DOĞRUSAL ZAMANLA DEĞİŞMEZ SİSTEMLERDE

FARK DENKLEMLERİ

$a_N \neq 0$ olmak üzere, giriş(x) – çıkış(y) ilişkisi

$$a_N y[n+N] + a_{N-1} y[n+N-1] + \quad \dots \quad + a_1 y[n+1] + a_0 y[n]$$

$$= b_M x[n+M] + b_{M-1} x[n+M-1] + \quad \dots \quad + b_1 x[n+1] + b_0 x[n] + b_{-1} x[n-1] + \dots$$

gibi N. mertebeden doğrusal bir fark denklemiyle veriliyorsa sistem N. mertebeden doğrusal bir sistemdir. Eğer a_0, a_1, … , a_N ; … , b_{-1}, b_0, b_1, … , b_M katsayılarının hepsi zamana göre sabitse, yani fark denklemi sabit katsayılıysa sistem N. mertebeden doğrusal zamanla değişmez (DZD) bir sistemdir. Bu katsayıların birisi bile sadeleştirilemez bir şekilde zamana bağlıysa doğrusal zamanla değişen bir sistemdir. Ancak her doğrusal veya her DZD sistem böyle ifade edilemeyebilir.

Sistem nedensel ise $M \leq N$ olmak zorundadır.

Verilen bir giriş sinyaline karşılık çıkış sinyalinin bulunabilmesi için N adet şarta ihtiyaç vardır. Genellikle bu şartlar n_0 gibi bir başlangıç anından itibarenki $y[n_0]$, $y[n_0+1]$, … , $y[n_0+N-1]$ değerleri ile verilir, ki bunlara “başlangıç şartları”, böyle problemlere de “başlangıç değer problemi” denir.

Çözüm Adımları

Denklemin sağ tarafını

$$f[n] = b_M x[n+M] + b_{M-1} x[n+M-1] + \quad \dots \quad + b_1 x[n+1] + b_0 x[n] + b_{-1} x[n-1] + \dots$$

tanımlayarak çözüm adımlarını önce özetle, sonra bazılarını ayrıntılarıyla verelim:

1) $f[n]$ yerine sıfır, y yerine y_h yazılarak homojen çözüm(y_h) bulunur. Bu çözüm henüz belirlenmemiş N adet sabite bağlı olarak yazılır.

2) Denklemdeki $f[n]$ dikkate alınarak, fakat hiçbir homojen çözüm bileşeni içermeyen özel çözüm($y_ö$) bulunur. Bu çözümdeki bütün sabitler bu aşamada belirlenir.

3) $y[n] = y_h[n] + y_ö[n]$ biçiminde toplam çözüm yazılır. Buradaki N adet sabit, başlangıç şartları kullanılarak belirlenir.

Eğer $f[n]$ parçalı tanımlıysa, her tanım aralığı için: 1. adımda y_h, sabitler için farklı semboller kullanılarak aynı biçimli olarak yazılır. 2. adımda $f[n]$ ’in yalnızca değişen bileşenlerine karşılık gelen özel çözüm bileşenleri yeniden bulunur. Değişmeyen bileşenlere karşılık gelen özel çözüm bileşenleri aynı kalır. 3. adımın da tekrarlanması gerekir; ancak her aralık için ayrı ayrı başlangıç şartları verilmez. Geçiş sınırındaki bazı çözüm değerleri hem önceki hem sonraki bölgenin çözüm fonksiyonunu sağlıyorsa her iki bölgede de sabitleri bulmak için şart olarak kullanılarak geçiş sağlanır. Ya da fark denklemi geçiş anlarında sadece bir bilinmeyen olacak şekilde tekrar tekrar kullanılarak geçiş değerleri veya diğer bölgenin başlangıç şartları elde edilir.

1. Homojen çözüm

$$a_N y_h[n+N] + a_{N-1} y_h[n+N-1] + \quad \ldots \quad + a_1 y_h[n+1] + a_0 y_h[n] = 0$$

homojen denkleminin çözümünün, λ^n biçiminde bileşeni olduğunu varsayarak bu çözümü homojen denklemde yerine yazalım. Bu bileşenin her türevini alışta bir λ çarpanı geleceği için:

$$a_N \lambda^{n+N} + a_{N-1}\lambda^{n+N-1} + \quad \ldots \quad + a_1\lambda^{n+1} + a_0\lambda^n = 0$$

λ^n sadeleştirilirse:

$$\boxed{a_N \lambda^{N} + a_{N-1}\lambda^{N-1} + \quad \ldots \quad + a_1\lambda + a_0 = 0}$$

Bu denkleme, fark denkleminin ya da sistemin karakteristik denklemi denir. λ_1, λ_2, … , λ_N köklerinin her birine ise fark denkleminin ya da sistemin özdeğeri (eigenvalue), ya da karakteristik kökü denir. Her bir özdeğer için bir homojen çözüm bileşeni bulunması mümkün olduğu için homojen çözümün genel ifadesi, <u>çakışık özdeğer yoksa</u> (tüm özdeğerler birbirinden farklıysa) şöyle olur:

$$y_h[n] = A_1\lambda^n + \ldots + A_N\lambda^n$$

Eğer <u>çakışık özdeğer varsa</u>, meselâ λ_k, m-katlı bir özdeğer ($\lambda_k = \lambda_{k+1} = \ldots = \lambda_{k+m-1}$) ise bunlara karşılık gelen homojen çözüm kısmı

$$A_k\lambda^n + A_{k+1}n\lambda^n + \ldots + A_{k+m-1}n^{m-1}\lambda^n = \left(A_k + A_{k+1}n + \ldots + A_{k+m-1}n^{m-1}\right)\lambda^n$$

olur. İstenirse bu bileşenlerdeki n ’lerin hepsinin yerine meselâ $(n-3)$ gibi kaymalı bir ifade de yazılabilir; bu sadece katsayıların farklı olmasını gerektirir, ki henüz belirlenmemiş katsayıların buna göre belirlenmesi sorun teşkil etmez. Böyle kaymalı ifadeler bazen hesap ve yorum kolaylığı sağlayabilir.

