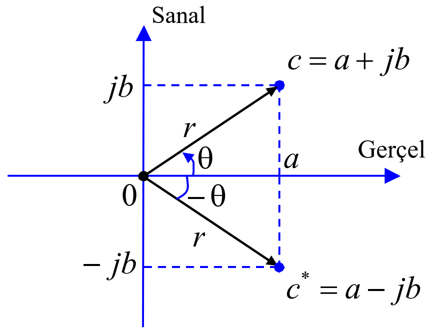
□

1.4.4. Eşlenik

$c = a + jb = r\angle\theta$ gibi bir karmaşık sayının eşleniği c^* ile gösterilir ve

$$c^* = a - jb = r\angle(-\theta) \tag{1.18}$$

olarak tanımlanır. Karmaşık sayının gerçel sayı doğrusuna göre simetriğidir:



Şekil 1.8: Karmaşık bir sayının eşleniği

1.4.5. Mutlak Değer

$c = a + jb = r\angle\theta$ gibi bir karmaşık bir sayının mutlak değeri,

$$|c| = |r| = \sqrt{a^2 + b^2} \tag{1.19}$$

olarak tanımlanır ve buna göre

$$|c| = \sqrt{c \cdot c^*} \tag{1.20}$$

olarak da ifade edilebilir. Karmaşık sayının modülü ile mutlak değeri arasında küçük bir fark vardır. Mutlak değer hiç eksi değer alamazken, modül eksi de olabilir. Zira

$$r\angle\theta = (-r)\angle(\theta + \pi)$$

olduğu kolayca görülebilir.

1.4.6. Bölme

Payı ve paydayı, paydanın eşleniğiyle çarparak kartezyen gösterimle yapılan işlem basitleştirilebilir:

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{c_1 c_2^*}{c_2 c_2^*} = \frac{c_1 c_2^*}{|c_2|^2} = \frac{(a_1 + jb_1)(a_2 - jb_2)}{a_2^2 + b_2^2}$$

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + j\frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} \tag{1.21}$$

Ancak çarpmada olduğu gibi bölmede de kutupsal gösterim daha kullanışlıdır:

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{r_1\angle\theta_1}{r_2\angle\theta_2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)\angle(\theta_1 - \theta_2) \qquad (1.22)$$

Bu kural şöyle ispatlanabilir:

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{c_1 c_2^*}{c_2 c_2^*} = \frac{(r_1\angle\theta_1)(r_2\angle -\theta_2)}{|c_2|^2} = \frac{r_1 r_2\angle(\theta_1 - \theta_2)}{r_2^2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)\angle(\theta_1 - \theta_2)$$

1.4.7. Kuvvet Alma

Karmaşık sayılarda kuvvet (üs) alma işlemi için de kutupsal gösterim kullanmak kolaylıktır. Genel olarak $c = r\angle\theta$ gibi bir karmaşık sayının p. kuvveti,

$$c^p = r^p\angle(p\theta) \qquad (1.23)$$

şeklinde hesaplanır. p'nin tamsayı olduğu durumlar için bu formülün doğruluğu çarpma ve bölme formülleri gözönüne alınarak açıkça görülebilir. p'nin herhangi bir gerçel sayı hatta karmaşık sayı olduğu durumlarda da bu formülün doğru olduğu daha ileride anlatılacaktır.

Karmaşık sayılarda logaritma işlemi de daha ileride anlatılacaktır.

1.5. EULER FORMÜLÜ

1.5.1. Formülün elde edilmesi

Mutlak değeri 1, açısı (θ) değişken olan bir karmaşık sayıyı

$$y(\theta) = 1\angle\theta = \cos\theta + j\sin\theta \qquad (1.24)$$

biçiminde bir fonksiyon olarak düşünelim.

$$\frac{dy(\theta)}{d\theta} = -\sin\theta + j\cos\theta = jy(\theta)$$

olduğunu düşünerek yeniden $y(\theta)$'yı çözmeye çalışalım.

