SİNYALLER VE SİSTEMLER ARASINAV SORULARI

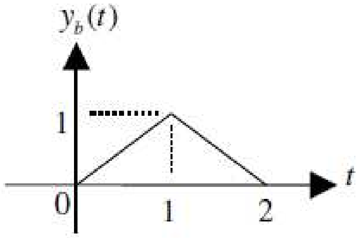
07 Aralık 2009 Süre: 80 dakika

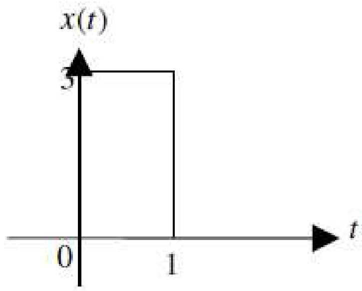
1) Giriş(x) – çıkış(y) ilişkisi

$$y[n] = \begin{cases} x[n] & n \geq 0 \text{ ise} \\ 0 & n < 0 \text{ ise} \end{cases}$$

ile verilen sistem doğrusal mıdır, bellekli midir, nedensel midir, kararlı mıdır, zamanla değişen midir? (Açıklama yapmanız beklenmemektedir, birer veya ikişer kelimelik cevaplar yeterlidir.) **(5x3 = 15 puan)**

2)





Birim **basamak** tepkisi $y_b(t)$ ve girişi $x(t)$ şekildeki gibi olan sistemin çıkışını çiziniz**(10 puan)**. Ayrıca birim **darbe** tepkisini çiziniz**(10 puan)**.

3) Aşağıdaki konvolüsyon işlemlerinden yalnızca istediğiniz birisini yapınız ve sonucu (y) çiziniz. **(25 puan)** (İkisini de yapmaya çalışırsanız yalnızca yüksek puanlı birisinden puanınız sayılacaktır.)

a) $x(t) = e^{-2t}u(t)$, $h(t) = e^{-3t}u(t)$, $y(t) = x(t) * h(t) = ?$

b) $x[n] = (0{,}9)^n u[n]$, $h[n] = (0{,}7)^n u[n]$, $y[n] = x[n] * h[n] = ?$

4) Giriş(x) – çıkış(y) ilişkisi

$$y[n+2] - y[n+1] + \frac{y[n]}{4} = 5x[n]$$

ile verilen nedensel sistemin birim darbe tepkisini bulunuz. **(15 puan)**

5) Giriş(x) – çıkış(y) ilişkisi

$$\ddot{y}(t) + 4y(t) = x(t)$$

ile verilen sitemin tüm zamanlardaki çıkışını $y(0) = 1$, $\dot{y}(0) = 1$ başlangıç şartları ve $x(t) = u(t)$ için bulunuz. **(25 puan)**

BAŞARILAR ... **Yard. Doç.Dr. Ata SEVİNÇ**

SİNYALLER VE SİSTEMLER ARASINAV CEVAP ANAHTARI:
07 Aralık 2009

1) Doğrusaldır; çünkü çıkış ya sıfır ya girişin aynısı ve bunun şartı girişin değerinden bağımsız. (Bu şart n'e değil de x[n]'e bağlı olsaydı doğrusal olmazdı.)

Belleksizdir; çünkü y[n], n'den başka bir anki girişe bağlı değil.
Nedenseldir; çünkü y[n], n'den sonraki bir anki girişe bağlı değil.
Zaten tüm belleksiz sistemler nedenseldir.

Kararlıdır. Giriş sınırlı ise çıkışın da sınırlı olduğu açıktır.

Zamanla değişendir; çünkü:

$$x[n-n_0] \text{ için çıkış } = \begin{cases} x[n-n_0] & n \geq 0 \text{ ise} \\ 0 & n<0 \text{ ise} \end{cases}$$

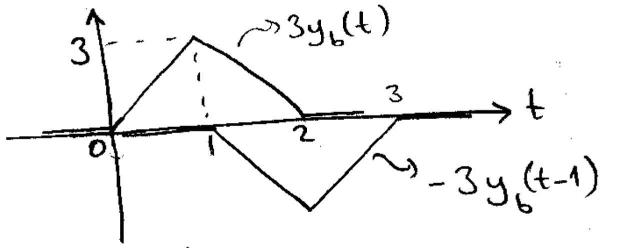
Fakat

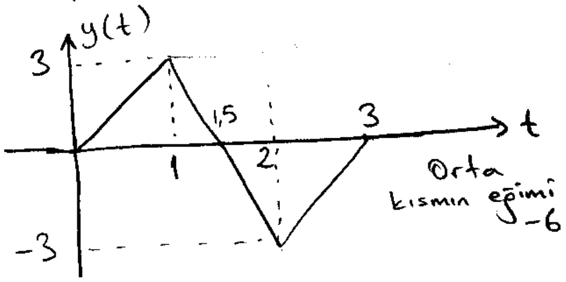
$$y[n-n_0] = \begin{cases} x[n-n_0] & n-n_0 \geq 0 \text{ ise} \\ 0 & n-n_0 < 0 \text{ ise} \end{cases}$$

Farklı

2) $x(t) = 3u(t) - 3u(t-1)$

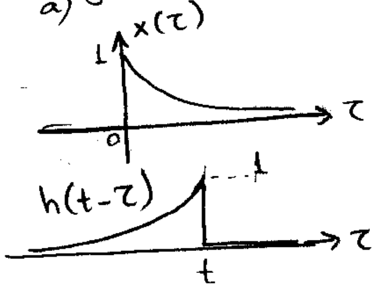
$\rightarrow y(t) = 3y_b(t) - 3y_b(t-1)$: Çıkış





3) $y(t) = x(t) * h(t) = \int_{t=-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$

a)



t<0 ise:

$x(\tau)h(t-\tau) = 0 \quad \forall\tau$

$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} 0 \cdot d\tau = 0$

t≥0 ise: $x(\tau)h(t-\tau) = \begin{cases} e^{-2\tau} \cdot e^{-3(t-\tau)} & 0 \leq \tau \leq t \text{ ise} \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$

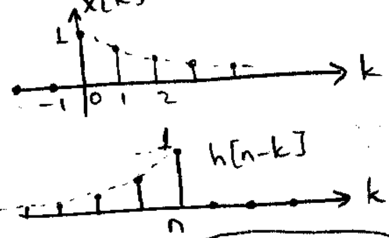
$$y(t) = \int_{\tau=0}^{t} \underbrace{e^{-3t}}_{\text{sabit sayılır}} \cdot e^{\tau} d\tau = e^{-3t}\left(e^{\tau}\right)\Big|_0^t = e^{-3t}(e^t - 1) = e^{-2t} - e^{-3t}$$

Sonuç: $y(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \text{ ise} \\ e^{-2t} - e^{-3t} & t \geq 0 \text{ ise} \end{cases}$

b) $y[n] = x[n]*h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]$

n<0 ⇒ $x[k]h[n-k] = 0 \quad \forall k$

$y[n] = \sum_{-\infty}^{+\infty} 0 = 0$ (n<0 için)



n≥0 ise: $x[k]h[n-k] = \begin{cases} 0{,}9^k \times 0{,}7^{n-k} & 0 \leq k \leq n \text{ ise} \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$

$$y[n] = 0{,}7^n \sum_{k=0}^{n} (0{,}9/0{,}7)^k = 0{,}7^n \frac{1-(9/7)^{n+1}}{1-(9/7)}$$

$$\frac{0{,}7^n - \frac{9}{7}0{,}9^n}{1-(9/7)} = \frac{9}{2} \times 0{,}9^n - \frac{7}{2} \times 0{,}7^n = y[n]$$

Sonuç: $y[n] = \begin{cases} 0 & n<0 \text{ ise} \\ \frac{9}{2} \times 0{,}9^n - \frac{7}{2} \times 0{,}7^n & n \geq 0 \text{ ise} \end{cases}$

2. sorudaki *h*(*t*) ve 3. sorudaki *y* çizimleri sonraki sayfanın en sonundadır.

SS-V-2009-CA-2

4) $\underline{n>0 \text{ için:}}$ $h[n+2]-h[n+1]+\frac{1}{4}h[n]=0$

$h[1]=0 \quad , \quad h[2]=5/1=5$

$\lambda^2-\lambda+\frac{1}{4}=0 \rightarrow \lambda_1=\lambda_2=\frac{1}{2} \rightarrow h[n]=(A_1+A_2n)\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$$\left.\begin{array}{l} h[1]=\frac{1}{2}A_1+\frac{1}{2}A_2=0 \\ h[2]=\frac{1}{4}A_1+\frac{2}{4}A_2=5 \end{array}\right\} \rightarrow -\frac{1}{4}A_1=5 \rightarrow A_1=-20, \quad A_2=-A_1=20$$

Tüm zamanlar için: $\boxed{h[n]=20(n-1)\times\frac{1}{2^n}\times\underbrace{u[n-1]}_{\text{veya } u[n-2]}}$

5) $\ddot{y}(t)+4y(t)=u(t)=\begin{cases}0 & t<0 \text{ ise}\\ 1 & t\geqslant 0 \text{ ise}\end{cases}$

$\lambda^2+4=0 \rightarrow \lambda_{1,2}=\mp j2$

$t<0$ için $y(t)=y_h(t)=A_1\cos 2t+A_2\sin 2t$

Sağda darbe yok $\rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} y(0^-)=y(0)=1=A_1 \\ \dot{y}(0^-)=\dot{y}(0)=1=2A_2 \end{array}\right\}$ $A_1=1, \quad A_2=\frac{1}{2}$

