1

A^k Matrisi

Sürekli zamanlı DZD sistem

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad ; \quad x(t_0) = x_0$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

Ayrık zamanlı DZD sistem

$$x[k+1] = Ax[k] + Bu[k] \quad ; \quad x[k_0] = x_0$$
$$y[k] = Cx[k] + Du[k]$$

x çözümünü bulalım.

$$x[k+2] = Ax[k+1] + Bu[k+1]$$
$$x[k+2] = A^2x[k] + ABu[k] + Bu[k+1]$$
$$x[k+3] = A^2x[k+1] + ABu[k+1] + Bu[k+2]$$
$$x[k_0+3] = A^3x[k_0] + A^2Bu[k_0] + ABu[k_0+1] + Bu[k_0+2]$$

$\vdots$

$$\boxed{x[k] = A^{k-k_0}x[k_0] + \sum_{l=k_0}^{k-1} A^{k-l-1}Bu[l]}$$

$$y[k] = CA^{k-k_0}x[k_0] + \sum_{l=k_0}^{k-1} C\cdot A^{k-l-1}Bu[l] + Du[k]$$

Görüldüğü gibi genel ifade A^k matris fonksiyonu verilen bir A matrisi için bulunmalı.

A^k aynı zamanda $\Phi[0] = I$ için

$\Phi[k+1] = A\Phi[k]$ matris denkleminin çözümüdür

1. yol: $\mathcal{Z}^{-1}$ dönüşümüyle:

Φ denkleminin sağ taraflı $\mathcal{Z}$- dönüşümünü alalım:

$$\left(\mathcal{Z}\{x[n]\} = \sum_{n=0}^{+\infty} x[n] z^{-n} \right. \rightarrow \text{sağ taraflı}$$

$\hookrightarrow -\infty$ olsaydı iki taraflı

Mesela $\mathcal{Z}\{a^n\} = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (az^{-1})^n$

Geometrik seri formülü $S_N = \sum_{k=0}^{N} \alpha^k = \frac{1-\alpha^{N+1}}{1-\alpha}$

$$\mathcal{Z}\{a^n\} = \lim_{N \to +\infty} \frac{1-(az^{-1})^{N+1}}{1-(az^{-1})}$$

Sadece $|az^{-1}|<1$ için yakınsama var. Yani YB: $|z|>|a|$

ve $\mathcal{Z}\{a^n\} = \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}$

Ayrıca zamanda öteleme özelliği

$$\mathcal{Z}\{x[k+1]\} = \sum_{k=0}^{+\infty} x[\underbrace{k+1}_{k \text{ yapmak için}}] z^{-k} = \sum_{k=+1}^{+\infty} x[k] z^{-k+1}$$

$\hookrightarrow$ alt sınırı 0 yapmak için

$$= \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} x[k] z^{-k}}_{X(z) = \mathcal{Z}\{x[k]\}} \cdot z - x[0] z^{-0+1}$$

$$\left. \mathcal{Z}\{x[k+1]\} = zX(z) - zx[0] \right)$$

$$\mathcal{Z}\{\Phi[k+1]\} = A\,\mathcal{Z}\{\Phi[k]\} \quad ; \quad \Phi[0] = I$$

$$\underset{\downarrow I}{z} \cdot \mathcal{Z}\{\Phi[k]\} - z\underbrace{\Phi[0]}_{I} = A \cdot \mathcal{Z}\{\Phi[k]\}$$

$$(zI - A)\,\mathcal{Z}\{\Phi[k]\} = zI \rightarrow \mathcal{Z}\{\Phi[k]\} = z(zI-A)^{-1}$$

$$\Phi[k] = \boxed{A^k = \mathcal{Z}^{-1}\left\{ z(zI-A)^{-1} \right\}}$$

2. yol: Jordan blok köşegenleştirme:

Tıpkı e^{At} için yapıldığı gibi özvektörler veya genelleştirilmiş özvektörlerle V matrisi bulunur, öyle ki

veya $\Lambda = V^{-1}AV$ → Jordan blok köşegen matrisi

J deriz

$(A = V\Lambda V^{-1}) \longrightarrow A^k = V\Lambda^k V^{-1}$

Çakışık özdeğer yoksa

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} \rightarrow \Lambda^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{bmatrix}$$

Çakışık Özdeğerli Durumda A^k Matrisinin Bulunması

Modal matris V yardımıyla Jordan blok köşegen matris

$$J = V^{-1}AV = \mathrm{diag}(J_1, J_2, \ldots, J_i)$$

elde edildikten sonra m_q-boyutlu bir

$$J_q = \begin{bmatrix} \lambda_q & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_q & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_q & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_q \end{bmatrix}_{m_q \times m_q}$$

bloku şöyle de yazılabilir:

$$J_q = \lambda_q I_{m_q} + L_{m_q}$$

Burada L_{m_q} köşegenin bir üst çapraz sırası 1, diğer elemanları sıfırlardan oluşan $m_q \times m_q$ matristir.