$$\frac{dy(\theta)}{y(\theta)} = jd\theta$$

Her iki tarafın belirsiz integralini alırsak k integral sabiti ve $K = e^k$ olmak üzere

$$\ln y(\theta) = j\theta + k$$

$$y(\theta) = e^{j\theta} \cdot e^k = Ke^{j\theta}$$

bulunur. $\theta = 0$ için (1.24) denkleminden de faydalanarak

$$y(0) = \cos 0 = 1 = Ke^{j0} = K$$

dolayısıyla da

$$y(\theta) = Ke^{j\theta} = e^{j\theta}$$

bunu da (1.24) denklemiyle beraber kullanırsak

$$\boxed{e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta} \qquad (1.25)$$

elde edilir ki bu denkleme "Euler formülü" denilir. Bu denklem $\theta = \pi$ radyan için,

$$\boxed{e^{j\pi} = -1} \qquad (1.26)$$

haline gelir. Bu denklem, matematikteki en önemli sayılardan dördünü, hatta $e^{j\pi} + 1 = 0$ şeklinde yazılırsa en önemli 5 sayısını, çok önemli ve sade bir ifadede biraraya getirdiği için, bulunduğu 18. asırda matematikçiler tarafından "asrın denklemi" kabul edilmiştir. Günümüzde bile matematikçilerin çoğu tarafından, matematik tarihinin gelmiş geçmiş en zarif denklemi kabul edilmektedir. Bu eşitlik her ne kadar Euler'in adıyla anılsa da aslında ilk defa Roger Cotes tarafından 1714'te (Euler 7 yaşındayken) yayınlanmıştır.

Bu eşitliğin her iki tarafının karesini alarak

$$e^{j2\pi} = 1 \qquad (1.27)$$

yazmak da mümkündür.

1.5.2. Karmaşık sayıların üstel gösterimi

Euler formülünü (1.10) ile birlikte düşünürsek $c = r\angle\theta$ gibi bir karmaşık sayı için

$$c = re^{j\theta} \tag{1.28}$$

yazılabileceği kolayca görülür ki buna karmaşık sayının "üstel gösterimi" denir. Buna göre c karmaşık sayısı,

$$re^{j\theta} = r\angle\theta = (r\cos\theta) + j(r\sin\theta) \tag{1.29}$$

biçimlerinde yazılabilir. Kutupsal gösterimdeki r ve θ, üstel gösterimdeki r ve θ ile tamamen aynıdır. Bu yüzden karmaşık sayıların üstel gösterimle yapılan işlemlerinde, kutupsal gösterim kullanılmasındakiyle aynı yollar izlenir.

1.5.3. Karmaşık sayılarda kuvvet alma

Üstel gösterim dikkate alındığında, karmaşık sayılarda üs alma kuralı (1.23)'in, herhangi bir gerçel p sayısı için de geçerli olduğu, (1.28) ifadesinin iki tarafının p. kuvvetini alarak kolayca gösterilebilir:

$$c^p = r^p (e^{j\theta})^p = r^p e^{jp\theta} = r^p \angle(p\theta) \tag{1.30}$$

$e^{j\theta}$ bir fonksiyon olarak ele alınırsa 2π ile periyodik olduğu Euler formülünden kolayca görülebilir.

Dikkat 1.3: Euler formülü, aslında radyan cinsinden kullanılan θ için geçerlidir; çünkü formülün türetilmesinde kullanılan $\sin\theta$ ve $\cos\theta$ 'nın türevlerinin sırasıyla $\cos\theta$ ve $-\sin\theta$ olması, θ açısının radyan olması halinde doğrudur. Ancak dikkatli olmak şartıyla açıyı derece gibi başka bir birimle de kullanabiliriz. Genel olarak c^p gibi bir ifadede şunlara dikkat edilmelidir:

* c pozitif gerçel ve p gerçel ise açı birimi ayarlaması sözkonusu değildir. Sayılar aynen kullanılmalıdır.

* c pozitif gerçel, $p = q + jv$ gibi karmaşık ise, $c^p = c^q \cdot c^{jv} = (c^q)\cdot e^{j(v\ln c)}$ biçiminde ayrıştırılabilir. Buradaki v değeri bir açı olup radyan, derece veya herhangi bir açı birimiyle gösterilebilir. c^q kısmı ise gerçeldir ve önceki şıktaki gibidir.

* Hem $c = a + jb = re^{j\theta}$, hem de $p = q + jv$ gibi karmaşık ise özel bazı kabuller ve büyük dikkat gerektiğinden tüm açıları radyan olarak almak en güvenli yoldur. Çünkü $c^p = r^q r^{jv} e^{jq\theta} e^{-v\theta} = (r^q e^{-v\theta}) \cdot e^{j(v \ln r + q\theta)}$ ifadesinden görüldüğü gibi hem v hem de θ açı olmasına rağmen birbiriyle çarpılarak gerçel olan $e^{-v\theta}$ terimini oluşturmaktadırlar. Başka açı birimi kullanılırsa yanlış sonuç bulunur.