$t\geqslant 0$ için $y_h(t)=B_1\cos 2t+B_2\sin 2t$

Sağda $\underbrace{1}=1\times e^{0.t}$ için, $0\notin\{\lambda_1,\lambda_2\} \rightarrow y_ö(t)=ce^{0.t}=c$

$1=c(0^2+4) \rightarrow c=1/4 \rightarrow y_ö(t)=1/4$

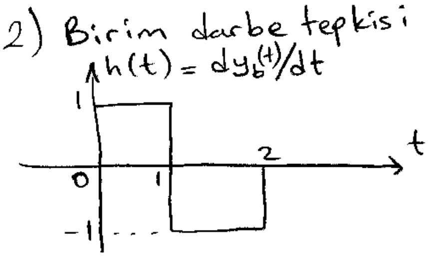
$y(t)=B_1\cos 2t+B_2\sin 2t+\frac{1}{4}$

$$\left.\begin{array}{l} y(0)=B_1+\frac{1}{4}=1 \\ \dot{y}(0)=2B_2=1 \end{array}\right\} \quad B_1=\frac{3}{4}, \quad B_2=\frac{1}{2}$$

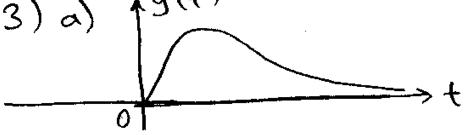
Sonuç: $$y(t)=\begin{cases}\cos 2t+\frac{1}{2}\sin 2t & t<0 \text{ ise}\\ \frac{3}{4}\cos 2t+\frac{1}{2}\sin 2t+\frac{1}{4} & t\geqslant 0 \text{ ise}\end{cases}$$

Önceki iki sorunun cevaplarındaki eksikler:

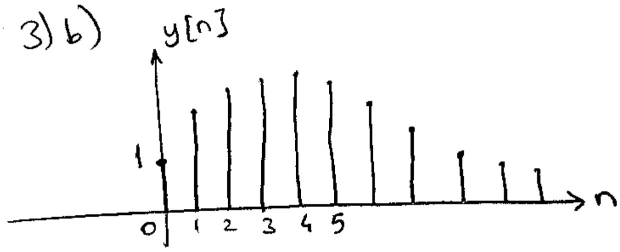
2) Birim darbe tepkisi



3) a)



3) b)



SİNYALLER VE SİSTEMLER FİNAL SINAVI SORULARI

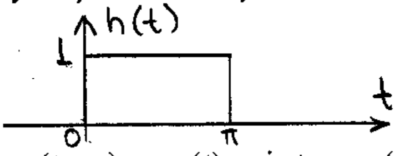
13.01.2010 Süre: 80 dakika

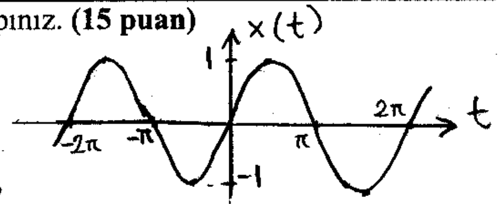
Her bir soru numarasından ya A ya da B ile gösterileni yapınız. Her ikisini de yapmaya çalışırsanız (ki zaman kaybetmeniz tavsiye edilmez) hangisini seçtiğinizi belirtiniz. Aksi halde **yalnız A** sorusuna verdiğiniz cevap dikkate alınacaktır.

1-A) Giriş(x) – çıkış(y) ilişkisi $y(t) = x(t)e^{t+1} + x(0)$ ile verilen sistem doğrusal mıdır, bellekli midir, nedensel midir, kararlı mıdır, zamanla değişen midir? (Açıklama yapmanız beklenmemektedir, birer veya ikişer kelimelik cevaplar yeterlidir.) **(5x3 = 15 puan)**

1-B) $x[n] = 2u[n+3] + 2u[n-2]$ sinyali ile tek ve çift bileşenlerini çiziniz. **(3 + 6 + 6 = 15 puan)**

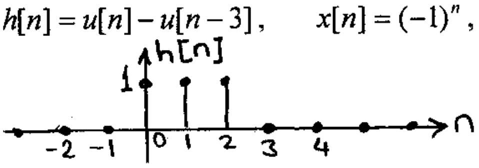
2- Aşağıdaki konvolüsyon işlemlerinden yalnızca istediğiniz birisini yapınız. **(15 puan)**

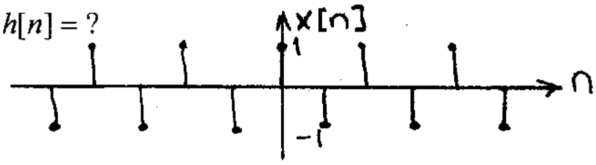




A) $h(t) = u(t) - u(t-\pi)$, $x(t) = \sin t$, $y(t) = x(t) * h(t) = ?$

B) $h[n] = u[n] - u[n-3]$, $x[n] = (-1)^n$, $y[n] = x[n] * h[n] = ?$

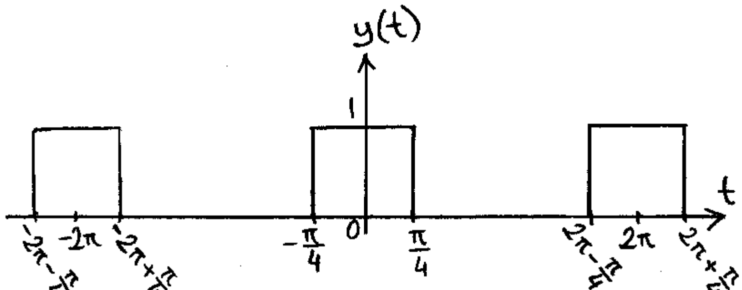




3-A) $y(t)$ sinyali $T_0 = 2\pi$ ile periyodik olup $-\pi < t < \pi$ aralığında

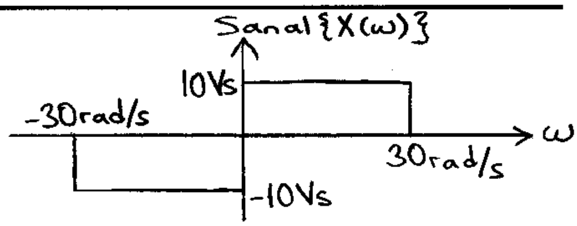
$$y(t) = \begin{cases} 1 & -\frac{\pi}{4} < t < \frac{\pi}{4} \text{ ise} \\ 0 & \text{diger} \end{cases}$$

olduğunda göre $y(t)$ sinyalini Fourier serisine açınız. *Sıfırdan farklı* en az 5 terimini seride açıkça yazınız. **(25 puan)**



3-B) Tek sinyallerin gerçel gösterimli Fourier serisinde cosinüslü terimlerin katsayılarının (a_k) sıfır olduğunu ispatlayınız. **(25 puan)**

4-A) $R = 100\Omega$'luk bir direnç üzerindeki gerilim sinyalinin Fourier dönüşümü $X(\omega)$ sırf sanal olup, bunun j katsayısı atılırsa şekildeki grafiğe sahip olmaktadır. Bu direnç üzerinde (-∞,+∞) zaman aralığında harcanan toplam enerji nedir? **(20 puan)**



4-B) $X(\omega) = \Im\{x(t)\}$ ise $j^n \dfrac{d^n}{d\omega^n}(X(\omega)) = \Im\{tx(t)\}$ olduğunu ispatlayınız. **(20 puan)**

5-A) Giriş(x) – çıkış(y) ilişkisi

$$\ddot{y}(t) + 4\dot{y}(t) + 3y(t) = \dot{x}(t) + 2x(t)$$

ile verilen nedensel sistemin transfer fonksiyonunu**(5puan)**, birim darbe tepkisini**(9 puan)** ve $x(t) = e^{-2(t-4)}u(t-4)$ girişi için enerjisiz başlangıç şartlı çıkışını **(11 puan)** bulunuz.

5-B) Giriş(x) – çıkış(y) ilişkisi

$$y[n+2] + 0{,}3y[n+1] + 0{,}02y[n] = x[n+1] - 0{,}3x[n]$$

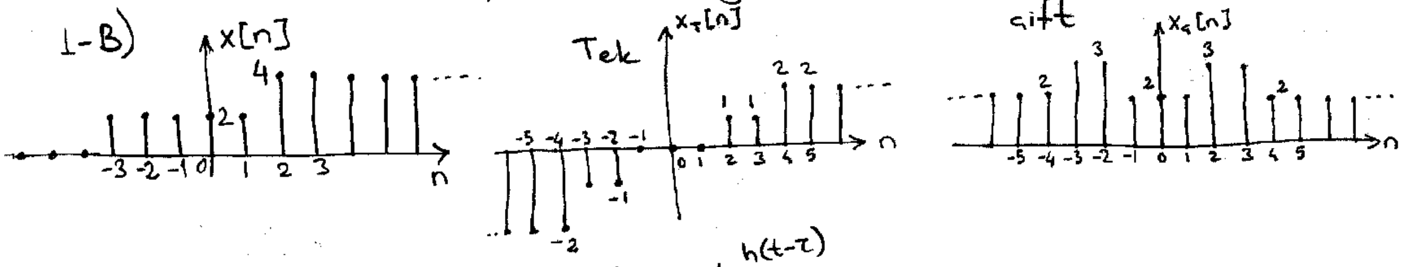
ile verilen nedensel sistemin transfer fonksiyonunu**(5puan)**, birim darbe tepkisini**(9 puan)** ve $x[n] = (0{,}3)^{(n-4)}u(n-4)$ girişi için enerjisiz başlangıç şartlı çıkışını **(11 puan)** bulunuz.