$$L_{m_q} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{m_q \times m_q}$$

Dikkat edilirse görülür ki

$$L^2_{m_q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{m_q \times m_q} ,\ldots,\ L^{m_q - 1}_{m_q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{m_q \times m_q} \quad \text{ve nihayet } L^{m_q}_{m_q} = 0 .$$

L_{m_q}'nun karesi alındığında çapraz dizili 1'leri bir sıra sağ üste kaymış, diğer tüm elemanları sıfır olan matris elde edilir. L_{m_q}'nun küpü alındığında da çapraz dizili 1'leri bir sıra daha sağ üste kaymış, diğer tüm elemanları sıfır olan matris elde edilir. Böyle tekrarlı olarak devam edildiğinde $L^{m_q - 1}_{m_q}$ sadece sağ üst köşesi 1, diğer tüm elemanları sıfır olan matris, ve nihayet $k \geq m_q$ için $L^k_{m_q} = 0$ olur. Dolayısıyla binom açılımı ile $k \geq m_q$ için

$$J^k_q = \left(\lambda_q I_{m_q} + L_{m_q}\right)^k = \binom{k}{0}\lambda^k_q I_{m_q} + \binom{k}{1}\lambda^{k-1}_q L_{m_q} + \binom{k}{2}\lambda^{k-2}_q L^2_{m_q} + \ldots + \binom{k}{m_q - 1}\lambda^{k-m_q+1}_q L^{m_q-1}_{m_q}$$

Binom açılımındaki diğer terimler $k \geq m_q$ için $L_{m_q}^k = 0$ olması hasebiyle yok olmuştur. $k < m_q$ için ise yukarıdaki ifadede tanımsız olan binom katsayılı terimler de yok olur.

Hatırlatma: $\begin{pmatrix} k \\ p \end{pmatrix} = \dfrac{k!}{(k-p)! \cdot p!}$

Meselâ $m_q = 2$ boyutlu bir Jordan bloku için $J_q^k = \begin{bmatrix} \lambda_q^k & k\lambda_q^{k-1} \\ 0 & \lambda_q^k \end{bmatrix}$,

$m_q = 3$ boyutlu bir Jordan bloku için $J_q^k = \begin{bmatrix} \lambda_q^k & k\lambda_q^{k-1} & k(k-1)\lambda_q^{k-2}/2 \\ 0 & \lambda_q^k & k\lambda_q^{k-1} \\ 0 & 0 & \lambda_q^k \end{bmatrix}$,

$m_q = 4$ boyutlu bir Jordan bloku için $J_q^k = \begin{bmatrix} \lambda_q^k & k\lambda_q^{k-1} & k(k-1)\lambda_q^{k-2}/2 & k(k-1)(k-2)\lambda_q^{k-3}/6 \\ 0 & \lambda_q^k & k\lambda_q^{k-1} & k(k-1)\lambda_q^{k-2}/2 \\ 0 & 0 & \lambda_q^k & k\lambda_q^{k-1} \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_q^k \end{bmatrix}$.

Hatırlatma: Buradaki m_q, A matrisinin boyutu değildir; A 'nın özdeğerlerinden m_q veya daha yüksek katlı bir özdeğerinin Jordan blok köşegen matrisindeki blok veya bloklarından birinin boyutudur. Aynı katlı özdeğer için birden fazla Jordan bloku olması da mümkündür. Yani farklı özdeğer sayısı en başta verilen i tamsayısına eşit veya daha küçüktür.

Son olarak $J^k = \mathrm{diag}\left(J_1^k, J_2^k, \ldots, J_i^k\right)$ ve $A^k = VJ^kV^{-1}$ ile A^k bulunur.

Örnek:

$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 & -4 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ için A^k matrisini bulunuz.