Özetlersek, tüm açılar için radyan kullanmak en güvenilir yoldur. Karışıklığa meydan verebilecek karmaşık üzeri karmaşık ifadelerle de pek karşılaşmayacağımız için, gerçel üzeri karmaşık ifadelerdeki üssün sanal kısmında istediğimiz açı birimini güvenle kullanabiliriz.

□

Örnek 1.5:

$$x = j^{1/2} = ?$$

Çözüm: $j = e^{j\frac{\pi}{2}} = e^{j(\frac{\pi}{2}+2k\pi)}$ olduğundan k, farklı x çözümleri verebilecek tüm tamsayı değerleri olabilmek üzere

$$x_k = j^{1/2} = e^{j(\frac{\pi}{4}+k\pi)} = e^{jk\pi} \cdot e^{j\pi/4} = (-1)^k e^{j\pi/4}$$

olur. Buradan anlaşılabileceği gibi yalnızca $k = 1$ ve $k = 2$ için bulunan x_1 ve x_2 çözümleri elde edilebilir. Başka tamsayı k değerleri yine bu iki çözümden birisini verir. Buna göre çözümler şunlardır:

$$x_1 = -e^{j\pi/4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(1 + j) \;, \qquad x_2 = e^{j\pi/4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + j)$$

Örnek 1.6:

$$y = (-8)^{1/3} = ?$$

Çözüm: $-8 = 8e^{j180^\circ} = 8e^{j(180^\circ + k \cdot 360^\circ)}$ olduğundan k, farklı y çözümleri verebilecek tüm tamsayı değerleri olabilmek üzere

$$y_k = (-8)^{1/3} = 8^{1/3} e^{j(180^\circ + k \cdot 360^\circ)/3} = 2\, e^{j(60^\circ + k \cdot 120^\circ)}$$

olur. Buradan yalnızca $k=1$, $k=2$ ve $k=3$ için bulunan y_1, y_2 ve y_3 çözümleri elde edilebilir. Buna göre çözümler şunlardır:

$$y_1 = 2e^{j180^\circ} = -2\,,\quad y_2 = 2e^{j300^\circ} = 2e^{-j60^\circ} = 1 - j\sqrt{3}\,,\quad y_3 = 2e^{j420^\circ} = 2e^{j60^\circ} = 1 + j\sqrt{3}$$

□

Dikkat 1.4: Genel olarak n bir tamsayı olmak üzere herhangi bir $c = re^{j\theta}$ karmaşık sayısının n. kuvvetten kökü n adettir:

$$c^{1/n} = x_k = r^{1/n} e^{j(\theta + 2k\pi)/n} \quad ; \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

□

Örnek 1.7:

$$x = 1^{1/3} = ?$$

Çözüm: $1 = e^{j0^\circ} = e^{jk\cdot 360^\circ}$ olduğundan $k = 1, 2, 3$ için $x_k = e^{jk\cdot 120^\circ}$, yani

$$x_1 = e^{j120^\circ} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\,,\quad x_2 = e^{j240^\circ} = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\,,\quad x_3 = e^{j360^\circ} = e^{j0^\circ} = 1$$

□

1.5.4. Karmaşık sayılarda logaritma

Euler formülünden faydalanarak, $c = r\angle\theta = re^{j\theta}$ karmaşık sayısının doğal logaritması,

$$\ln c = \ln r + j\theta \qquad (1.31)$$

olarak hesaplanır. Ancak burada da kutupsal gösterimde olduğu gibi, k bir tamsayı olmak üzere θ değerini $2k\pi$ radyan kadar değiştirmek mümkündür. Bu nedenle doğal logaritma işlemi, pozitif gerçel sayı tanım kümesinden gerçel sayı değer kümesine bir bağıntı olarak düşünüldüğünde iyi tanımlanmış bir fonksiyon iken, karmaşık sayı (veya pozitif ve negatif gerçel sayılar) tanım kümesinden karmaşık sayı değer kümesine bir bağıntı olarak düşünüldüğünde bir fonksiyon değildir; çünkü tanım kümesindeki bir sayıya, değer kümesinde pek çok sayı karşılık gelmektedir. Bunun da bir fonksiyon olabilmesi için, değer kümesinin açı ifade eden sanal kısmının birimini belirlemeli ve 2π radyanlık (veya 360°'lik) belirli bir aralıkla (örneğin