<u>*Örnek:*</u> $y_h[n+6] - \frac{5}{2}y_h[n+5] + \frac{5}{4}y_h[n+4] + \frac{13}{8}y_h[n+3] - \frac{17}{8}y_h[n+2] + \frac{7}{8}y_h[n+1] - \frac{1}{8}y_h[n] = 0$ homojen denkleminin çözüm ifadesini bulunuz.

Çözüm: $\lambda^6 - \frac{5}{2}\lambda^5 + \frac{5}{4}\lambda^4 + \frac{13}{8}\lambda^3 - \frac{17}{8}\lambda^2 + \frac{7}{8}\lambda - \frac{1}{8} = 0$ karakteristik denkleminden özdeğerler $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -1$, $\lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = 1/2$ bulunur. Buna göre

$$y_h[n] = A_1 \cdot 1^n + A_2 n \cdot 1^n + A_3(-1)^n + A_4\frac{1}{2^n} + A_5 n\frac{1}{2^n} + A_6 n^2\frac{1}{2^n}$$

$$= \left(A_1 + A_2 n\right) + A_3(-1)^n + \left(A_4 + A_5 n + A_6 n^2\right)\frac{1}{2^n}$$ □

<u>*Örnek:*</u> $y[n+3] - y[n+2] + 0{,}24y[n+1] = x[n+1] - 2x[n]$ denkleminin homojen çözüm ifadesini bulunuz.

Çözüm: $\lambda^3 - \lambda^2 + 0{,}24\lambda = 0$ karakteristik denkleminden özdeğerler $\lambda_1 = 0{,}4$, $\lambda_2 = 0{,}6$, $\lambda_3 = 0$ bulunur.
Buna göre: $y_h[n] = A_1 \cdot (0{,}4)^n + A_2 \cdot (0{,}6)^n + A_3 0^n$

Bu yol **yanlıştır.**

Not:
Hiçbir özdeğer sıfır çıkmayacak şekilde düzenleme yapılmalı, ya da sıfır çıkan kökler özdeğer olarak dikkate alınmamalıdır.

Çözüm: Buna göre ya denklemi

$$y[n+2] - y[n+1] + 0{,}24y[n] = x[n] - 2x[n-1]$$

gibi düzenleyerek ya da doğrudan karakteristik denklemde varsa λ çarpan(lar)ını atarak $\lambda^2 - \lambda + 0{,}24 = 0$ gibi yazarız. Buna göre, $\lambda_1 = 0{,}4$, $\lambda_2 = 0{,}6$ bulunur ve buradan $y_h[n] = A_1 \cdot (0{,}4)^n + A_2 \cdot (0{,}6)^n$ elde edilir.

Not:
Eğer $\lambda_{k,k+1} = re^{\mp j\Omega}$ gibi eşlenik çiftler halinde karmaşık özdeğerler varsa, bunlara karşılık gelen homojen çözüm bileşenleri, çakışık özdeğer değilseler

$$B\,r^n \sin[\Omega n] + C\,r^n \cos[\Omega n]$$

biçiminde de yazılabilir. Ayrıca bu özdeğerlerin çakışması da varsa bunun da n ’in uygun kuvvetleriyle çarpılmış biçimleri de gelir.

<u>*Örnek:*</u> $y_h[n+3] - y_h[n+2] + 2y_h[n+1] + 4y_h[n] = 0$ homojen denkleminin çözüm ifadesini bulunuz.

Çözüm: $\lambda^3 - \lambda^2 + 2\lambda + 4 = 0$ karakteristik denkleminden özdeğerler $\lambda_1 = -1$, $\lambda_{2,3} = 1 \mp j\sqrt{3} = 2 \cdot e^{\mp j60^\circ}$ bulunur. Çakışık kök olmadığı için:

$$y_h[n] = A_1(-1)^n + A_2 2^n \cos[n \cdot 60^\circ] + A_3 2^n \sin[n \cdot 60^\circ]$$ olur.

<u>*Örnek:*</u> $y_h[n+4] - 2\sqrt{3}y_h[n+3] + 5y_h[n+2] - 2\sqrt{3}y_h[n+1] + y_h[n] = 0$ homojen denkleminin çözüm ifadesini bulunuz.

Çözüm: $\lambda^4 - 2\sqrt{3}\lambda^3 + 5\lambda^2 - 2\sqrt{3}\lambda + 1 = 0$ karakteristik denkleminden özdeğerler

$\lambda_1 = \lambda_2 = \dfrac{\sqrt{3} + j}{2} = e^{j30^\circ}$ ve $\lambda_3 = \lambda_4 = \dfrac{\sqrt{3} - j}{2} = e^{-j30^\circ}$ bulunur. Eşlenik köklerin her biri 2 katlı olduğu için:

$$y_h[n] = A_1 \cos[n \cdot 30^\circ] + A_2 \sin[n \cdot 30^\circ] + A_3 n \cos[n \cdot 30^\circ] + A_4 n \sin[n \cdot 30^\circ]$$

$$= (a_1 + a_2 n)\left(b_1 \cos[n \cdot 30^\circ] + b_2 \sin[n \cdot 30^\circ]\right)$$

olur. Bu iki biçimden istenen kullanılabilir. □

2. Özel çözüm

Fark denkleminin sağ tarafı $f[n]$ bileşenlerine ayrılır. Her bileşen için ayrı ayrı özel çözüm bileşenleri bulunur ve hepsinin toplamı özel çözüm olur. Özel çözüm, homojen çözüm tarafından kapsanan herhangi bir bileşen içermemelidir.