Çözüm:

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda+1 & 2 & 0 & 4 \\ -1 & \lambda-3 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & \lambda-2 & -2 \\ -2 & -1 & 0 & \lambda-5 \end{vmatrix} = \lambda^4 - 9\lambda^3 + 30\lambda^2 - 44\lambda + 24 = 0$$

$$\rightarrow \quad \lambda_1 = 3 \quad , \quad \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 2$$

Yani 2 farklı özdeğer var; ancak henüz i 'nin 2 mi, 3 mü, 4 mü olduğunu bilmiyoruz. Çünkü $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 2$ özdeğeri için bir veya iki veya üç Jordan bloku mümkündür.

$$\mathrm{Adj}(\lambda I - A) = \begin{bmatrix} \lambda^3 - 10\lambda^2 + 30\lambda - 28 & -2\lambda^2 + 10\lambda - 12 & 0 & -4\lambda^2 + 18\lambda - 20 \\ \lambda^2 - 5\lambda + 6 & \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 & 0 & \lambda^2 - 5\lambda + 6 \\ \lambda^2 - 4\lambda + 4 & 0 & \lambda^3 - 7\lambda^2 + 16\lambda - 12 & 2\lambda^2 - 8\lambda + 8 \\ 2\lambda^2 - 9\lambda + 10 & \lambda^2 - 5\lambda + 6 & 0 & \lambda^3 - 4\lambda^2 + 3\lambda + 2 \end{bmatrix}$$

$\lambda_1 = 3$ için $\mathrm{Adj}(\lambda_1 I - A) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\lambda_2 = 2$ için $\mathrm{Adj}(\lambda_2 I - A) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ olduğu için türevde $\lambda_2 = 2$ yazılır.

$$\frac{d}{d\lambda}\mathrm{Adj}(\lambda I - A) = \begin{bmatrix} 3\lambda^2 - 20\lambda + 30 & -4\lambda + 10 & 0 & -8\lambda + 18 \\ 2\lambda - 5 & 3\lambda^2 - 12\lambda + 11 & 0 & 2\lambda - 5 \\ 2\lambda - 4 & 0 & 3\lambda^2 - 14\lambda + 16 & 4\lambda - 8 \\ 4\lambda - 9 & 2\lambda - 5 & 0 & 3\lambda^2 - 8\lambda + 3 \end{bmatrix}$$

$\lambda_2 = 2$ için $\frac{d}{d\lambda}\mathrm{Adj}(\lambda_2 I - A) = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

Burada rank=1 olduğundan 3 katlı $\lambda_2 = 2$ özdeğeri için 2 adet genelleştirilmiş özvektöre ihtiyacımız vardır. Bunlara v_3 ve v_4 diyelim.

$$(\lambda_2 I - A)v_3 = -v_2 \qquad \rightarrow \qquad \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 4 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -2 \\ -2 & -1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{3,1} \\ v_{3,2} \\ v_{3,3} \\ v_{3,4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Buradaki katsayı matrisinin rankı 2 olduğundan 4 – 2 = 2 adet bilinmeyene keyfi atama yapabiliriz. Meselâ $v_{3,3} = 0$, $v_{3,4} = 0$ atarsak, çelişkiye düşmeden $v_{3,1} = 0$, $v_{3,2} = -1$ buluruz ki böylece bulunan $v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ vektörü diğer 2 özvektörden bağımsız olduğundan sorunsuzca seçilebilir. v_4 için de aynı biçimli

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 4 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -2 \\ -2 & -1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{4,1} \\ v_{4,2} \\ v_{4,3} \\ v_{4,4} \end{bmatrix} = -v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

denkleminde ise çelişkiyle karşılaşmaktayız; çünkü bu matris denklemin 2. ve 3. satırları toplamı sol tarafta 4. satırın sol tarafını vermekte ama sağ tarafta 4. satırın sağ tarafından farklı sonuç vermektedir. Demek ki bu yolla daha fazla genelleştirilmiş özvektör elde edememekteyiz.

Peki şimdi ne yapacağız? İhtiyacımız olan 4. vektörü nasıl bulacağız? Anlaşılan, $\lambda_2 = 2$ özdeğeri için normal bir özvektörü gözden kaçırmış olmalıyız. Burada derste daha önce anlatılmamış bir istisnayla karşılaştık. Tekrar λ 'ya bağlı yazılan $\mathrm{Adj}(\lambda I - A)$ matrisine bakalım. Bunun 3. sütunu ilginçtir; zira hem $\lambda_1 = 3$, hem $\lambda_2 = 2$ için 3. sütun sıfır olmakla beraber, limit durumunda bu sütunun sadece 3. değerinin tam sıfırdan farklı değerlerle sıfıra yakınsadığı açıktır. Bunu da ölçekleyerek v_1, v_2 ve v_3 vektörlerinden bağımsız normal bir özvektör bulabiliriz:

$$v_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Buna göre

$$V = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \rightarrow \qquad V^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$J = V^{-1}AV = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad J^k = \begin{bmatrix} 3^k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & k\cdot 2^{k-1} & 0 \\ 0 & 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2^k \end{bmatrix}$$

