

SÜREKLİ ZAMAN FOURIER ANALİZİ

Fourier analizi titreşim olan her alanda gereken, mühendislikte çok önemli yöntemleri kapsar. Sürekli zaman sinyallerinden periyodik olanlar üzerinde uygulanan Fourier serileri ve periyodik olan veya olmayanlar üzerinde uygulanan Fourier dönüşümü başlıca iki hesap yöntemidir.

FOURIER SERİLERİ

T_0 ile periyodik bir $x(t)$ sinyali, çok özel istisnalara takılmıyorsa (*Drichlet şartları* denilen ve matematiksel bazı zorlamalar dışında pratikte parçalı sürekli hemen her sinyal için sağlanan şartları sağlıyorsa), ana frekansın tam katı frekanslarda sinüzoidal dalgaların toplamı halinde ifade edilebilir. Dalganın bu şekilde ifadesine *Fourier serisi* denir. Yani $\omega_0 = 2\pi/T_0$ olmak üzere

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + (a_1 \cos \omega_0 t + b_1 \sin \omega_0 t) + (a_2 \cos 2\omega_0 t + b_2 \sin 2\omega_0 t) + (a_3 \cos 3\omega_0 t + b_3 \sin 3\omega_0 t) + \dots$$

biçiminde yazılabilen seridir. Sin ve cos fonksiyonlarının karmaşık üstel karşılığı da kullanılabilir. Yani Fourier serisi gerçel ya da karmaşık biçimlerde gösterilebilir:

$$x(t) = \underbrace{\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos k\omega_0 t + b_k \sin k\omega_0 t}_{\text{gerçel gösterim}} = \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}}_{\text{karmaşık gösterim}}$$

Burada, $\frac{a_0}{2} = c_0$ = ortalama değer = dc bileşen

$a_1 \cos \omega_0 t + b_1 \sin \omega_0 t = c_{-1} e^{-j\omega_0 t} + c_1 e^{j\omega_0 t}$ = temel bileşen = 1. harmonik

$a_k \cos k\omega_0 t + b_k \sin k\omega_0 t = c_{-k} e^{-jk\omega_0 t} + c_k e^{jk\omega_0 t}$ = k . harmonik diye adlandırılır.

Dikkat: Süreksizlik (ani sıçrama) noktalarında sinyalin asıl değeri ne tanımlanırsa tanımlansın, Fourier serisi, sağdan ve soldan limitlerin ortalamasını verir.

Bir Soru

Katalogunda 100 MHz'e kadar sabit bir kazançla ideal sayılabilecek bir kazançla çalıştığı söylenen doğrusal bir yükselticinin girişine 30 MHz'lik ideal bir kare dalga uygulanırsa çıkışında ideal bir kare dalga mı elde edilir yoksa bozulmuş mu? Neden?

Cevap

30 MHz'lik kare dalganın Fourier serisinde 3. harmoniğe (90 MHz) kadarki bileşenler sınırın altında olduğundan ideale yakın sabit kazançla yükseltilir. Sonraki harmonikler ise bozularak çıkışa ulaşır. Bu yüzden çıkışta bozulmuş bir kare dalga görülür. Sinyalin yavaş değişen kısımları alçak frekans bileşenleriyle, hızlı değişen kısımları ise yüksek frekans bileşenleriyle ifade edilir. Yüksek numaralı harmoniklerin bozulması bu yüzden kare dalganın ani değişim civarında bozulmaya karşılık gelir.

Gerçel seriden karmaşık seriye geçiş

$$a_k \cos k\omega_0 t + b_k \sin k\omega_0 t = a_k \left(\frac{e^{jk\omega_0 t} + e^{-jk\omega_0 t}}{2} \right) + b_k \left(\frac{e^{jk\omega_0 t} - e^{-jk\omega_0 t}}{j2} \right) = c_{-k} e^{-jk\omega_0 t} + c_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$c_0 = \frac{a_0}{2} \quad , \quad c_k = \frac{a_k - jb_k}{2} \quad , \quad c_{-k} = \frac{a_k + jb_k}{2} \quad ; \quad k = 1, 2, \dots, +\infty$$

Sinyal gerçel ise, tüm a_k ve b_k katsayıları gerçel olacağından, $c_{-k} = c_k^*$ olur (jk ayrılmaz ikilidir).