$r_1 \cdot p_1^n$ gibi bir bileşen için özel çözüm bileşeni:

$$p_1 \notin \{\lambda_1, \ldots, \lambda_N\} \quad \text{ise} \quad y_{ö1}[n] = c_1 \cdot p_1^n$$

$p_1 = \lambda_k$ gibi m-katlı bir özdeğere eşitse (bu özdeğer çakışık değilse $m = 1$'dir) $y_{ö1}[n] = c_1 n^m \lambda_k^n$ olur. $f[n]$ içindeki sabit terimler için $p_1 = 1$ olduğu unutulmamalıdır.

Özel çözüm bileşenlerinin katsayıları, başlangıç şartları kullanılmadan belirlenmelidir. Bunun için, c_1 katsayısı, fark denkleminde y yerine $y_{ö1}$ ve $f[n]$ yerine yalnızca ilgili bileşeni $(r_1 \cdot p_1^n)$ yazılarak bulunur. Bu yol,

$$p_1 \notin \{\lambda_1, \ldots, \lambda_N\} \quad \text{ise} \quad c_1 = \frac{r_1}{a_N p_1^N + a_{N-1} p_1^{N-1} + \quad \ldots \quad + a_1 p_1 + a_0}$$

biçiminde paydada karakteristik denklemin λ yerine p_1 kullanılmışı olan kısa bir hale gelir. p_1 'in bir özdeğere eşit olması durumunda bu kısa yol geçersizdir.

Tüm bileşenler için özel çözüm bileşenleri bulunduktan sonra bunların toplamı alınarak özel çözüm bulunur:

$$y_ö[n] = y_{ö1}[n] + y_{ö2}[n] + \ldots$$

Özel çözüm bileşenlerinde de istenirse n yerine meselâ $(n - 5)$ gibi kaymalı bir ifade de yazılabilir; bu sadece katsayıların farklı olmasını gerektirir, ki henüz belirlenmemiş katsayıların buna göre belirlenmesi sorun teşkil etmez. Böyle kaymalı ifadeler bazen hesap ve yorum kolaylığı sağlayabilir.

3. Sağ tarafın parçalı tanımlı olduğu durumlarda geçiş şartları

Zamanda ileriye doğru giderken, sağ tarafın ($f[n]$ 'in) tanım ifadesindeki bir değişiklik, çıkışa etkisini ilk olarak N adım sonra gösterir. Bu yüzden önceki zaman aralığının çözümü, tanım ifadesindeki değişikliğin ortaya çıktığı an ve sonraki N–1 adımda da geçerli olur. Yani sağ taraftaki değişiklik anı ve sonraki N–1 adımdaki (toplam N adet) çıkış değerleri, önceki aralığın çözümünden hesaplanarak yeni tanım bölgesinin başlangıç değerleri olarak kullanılabilir. Çözümü veya başlangıç şartları bilinen bölge ileride, katsayıları bulunacak bölge bunun hemen gerisinde ise benzer mantık tersten işletilerek gerideki bölgenin son değerleri yerine, hemen ilerisindeki bölgenin bu N adet başlangıç şartı (sağdaki değişiklik anı ve sonraki N–1 adımdaki çıkış değerleri) gerideki bölgenin çözümünde kullanılarak homojen çözüm katsayıları bulunabilir. Bu husus örnekler üzerinde daha iyi anlaşılacaktır.

Bu anlatım, fark denkleminin burada gösterilen öteleme biçimleriyle ifade edilmiş hali içindir. Başka gösterimler de mümkün olup, anlatılan yöntemin o gösterime göre uyarlanması gerekebilir.

Örnek: $y[n+2] - 0{,}3y[n+1] + 0{,}02y[n] = x[n]$ sisteminin çıkışını, $x[n] = 2 + 0{,}3^n u[n]$ girişi ve $y[0] = y[1] = 0$ başlangıç şartları için bulunuz.

Çözüm: $\lambda^2 - 0{,}3\lambda + 0{,}02 = 0 \rightarrow \lambda_1 = 0{,}1 \;, \quad \lambda_2 = 0{,}2$.

$$n < 0 \quad \Rightarrow \quad y_h[n] = A_1(0{,}1)^n + A_2(0{,}2)^n$$

$f[n] = x[n] = 2 = 2\times 1^n$ için, $1 \notin \{\lambda_1, \lambda_2\}$ olduğundan, $y_{ö1}[n] = c_1 \cdot 1^n = c_1$

$$y_{ö1}[n+2] - 0{,}3y_{ö1}[n+1] + 0{,}02y_{ö1}[n] = 2 = c_1 - 0{,}3c_1 + 0{,}02c_1 \rightarrow c_1 = 25/9 = y_{ö1}[n]$$

$$y[n] = A_1(0{,}1)^n + A_2(0{,}2)^n + \frac{25}{9}$$

Buradaki A_1 ve A_2 katsayılarını bulmak için $n < 0$ bölgesine ait 2 adet şart yerine, değişim anı ve N–1=1 adım sonrası değerleri, $y[0]$ ve $y[1]$, $n < 0$ bölgesinin çözümüyle kullanılacaktır. Çünkü değişimin çıkışa etkisi $y[2]$ 'den itibaren görülür. Buna göre katsayılar:

$$y[0] = 0 = A_1 + A_2 + \frac{25}{9}$$

$$y[1] = 0 = 0{,}1A_1 + 0{,}2A_2 + \frac{25}{9} \rightarrow A_1 = 200/9, \quad A_2 = -25 \text{ bulunur. Yani}$$

$$n < 0 \quad \Rightarrow \quad y[n] = \frac{200}{9}(0{,}1)^n - 25\cdot(0{,}2)^n + \frac{25}{9} \quad .$$

$$n \geq 0 \quad \Rightarrow \quad y_h[n] = B_1(0{,}1)^n + B_2(0{,}2)^n$$

$f[n] = x[n] = 2 + (0{,}3)^n$ içindeki 2 bileşeni değişmediği için yine $y_{ö1}[n] = 25/9$