$(-\pi\,,\pi]$ gibi) sınırlamalıyız. Tanım kümesinin sıfır hariç bütün karmaşık düzlem, değer kümesinin de karmaşık düzlemde sanal kısmın radyan birimli açı kabul edilip $(-\pi\,,\pi]$ aralığıyla sınırlandırıldığı bölge olarak düşündüğümüzde doğal logaritma fonksiyonunu "Ln" biçiminde (ilk harfini büyük yazarak) göstereceğiz.

Örnek 1.8:

$$\mathrm{Ln}(\text{-}2) = \ln 2 + \mathrm{Ln}(-1) = \ln 2 + j\pi$$

$$\mathrm{Ln}(-2 + j\,2\sqrt{3}) = \mathrm{Ln}\big(4\angle(2\pi/3)\big) = \ln 4 + j\frac{2\pi}{3}$$

□

1.6. TRİGONOMETRİK VE HİPERBOLİK FONKSİYON İLİŞKİLERİ

1.6.1. Trigonometrik Fonksiyonlar

Euler formülü yardımıyla karmaşık sayılar üzerinden trigonometrik fonksiyonlar hiperbolik fonksiyonlar cinsinden ifade edilebilir. (1.25) Euler denklemini $+\theta$ ve $-\theta$ için yazıp

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta \tag{1.32}$$

$$e^{-j\theta} = \cos\theta - j\sin\theta \tag{1.33}$$

ifadelerini toplayıp ikiye bölersek

$$\boxed{\cos\theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2} = \cosh j\theta} \tag{1.34}$$

ve (1.32)'den (1.33)'yi çıkartıp $j2$'ye bölersek

$$\boxed{\sin\theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{j2} = -j\sinh j\theta} \tag{1.35}$$

buluruz. (1.35)'i (1.34)'e bölerek de

$$\tan\theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{j\left(e^{j\theta} + e^{-j\theta}\right)} = -j\tanh j\theta \tag{1.36}$$

elde edilir.

Bu ifadelerden faydalanarak, ters trigonometrik bağıntılarla ters hiperbolik bağıntılar (logaritmik ifadeler) arasında da ilişki kurulabilir. Ancak önce ters hiperbolik bağıntıların logaritmik ifadelerini hatırlayalım.

1.6.2. Ters Hiperbolik Bağıntı Veya Fonksiyonlar

$$e^x = \cosh x + \sinh x \tag{1.37}$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \tag{1.38}$$

ifadelerinden görülebileceği gibi,

$$e^x = \cosh x \mp \sqrt{\cosh^2 x - 1} = \left(\cosh x + \sqrt{\cosh^2 x - 1}\right)^{\mp 1} \tag{1.39}$$

yazarak ve $y = \cosh x$ olarak tanımlayarak

$$x = \cosh^{-1} y = \mp \ln\left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right) \tag{1.40}$$

bulunmaktadır (bu haliyle $\cosh^{-1}$ işlemi bir fonksiyon değildir). Veya (1.37) denklemini

$$e^x = \sinh x + \sqrt{\sinh^2 x + 1} \tag{1.41}$$

biçiminde yazarak (karekökün eksi işaretlisini neden almadık?) ve $z = \sinh x$ olarak tanımlayarak

$$x = \sinh^{-1} z = \ln\left(z + \sqrt{z^2 + 1}\right) \tag{1.42}$$

bulunmaktadır. Diğer yandan,

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

olduğundan,

$$e^{2x} \tanh x + \tanh x = e^{2x} - 1$$

$$1 + \tanh x = e^{2x}(1 - \tanh x)$$

$$e^{2x} = \frac{1 + \tanh x}{1 - \tanh x}$$

olur. $v = \tanh x$ tanımlayarak

$$x = \tanh^{-1} v = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+v}{1-v}\right) \tag{1.43}$$

bulunmaktadır. (1.40), (1.42) ve (1.43) denklemleri, ters hiperbolik fonksiyonlardır. Bunlardan faydalanarak ters trigonometrik bağıntılar elde edilecektir.