Karmaşık seriden gerçel seriye geçiş

$$a_0 = 2c_0 \quad , \quad a_k = c_k + c_{-k} \quad , \quad b_k = j(c_k - c_{-k}) \quad ; \quad k = 1, 2, \dots, +\infty$$

Sinyal gerçel ise $c_{-k} = c_k^*$ kullanılarak, $a_k = 2 \cdot \text{Re}\{c_k\}$ ve $b_k = -2 \cdot \text{Im}\{c_k\}$ bulunur.

Seri katsayılarının bulunması

Gerçel seri katsayıları:

$$a_0 = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) dt \quad (\text{ortalamanın 2 katı})$$

$$a_k = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) \cos k\omega_0 t dt$$

$$b_k = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) \sin k\omega_0 t dt$$

Karmaşık seri katsayıları:

$$c_0 = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) dt \quad (\text{ortalama değer})$$

$$c_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

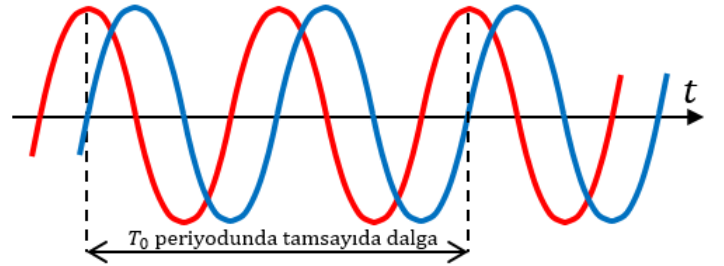
Bu integrallerde sınırlar yerine sadece alta T_0 yazılmasının anlamı, keyfi bir p için $\int_p^{p+T_0}$ demektir.

İspat: $x(t)$ 'nin Fourier serisi biçiminde yazılabildiği kabulüyle özel bir k için karmaşık seri katsayısının formüldeki gibi olduğunu ispatlayalım. Formüldeki $x(t)$ yerine Fourier serisini karıştırsın diye n 'e göre yazalım.

$$\frac{1}{T_0} \int_{T_0} \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \right) e^{-jk\omega_0 t} dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \cdot \left(\frac{1}{T_0} \int_{T_0} e^{j(n-k)\omega_0 t} dt \right)$$

$$e^{j(n-k)\omega_0 t} = \cos((n-k)\omega_0 t) + j \sin((n-k)\omega_0 t)$$

olduğundan, $n = k$ ise 1 olur ve T_0 periyodu üzerinden ortalaması da 1'dir. $n \neq k$ ise T_0 periyodu içinde $|n-k|$ adet tam sinüzoidal dalga içerir. Mesela $|n-k| = 2$ için yandaki şekildeki gibi olur ve T_0 periyodu üzerinden ortalaması sıfırdır:



$$\frac{1}{T_0} \int_{T_0} e^{j(n-k)\omega_0 t} dt = \begin{cases} 1 & n = k \text{ ise} \\ 0 & n \neq k \text{ ise} \end{cases}$$

Bunu yerine yazarsak, değişkeni n olan toplamın sadece $n = k$ durumu kalır:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \cdot \left(\frac{1}{T_0} \int_{T_0} e^{j(n-k)\omega_0 t} dt \right) = c_k \quad \checkmark$$

$a_k = 2 \cdot \text{Re}\{c_k\}$ ve $b_k = -2 \cdot \text{Im}\{c_k\}$ formülleri gereği gerçel seri katsayılarına geçiş ise açıkça görülmektedir.