$(0{,}3)^n$ için, $0{,}3 \notin \{\lambda_1, \lambda_2\}$ olduğundan, $y_{ö2}[n] = c_2 \cdot (0{,}3)^n$

$$y_{ö2}[n+2] - 0{,}3y_{ö2}[n+1] + 0{,}02y_{ö2}[n] = (0{,}3)^n$$

$$= c_2 \cdot \left((0{,}3)^{n+2} - 0{,}3\times(0{,}3)^{n+1} + 0{,}02\times(0{,}3)^n\right) = 1\times(0{,}3)^n$$

$$\rightarrow \quad c_2 = \frac{1}{0{,}3^2 - 0{,}3\times 0{,}3 + 0{,}02} = 50 \qquad y_{ö2}[n] = 50\cdot(0{,}3)^n$$

$$y[n] = B_1(0{,}1)^n + B_2(0{,}2)^n + \frac{25}{9} + 50\cdot(0{,}3)^n$$

$$y[0] = 0 = B_1 + B_2 + \frac{25}{9} + 50$$

$$y[1] = 0 = 0{,}1B_1 + 0{,}2B_2 + \frac{25}{9} + 15 \quad \rightarrow \quad B_1 = \frac{650}{9} \;, \quad B_2 = -125 \text{ bulunur.}$$

Sonuç: $$y[n] = \begin{cases} \frac{200}{9}(0{,}1)^n - 25\cdot(0{,}2)^n + \frac{25}{9} & n < 0 \\ \frac{650}{9}(0{,}1)^n - 125\cdot(0{,}2)^n + \frac{25}{9} + 50\cdot(0{,}3)^n & n \geq 0 \end{cases}$$

Örnek: $y[n+2]-y[n]=x[n]$ sisteminin çıkışını, $x[n]=2^n u[n]+3^{n-5}u[n-5]$ girişi ve $y[0]=1$, $y[1]=2$ başlangıç şartları için bulunuz.

Çözüm: $\lambda^2-1=0$ → $\lambda_1=1$, $\lambda_2=-1$. $n<0$ için $x[n]=0$ olduğundan,

$n<0 \quad \Rightarrow \quad y[n]=y_h[n]=A_1\cdot 1^n + A_2(-1)^n$. Katsayıları bulmak için $n<0$ bölgesine ait 2 adet şart yerine değişim anı ve N–1 = 1 adım sonrası değerleri, yani $y[0]$ ve $y[1]$, $n<0$ bölgesinin çözümüyle kullanılacaktır. Çünkü değişimin çıkışa etkisi $y[2]$ 'den itibaren görülür. Buna göre katsayılar:

$$y[0]=1=A_1+A_2$$

$y[1]=2=A_1-A_2$ → Buradan $A_1=3/2$, $A_2=-1/2$ bulunur.

Yani $n<0 \quad \Rightarrow \quad y[n]=\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}(-1)^n$.

$0\le n<5 \quad \Rightarrow \quad y_h[n]=B_1+B_2(-1)^n$

$f[n]=2^n=1\times 2^n$ için $2\notin\{1,-1\}$ olduğundan $y_{ö1}[n]=c_1 2^n$

$$c_1=\frac{1}{2^2-1}=1/3 \quad \to \quad y_{ö1}=\frac{1}{3}\cdot 2^n$$

$y[n]=B_1+B_2(-1)^n+\dfrac{1}{3}\cdot 2^n$. Verilen başlangıç şartları bu bölgeye aittir:

$$y[0]=B_1+B_2+1/3=1$$

$y[1]=B_1-B_2+2/3=2$ → Buradan $B_1=1$, $B_2=-1/3$ bulunur.

Yani $0\le n<5 \quad \Rightarrow \quad y[n]=1-\dfrac{1}{3}(-1)^n+\dfrac{1}{3}\cdot 2^n$.

$n\ge 5$ için de 2 şart gerekmektedir. Sağ tarafın tanım ifadesindeki değişim anı ve N–1 adım sonrasındaki değerler, $y[5]$ ve $y[6]$, hem $0\le n<5$ hem de $n\ge 5$ bölgelerinin çözüm fonksiyonlarını sağlar. Çünkü değişimin etkisi $y[7]$ 'den itibaren görülür. Bu yüzden önceki bölgenin çözümünden:

$$y[5]=1+\frac{1}{3}+\frac{32}{3}=12$$

$y[6]=1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{64}{3}=22$ bulunur. Bunlar biraz ileride kullanılacaktır.