BAŞARILAR ... **Yard. Doç. Dr. Ata SEVİNÇ**

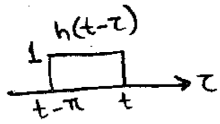
SİNYALLER VE SİSTEMLER FİNAL CEVAP ANAHTARI
13 Ocak 2010

1-A) Doğrusal, bellekli ($x(0)$ için), nedensel değil (çünkü $t<0$ iken gelecekteki $x(0)$ girişi gerekiyor), kararsız (çünkü $t \to \infty$ için $e^{t+1} \to \infty$), zamanla değişen.

1-B)



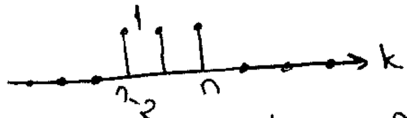
2-A) $h(t-\tau) = \begin{cases} 1 & t-\pi \le \tau < t \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$



$$y(t) = \int_{\tau=-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau = \int_{\tau=t-\pi}^{t} 1\cdot \sin\tau \cdot d\tau = -\cos\tau \Big|_{t-\pi}^{t} = \underbrace{\cos(t-\pi)}_{=-\cos t} - \cos t$$

$$\boxed{y(t) = -2\cos t}$$

2-B) $h[n-k] = \begin{cases} 1 & n-2 \le k \le n \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$



$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=n-2}^{n} (-1)^k \cdot 1 = \underbrace{(-1)^{n-2} + (-1)^{n-1}}_{\text{sıfır (biri } -1 \text{ diğeri } +1)} + (-1)^n$$

Sonuç: $\boxed{y[n] = (-1)^n}$

3-A) $\omega_0 = 2\pi/T_0 = 1$, $y(t)$ çift $\to$ $y(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kt$

Ortalama değer $= \frac{a_0}{2} = \frac{1 \times \left(\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)}{2\pi} = \frac{\pi/2}{2\pi} = \frac{1}{4} \Rightarrow \boxed{a_0 = \frac{1}{2}}$

$$a_k = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} y(t)\cos kt\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} 1\cdot\cos kt\,dt = \frac{1}{k\pi}\sin kt\Big|_{-\pi/4}^{\pi/4}$$

$$a_k = \frac{1}{k\pi}\left(\sin\frac{k\pi}{4} - \sin\left(-\frac{k\pi}{4}\right)\right) = \boxed{\frac{2}{k\pi}\sin\frac{k\pi}{4} = a_k}$$

Diğer yol:

$$a_k = \frac{4}{2\pi}\int_0^{\pi} y(t)\cos kt\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/4} 1\cdot\cos kt\,dt = \frac{2}{k\pi}\sin kt\Big|_0^{\pi/4}$$

$$a_k = \frac{2}{k\pi}\left(\sin k\frac{\pi}{4} - 0\right) = \frac{2}{k\pi}\sin k\frac{\pi}{4} = a_k$$

$a_1 = \frac{2}{\pi}\cdot\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{\pi}$ $\quad a_2 = \frac{2}{2\pi}\sin\frac{\pi}{2} = \frac{1}{\pi}$ $\quad a_3 = \frac{2}{3\pi}\sin\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{3\pi}$

$a_4 = \frac{2}{4\pi}\sin\pi = 0$ $\quad a_5 = \frac{2}{5\pi}\sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{5\pi}$ $\quad a_6 = \frac{2}{6\pi}\sin\frac{3\pi}{2} = -\frac{1}{3\pi}$

$$\boxed{y(t) = \frac{1}{4} + \frac{1}{\pi}\left\{\sqrt{2}\cos t + \cos 2t + \frac{\sqrt{2}}{3}\cos 3t - \frac{\sqrt{2}}{5}\cos 5t - \frac{1}{3}\cos 6t \ldots\right\}}$$

Karmaşık seri istenirse: $y(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{jkt}$

$c_0=\frac{1}{4}$ (ortalama değer)

$$c_k=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} y(t)e^{-jkt}dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} 1\cdot e^{-jkt}dt$$

$$c_k=\frac{-1}{j2k\pi}e^{-jkt}\Big|_{-\pi/4}^{\pi/4}=\frac{-1}{j2k\pi}\left(e^{-jk\frac{\pi}{4}}-e^{jk\frac{\pi}{4}}\right)=\frac{1}{k\pi}\left(\frac{e^{jk\pi/4}-e^{-jk\pi/4}}{j2}\right)$$

$$\boxed{c_k=\frac{1}{k\pi}\sin k\frac{\pi}{4}} \quad c_1=c_{-1}=\frac{1}{\pi}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}\pi} \quad c_2=c_{-2}=\frac{1}{2\pi}\sin\frac{\pi}{2}=\frac{1}{2\pi}$$

- - - -

$$\boxed{y(t)=\dots+\frac{1}{2\pi}e^{-j2t}+\frac{1}{\sqrt{2}\pi}e^{-jt}+\frac{1}{4}+\frac{1}{\sqrt{2}\pi}e^{jt}+\frac{1}{2\pi}e^{j2t}+\dots}$$

3-B) Cosinüslü terimlerin katsayısı $= a_k=\frac{2}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)\cos k\omega_0 t\,dt$

$$a_k=\frac{2}{T_0}\int_{-T_0/2}^{0}\underbrace{x(t)\cdot\cos k\omega_0 t\cdot dt}_{\text{Burada } \tau=-t \text{ olsun.}}+\frac{2}{T_0}\int_{0}^{T_0/2}x(t)\cos k\omega_0 t\,dt$$

$dt=-d\tau$

$t=-T_0/2 \Rightarrow \tau=T_0/2$

$t=0 \Rightarrow \tau=0$ olur.

$$a_k=\frac{2}{T_0}\int_{T_0/2}^{0}\underbrace{x(-\tau)}_{=-x(\tau)\ \to \text{Tek sinyal öz.}}\cos(-k\omega_0\tau)(-d\tau)+\frac{2}{T_0}\int_{0}^{T_0/2}x(t)\cos k\omega_0 t\,dt$$

$$a_k=\frac{2}{T_0}\int_{0}^{T_0/2}-x(\tau)\underbrace{\cos k\omega_0\tau}_{=\cos(-k\omega_0\tau)}\cdot d\tau+\frac{2}{T_0}\int_{0}^{T_0/2}x(t)\cos k\omega_0 t\,dt=0$$

(-) işaretiyle sınırlar çevrildi.

aynı integralin (+) işaretlisi. Değişkenin t veya τ olması farketmez.

4-A) Enerji $=E=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{R}|x(t)|^2dt=\frac{1}{2\pi R}\int_{-\infty}^{+\infty}|X(\omega)|^2d\omega=\frac{1}{200\pi}\left(\int_{-30}^{0}10^2d\omega+\int_{0}^{30}10^2d\omega\right)$ Js

$$E=\frac{1}{2\pi}\omega\Big|_{-30}^{30}\text{Js}=\frac{60}{2\pi}\text{J}=\boxed{\frac{30}{\pi}\text{J}=E}$$

4B) $X(\omega)=\int_{t=-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-j\omega t} \Rightarrow \frac{dX(\omega)}{d\omega}=\int_{t=-\infty}^{+\infty}x(t)(-jt)e^{-j\omega t}dt$

... benzer şekilde tekrarlanırsa: $\frac{d^nX(\omega)}{d\omega^n}=\int_{t=-\infty}^{+\infty}(-jt)^n x(t)e^{-j\omega t}dt$

$$\to j^n\frac{d^nX(\omega)}{d\omega^n}=\int_{t=-\infty}^{+\infty}(-jt\cdot j)^n x(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{t=-\infty}^{+\infty}[t^n x(t)]e^{-j\omega t}dt=\mathcal{F}\{t^n x(t)\}$$

$$\boxed{\text{SS-F-2010-CA-3}}$$

5-A) $\left[(j\omega)^2 + 4(j\omega)+3\right]Y(\omega) = X(\omega)\left[(j\omega)+2\right]$

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{(j\omega)+2}{(j\omega)^2+4(j\omega)+3} = \frac{j\omega+2}{(j\omega+1)(j\omega+3)}$$: Transfer fonksiyon.

$$H(\omega) = \frac{A}{j\omega+1} + \frac{B}{j\omega+3} \qquad A = \left.\frac{j\omega+2}{j\omega+3}\right|_{j\omega=-1} = \frac{-1+2}{-1+3} = \frac{1}{2} = A$$

$$B = \left.\frac{j\omega+2}{j\omega+1}\right|_{j\omega=-3} = \frac{-3+2}{-3+1} = \frac{1}{2} B \quad \rightarrow h(t) = \frac{1}{2}e^{-t}u(t) + \frac{1}{2}e^{-3t}u(t)$$

↳ birim darbe tepkisi

$p(t) = e^{-2t}u(t)$ dersek $P(\omega) = \frac{1}{j\omega+2}$

$$x(t) = p(t-4) \longrightarrow X(\omega) = e^{-j4\omega}P(\omega) = \frac{e^{-j4\omega}}{j\omega+2}$$

$$Y(\omega) = H(\omega)\,X(\omega) = \frac{\cancel{(j\omega+2)}}{(j\omega+1)(j\omega+3)}\cdot\frac{e^{-j4\omega}}{\cancel{(j\omega+2)}} = e^{-j4\omega}\cdot\underbrace{\frac{1}{(j\omega+1)(j\omega+3)}}_{F(\omega)\text{ olsun.}}$$

$$Y(\omega) = e^{-j4\omega}F(\omega) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} y(t) = f(t-4)$$

$$F(\omega) = \frac{a}{j\omega+1} + \frac{b}{j\omega+3} \qquad a = \left.\frac{1}{j\omega+3}\right|_{j\omega=-1} = \frac{1}{2} \quad \cdot \quad b = \left.\frac{1}{j\omega+1}\right|_{j\omega=-3} = \frac{-1}{2}$$

$$f(t) = \frac{1}{2}e^{-t}u(t) - \frac{1}{2}e^{-3t}u(t) \quad \rightarrow \quad \boxed{y(t) = \frac{1}{2}\left(e^{-(t-4)} - e^{-3(t-4)}\right)u(t-4)}$$

5-B) $Y(z)\left[z^2+0{,}3z+0{,}02\right] = X(z)\left[z-0{,}3\right]$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z-0{,}3}{(z+0{,}1)(z+0{,}2)} \; ; \; YB: |z|>0{,}2$$

↳ Transfer fonksiyon

$$H(z) = \frac{A}{z+0{,}1} + \frac{B}{z+0{,}2} \qquad A = \frac{-0{,}1-0{,}3}{-0{,}1+0{,}2} = -4 \qquad B = \frac{-0{,}2-0{,}3}{-0{,}2+0{,}1} = 5$$

$$zH(z) = -4\cdot\frac{z}{z-(-0{,}1)} + 5\cdot\frac{z}{z-(-0{,}2)} \; ; \; |z|>0{,}2$$

Burada $|z|>0{,}1$ alınabilir.