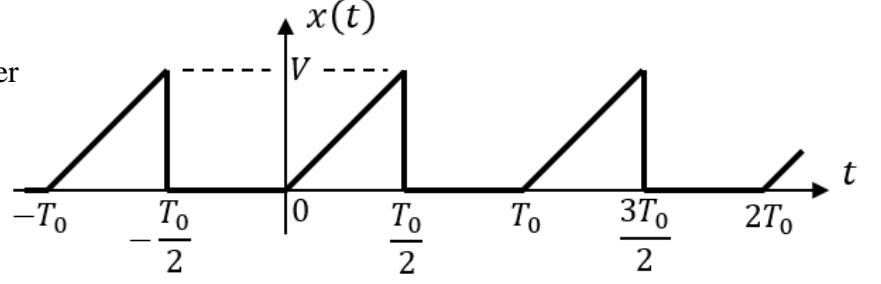
a_0 ve c_0 formülleri aslında $k = 0$ için a_k ve c_k formülleriyle aynıdır. Ancak sinyalde sabit veya doğru rampa gibi t^n biçimli parça varsa genel a_k, b_k veya c_k formülleriyle yapılan ara hesaplamalar $k = 0$ 'da belirsizlik veya tanımsızlık verebilmekte, fakat sonrasında bu belirsizlik veya tanımsızlık gözden kaçabilmektedir. Ara hesaplamalarda herhangi bir k için belirsizlik veya tanımsızlığın ilk çıktığı yerden bir önceki adımda o k değeri yerine konulup o katsayılar buna göre ayrıca hesaplanmalıdır. Buna da en çok $k = 0$ 'da karşılaşıldığı için a_0 ve c_0 formülleri ayrıca verilmiştir. Böyle bir belirsizlik veya tanımsızlık olmadığından eminsek buna gerek yoktur.

Dikkat: Bu integralleri hangi periyot üzerinden almak istiyorsak, önce o periyot için sinyalin fonksiyonu yazılmalı, sonra integraller alınmalıdır. Her periyotta fonksiyonun analitik ifadesi değişebilir. Mesela ilk örneğimizde rampa doğru parçalarından orijinden geçen fonksiyonu $2Vt/T_0$ iken, sağa doğru her bir periyottaki, $2V$ kadar daha eksiltiştir.

Örnek

Şekilde verilen T_0 ile periyodik sinyali Fourier serisine açmak için, $0 \leq t < T_0$ aralığında

$$x(t) = \begin{cases} \frac{2V}{T_0}t & 0 \leq t < \frac{T_0}{2} \\ 0 & \frac{T_0}{2} \leq t < T_0 \end{cases}$$



fonksiyonunu yazıp, gerçel seri katsayıları formüllerini uygulayalım:

$$a_0 = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) dt = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0/2} \frac{2V}{T_0} t dt + \frac{2}{T_0} \int_{T_0/2}^{T_0} 0 \cdot dt = \int_0^{T_0/2} \frac{4V}{T_0^2} t dt = \left[\frac{4V}{T_0^2} \frac{t^2}{2} \right]_0^{T_0/2} = \frac{4V}{T_0^2} \frac{T_0^2}{8} = \boxed{a_0 = \frac{V}{2}}$$

Kısaca, bir üçgenin alanını tam periyoda bölerek $V/4$ ortalaması, bunun da 2 katı ile a_0 bulunabilirdi.

$\omega_0 = 2\pi/T_0$ olmak üzere

$$a_k = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) \cos(k\omega_0 t) dt = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0/2} \frac{2V}{T_0} t \underbrace{\cos(k\omega_0 t)}_{dr \text{ olsun}} dt + \frac{2}{T_0} \int_{T_0/2}^{T_0} 0 \cdot dt = \frac{4V}{T_0^2} \left[t \cdot r - \int r dt \right]_0^{T_0/2}$$

$$k \neq 0 \text{ şartıyla } r = \frac{1}{k\omega_0} \sin(k\omega_0 t) \rightarrow a_k = \frac{4V}{T_0^2} \left[\frac{t}{k\omega_0} \sin(k\omega_0 t) \right]_0^{T_0/2} - \frac{4V}{k\omega_0 T_0^2} \int_0^{T_0/2} \sin(k\omega_0 t) dt$$

$$k \neq 0 \text{ şartıyla } a_k = \frac{4V}{T_0^2} \frac{T_0}{2k\omega_0} \sin(k\omega_0 T_0/2) - 0 + \frac{4V}{k^2 \omega_0^2 T_0^2} [\cos(k\omega_0 t)]_0^{T_0/2}, \quad \omega_0 T_0 = 2\pi \text{ olduğu için:}$$