$n\ge 5 \quad \Rightarrow \quad y_h[n]=D_1+D_2(-1)^n$

$f[n]=2^n+3^{n-5}$ olup 2^n terimi değişmediği için yine $y_{ö1}[n]=\dfrac{1}{3}\cdot 2^n$

$3^{n-5} = 1 \times 3^{n-5}$ için $3 \notin \{1\,,-1\}$ olduğundan $y_{ö2}[n] = c_2 3^{n-5} \quad \rightarrow \quad c_2 = \dfrac{1}{3^2 - 1} = \dfrac{1}{8}$

$\rightarrow \quad y[n] = D_1 + D_2(-1)^n + \dfrac{1}{3} \cdot 2^n + \dfrac{1}{8} \cdot 3^{n-5}$. Az önce bulunan $y[5]$ ve $y[6]$ kullanılarak:

$$y[5] = 12 = D_1 - D_2 + \frac{32}{3} + \frac{1}{8}$$

$y[6] = 22 = D_1 + D_2 + \dfrac{64}{3} + \dfrac{3}{8}$ → Buradan $D_1 = 3/4$, $D_2 = -11/24$ bulunur.

Sonuçta tüm zamanlar için yazarsak: $y[n] = \begin{cases} \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2}(-1)^n & n < 0 \\ 1 - \dfrac{1}{3}(-1)^n + \dfrac{1}{3} \cdot 2^n & 0 \le n < 5 \\ \dfrac{3}{4} - \dfrac{11}{24}(-1)^n + \dfrac{1}{3} \cdot 2^n + \dfrac{1}{8} \cdot 3^{n-5} & n \ge 5 \end{cases}$

Not: Yeterli sayıda başlangıç şartı içeremeyecek kadar küçük bir parçadan sonra yeni bir tanım aralığı geliyorsa bu yöntemde bazı değişiklikler gerekir. Daha kolayı, böyle bir geçiş aralığının her noktasında ve sıradaki geniş tanım aralığının yeterli sayıda başlangıç şartını elde edene kadar, fark denklemini yalnız bir bilinmeyen olacak birer an için yazıp tekrar tekrar çözmektir. Örneğin son sorudaki $y[5]$, fark denkleminin $n = 3$ anı için yazılmasıyla da çözülebilirdi:

$$y[5] - y[3] = 2^3 u[3] + 3^{3-5} u[3-5] = 8 \quad \rightarrow \quad y[5] = y[3] + 8$$

$0 \le n < 5$ bölgesi çözümünden $y[3] = 1 - \dfrac{1}{3}(-1)^3 + \dfrac{1}{3} \cdot 2^3 = 4$ olduğu için $y[5] = 12$ bulunur.

<u>Örnek:</u> $6y[n+2] - 5y[n+1] + y[n] = 6x[n]$ sisteminin çıkışını, $x[n] = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n u[n]$ girişi ve $y[0] = y[1] = 0$ başlangıç şartları için bulunuz.

Çözüm: $6\lambda^2 - 5\lambda + 1 = 0$ → $\lambda_1 = 1/2$, $\lambda_2 = 1/3$. $n < 0$ için $x[n] = 0$ olduğundan,

$n < 0 \quad \Rightarrow \quad y[n] = y_h[n] = A_1 \dfrac{1}{2^n} + A_2 \dfrac{1}{3^n}$. Bu katsayıları bulmak için $n < 0$ bölgesine ait 2 adet şart yerine, aynı çözüm $y[0] = y[1] = 0$ şartlarını da sağladığı için:

$$y[0] = 0 = A_1 + A_2$$

$y[1] = 0 = \dfrac{1}{2} A_1 + \dfrac{1}{3} A_2$ kullanılarak $A_1 = A_2 = 0$ bulunur. Yani $n < 0 \quad \Rightarrow \quad y[n] = 0$.

$n \ge 0$ için homojen çözüm farklı katsayılarla aynı biçimli olur: $y_h[n] = B_1 \dfrac{1}{2^n} + B_2 \dfrac{1}{3^n}$.

$n \geq 0$ için $f[n] = 6x[n] = 6\left(\frac{2}{3}\right)^n$ ve $\frac{2}{3} \notin \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\}$ olduğundan $y_ö[n] = c\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

$c = \frac{6}{6 \cdot (2/3)^2 - 5 \cdot (2/3) + 1} = 18$ bulunur. Dolayısıyla $y_ö[n] = c\left(\frac{2}{3}\right)^n$ ve $y[n] = B_1 \frac{1}{2^n} + B_2 \frac{1}{3^n} + 18 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n$. Verilen başlangıç şartları bu bölgeye aittir:

$$y[0] = 0 = B_1 + B_2 + 18$$

$$y[1] = 0 = \frac{B_1}{2} + \frac{B_2}{3} + 12 \quad \rightarrow \quad B_1 = -36\,,\ B_2 = 18\ .$$

Sonuçta tüm zamanların çözümü:
$$y[n] = \begin{cases} 0 & n < 0 \text{ ise} \\ -\frac{36}{2^n} + \frac{18}{3^n} + 18 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n & n \geq 0 \text{ ise} \end{cases}$$

ya da kısaca $y[n] = \left[-\frac{36}{2^n} + \frac{18}{3^n} + 18 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n\right] u[n]$ hatta $y[n] = \left[-\frac{36}{2^n} + \frac{18}{3^n} + 18 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n\right] u[n-1]$ ya da $y[n] = \left[-\frac{36}{2^n} + \frac{18}{3^n} + 18 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n\right] u[n-2]$ yazılabilir; çünkü $n = 0$ ve $n = 1$'de zaten katsayılar (başlangıç şartları) gereği $y[n] = 0$ 'dır. Sıfırdan farklı ilk değeri $n = 2$'de aldığı için $u[n-2]$ çarpanı yazılabilir.