Son olarak da

$$A^k = VJ^kV^{-1} = \begin{bmatrix} -3^k + (2-k)\cdot 2^k & -k\cdot 2^k & 0 & -2\cdot 3^k + (2-k)\cdot 2^k \\ \frac{k}{2}\cdot 2^k & (1+\frac{k}{2})\cdot 2^k & 0 & \frac{k}{2}\cdot 2^k \\ 3^k - 2^k & 0 & 2^k & 2\cdot 3^k - 2\cdot 2^k \\ (-1+\frac{k}{2})\cdot 2^k + 3^k & \frac{k}{2}\cdot 2^k & 0 & 2\cdot 3^k + (-1+\frac{k}{2})\cdot 2^k \end{bmatrix}$$

$k=0$ için birim matrisi sağlamaktadır.

Örnek:

$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ -8 & 2 & -4 \end{bmatrix}$ için A^k matrisini bulunuz.

Çözüm:

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 1 & -1 \\ -1 & \lambda+3 & -1 \\ 8 & -2 & \lambda+4 \end{vmatrix} = \lambda^3 + 6\lambda^2 + 12\lambda + 8 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -2$$

Yani tek özdeğer var; ancak henüz i 'nin 1 mi, 2 mi, 3 mü olduğunu bilmiyoruz. Çünkü $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -2$ özdeğeri için bir veya iki veya üç Jordan bloku mümkündür.

$$\mathrm{Adj}(\lambda I - A) = \begin{bmatrix} \lambda^2 + 7\lambda + 10 & -\lambda - 2 & \lambda + 2 \\ \lambda - 4 & \lambda^2 + 3\lambda + 4 & \lambda \\ -8\lambda - 22 & 2\lambda + 6 & \lambda^2 + 2\lambda - 2 \end{bmatrix}$$

$\lambda_1 = -2$ için $\mathrm{Adj}(\lambda_1 I - A) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -6 & 2 & -2 \\ -6 & 2 & -2 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ seçilebilir.

Başka da bağımsız özvektör seçemeyiz. Öyleyse 2 adet genelleştirilmiş özvektöre ihtiyacımız vardır. Bunlara v_2 ve v_3 diyelim.

$$(\lambda_1 I - A)v_2 = -v_1 \qquad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 8 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{2,1} \\ v_{2,2} \\ v_{2,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Buradaki katsayı matrisinin rankı 2 olduğundan $3-2=1$ adet bilinmeyene keyfi atama yaparız. Meselâ $v_{2,1}$'e sıfır veremeyiz; aksi halde ilk iki satırdaki denklemler çelişkili olur. Ama meselâ $v_{2,3} = 0$ seçersek çelişkisiz olarak $v_{2,1} = -1/2$, $v_{2,2} = -3/2$ buluruz.

$$\rightarrow \quad v_2 = \begin{bmatrix} -1/2 \\ -3/2 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \rightarrow \quad (\lambda_1 I - A)v_3 = -v_2 \qquad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 8 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{3,1} \\ v_{3,2} \\ v_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 3/2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Meselâ $v_{3,3} = 0$ seçersek çelişkisiz olarak $v_{3,1} = 1/2$, $v_{3,2} = 2$ buluruz. Yani

$$v_3 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \rightarrow \quad V = \begin{bmatrix} 0 & -1/2 & 1/2 \\ 1 & -3/2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad V^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -8 & 2 & -2 \\ -6 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$J = V^{-1}AV = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$ şeklinde tek bir Jordan bloku elde edilir.

$$J^k = \begin{bmatrix} (-2)^k & k(-2)^{k-1} & k(k-1)(-2)^{k-2}/2 \\ 0 & (-2)^k & k(-2)^{k-1} \\ 0 & 0 & (-2)^k \end{bmatrix}$$

$$A^k = VJ^kV^{-1} = \begin{bmatrix} 1-\dfrac{3k}{2} & \dfrac{k}{2} & -\dfrac{k}{2} \\ \dfrac{k-3k^2}{4} & 1+\dfrac{k+k^2}{4} & \dfrac{-k-k^2}{4} \\ \dfrac{19k-3k^2}{4} & \dfrac{k^2}{4} & 1+\dfrac{5k-k^2}{4} \end{bmatrix} (-2)^k$$

$k=0$ için birim matrisi sağlamaktadır.

Karmaşık özdeğerler için A^k Matrisinin Bulunması

Özdeğerler karmaşık olduğunda da gerçel özdeğerler için uygulanan yöntemi uygulamak mümkündür tabii; ama o zaman karmaşık katsayılı karmaşık üstel fonksiyonlarla uğraşmamız gerekir. Halbuki A matrisi gerçel ise o fonksiyonların gerçel üstel katsayılı gerçel frekanslı sin ve cos fonksiyonları cinsinden yazılabileceğini biliyoruz. Bu yüzden gerçel özdeğerler için uygulanan yöntemi biraz değiştirerek uygularız.