$$k \neq 0 \text{ şartıyla } a_k = \frac{4V}{4k\pi} \underbrace{\sin(k\pi)}_0 + \frac{4V}{4k^2\pi^2} \left[\cos\left(k\omega_0 \frac{T_0}{2}\right) - \cos 0 \right] = \frac{V}{k^2\pi^2} \left[\frac{\cos(k\pi)}{(-1)^k} - 1 \right]$$

$$\boxed{a_k = \begin{cases} 0 & k \neq 0 \text{ çift ise} \\ -\frac{2V}{k^2\pi^2} & k \text{ tek ise} \end{cases}} \rightarrow a_1 = \frac{-2V}{\pi^2}, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = \frac{-2V}{9\pi^2}, \quad a_4 = 0, \quad a_5 = \frac{-2V}{25\pi^2}, \dots$$

$$b_k = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) \sin(k\omega_0 t) dt = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0/2} \frac{2V}{T_0} t \underbrace{\sin(k\omega_0 t)}_{dr \text{ olsun}} dt + \frac{2}{T_0} \int_{T_0/2}^{T_0} 0 \cdot dt = \frac{4V}{T_0^2} \left[t \cdot r - \int r dt \right]_0^{T_0/2}$$

$$r = \frac{-1}{k\omega_0} \cos(k\omega_0 t) \rightarrow a_k = \frac{4V}{T_0^2} \left[\frac{-t}{k\omega_0} \cos(k\omega_0 t) \right]_0^{T_0/2} + \frac{4V}{k\omega_0 T_0^2} \int_0^{T_0/2} \cos(k\omega_0 t) dt$$

$$b_k = \frac{4V}{T_0^2} \cdot \frac{-T_0}{2k\omega_0} \cos(k\omega_0 T_0/2) - 0 + \frac{4V}{k^2 \omega_0^2 T_0^2} [\sin(k\omega_0 t)]_0^{T_0/2}, \quad \omega_0 T_0 = 2\pi \text{ olduğu için:}$$

$$b_k = -\frac{4V}{4k\pi} \frac{\cos(k\pi)}{(-1)^k} + \frac{4V}{4k^2\pi^2} \left[\frac{\sin\left(k\omega_0 \frac{T_0}{2}\right)}{\sin(k\pi)=0} - \sin 0 \right] = \frac{V}{k\pi} (-1)^{k+1}$$

$$b_k = \begin{cases} \frac{-V}{k\pi} & k \text{ çift ise} \\ \frac{V}{k\pi} & k \text{ tek ise} \end{cases} \rightarrow b_1 = \frac{V}{\pi}, \quad b_2 = \frac{-V}{2\pi}, \quad b_3 = \frac{V}{3\pi}, \quad b_4 = \frac{-V}{4\pi}, \dots$$

Katsayıları yerine yazarsak, gerçel seri:

$$x(t) = \frac{V}{4} - \frac{2V}{\pi^2} \left(\frac{\cos(\omega_0 t)}{1^2} + \frac{\cos(3\omega_0 t)}{3^2} + \frac{\cos(5\omega_0 t)}{5^2} + \dots \right) + \frac{V}{\pi} \left(\frac{\sin(\omega_0 t)}{1} - \frac{\sin(2\omega_0 t)}{2} + \frac{\sin(3\omega_0 t)}{3} - \dots \right)$$

Karmaşık seriye geçiş yaparsak:

$$c_0 = \frac{a_0}{2} = \boxed{c_0 = \frac{V}{4}}$$

$$c_k = \frac{a_k - jb_k}{2} = \boxed{c_k = \begin{cases} \frac{jV}{2k\pi} & k \text{ çift ise} \\ -\frac{V}{k^2\pi^2} - j\frac{V}{2k\pi} & k \text{ tek ise} \end{cases}}$$