Not:

Eğer $n < n_0$ için $f[n] = 0$ ise yani $f[n] = (\ldots)u[n - n_0]$ biçiminde yazılabiliyor <u>ve</u> $y[n_0] = y[n_0 + 1] = \ldots = y[n_0 + N - 1] = 0$ (istisnasız hepsi sıfır) ise $n < n_0$ için $y[n] = 0$ olacağı zaten bellidir. Bu yüzden böyle bir durumda yalnız $n \geq n_0$ için $u[n - n_0] = 1$ koyarak bulunan çözümü $u[n - n_0]$ ile çarparak tüm zamanların çözümü elde edilir. Hatta başlangıç şartları gereği $y[n] = 0$ olan bölge $n < n_0 + N$ biçiminde genişletilebileceği için $u[n - n_0]$ ile çarpmak yerine $u[n - n_0 - N]$ ile çarpmak da mümkündür; çünkü bu şartlarda $y[n]$ sıfırdan farklı bir değeri en erken $n = n_0 + N$ anında alabilir.

<u>*Örnek:*</u> $y[n+2] - 2y[n+1] + y[n] = 2x[n]$ sisteminin çıkışını, $x[n] = u[n-5]$ girişi ve $y[5] = y[6] = 0$ başlangıç şartları için bulunuz.

Çözüm: $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 1$ Az önceki nottaki şartlar $n_0 = 5$ için sağlanmaktadır.

$$n \geq 5 \quad \Rightarrow \quad y_h[n] = A_1 \cdot 1^n + A_2 n \cdot 1^n = A_1 + A_2 n$$

Sağ taraf $f[n] = 2 = 2 \times 1^n$ için taban $1 = \lambda_1 = \lambda_2$ iki katlı özdeğere eşit olduğundan

$y_ö[n] = cn^2 \cdot 1^n = cn^2 \quad \rightarrow$ fark denkleminde y yerine yazılırsa

$c(n+2)^2-2c(n+1)^2+cn^2=2$. Sağ tarafta n ve n^2 ile çarpılan bir terim olmadığı için sol taraftaki n ve n^2 ile çarpılan terimlerle de ilgilenmiyoruz, “…” diyerek geçiyoruz. Zaten onların sıfır çıkacağı bellidir ve c ’nin bulunmasına faydası olmayacaktır.

$n^2(\ldots)+n(\ldots)+(4-2)c=2 \quad \rightarrow \quad c=1 \quad \rightarrow \quad y_ö[n]=n^2$

$y[n]=A_1+A_2n+n^2$ olur. Başlangıç şartlarından

$y[5]=A_1+5A_2+25=0$

$y[6]=A_1+6A_2+36=0 \qquad \rightarrow \quad A_1=30\,, \quad A_2=-11$ bulunur.

Sonuç olarak tüm zamanlar için çözüm: $y[n]=\left(30+11n+n^2\right)u[n-5]$ veya istenirse $y[n]=\left(30+11n+n^2\right)u[n-6]$ ya da $y[n]=\left(30+11n+n^2\right)u[n-7]$ diye de yazılabilir.

Not:
$f[n]$ trigonometrik veya üstel çarpanlı trigonometrik bir bileşen içeriyorsa bunun üstel sinyaller biçimindeki ifadesinin tabanları $p_{1,2}=R\cdot e^{\mp j\theta}$ gibi eşlenik çiftlere karşılık gelir. Dolayısıyla $f[n]$ içindeki $b_1R^n\cos[n\theta]+b_2R^n\sin[n\theta]$ bileşenine karşılık, bu ikisinden yalnız birisi olsa bile, $R\cdot e^{\mp j\theta}\not\subset\{\lambda_1,\ldots,\lambda_N\}$ ise özel çözüm bileşeni olarak

$$c_1R^n\cos[n\theta]+c_2R^n\sin[n\theta]$$

yazılır. Eğer $R\cdot e^{\mp j\theta}$, m-katlı bir özdeğer çiftine eşitse, yukarıdaki ifadenin n^m ile çarpılmışı yazılır. $R=1$ için bu, *zorlanmış rezonans* olduğu anlamına gelir.

<u>*Örnek:*</u> $4y[n+2]-2\sqrt{3}y[n+1]+y[n]=2x[n]$ sisteminin çıkışını, $x[n]=\cos[n\pi/6]\cdot u[n-2]$ girişi ve $y[2]=y[3]=0$ başlangıç şartları için bulunuz.

Çözüm: $4\lambda^2-2\sqrt{3}\lambda+1=0 \qquad \rightarrow \qquad \lambda_{1,2}=\dfrac{\sqrt{3}\mp j}{4}=\dfrac{1}{2}e^{\mp j\pi/6}$

$n\geq 2 \quad \Rightarrow$ homojen çözüm: $y_h[n]=A\dfrac{1}{2^n}\cos[n\pi/6]+B\dfrac{1}{2^n}\sin[n\pi/6]$.

$f[n]=2x[n]=2\cos[n\pi/6]$ için üstel bileşenlerin tabanları $e^{\mp j\pi/6}\not\subset\{\lambda_1,\lambda_2\}$ olduğu için özel çözüm: $y_ö[n]=c_1\cos[n\pi/6]+c_2\sin[n\pi/6]$. Bunu fark denkleminde y yerine yazarsak:

$$4c_1\cos[n\pi/6+\pi/3]+4c_2\sin[n\pi/6+\pi/3]-2\sqrt{3}c_1\cos[n\pi/6+\pi/6]-2\sqrt{3}c_2\sin[n\pi/6+\pi/6]$$
$$+c_1\cos[n\pi/6]+c_2\sin[n\pi/6]=2\cos[n\pi/6]$$

$$\rightarrow \quad \left(2c_1+2\sqrt{3}c_2-3c_1-\sqrt{3}c_2+c_1\right)\cos[n\pi/6]+\left(2c_2-2\sqrt{3}c_1+\sqrt{3}c_1-3c_2+c_2\right)\sin[n\pi/6]=2\cos[n\pi/6]$$

Katsayı denklemlerinden: $\sqrt{3}c_2 = 2 \quad \rightarrow \quad c_2 = 2/\sqrt{3}$ ve $-\sqrt{3}c_1 = 0 \quad \rightarrow \quad c_1 = 0$ bulunur.