1.6.3. Ters Trigonometrik Bağıntı Veya Fonksiyonlar

(1.34) ve (1.40) denklemlerinden açıkça görülebileceği gibi,

$$\cos^{-1} y = -j\cosh^{-1} y = \pm j\ln\left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right) \tag{1.44}$$

yazılabilir. (1.35) ve (1.42) denklemlerinden açıkça görülebileceği gibi de

$$\sin^{-1} x = -j\sinh^{-1}(jx) = -j\ln\left(jx + \sqrt{1 - x^2}\right) \tag{1.45}$$

bulunur. Ayrıca (1.36) ve (1.43) denklemlerinden,

$$\tan^{-1} x = -j\tanh^{-1}(jx) = -j\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1 + jx}{1 - jx}\right) \tag{1.46}$$

olarak elde edilir.

1.7. MOIVRE FORMÜLÜ

$$\left(e^{j\theta}\right)^p = e^{j(p\theta)}$$

olduğu için (1.25) Euler denkleminin sağ tarafının p. kuvvetini, Euler denkleminde açı yerine $p\theta$ yazarak bulacağımız ifadeye eşitleyebiliriz:

$$\boxed{(\cos\theta + j\sin\theta)^p = \cos(p\theta) + j\sin(p\theta)} \tag{1.47}$$

Bu formül, Moivre formülü olarak bilinir.

Moivre formülü yardımıyla, özellikle p bir tamsayı olmak üzere $\cos p\theta$ ve $\sin p\theta$ değerleri, $\cos\theta$ ve $\sin\theta$ cinsinden kolayca ifade edilebilir.

Örnek 1.9:

$\cos 2\theta$ ve $\sin 2\theta$ 'yı, $\cos\theta$ ve $\sin\theta$ cinsinden ifade ediniz.

Çözüm: Moivre denklemini $p = 2$ için kullanmalıyız:

$$\begin{aligned} \cos 2\theta + j\sin 2\theta &= (\cos\theta + j\sin\theta)^2 \\ &= (\cos^2\theta - \sin^2\theta) + j2\sin\theta\cos\theta \end{aligned}$$

Bu denklemin her iki tarafındaki gerçel ve sanal kısımları karşılıklı olarak birbirine eşitleyerek sonuca ulaşırız:

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta \tag{1.48}$$

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta \tag{1.49}$$

Örnek 1.10:

$\cos 3\theta$ ve $\sin 3\theta$ 'yı, $\cos\theta$ ve $\sin\theta$ cinsinden ifade ediniz.

Çözüm: Moivre denklemini $p = 3$ için kullanmalıyız:

$$\begin{aligned} \cos 3\theta + j\sin 3\theta &= (\cos\theta + j\sin\theta)^3 \\ &= (\cos^3\theta - 3\sin^2\theta\cos\theta) + j(3\sin\theta\cos^2\theta - \sin^3\theta) \end{aligned}$$

Bu denklemin her iki tarafındaki gerçel ve sanal kısımları karşılıklı olarak birbirine eşitleyerek sonuca ulaşılır:

$$\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\sin^2\theta\cos\theta \tag{1.50}$$

$$\sin 3\theta = 3\sin\theta\cos^2\theta - \sin^3\theta \tag{1.51}$$

□

ÇÖZÜLMÜŞ ÖRNEK PROBLEMLER

Örnek 1.11: Kartezyen koordinatlarda verilen aşağıdaki karmaşık sayıların kutupsal veya üstel gösterimlerini bulalım:

$3+j4=\sqrt{3^2+4^2}\angle(\text{Arctan}(4/3))=5\angle 53{,}13^\circ=5e^{j53{,}13^\circ}$ (Sayı karmaşık düzlemin birinci çeyrek bölgesinde)

$5-j2=\sqrt{5^2+(-2)^2}\angle(\text{Arctan}(-2/5))=\sqrt{29}\angle-21{,}8^\circ=\sqrt{29}\,e^{-j21{,}8^\circ}$ (dördüncü bölgede)

$j6=6\angle 90^\circ=6\,e^{j90^\circ}$ (sayı sanal eksenin pozitif kısmı üzerinde)

$-2+j3=\sqrt{(-2)^2+3^2}\angle(\text{Arctan}(\frac{3}{-2})+180^\circ)=\sqrt{13}\angle 123{,}69^\circ=\sqrt{13}\,e^{j123{,}69^\circ}$ (2. bölgede, yani sol yarı bölgede olduğu için 180° eklendi)