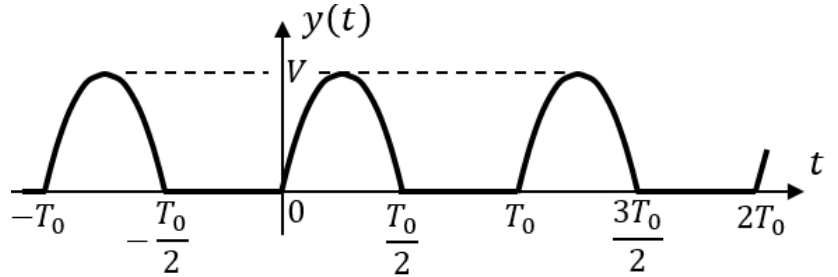
$c_{-k} = c_k^*$ olduğundan, bu formül $k < 0$ için de geçerlidir. Katsayıları yerine yazarsak, karmaşık seri:

$$x(t) = V \left\{ \dots + \left(-\frac{1}{9\pi^2} + j\frac{1}{6\pi} \right) e^{-j3\omega_0 t} - j\frac{1}{4\pi} e^{-j2\omega_0 t} + \left(-\frac{1}{\pi^2} + j\frac{1}{2\pi} \right) e^{-j\omega_0 t} + \frac{1}{4} + \left(-\frac{1}{\pi^2} - j\frac{1}{2\pi} \right) e^{j\omega_0 t} + j\frac{1}{4\pi} e^{j2\omega_0 t} + \left(-\frac{1}{9\pi^2} - j\frac{1}{6\pi} \right) e^{j3\omega_0 t} + \dots \right\}$$

Örnek

Şekilde verilen T_0 ile periyodik sinyali Fourier serisine açmak için, $0 \leq t < T_0$ aralığında

$$y(t) = \begin{cases} V \sin(\omega_0 t) & 0 \leq t < \frac{T_0}{2} \\ 0 & \frac{T_0}{2} \leq t < T_0 \end{cases}$$



fonksiyonunu yazıp, karmaşık seri katsayıları formüllerini uygulayalım. $\omega_0 = 2\pi/T_0$ olmak üzere:

$$c_k = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} y(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0/2} V \sin(\omega_0 t) e^{-jk\omega_0 t} dt + \frac{1}{T_0} \int_{T_0/2}^{T_0} 0 \cdot dt$$

$$c_k = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0/2} V \left(\frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{j2} \right) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{V}{j2T_0} \int_0^{T_0/2} e^{-j(k-1)\omega_0 t} dt - \frac{V}{j2T_0} \int_0^{T_0/2} e^{-j(k+1)\omega_0 t} dt$$

$$c_k = \frac{V}{-j(k-1)\omega_0 j2T_0} [e^{-j(k-1)\omega_0 t}]_0^{T_0/2} - \frac{V}{-j(k+1)\omega_0 j2T_0} [e^{-j(k+1)\omega_0 t}]_0^{T_0/2}, \quad k \neq \mp 1 \quad (k=0 \text{ dahil})$$

$\omega_0 T_0 = 2\pi$ olduğu için:

$$c_k = \frac{V}{4\pi} \left[\frac{e^{-j(k-1)\omega_0 T_0/2} - e^0}{k-1} - \frac{e^{-j(k+1)\omega_0 T_0/2} - e^0}{k+1} \right], \quad k \neq \mp 1 \quad (k=0 \text{ dahil})$$

$e^{-j(k\mp 1)\pi} = (-1)^{k\mp 1} = (-1)^{k-1}$ olduğundan,

$$c_k = \frac{V}{4\pi} [(-1)^{k-1} - 1] \left[\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1} \right] = \frac{V}{4\pi} [(-1)^{k-1} - 1] \frac{2}{k^2 - 1} \quad , \quad k \neq \mp 1 \quad (k = 0 \text{ dahil})$$

$$c_k = \begin{cases} \frac{-V}{\pi(k^2 - 1)} & k \text{ çift ise} \\ 0 & k \text{ tek ise } (k \neq \mp 1) \end{cases} \quad k = 0 \text{ dahil olduğundan} \quad \boxed{c_0 = \frac{V}{\pi}}$$