$n \geq 2$ için toplam çözüm: $y[n] = A\frac{1}{2^n}\cos[n\pi/6] + B\frac{1}{2^n}\sin[n\pi/6] + \frac{2}{\sqrt{3}}\sin[n\pi/6]$

Başlangıç şartlarından $\quad y[2] = \frac{A}{4}\cos\frac{\pi}{3} + \frac{B}{4}\sin\frac{\pi}{3} + \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\frac{\pi}{3} = \frac{A}{8} + \frac{\sqrt{3}B}{8} + 1 = 0$

$$y[3] = \frac{A}{8}\cos\frac{\pi}{2} + \frac{B}{8}\sin\frac{\pi}{2} + \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\frac{\pi}{2} = 0 + \frac{B}{8} + \frac{2}{\sqrt{3}} = 0$$

$A = 8$ ve $B = -16/\sqrt{3}$ bulunur. Şartlar sağlandığı için $n \geq 2$ çözümünü $u[n-2]$ ile çarparak tüm zamanların çözümü elde edilir:

$$y[n] = \left(\frac{8}{2^n}\cos[n\pi/6] - \frac{16}{2^n\sqrt{3}}\sin[n\pi/6] + \frac{2}{\sqrt{3}}\sin[n\pi/6]\right)\cdot u[n-2]$$

İstenirse $u[n-2]$ yerine $u[n-3]$ ya da $u[n-4]$ de yazılabilir.

Fark Denkleminin Sağ Tarafında Darbe Varsa Çözüm

$$a_N y[n+N] + a_{N-1}y[n+N-1] + \quad \ldots \quad + a_1 y[n+1] + a_0 y[n] = f[n] = g[n] + r\delta[n-n_0]$$

biçiminde olsun. Burada $a_N \neq 0$ olsun. r ’nin ise sabit ya da n ’ye bağlı olması hiç fark etmez; çünkü n ’ye bağlı olsa da yalnızca n_0 ’daki değeri kullanılır.

Böyle bir durumda $n < n_0$ ve $n > n_0$ bölgeleri için ayrı ayrı çözüm yapılır ve tabii bu bölgelerde $\delta[n-n_0] = 0$ olduğundan bu darbe dikkate alınmaz. $n < n_0$ bölgesinin çözüm fonksiyonuna $y_1[n]$ diyelim. $n > n_0$ bölgesinde değişen homojen çözüm katsayılarını bulmak için kullanılması gereken, başlangıç değerleri şöyle bulunur: Denkleme göre $\delta[n-n_0]$ darbesinin sıfırdan farklı değeri ilk olarak $y[n_0+N]$ ’i etkiler. Bu yüzden

$$y[n_0+N] = y_1[n_0+N] + \frac{r}{a_N}$$

$$\left.\begin{aligned} y[n_0+N-1] &= y_1[n_0+N-1] \\ &\vdots \\ y[n_0+1] &= y_1[n_0+1] \end{aligned}\right\} \quad \rightarrow \text{ Bu kısım } N \geq 2 \text{ için uygulanır.}$$

$N = 1$ ise yalnızca en üstteki, yani $y[n_0+1] = y_1[n_0+1] + \frac{r}{a_N}$ uygulanır.

İspat: $n < n_0$ bölgesinin çözümü $y_1[n]$, $n \leq n_0 + N - 1$ bölgesine kadar $y[n]$ yerine yazılabileceği için, $n = n_0$ için fark denklemini yazarken,

$$a_N y[n_0+N] + \left(a_{N-1} y_1[n_0+N-1] + \quad \dots \quad + a_1 y_1[n_0+1] + a_0 y_1[n_0]\ \right) = f[n_0] = g[n_0] + r$$

$y_1[n]$, $n < n_0$ bölgesinin fark denklemini sağladığı için, ki bu bölgede $\delta[n-n_0]=0$'dır, sol tarafta ilk terim hariç kısım (büyük parantez) yerine $-a_N y_1[n_0+N] + g[n_0]$ yazılabilir. Buradan

$$a_N\left[y[n_0+N] - y_1[n_0+N]\right] = r \qquad \rightarrow \qquad y[n_0+N] = y_1[n_0+N] + \frac{r}{a_N}$$

bulunur. Sıradaki konu bu konunun uygulaması niteliğindedir.

Sistemin Fark Denkleminden Birim Darbe Tepkisinin Bulunması

Normalde x yerine δ, ve y yerine h yazarak fark denklemini çözüp birim darbe tepkisini bulabiliriz. Ancak az önceki konuda anlatılan kuralı, $a_N \neq 0$ olmak üzere, giriş(x) – çıkış(y) ilişkisi

$$a_N y[n+N] + a_{N-1} y[n+N-1] + \quad \dots \quad + a_1 y[n+1] + a_0 y[n] = bx[n-n_0]$$

ile verilen nedensel (yani $n_0 \geq -N$ olan) bir sisteme uygularsak birim darbe tepkisini bulma yöntemi oldukça basitleşir. Çünkü nedensel DZD sistemlerde

$$h[n] = 0 \quad \forall n < 0$$

olup x yerine δ, ve y yerine h yazıldığında sağ taraftaki $\delta[n-n_0]$ darbesi ilk olarak $h[n_0+N]$ değerini sıfırdan farklı yapar. Bu yüzden