Birim darbe tepkisi:

$$h[n+1] = -4\times(-0{,}1)^n u[n] + 5\times(-0{,}2)^n u[n] \rightarrow h[n] = \left(-4\times(-0{,}1)^{n-1} + 5\times(-0{,}2)^{n-1}\right)u[n-1]$$

$p[n] = 0{,}3^n u[n]$ dersek $x[n] = p[n-4]$ $\qquad X(z) = z^{-4}P(z) = z^{-4}\frac{z}{z-0{,}3}$

$|z|>0{,}3$

$$Y(z) = X(z)H(z) = \frac{\cancel{(z-0{,}3)}}{(z+0{,}1)(z+0{,}2)}\cdot\frac{z^{-3}}{\cancel{(z-0{,}3)}} \; ; \; |z|>0{,}2$$

$$z^3Y(z) = \frac{a}{z+0{,}1} + \frac{b}{z+0{,}2} \qquad a = \frac{1}{-0{,}1+0{,}2} = 10 \qquad b = \frac{1}{-0{,}2+0{,}1} = -10$$

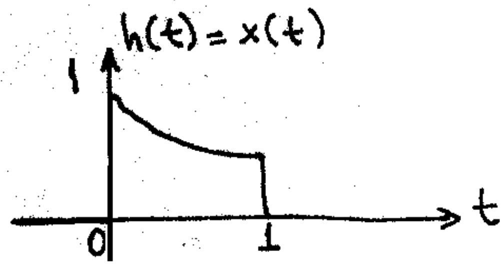
$$\underbrace{z^4Y(z) = F(z)}_{\text{diyelim}} = \frac{10z}{z+0{,}1} - \frac{10z}{z+0{,}2} \rightarrow f[n] = 10\times(-0{,}1)^n u[n] - 10\cdot(-0{,}2)^n u[n]$$

$$f[n] = y[n+4] \longrightarrow \boxed{y[n] = 10\times\left((-0{,}1)^{n-4} - (-0{,}2)^{n-4}\right)u[n-4]}$$

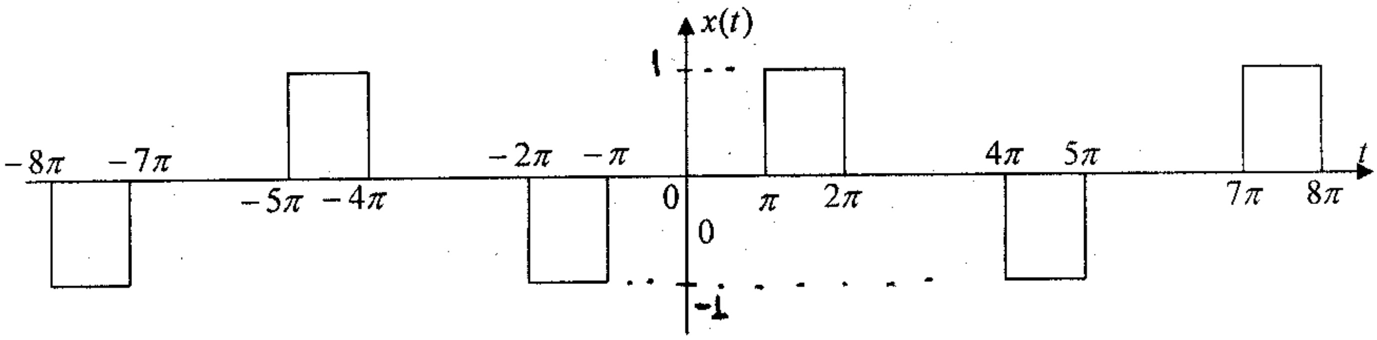
SİNYALLER VE SİSTEMLER BÜTÜNLEME SINAVI SORULARI
27 Ocak 2010   Süre: 90 dakika

1) $x[n] = 3n + 2n^2 + \sin(n/6) - \cos(n/9)$ sinyalinin tek ve çift bileşenlerini yazınız. (Çizim beklenmemektedir.) **(10 puan)**

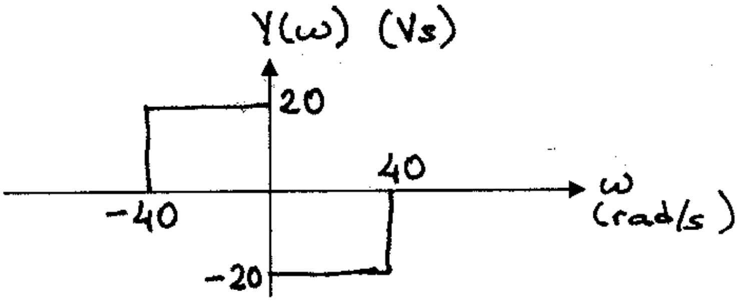
2) Birim darbe tepkisi ve girişi $h(t) = x(t) = \begin{cases} e^{-t} & 0 \le t < 1 \\ 0 & diger \end{cases}$ olan sistemin çıkışını hesaplayınız.
(Çizim beklenmemektedir.) **(20 puan)**



3) Şekilde verilen $T_0 = 6\pi$ periyotlu sinyali gerçel ya da karmaşık (yalnız birisi) Fourier serisine açınız. Bulduğunuz katsayılardan sıfırdan farklı olan en az 4 tanesini sayısal değerlerini bularak seride yerine yazınız. (Temel açıların trigonometrik fonksiyonlarının sayısal değerlerini hesap makinesi kullanmadan yazabilmelisiniz.) **(25 puan)**



4) $R = 100\Omega$'luk bir direnç üzerindeki gerilim sinyalinin Fourier dönüşümü $Y(\omega)$ sırf sanal olup, bunun j katsayısı atılırsa şekildeki grafiğe sahip olmaktadır. Bu direnç üzerinde (-∞,+∞) zaman aralığında harcanan toplam enerji nedir? **(20 puan)**



5) Giriş(x) – çıkış(y) ilişkisi

$$y[n+2] - 0{,}6y[n+1] + 0{,}08y[n] = x[n+1] - 0{,}5x[n]$$

ile verilen nedensel sistemin transfer fonksiyonunu**(5puan)**, birim darbe tepkisini**(9 puan)** ve $x[n] = (0{,}5)^{(n-4)}u(n-4)$ girişi için enerjisiz başlangıç şartlı çıkışını **(11 puan)** bulunuz.

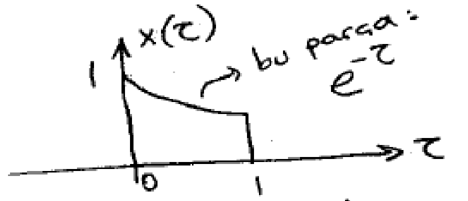
BAŞARILAR ...   **Yard. Doç.Dr. Ata SEVİNÇ**

SİNYALLER VE SİSTEMLER BÜTÜNLEME
CEVAP ANAHTARI 27 Ocak 2010

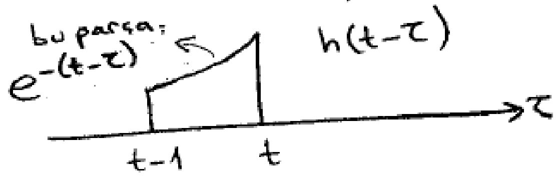
1) $x_T[n] = \dfrac{x[n]-x[-n]}{2} = 3n + \sin(n/6)$ → Tek bileşen

$x_Ç[n] = \dfrac{x[n]+x[-n]}{2} = 2n^2 - \cos(n/9)$ → Çift bileşen

($x[n]$ içindeki $3n$ ve $\sin(n/6)$ terimleri tek olduğu için tek bileşende, $2n^2$ ve $-\cos(n/9)$ terimleri çift olduğu için çift bileşende yer aldı. Başka terim olmadığı için sonuçlar böyle oldu.)