Burada yarım dalga doğrultulmuş sinüzoidal dalganın ortalama değeri (dc bileşeni) c_0 üzerinde biraz duralım. Tam dalga doğrultulmuş sinüzoidal dalganın dc bileşeni bunun 2 katı olur. AC voltmetrelerin en ilkel olanları, gerçekten etkin (*rms*) değer ölçmez; sensörü dc voltmetredir ve ac gerilimi bir diyot ile yarım dalga doğrultarak dc voltmetreden geçirir. Bu değeri rms değere ($V/\sqrt{2}$) dönüştürmek için $\pi/\sqrt{2} \approx 2,2$ katsayısıyla çarpılmış olarak göstergeye iletir. Bunları anlamak için ac voltmetre kademesinde dc gerilim, mesela bir píl, ölçeriz. Bir yönde sıfır volt veya diğer yönde dc voltajın 2,2 katını göstermesinden, bunun ilkel bir voltmetre olduğunu anlarız. Bunların ac voltmetre kademesine sinüzoidal dalgalar için güvenebiliriz ama diğer dalgalar için ölçüm geçersizdir. Tam dalga doğrultulmuş sinüzoidal dalganın dc bileşeni bunun 2 katı olur.

Çözümüne devam edelim. Henüz $k = \mp 1$ için c_k 'yı bulmamıştık. Belirsizlik veya tanımsızlığın ilk çıktığı yerden hemen önceki adımda $k = 1$ yazarak devam edelim:

$$c_1 = \frac{V}{j2T_0} \int_0^{T_0/2} \underbrace{e^{-j0\omega_0 t}}_1 dt - \frac{V}{j2T_0} \int_0^{T_0/2} e^{-j2\omega_0 t} dt = \frac{V}{j2T_0} \frac{T_0}{2} - \frac{V}{j2T_0} \int_0^{T_0/2} \underbrace{\cos(2\omega_0 t) - j \sin(2\omega_0 t)}_{\substack{\text{periyodu } T_0/2 \text{ olduğu için} \\ \text{bu sınırlarda integrali sıfır}}} dt$$

$$\boxed{c_1 = \frac{V}{j4} = -j\frac{V}{4}} \rightarrow c_{-1} = c_1^* = \boxed{c_{-1} = \frac{V}{-j4} = j\frac{V}{4}}$$

Bu sinyalin gerçel serisini yazmak bizim için daha anlamlı olacaktır:

$$a_k = 2 \cdot \text{Re}\{c_k\} = \boxed{a_k = \begin{cases} \frac{-2V}{\pi(k^2 - 1)} & k \text{ çift ise} \\ 0 & k \text{ tek ise} \end{cases}} \quad , \quad \boxed{a_0 = \frac{2V}{\pi}}$$

$$b_k = -2 \cdot \text{Im}\{c_k\} \rightarrow \boxed{k \neq 1 \text{ için } b_k = 0 \text{ ve } b_1 = \frac{V}{2}}$$

Katsayılar yerine konulup gerçel seri yazılırsa:

$$y(t) = \frac{V}{\pi} + \frac{V}{2} \sin(\omega_0 t) - \frac{2V}{\pi} \left(\frac{\cos(2\omega_0 t)}{3} + \frac{\cos(4\omega_0 t)}{15} + \frac{\cos(6\omega_0 t)}{35} + \dots \right)$$

Dikkat edilirse temel bileşen hariç, ki o da sadece sin terimidir, tek numaralı harmonik yoktur. Bunun sebebinin daha sonra belirteceğiz; şimdilik sadece dikkat çekmekle yetinelim.