$-3-j4=\sqrt{(-3)^2+(-4)^2}\angle(\text{Arctan}(4/3)+180^\circ)=5\angle 233{,}13^\circ=5e^{j233{,}13^\circ}$ (3. bölgede yani sol yarı bölgede olduğu için 180° eklendi)

$-4=-4+j0=\sqrt{(-4)^2+0^2}\angle(\text{Arctan}\,0+180^\circ)=4\angle 180^\circ=4e^{j180^\circ}$ (Sol yarı bölgede olduğu için 180° eklendi)

$-j8=0-j8=\sqrt{0^2+(-8)^2}\angle-90^\circ=8\angle-90^\circ=8e^{-j90^\circ}$ (sayı sanal eksenin negatif kısmı üzerinde)

$5=5+j0=\sqrt{5^2+0^2}\angle\text{Arctan}\,0=5\angle 0^\circ=5e^{j0^\circ}$ (Sayı gerçel sayı doğrusunun pozitif kısmı üzerinde)

Örnek 1.12: Kutupsal veya üstel gösterimle verilen aşağıdaki karmaşık sayıların kartezyen gösterimlerini bulalım:

$$6e^{j2\pi/3}=6\angle(2\pi/3)=6\cos(2\pi/3)+j\sin(2\pi/3)=-3+j3\sqrt{3}$$

$$8e^{-j330^\circ}=8\angle-330^\circ=8\angle 30^\circ=8\cos 30^\circ+j8\sin 30^\circ=4\sqrt{3}+j4$$

$$5e^{-j180^\circ}=5\angle-180^\circ=5\cos(-180^\circ)+j5\sin(-180^\circ)=-5+j0=-5$$

Örnek 1.13: Aşağıda verilen karmaşık sayıların modülleri eksi olanları artı, artı olanları eksi modüllü olarak yazalım:

$-5\angle 20^\circ = 5\angle(20^\circ + 180^\circ) = 5\angle 200^\circ$ veya $-5\angle 20^\circ = 5\angle(20^\circ - 180^\circ) = 5\angle -160^\circ$

$7\angle 43^\circ = -7\angle(43^\circ + 180^\circ) = -7\angle 223^\circ$ veya $7\angle 43^\circ = -7\angle(43^\circ - 180^\circ) = -7\angle -137^\circ$

$-2\angle 190^\circ = 2\angle(190^\circ + 180^\circ) = 2\angle 370^\circ = 2\angle 10^\circ$ veya $-2\angle 190^\circ = 2\angle(190^\circ - 180^\circ) = 2\angle 10^\circ$

$4\angle 240^\circ = -4\angle(240^\circ + 180^\circ) = -4\angle 420^\circ = -4\angle 60^\circ$ veya $= -4\angle(240^\circ - 180^\circ) = -4\angle 60^\circ$

Örnek 1.14: Aşağıda verilen karmaşık sayı işlemlerini çözelim:

a) $3\angle 120^\circ + \dfrac{2+j2}{5\angle 40^\circ} = 3\cos 120^\circ + j\sin 120^\circ + \dfrac{2\sqrt{2}\angle 45^\circ}{5\angle 40^\circ} = -1{,}5 + j\dfrac{\sqrt{3}}{2} + 0{,}4\sqrt{2}\angle 5^\circ$

$$= -1{,}5 + j\frac{\sqrt{3}}{2} + 0{,}4\sqrt{2}\cos 5^\circ + j0{,}4\sqrt{2}\sin 5^\circ \cong -0{,}936 + j0{,}915 \cong 1{,}309\angle 136^\circ$$

b) $(2\angle 73^\circ)(-3+j5) - (2-j6) = (2\angle 73^\circ)\left(\sqrt{34}\angle\left(\text{Arctan}(-5/3) + 180^\circ\right)\right) - (2-j6)$

$\cong (2\angle 73^\circ)\left(5{,}831\angle -59^\circ\right) - (2-j6) \cong 11{,}662\angle 14^\circ - (2-j6) \cong (11{,}316 + j2{,}821) - (2-j6)$

$$= 9{,}316 + j8{,}821 \cong 12{,}83\angle 43{,}4^\circ$$

c) $\left(-2\angle 70^\circ\right) + \dfrac{(3-j7)}{\left(4\angle 40^\circ - 5 + j2\right)^3} = \left(-2\angle 70^\circ\right) + \dfrac{\left(\sqrt{58}\angle \text{Arctan}(-7/3)\right)}{\left(4\cos 40^\circ + j4\sin 40^\circ - 5 + j2\right)^3}$