2) $y(t) = x(t) * h(t) = \displaystyle\int_{\tau=-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau$



$\underline{t<0}$ ve $t-1>1$ yani $\underline{t \geq 2}$ için

$x(\tau)h(t-\tau) = 0 \quad \forall\tau$

$y(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} 0 \cdot d\tau = 0$

$\underline{0 \leq t < 1}$ için:

$$x(\tau)h(t-\tau) = \begin{cases} \underbrace{e^{-\tau} \cdot e^{-(t-\tau)}}_{=e^{-t}} & 0 \leq \tau \leq t \text{ ise} \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$$

$$y(t) = \int_{\tau=0}^{t} e^{-t} \cdot d\tau = e^{-t}\int_{\tau=0}^{t} d\tau = e^{-t} \cdot \tau \Big|_{\tau=0}^{t} = e^{-t}(t-0) = te^{-t}$$

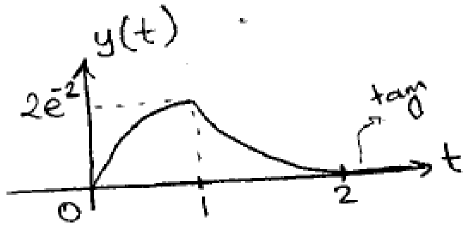
$0 \leq t-1 < 1$ yani $\underline{1 \leq t < 2}$ için:

$$x(\tau)h(t-\tau) = \begin{cases} \underbrace{e^{-\tau} \cdot e^{-(t-\tau)}}_{=e^{-t}} & t-1 \leq \tau \leq 1 \text{ ise} \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$$

$$y(t) = \int_{\tau=t-1}^{1} e^{-t}\,d\tau = e^{-t} \cdot \tau \Big|_{\tau=t-1}^{1} = e^{-t}(1-t+1) = (2-t)e^{-t}$$

Sonuç:

$$y(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \text{ ise} \\ te^{-t} & 0 \leq t < 1 \text{ ise} \\ (2-t)e^{-t} & 1 \leq t < 2 \text{ ise} \\ 0 & t \geq 2 \text{ ise} \end{cases}$$



3) $\omega_0 = 2\pi/T_0 = 1/3$

Gerçel ifadeli seri: $x(t) = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\left(\frac{kt}{3}\right) + b_k \sin\left(\frac{kt}{3}\right)\right)$

Sinyal tek olduğu için: $a_0 = a_k = 0$ (her k için)

Yine sinyal tek olduğu için: $b_k = \frac{4}{T_0}\int_0^{T_0/2} x(t)\sin(\frac{kt}{3})dt$

$$b_k = \frac{4}{6\pi}\int_\pi^{2\pi} 1\cdot\sin(\frac{kt}{3})dt = \frac{2}{3\pi}\cdot\frac{3}{k}\left(-\cos(kt/3)\right)\Big|_{t=\pi}^{2\pi}$$

$$b_k = \frac{2}{k\pi}\left(\cos(\frac{k\pi}{3}) - \cos(\frac{2k\pi}{3})\right)$$ $\rightarrow$ k çiftse $b_k=0$ olduğu, sinyalin tek harmonik simetrisine sahip olmasından da bellidir. ($x(t+\frac{T_0}{2}) = -x(t)$ $\rightarrow$ Sinyalin tekliğinden ayrı bir özellik.)

$$k=1 \Rightarrow b_1 = \frac{2}{\pi}\left(\cos\frac{\pi}{3} - \cos\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{2} - \frac{-1}{2}\right) = \frac{2}{\pi} = b_1$$

$$k=3 \Rightarrow b_3 = \frac{2}{3\pi}\left(\cos\pi - \cos 2\pi\right) = \frac{2}{3\pi}(-1-1) = \frac{-4}{3\pi} = b_3$$

$$k=5 \Rightarrow b_5 = \frac{2}{5\pi}\left(\cos\frac{5\pi}{3} - \cos\frac{10\pi}{3}\right) = \frac{2}{5\pi}\left(\cos(-\frac{\pi}{3}) - \cos(-\frac{2\pi}{3})\right) = \frac{2}{5\pi} = b_5$$

$$k=7 \Rightarrow b_7 = \frac{2}{7\pi}\left(\cos\frac{7\pi}{3} - \cos\frac{14\pi}{3}\right) = \frac{2}{7\pi}\left(\cos\frac{\pi}{3} - \cos\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{2}{7\pi} = b_7$$

$$x(t) = \frac{2}{\pi}\sin\frac{t}{3} - \frac{4}{3\pi}\sin t + \frac{2}{5\pi}\sin\frac{5t}{3} + \frac{2}{7\pi}\sin\frac{7t}{3} - + \cdots$$

Karmaşık ifadeli seri: $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{j\frac{kt}{3}}$

$$c_k = \frac{1}{6\pi}\int_{-3\pi}^{3\pi} x(t)e^{-j\frac{kt}{3}}dt = \frac{1}{6\pi}\int_{-2\pi}^{-\pi} -1\cdot e^{-jkt/3}dt + \frac{1}{6\pi}\int_\pi^{2\pi} 1\cdot e^{-jkt/3}dt$$

$$c_k = \frac{3}{jk6\pi}e^{-jkt/3}\Big|_{-2\pi}^{-\pi} - \frac{3}{jk\cdot 6\pi}e^{-jkt/3}\Big|_\pi^{2\pi} = \frac{1}{j2k\pi}\left\{e^{j\frac{k\pi}{3}} - e^{j\frac{2k\pi}{3}} - e^{-j2\frac{k\pi}{3}} + e^{-j\frac{k\pi}{3}}\right\}$$

$$c_k = \frac{1}{jk\pi}\left(\frac{e^{jk\frac{\pi}{3}} + e^{-jk\frac{\pi}{3}}}{2}\right) - \frac{1}{jk\pi}\left(\frac{e^{j2\frac{k\pi}{3}} + e^{-j\frac{2k\pi}{3}}}{2}\right)$$

$$c_k = -\frac{j}{k\pi}\left[\cos(\frac{k\pi}{3}) - \cos(\frac{2k\pi}{3})\right]$$ $\rightarrow$ $k>0$ için $c_k = -\frac{j}{2}b_k$

Ayrıca sinyal tek olduğundan $c_{-k} = -c_k$ ve $c_0 = 0$

Yukarıdaki b_k'lara benzer olarak hesaplanırsa:

$$c_1 = -\frac{j}{2}\cdot\frac{2}{\pi} = -\frac{j}{\pi} \longrightarrow c_{-1} = \frac{j}{\pi}$$

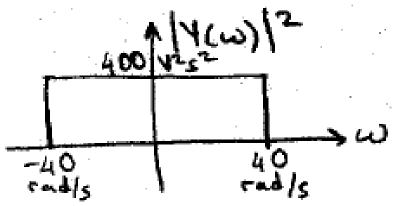
$$c_3 = -\frac{j}{2}\cdot\frac{-4}{3\pi} = j\frac{2}{3\pi} \longrightarrow c_{-3} = \frac{-j2}{3\pi}$$

k çiftse $c_k = 0$ (Tek harmonik simetrisi)

Sonuç:

$$x(t) = \cdots - \frac{j2}{3\pi}e^{-jt} + \frac{j}{\pi}e^{-j\frac{t}{3}} - \frac{j}{\pi}e^{j\frac{t}{3}} + \frac{j2}{3\pi}e^{jt} + \cdots$$

4) $\text{Enerji} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{R} \cdot |y(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi R} \int_{-\infty}^{+\infty} |Y(\omega)|^2 d\omega$



$$E = \frac{1}{200\pi\,\Omega} \int_{-40\,rad/s}^{40\,rad/s} 400 V^2 s^2 \cdot d\omega = \frac{400 \cdot 80\, V^2 s}{200\pi\,\Omega}$$

$$\boxed{E = \frac{160}{\pi} J}$$

5) $Y(z)[z^2 - 0{,}6z + 0{,}08] = X(z)[z - 0{,}5]$

$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z-0{,}5}{z^2-0{,}6z+0{,}08} = \frac{z-0{,}5}{(z-0{,}2)(z-0{,}4)}$: Transfer fonk. YB: $|z| > 0{,}4$

$H(z) = \frac{A}{z-0{,}2} + \frac{B}{z-0{,}4}$ $\quad A = \frac{0{,}2-0{,}5}{0{,}2-0{,}4} = \frac{3}{2}$ $\quad B = \frac{0{,}4-0{,}5}{0{,}4-0{,}2} = \frac{-1}{2}$

$H(z) \cdot z = \frac{3}{2} \cdot \frac{z}{z-0{,}2} - \frac{1}{2} \frac{z}{z-0{,}4} = \mathcal{Z}\{h[n+1]\}$

$|z| > 0{,}2$ diyebiliriz $\quad |z| > 0{,}4$

$h[n+1] = \frac{3}{2} \times 0{,}2^n u[n] - \frac{1}{2} 0{,}4^n u[n] \rightsquigarrow h[n] = \left(\frac{3}{2} \times 0{,}2^{n-1} - \frac{1}{2} 0{,}4^{n-1}\right) u[n-1]$

↳ Birim darbe tepkisi

$X(\omega) = z^{-4} \cdot \frac{z}{z-0{,}5} \qquad |z| > 0{,}5$

$Y(\omega) = \frac{\cancel{z-0{,}5}}{(z-0{,}2)(z-0{,}4)} \cdot \frac{z^{-3}}{\cancel{(z-0{,}5)}} \longrightarrow z^3 Y(z) = \frac{1}{(z-0{,}2)(z-0{,}4)}$

$z^3 Y(z) = \frac{a}{z-0{,}2} + \frac{b}{z-0{,}4} \qquad a = \frac{1}{0{,}2-0{,}4} = -5 \qquad b = \frac{1}{0{,}4-0{,}2} = 5$

$z^4 Y(z) = \mathcal{Z}\{y[n+4]\} = -5 \frac{z}{z-0{,}2} + 5 \cdot \frac{z}{z-0{,}4}$

↳ $|z| > 0{,}2$ $\quad$ ↳ $|z| > 0{,}4$ denebilir.