$$h[n] = 0 \quad \forall n < n_0 + N$$

yazılabilir. Dolayısıyla yöntem şu şekilde özetlenebilir:

y yerine h, sağ tarafa da sıfır yazarak $n > n_0$ bölgesi için

$$a_N h[n+N] + a_{N-1} h[n+N-1] + \quad \dots \quad + a_1 h[n+1] + a_0 h[n] = 0$$

fark denklemi şu başlangıç şartları için çözülür:

$$h[n_0+N] = \frac{b}{a_N}$$

$$\left.\begin{array}{c} h[n_0+N-1] = 0 \\ \vdots \\ h[n_0+1] = 0 \end{array}\right\} \quad \rightarrow \text{ Bu kısım } N \geq 2 \text{ için uygulanır.}$$

$N=1$ ise yalnızca en üstteki, yani $h[n_0+1] = \dfrac{b}{a_N}$ uygulanır. Bulunan çözüm $u[n-n_0-N]$ ile çarpılarak birim darbe tepkisinin tüm zamanlar için ifadesi elde edilir. Buradaki basamak çarpanı istenirse $u[n-n_0-1]$'e kadar geriletilerek de yazılabilir. Çünkü n_0+N-1 anına kadarki değerler zaten başlangıç şartları (katsayılar) gereği sıfırdır. Denklem ve dolayısıyla çözümü homojendir. Fark denkleminin sağ tarafında başka x terimleri olan durumları şimdilik ele almayacağız.

Örnek:
$y[n+1]+0,5y[n]=2x[n]$ ile verilen nedensel sistemin birim darbe tepkisini bulunuz.

Çözüm:

$n>0 \quad \Rightarrow \quad h[n+1]+0,5h[n]=0$ denklemini $h[1]=2/1=2$ başlangıç şartı için çözmeliyiz.

$$\lambda+0,5=0 \quad \rightarrow \quad \lambda=-0,5 \quad \rightarrow \quad h[n]=A(-0,5)^n$$

$$\rightarrow \quad h[1]=-0,5A=2 \quad \rightarrow \quad A=-4$$

Tüm zamanlar için ifadesi ise: $h[n]=-4(-0,5)^n u[n-1]$.

Örnek:
$50y[n+2]-25y[n+1]+3y[n]=100x[n-5]$ ile tanımlı nedensel sistemin birim darbe tepkisini bulunuz.

Çözüm: $n>5 \quad \Rightarrow \quad 50h[n+2]-25h[n+1]+3h[n]=0 \quad \rightarrow \quad 50\lambda^2-25\lambda+3=0$

$$\rightarrow \quad \lambda_1=0,2\,,\quad \lambda_2=0,3 \quad \rightarrow \quad h[n]=A_1 0,2^{n-7}+A_2 0,3^{n-7}$$

$$h[6]=0=5A_1+(10/3)A_2 \quad \rightarrow \quad A_1=(-2/3)A_2$$

$$h[7]=\frac{100}{50}=2=A_1+A_2 \quad \rightarrow \quad A_2=6\,,\quad A_1=-4$$

Sonuç: $\rightarrow \quad h[n]=\left(-4\times 0,2^{n-7}+6\times 0,3^{n-7}\right)u[n-7]$.

Örnek:
$4y[n+3]-8y[n+2]+5y[n+1]-y[n]=2x[n]$ ile verilen nedensel sistemin birim darbe tepkisini bulunuz.

Çözüm: $n>0 \quad \Rightarrow \quad 4h[n+3]-8h[n+2]+5h[n+1]-h[n]=0 \quad \rightarrow \quad 4\lambda^3-8\lambda^2+5\lambda-1=0$

$$\rightarrow \quad \lambda_1=1\,,\quad \lambda_2=\lambda_3=0,5 \quad \rightarrow \quad h[n]=A+(B+Cn)(0,5)^{n-3}$$

$$h[1]=0=A+4B+4C$$

$$h[2]=0=A+2B+4C$$

$$h[3]=2/4=0,5=A+B+3C \quad \rightarrow \quad A=2\,,\quad B=0\,,\quad C=-0,5\ .$$

Sonuç: $\rightarrow \quad h[n]=\left(A+(B+Cn)(0,5)^{n-3}\right)u[n-3]$.

Örnek:
$y[n+2]-2\cos 15^\circ\, y[n+1]+y[n]=3x[n-4]$ ile verilen nedensel sistemin birim darbe tepkisini bulunuz.

Çözüm: $n>4 \quad \Rightarrow \quad h[n+2]-2\cos 15^\circ\, h[n+1]+h[n]=0$

$$\rightarrow \quad \lambda^2 - 2\cos 15^\circ \lambda + 1 = 0 \qquad \rightarrow \quad \lambda_{1,2} = e^{\mp j15^\circ}$$

$$\rightarrow \quad h[n] = A\cos[(n-6)\cdot 15^\circ] + B\sin[(n-6)\cdot 15^\circ]$$

$$h[5] = 0 = A\cos 15^\circ - B\sin 15^\circ$$

$$h[6] = 3 = A \qquad\qquad \rightarrow \quad A = 3\,, \quad B = 3\cot 15^\circ$$

$h[n] = 3\left(\cos[(n-6)\cdot 15^\circ] + \cot 15^\circ \sin[(n-6)\cdot 15^\circ]\right)u[n-5]$. Bir başka ifadeyle:

$h[n] = 3\left(\sin[n\cdot 15^\circ] - \cot 15^\circ \cos[n\cdot 15^\circ]\right)u[n-6]$.