$\cong \left(-2\cos 70^\circ - j2\sin 70^\circ\right) + \dfrac{\left(7{,}616\angle -66{,}8^\circ\right)}{(-1{,}936 + j4{,}571)^3} \cong (-0{,}684 - j1{,}879) + \dfrac{\left(7{,}616\angle -66{,}8^\circ\right)}{\left(4{,}964\angle 112{,}95^\circ\right)^3}$

$\cong (-0{,}684 - j1{,}879) + \dfrac{\left(7{,}616\angle -66{,}8^\circ\right)}{\left(122{,}3\angle -21{,}1^\circ\right)} \cong (-0{,}684 - j1{,}879) + \left(0{,}06226\angle -45{,}7^\circ\right)$

$\cong (-0{,}684 - j1{,}879) + (0{,}043 - j0{,}045) = -0.641 - j1.924 \cong 2{,}028\angle 252^\circ$

Örnek 1.15: Aşağıda verilen karmaşık sayı işlemlerinin bütün köklerini bulalım:

a) $x = j^{1/2} = ?$

k tamsayı değerler almak üzere, $j = 1\angle 90^\circ = 1\angle(90^\circ + k\cdot 360^\circ)$ olduğundan.

$x_k = 1\angle((90^\circ + k\cdot 360^\circ)/2) = 1\angle(45^\circ + k\cdot 180^\circ)$ olur. $k=1$ ve $k=2$ için iki farklı çözüm bulunur: $x_1 = 1\angle 225^\circ = -\frac{1}{\sqrt{2}} - j\frac{1}{\sqrt{2}}$ ve $x_2 = 1\angle 405^\circ = 1\angle 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} + j\frac{1}{\sqrt{2}}$

b) $y = (1+j)^{2/3} = ?$

$(1+j) = \sqrt{2}\angle 45^\circ = \sqrt{2}\angle(45^\circ + k\cdot 360^\circ)$ yazılabileceğinden,

$y_k = \sqrt{2}\angle\left(\frac{2}{3}(45^\circ + k\cdot 360^\circ)\right) = \sqrt{2}\angle(30^\circ + k\cdot 120^\circ)$ olur. $k = 1, 2, 3$ için üç farklı çözüm bulunur: $y_1 = \sqrt{2}\angle 150^\circ = -\sqrt{\frac{3}{2}} + j\frac{1}{\sqrt{2}}$, $y_2 = \sqrt{2}\angle 270^\circ = j\sqrt{2}$ ve

$y_3 = \sqrt{2}\angle 390^\circ = \sqrt{2}\angle 30^\circ = \sqrt{\frac{3}{2}} + j\frac{1}{\sqrt{2}}$

c) $x = 16^{1/4} = ?$

$k = 1, 2, 3, 4$ için $x_k = \sqrt{\sqrt{16}}\angle\left(\frac{1}{4}k\cdot 360^\circ\right)$ değerleri, $x_1 = 2\angle 90^\circ = j2$, $x_2 = 2\angle 180^\circ = -2$, $x_3 = 2\angle 270^\circ = -j2$ ve $x_4 = 2\angle 360^\circ = 2$ bulunur.

Örnek 1.16: Aşağıda sorulan işlemlerin bütün çözümlerini bulalım:

a) $x = \cos^{-1} 2 = ?$

(1.44) denklemine göre $x = -j\cosh^{-1} 2 = \pm j\ln\left(2+\sqrt{3}\right)$ yazılabileceğinden,

$x_1 = -j1{,}317$ ve $x_2 = j1{,}317$ bulunur. Halbuki örneğin $\cos^{-1} 0{,}5$ sorulsaydı çözümlere 2π radyanın tam katlarını ekleyerek sonsuz adet çözüm bulabilirdik.

b) $x = \cosh^{-1} 0{,}5 = ?$

Yine (1.44) denkleminden anlaşılabileceği gibi, $x = j\cos^{-1} 0{,}5$ olduğundan, k her tamsayı olabilmek üzere $x = \mp j\frac{\pi}{3} + j2k\pi$ biçiminde sonsuz adet çözüm mevcuttur. Halbuki örneğin $\cosh^{-1} 2$ sorulsaydı yalnızca iki adet çözüm bulabilirdik.