$y[n+4] = -5 \times 0{,}2^n u[n] + 5 \times 0{,}4^n u[n]$

$y[n] = \left[-5 \times 0{,}2^{n-4} + 5 \times 0{,}4^{n-4}\right] u[n-4]$: Enerjisiz başlangıç şartlı çıkış

SİNYALLER VE SİSTEMLER ARASINAV SORULARI
29 Kasım 2010 Süre: 90 dakika

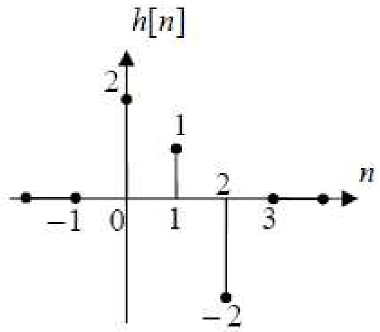
1) Giriş(x) – çıkış(y) ilişkisi

$$y[n] = \sum_{k=0}^{+\infty} k x[n-k]$$

ile verilen sistem doğrusal mıdır, bellekli midir, nedensel midir, kararlı mıdır, zamanla değişen midir? (Açıklama yapmanız beklenmemektedir, birer veya ikişer kelimelik cevaplar yeterlidir.) **(5x3 = 15 puan)**

2) $x(t) = 2u(t+2) + 2u(t-2)$ sinyalinin tek ve çift bileşenlerini <u>çiziniz</u>. **(10 puan)**

3) Doğrusal zamanla değişmez bir sistemin birim darbe tepkisi $h[n]$ yandaki şekilde verilmiştir. Sistem girişi $x[n] = 2u[n] - u[n-3]$ ise sistem çıkışı $y[n]$ ne olur? Çizerek gösteriniz. İstediğiniz yolla yapabilirsiniz. **(25 puan)**



4. ve 5. sorularda tam puan almak için (a) seçeneklerini çözmeniz beklenmektedir. Ancak bu zor geliyorsa ve <u>daha düşük puan almaya razıysanız</u> (b) seçeneklerini yapabilirsiniz. Aynı soruda hem (a) hem (b) için işlem yaparsanız hangisinin değerlendirilmesini istediğinizi belirtiniz; aksi halde yalnız (a) seçeneğiniz değerlendirilecektir.

4) (a) Doğrusal zamanla değişmez bir sistemin birim darbe tepkisi $h(t) = u(t) - u(t-1)$, girişi ise

$$x(t) = \begin{cases} 0 & t < -1 \text{ ise} \\ 1+t & -1 \le t < 0 \text{ ise} \\ 1\text{-}t & 0 \le t < 1 \text{ ise} \\ 0 & t \ge 1 \text{ ise} \end{cases}$$

olduğuna göre sistem çıkışını ($y(t)$) bulunuz. Çizmeniz beklenmemektedir. **(25 puan)**

(b) Doğrusal zamanla değişmez bir sistemin birim darbe tepkisi $h[n] = n \cdot (u[n] - u[n-4])$, girişi ise $x[n] = u[n] - u[n-4]$ olduğuna göre sistem çıkışını ($y[n]$) çiziniz. **(17 puan)**

5) (a) Giriş(x) – çıkış(y) ilişkisi

$$\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) = x(t)$$

ile verilen sistemin bütün zamanlar için çıkışını $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 0$ başlangıç şartları ve $x(t) = (1 - e^{-t})u(t)$ girişi için bulunuz. **(25 puan)**

(b) Giriş(x) – çıkış(y) ilişkisi

$$\ddot{y}(t) + 4y(t) = 3x(t)$$

ile verilen nedensel sistemin birim darbe tepkisini tüm zamanlar için bulunuz. **(18 puan)**

BAŞARILAR ... **Yard. Doç.Dr. Ata SEVİNÇ**

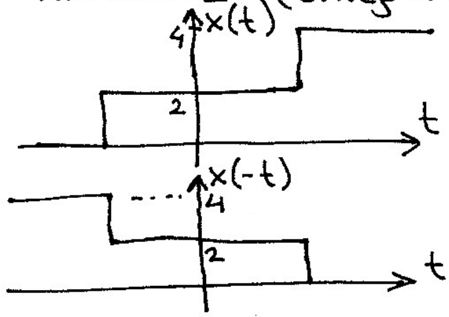
SİNYALLER VE SİSTEMLER ARASINAV CEVAP ANAHTARI:

29 Kasım 2010

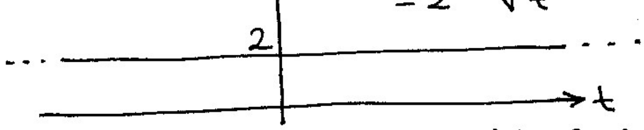
1) $y[n]=\sum_{k=0}^{+\infty} kx[n-k] = x[n-1]+2x[n-2]+3x[n-3]+4x[n-4]+\dots$

Doğrusal, bellekli, nedensel (açılımdan açıkça görülüyor), zamanla değişmez (x'lerin katsayıları sabit), kararsız (örneğin sabit giriş için çıkış sonsuza gidiyor).

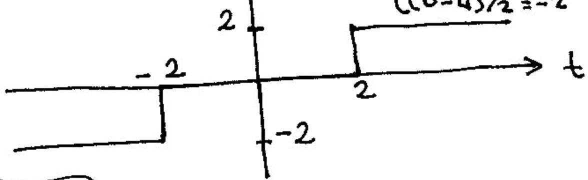
2)



$x_e(t)=\dfrac{x(t)+x(-t)}{2}=\dfrac{4}{2}$
$=2 \quad \forall t$



$x_T(t)=\begin{cases}(2-2)/2=0 & |t|<2\\(4-0)/2=2 & t>2\\(0-4)/2=-2 & t<-2\end{cases}$



3) 1. yol: $y[n]=h[n]*x[n]$

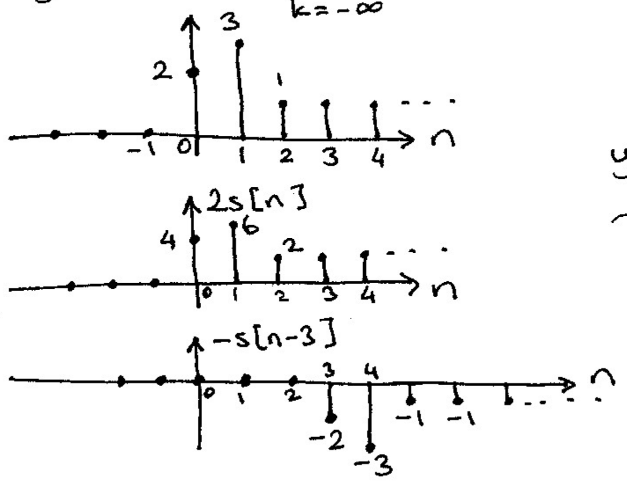
$=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n-k] = 2x[n]+x[n-1]-2x[n-2]$

$=4u[n]-2u[n-3]+2u[n-1]-u[n-4]-4u[n-2]+2u[n-5]$

$y[n]=4u[n]+2u[n-1]-4u[n-2]-2u[n-3]-u[n-4]+2u[n-5]$

çizilerek çözüm tamamlanır.

2. yol: $s[n]=\sum_{k=-\infty}^{n} h[k]$: birim basamak tepkisi

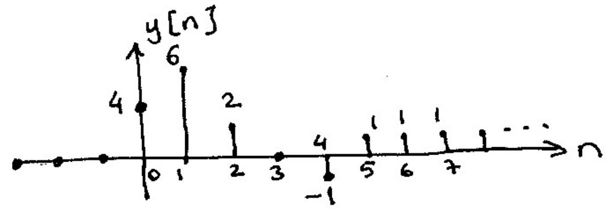


$x[n]=2u[n]-u[n-3]$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$

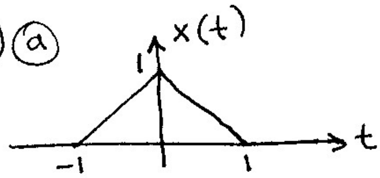
$y \quad s \quad s$

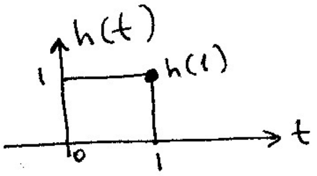
$y[n]=2s[n]-s[n-3]$



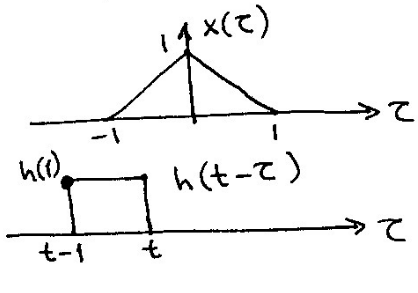
(1. yoldaki katsayılar seviye değişimi olarak alınıp aynı çizim bulunur.)