A^k için uygulanan yöntem, e^{At} için uygulanan yönteme oldukça benzemektedir.

Eşlenik haldeki $\lambda_{1,2} = \sigma \pm j\omega = re^{\pm j\varphi}$ karmaşık özdeğer çiftinden biri için bulunan v_1 özvektörünün önce reel sonra sanal kısmını iki ayrı özvektör gibi kullanılırsa, blok köşegen Λ matrisinde bu özdeğer çiftine karşılık $\begin{bmatrix} \sigma & -\omega \\ \omega & \sigma \end{bmatrix}$ bloku elde edilir. Farklı olarak, Λ^k matrisinde buna karşılık $\begin{bmatrix} r^k\cos(\varphi k) & -r^k\sin(\varphi k) \\ r^k\sin(\varphi k) & r^k\cos(\varphi k) \end{bmatrix}$ bloku elde edilir. Sonra yine $A^k = V\Lambda^k V^{-1}$ formülüyle A^k elde edilir.

Örnek:

$$A = \begin{bmatrix} 1.305407289332278 & 1.072273559977166 & -2.083778132003164 \\ 0.694592710667721 & 0.927726440022834 & 2.083778132003164 \\ 0.568699094231240 & -0.936251778882156 & 3.706097282693719 \end{bmatrix}$$

için A^k matrisini bulunuz.

Çözüm:

$$|\lambda I - A| = \lambda^3 - 5.9392\lambda^2 + 11.8785\lambda - 8 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda_1 = 2\,, \quad \lambda_{2,3} = 1.9696 \mp j0.3473 = 2e^{\mp j10^\circ}$$

$$\lambda_1 = 2 \text{ için} \quad \mathrm{Adj}(\lambda_1 I - A) = \begin{bmatrix} 0.1215 & 0.1215 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -0.0405 & -0.0405 & 0 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad v_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ seçilebilir.}$$

$$\lambda_2 = 1.9696 + j0.3473 \text{ için} \quad \mathrm{Adj}(\lambda_2 I - A) = \begin{bmatrix} 0.0211 - j0.2412 & 0.0890 + j0.3724 & 0.0633 - j0.7237 \\ -0.0211 + j0.2412 & -0.0890 - j0.3724 & -0.0633 + j0.7237 \\ -0.0578 + j0.1975 & -0.0121 - j\,0.3252 & -0.1734 + j0.5925 \end{bmatrix}$$

Tüm sütunlar $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -5/6 - j1/6 \end{bmatrix}$ vektörünün katları olduğundan v_2 böyle seçilebilir. Bunun gerçel ve sanal kısımlarını iki ayrı özvektör gibi kullanarak:

$$V=\begin{bmatrix}3 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ -1 & -5/6 & -1/6\end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad V^{-1}=\begin{bmatrix}1/3 & 1/3 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ -2 & 3 & -6\end{bmatrix}$$

$\Lambda = V^{-1}AV=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1.9696 & 0.3473\\ 0 & -0.3473 & 1.9696\end{bmatrix}$ bulunur. $1.9696 \mp j0.3473 = 2e^{\mp j10^\circ}$ olduğundan,

$$\Lambda^k=\begin{bmatrix}2^k & 0 & 0\\ 0 & 2^k\cos(k\cdot 10^\circ) & 2^k\sin(k\cdot 10^\circ)\\ 0 & -2^k\sin(k\cdot 10^\circ) & 2^k\cos(k\cdot 10^\circ)\end{bmatrix}$$

Son olarak

$$A^k=V\Lambda^k V^{-1}=2^k\cdot\begin{bmatrix}1-2\sin(k\cdot 10^\circ) & 1-\cos(k\cdot 10^\circ)+3\sin(k\cdot 10^\circ) & -6\sin(k\cdot 10^\circ)\\ 2\sin(k\cdot 10^\circ) & \cos(k\cdot 10^\circ)-3\sin(k\cdot 10^\circ) & 6\sin(k\cdot 10^\circ)\\ -\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cos(k\cdot 10^\circ)+\frac{5}{3}\sin(k\cdot 10^\circ) & -\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cos(k\cdot 10^\circ)-\frac{8}{3}\sin(k\cdot 10^\circ) & \cos(k\cdot 10^\circ)+5\sin(k\cdot 10^\circ)\end{bmatrix}$$

$k = 0$ için birim matrisi sağlamaktadır.