Simetri özellikleri

1) Sinyal tek ise:

Gerçel seri sadece **sin** terimlerinden oluşur. Yani gerçel seride $a_0 = a_k = 0 \quad \forall k$ ve sinyal gerçel ise karmaşık seride c_k daima sanal olur. b_k integrali ise keyfî bir aralık değil, **sıfırdan itibaren** yarı periyot üzerinden basitleşir:

$$b_k = \frac{4}{T_0} \int_0^{T_0/2} x(t) \sin(k\omega_0 t) dt = j2c_k$$

2) Sinyal çift ise:

Seri sadece **cos** terimlerinden oluşur. Yani gerçel seride $b_k = 0 \forall k$ ve sinyal gerçel ise karmaşık seride c_k daima gerçel olur. a_k integrali ise keyfi bir aralık değil, **sıfırdan itibaren** yarı periyot üzerinden basitleşir:

$$a_0 = \frac{4}{T_0} \int_0^{T_0/2} x(t) dt = 2c_0 \quad , \quad a_k = \frac{4}{T_0} \int_0^{T_0/2} x(t) \cos(k\omega_0 t) dt = 2c_k$$

3) Sinyal tek harmonik simetrlili ise:

Bu simetriyi tek sinyallerle karıştırmamak gerekir. Tek harmonik simetrisi, sinyalin her bir yarı periyodunun, komşu yarı periyottakinin zıt işaretlisi olmasıdır:

$$x(t + \frac{T_0}{2}) = -x(t) \quad \forall t$$

Yataydaki kayma bu simetriyi değiştirmez.

Bu sinyallerde sadece tek harmonik bulunur.

Yani çift k 'lar için

$$a_0 = c_0 = a_k = b_k = c_k = 0$$

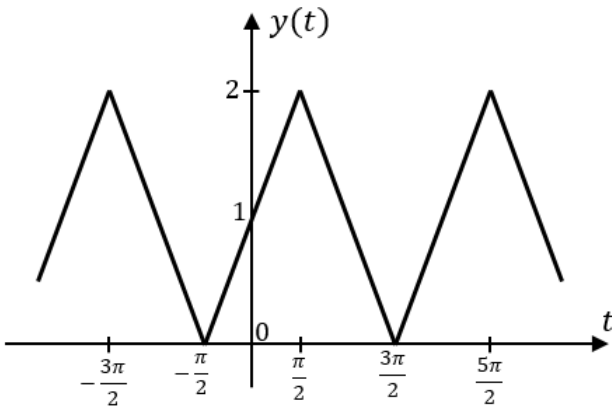
Tek k 'lar için ise tüm katsayı formüllerindeki integraller herhangi bir yarı periyot için alınıp 2'yle çarpılarak basitleştirilebilir.

Tek harmonik simetrlili bir sinyalin ortalama değeri sıfırdır. Elektrik işlerinde karşılaşılan sinyallerin pek çoğu bu simetriye sahiptir. Simetrik kare ve üçgen dalga, trafo boşa çalışma akımı, güç elektroniği devreleri ile kısılmış pek çok dalga vb.

Dikkat: Bazen sinyal bu simetrilerden birine doğrudan sahip olmasa da, bir sabit farkıyla bu simetrilerin bir veya ikisine sahip bir sinyal cinsinden ifade edilebilir. Bu durumda, sabit terim dışındaki katsayılar için simetri kolaylıklarından faydalanılabilir.

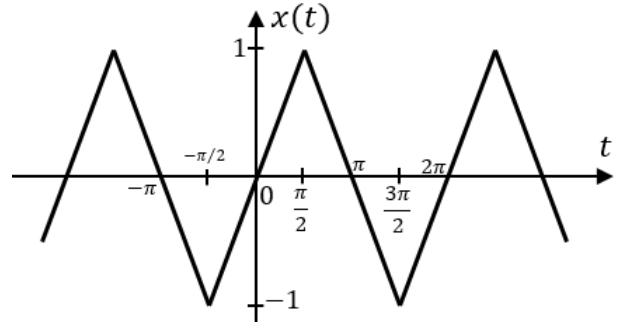
Örnek

Aşağıda solda görülen $T_0 = 2\pi$ periyotlu $y(t)$ sinyali, ne tektir, ne çifttir, ne de tek harmonik simetrlilidir. Fakat 1 eksiltiyle elde edilen $x(t) = y(t) - 1$ sinyali, aşağıda sağda görüldüğü gibi hem tektir, hem de tek harmonik simetrlilidir. $\omega_0 = 2\pi/T_0 = 1$



$$y(t) = \underbrace{\frac{1}{a_0/2} + \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin(kt)}_{x(t)}$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq t < \frac{3\pi}{2} \text{ aralığında } x(t) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}t & -\frac{\pi}{2} \leq t < \frac{\pi}{2} \\ -\frac{2}{\pi}t + 2 & \frac{\pi}{2} \leq t < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$