4) a





$y(t)=x(t)*h(t)$
$=\int_{\tau=-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$



<u>$t<-1$ ise:</u>

$x(\tau)h(t-\tau)=0 \quad \forall\tau$

$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} 0\cdot d\tau = 0$

4) ⓐ (devamı) $t \geq -1$ ve $t-1 < -1$ yani

$-1 \leq t < 0$ ise:

$$x(\tau)h(t-\tau) = \begin{cases} 1\cdot(1+\tau) & -1 \leq \tau \leq t \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$$

$$y(t) = \int_{\tau=-1}^{t} (1+\tau)d\tau = \left(\tau + \tfrac{1}{2}\tau^2\right)\Big|_{\tau=-1}^{t} = t + \tfrac{1}{2}t^2 - \underbrace{\left(-1 + \tfrac{1}{2}[-1]^2\right)}_{-\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{2}t^2 + t + \tfrac{1}{2}$$

$t \geq 0$ ve $t-1 < 0$ yani

$0 \leq t < 1$ ise:

$$x(\tau)h(t-\tau) = \begin{cases} 1\cdot(1+\tau) & t-1 \leq \tau \leq 0 \\ 1\cdot(1-\tau) & 0 \leq \tau \leq t \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$$

$$y(t) = \int_{\tau=t-1}^{0} (1+\tau)d\tau + \int_{\tau=0}^{t} (1-\tau)d\tau = \left[\tau + \tfrac{1}{2}\tau^2\right]_{t-1}^{0} + \left[\tau - \tfrac{1}{2}\tau^2\right]_{0}^{t}$$

$$y(t) = -\left[(t-1) + \tfrac{1}{2}(t^2-2t+1)\right] + \left[t - \tfrac{1}{2}t^2\right] = -t^2 + t + \tfrac{1}{2}$$

$t-1 < 1$ ve $t \geq 1$ yani

$1 \leq t < 2$ ise:

$$x(\tau)h(t-\tau) = \begin{cases} 1\cdot(1-\tau) & t-1 \leq \tau \leq 1 \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$$

$$y(t) = \int_{\tau=t-1}^{1} (1-\tau)d\tau = \left[\tau - \tfrac{1}{2}\tau^2\right]_{t-1}^{1} = 1 - \tfrac{1}{2} - \left[t-1-\tfrac{1}{2}(t^2-2t+1)\right]$$

$$= \tfrac{1}{2}t^2 - 2t + 2$$

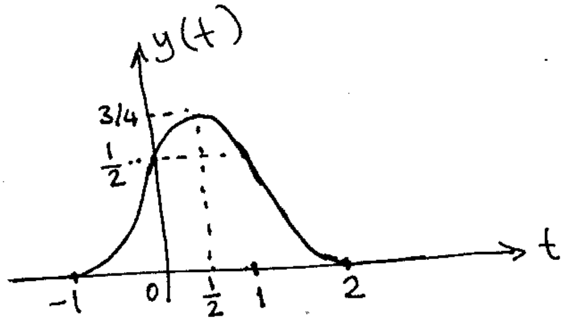
$t-1 \geq 1$ yani

$t \geq 2$ ise:

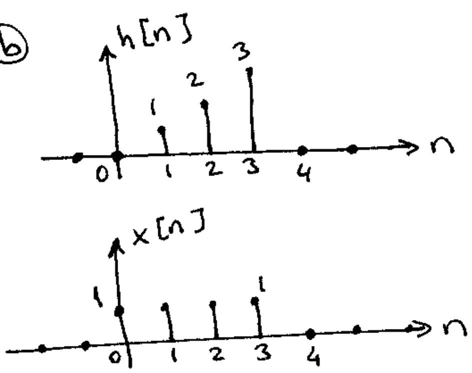
$x(\tau)h(t-\tau) = 0 \quad \forall\tau \rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} 0 \cdot d\tau = 0$

Sonuç:

$$y(t) = \begin{cases} 0 & t < -1 \text{ ise} \\ \tfrac{1}{2}t^2 + t + \tfrac{1}{2} & -1 \leq t < 0 \text{ ise} \\ -t^2 + t + \tfrac{1}{2} & 0 \leq t < 1 \text{ ise} \\ \tfrac{1}{2}t^2 - 2t + 2 & 1 \leq t < 2 \text{ ise} \\ 0 & 2 \leq t \text{ ise} \end{cases}$$

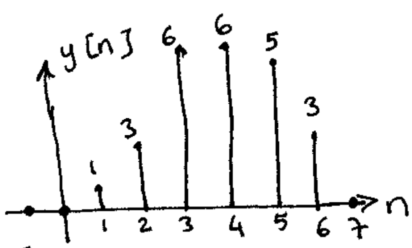


ⓑ



$$\begin{array}{r} 1/1/1/1 \rightarrow x[3] \\ \times \quad 1/2/3 \rightarrow h[3] \\ \hline 3/3/3/3 \\ 2/2/2/2 \\ +\ 1/1/1/1 \\ \hline 1/3/6/6/5/3 \rightarrow y[6] \end{array}$$

$\downarrow$
y[1]



5) (a) $t \geq 0 : \Rightarrow \ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) = 1 - e^{-t}$

$\lambda^2 + 2\lambda = 0 \longrightarrow \lambda_1 = 0 \;,\; \lambda_2 = -2 \longrightarrow y_h(t) = A_1 + A_2 e^{-2t}$

$1 = 1 \cdot e^{0 \cdot t} \longrightarrow 0 = \lambda_1 \longrightarrow y_{ö1} = c_1 \cdot t \cdot e^{0 \cdot t} = c_1 t$

$\ddot{y}_{ö1} + 2\dot{y}_{ö1} = 1 \longrightarrow 0 + 2c_1 = 1 \longrightarrow c_1 = \frac{1}{2} \longrightarrow y_{ö1} = \frac{1}{2} t$

$-e^{-t} \longrightarrow -1 \notin \{\lambda_1, \lambda_2\} \longrightarrow y_{ö2} = c_2 \cdot e^{-t} \longrightarrow c_2 = \dfrac{-1}{(-1)^2 + 2 \cdot (-1)} = 1$

$y_{ö2} = e^{-t}$

$y(t) = A_1 + A_2 e^{-2t} + \frac{1}{2} t + e^{-t}$

$$\left.\begin{aligned} y(0) &= A_1 + A_2 + 1 = 0 \\ \dot{y}(0) &= -2A_2 + \tfrac{1}{2} - 1 = 0 \end{aligned}\right\} \quad A_2 = -\frac{1}{4} \;,\; A_1 = -\frac{3}{4}$$

Sonuç: $y(t) = \left[-\frac{3}{4} - \frac{1}{4} e^{-2t} + \frac{1}{2} t + e^{-t}\right] \cdot u(t) \quad \forall t$

(b) Nedensellikten $\longrightarrow t < 0 \Rightarrow h(t) = 0$

$t > 0$ için: $\ddot{h}(t) + 4h(t) = 0$

$\dot{h}(0) = 3 \;,\; h(0) = 0$

$\lambda^2 + 4 = 0 \longrightarrow \lambda_{1,2} = \mp j2 \longrightarrow h(t) = A\cos 2t + B\sin 2t$

$$\left.\begin{aligned} h(0) &= A = 0 \\ \dot{h}(0) &= -2A \cdot \sin 0 + 2B \cdot \cos 0 = 3 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} A &= 0 \\ B &= 3/2 \end{aligned}$$

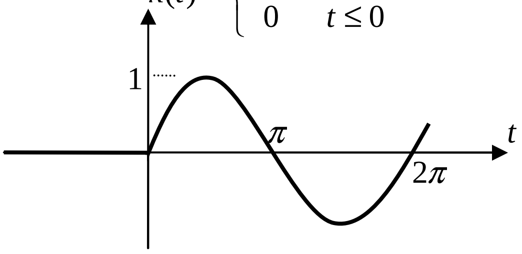
Sonuç: $h(t) = \left(\frac{3}{2} \sin 2t\right) \cdot u(t) \quad \forall t$

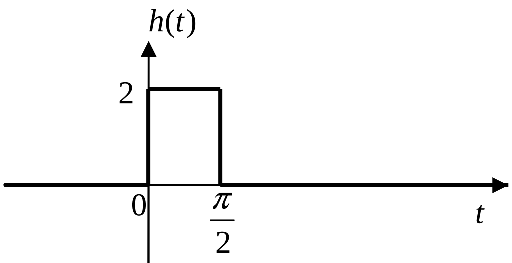
SİNYALLER VE SİSTEMLER FİNAL SINAVI SORULARI
13 Ocak 2011 Süre: 75 dakika

1) $|\alpha| < 1$ olmak üzere birim darbe tepkisi $h[n] = \alpha^{-|n|}$ olan doğrusal zamanla değişmez sistem nedensel midir, kararlı mıdır, bellekli midir? Açıklama ***yapınız***. **(4 + 8 + 3 = 15 puan)**

2) Girişi $x(t)$ ve birim darbe tepkisi $h(t)$ şekillerdeki gibi olan doğrusal zamanla değişmez sistemin çıkışını bulunuz. **(25 puan)** Çizmeniz beklenmiyor.

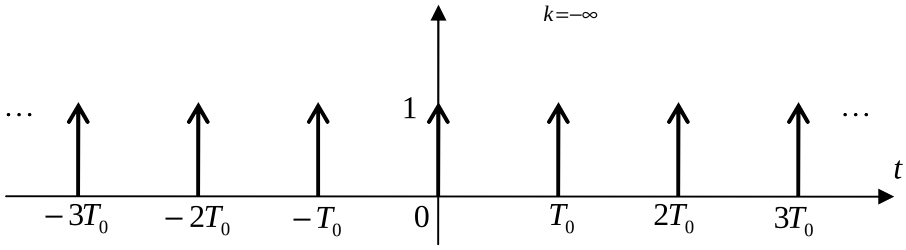
$$x(t) = \begin{cases} \sin t & t > 0 \\ 0 & t \le 0 \end{cases}$$





3) Şekilde verilen darbe treninin Fourier dönüşümünü ($P(\omega)$) bularak bir başka darbe treni olduğunu gösteriniz. **(25 puan)** (Yol gösterme: Önce p(t) 'nin karmaşık Fourier serisini elde ediniz.)

$$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_0)$$



4) Giriş(x) çıkış(y) ilişkisi aşağıda verilen nedensel sistemin transfer fonksiyonunu ve birim darbe tepkisini bulunuz. **(15 puan)**

$$\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 2y(t) = 4\dot{x}(t) + 4x(t)$$

5) Giriş(x) çıkış(y) ilişkisi aşağıda verilen nedensel sistemin transfer fonksiyonunu ve birim darbe tepkisini bulunuz. **(20 puan)**

$$y[n+2] - 5y[n+1] + 6y[n] = x[n+2] - x[n+1]$$

BAŞARILAR … **Yard. Doç. Dr. Ata SEVİNÇ**

SİNYALLER VE SİSTEMLER FİNAL CEVAP ANAHTARI
13 Ocak 2011

1) Bazı (hatta her) $n<0$ için $h[n]\neq 0$ olduğu için nedensel değildir.

Bazı $n\neq 0$ için $h[n]\neq 0$ olduğu için belleklidir.

$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| < \infty$ olduğu gösterilebilirse kararlı olduğu anlaşılır.
$= \infty$ " " kararsız " "

$= -1 + 2\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^{-n}$ ($n=0$ dahil sol taraf ile $n=0$ dahil sağ taraf toplamları aynı, çünkü simetrik. $n=0$ için iki kere saydığımız için $\alpha^0=1$ çıkardık bir tarafın toplamının iki katından.)

Bu formülü hatırlayan doğrudan yazabilirdi.

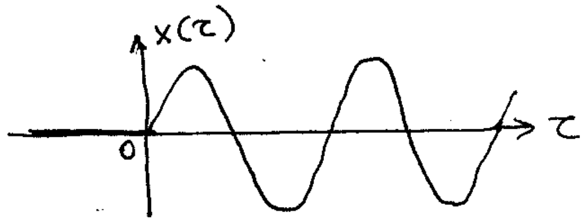
$$S=\sum_{n=0}^{k} p^k = 1+p+p^2+\dots+p^k$$
$$pS = p+p^2+\dots+p^k+p^{k+1}$$
$$S-pS = S(1-p) = 1-p^{k+1} \longrightarrow S=\sum_{n=0}^{k} p^k = \frac{1-p^{k+1}}{1-p}$$

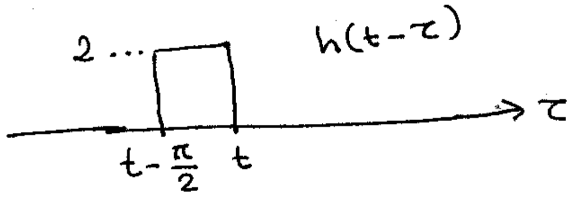
Bu formülü $p=\alpha^{-1}$ için kullanırsak:

$|\alpha|<1$ için $|p|=|\alpha^{-1}|>1$ olur ve $\lim k\to\infty$ için $p^{k+1}=\infty$ olur. Yani $\sum_{n=0}^{+\infty}\alpha^{-n}=\infty \longrightarrow \sum_{n=-\infty}^{+\infty}|h[n]|=\infty$

Sistem KARARSIZ.

2) Çıkış $= y(t) = \int_{\tau=-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau$





$t<0$ ise:

$x(\tau)h(t-\tau)=0 \quad \forall\tau$

$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} 0\cdot d\tau = 0$

$t\geq 0$ ve $t-\frac{\pi}{2}<0$ ise

yani $0\leq t<\frac{\pi}{2}$ ise:

$$x(\tau)h(t-\tau)=\begin{cases} 2\sin\tau & 0\leq\tau\leq t \\ 0 & \text{diğer}\end{cases}$$

$$y(t)=\int_0^t 2\sin\tau\,d\tau = -2\cos\tau\Big|_0^t = 2-2\cos t$$

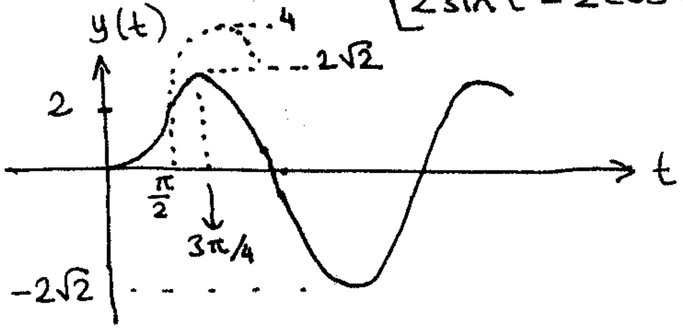
$t-\frac{\pi}{2} \geqslant 0$ yani $\underline{t \geqslant \frac{\pi}{2} \text{ ise :}}$

$$x(\tau)h(t-\tau) = \begin{cases} 2\sin\tau & t-\frac{\pi}{2} \leq \tau \leq t \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$$

$$y(t) = \int_{t-\frac{\pi}{2}}^{t} 2\sin\tau \, d\tau = -2\cos\tau \Big|_{t-\frac{\pi}{2}}^{t} = 2\underbrace{\cos\left(t-\frac{\pi}{2}\right)}_{\sin t} - 2\cos t$$

$$y(t) = 2\sin t - 2\cos t$$

Sonuç:
$$y(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \text{ ise} \\ 2-2\cos t & 0 \leq t < \frac{\pi}{2} \text{ ise} \\ 2\sin t - 2\cos t & t \geqslant \frac{\pi}{2} \text{ ise} \end{cases}$$



3) $p(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$; $\omega_0 = 2\pi/T_0$

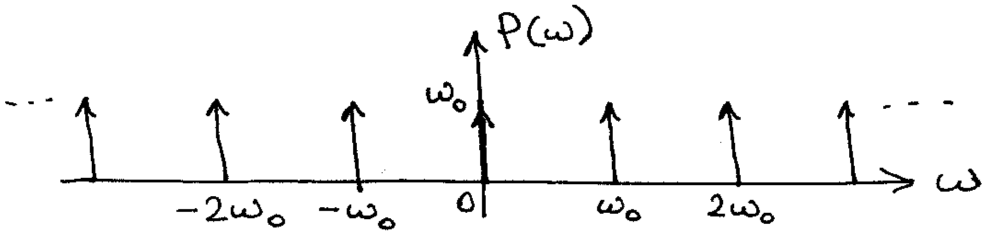
$-\frac{T_0}{2} < t < \frac{T_0}{2}$ aralığında $p(t) = \delta(t)$

$$c_k = \frac{1}{T_0} \underbrace{\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \underbrace{\delta(t)}_{=p(t)} dt}_{1} = \frac{1}{T_0}$$

$\mathcal{F}\{e^{j\omega_0 t}\} = 2\pi\delta(\omega-\omega_0)$

formülü ω_0 yerine $k\omega_0$ için kullanılırsa:

$$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \underbrace{\frac{1}{T_0}}_{c_k} \cdot e^{jk\omega_0 t} \xrightarrow{\mathcal{F}} P(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \overbrace{\frac{2\pi}{T_0}}^{\omega_0} \cdot \delta(\omega - k\omega_0)$$



SS-F-2011-CA-3

4) $\left[(j\omega)^2 + 3(j\omega) + 2\right] Y(\omega) = X(\omega)\left[4(j\omega)+4\right]$ (Her iki tarafın F.dönüşümü alındı)

$$\frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = H(\omega) = \frac{4(j\omega+1)}{(j\omega+1)(j\omega+2)} = \boxed{\frac{4}{j\omega+2} = H(\omega)}$$

↳ Transfer fonksiyon

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{4}{j\omega+2}\right\} = \boxed{4 \cdot e^{-2t} u(t) = h(t)}$$ → Birim darbe tepkisi

5) Her iki tarafın $\mathcal{Z}$-dönüşümü alınırsa:

$$\left[z^2 - 5z + 6\right] Y(z) = X(z)\left[z^2 - z\right]$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \boxed{H(z) = \frac{z^2 - z}{z^2 - 5z + 6}}$$ → Transfer fonksiyon.

YB: $|z| > 3$ (nedensellikten)

$h(t) = \mathcal{Z}^{-1}\{H(z)\}$: birim darbe tepkisi

1. yol:

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{z-1}{(z-2)(z-3)} = \frac{A}{z-2} + \frac{B}{z-3}$$

$$A = \frac{2-1}{2-3} = -1$$

$$B = (3-1)/(3-2) = 2$$

$$H(z) = -\frac{z}{z-2} + 2 \cdot \frac{z}{z-3} \xrightarrow{\mathcal{Z}^{-1}} \boxed{h[n] = \left(2 \times 3^n - 2^n\right) u[n]}$$

2. yol:

$$\begin{array}{r|l} z^2 - z & z^2 - 5z + 6 \\ \hline -\ (z^2 - 5z + 6) & 1 \\ \hline 4z - 6 & \end{array}$$

$$H(z) = 1 + \frac{4z - 6}{(z-2)(z-3)}$$

$$\frac{4z-6}{(z-2)(z-3)} = \frac{a}{z-2} + \frac{b}{z-3} \longrightarrow$$

$$a = (4 \times 2 - 6)/(2-3) = -2$$

$$b = (4 \times 3 - 6)/(3-2) = 6$$

$$H(z) = 1 - 2 \cdot z^{-1} \frac{z}{z-2} + 6 z^{-1} \frac{z}{z-3}$$

z^{-1}: bir adım geciktirici

$1 = \mathcal{Z}\{\delta[n]\}$

$$h[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{H(z)\}$$

$$\boxed{h[n] = \delta[n] - 2 \times 2^{n-1} u[n-1] + 6 \times 3^{n-1} u[n-1]}$$

Dikkat edilirse iki çözümün eşit olduğu görülür.