Burada b_k bulunurken simetri kolaylığından faydalanmak için formüllerde $x(t)$ sinyali kullanılmalıdır. Aşağıda tek sinyale göre kolaylık formülü solda, tek harmonik simetrisine göre kolaylık formülü sağda verilmiştir. Soldaki iki parçalı, sağdaki tek parçalı integral olduğu için, tek harmonik simetrisine göre olanla devam edelim:

$$b_k = \frac{4}{2\pi} \int_0^{\pi} x(t) \sin(kt) dt = \frac{4}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} x(t) \sin(kt) dt$$

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{2}{\pi} t \underbrace{\sin(kt)}_{dr} dt, \quad r = -\frac{1}{k} \cos(kt)$$

$$b_k = \frac{4}{\pi^2} \left[t \cdot r - \int r dt \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{4}{\pi^2} \underbrace{\left[-\frac{t}{k} \cos(kt) \right]_{-\pi/2}^{\pi/2}}_0 + \frac{4}{k\pi^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(kt) dt = \frac{4}{k^2\pi^2} [\sin(kt)]_{-\pi/2}^{\pi/2}$$

$$b_k = \frac{4}{k^2\pi^2} [\sin(k\pi/2) - \sin(-k\pi/2)] = \frac{8}{k^2\pi^2} \sin(k\pi/2) = b_k = \begin{cases} 0 & k \text{ çiftse} \\ \frac{8}{k^2\pi^2} & k = 4n + 1 \text{ ise} \\ -\frac{8}{k^2\pi^2} & k = 4n - 1 \text{ ise} \end{cases}$$

Katsayılar yerine yazılırsa:

$$y(t) = 1 + \frac{8}{\pi^2} \left(\frac{\sin(t)}{1^2} - \frac{\sin(3t)}{3^2} + \frac{\sin(5t)}{5^2} - + \dots \right)$$

Parseval Eşitliği (Fourier serileri için)

Akım, gerilim, basınç, kuvvet, hız, elektrik alan, manyetik alan gibi, karesi güç ile orantılı olan sinyaller ile ortalama güç hesabında, “kare ortalamasının karekökü ($rms = root\ mean\ square$)” kullanılır. Parseval eşitliğine göre gerçel bir sinyal için rms değer, her bir frekans bileşeninin rms’lerinin toplamının kareköküdür. Yani son karekökü almadan (rms^2 olarak) yazılırsa:

$$rms^2 = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |x(t)|^2 dt = \frac{a_0^2}{4} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k^2 + b_k^2}{2} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k|^2$$

İspat: Karmaşık seri üzerinden ispatlayalım.

$$rms^2 = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t)x^*(t)dt = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \right) \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} \right)^* dt$$

Burada $x(t)$ ve eşleniği yerine Fourier seri karşılıklarını birinde n diğeri k indisiyle yazmamızın nedeni, çarpmanın toplama üzerine dağılıma özelliğini kullanırken terimlerin karışmamasıdır.

$$rms^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_n c_k^* \frac{1}{T_0} \int_{T_0} e^{j(n-k)\omega_0 t} dt$$

Daha önce gösterildiği gibi

$$\frac{1}{T_0} \int_{T_0} e^{j(n-k)\omega_0 t} dt = \begin{cases} 1 & n = k \text{ ise} \\ 0 & n \neq k \text{ ise} \end{cases}$$

Bunu yerine yazarsak, değişkeni n olan toplamın sadece $n = k$ durumları kalacağından:

$$\text{rms}^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k c_k^* = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k|^2 \quad \checkmark$$

Gerçek seri için ispat ise buradan geçişle bulunabilir.

$$\begin{aligned} \text{rms}^2 &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k|^2 = c_0^2 + \sum_{k=1}^{+\infty} (c_k c_k^* + c_{-k} c_{-k}^*) \\ &= \left(\frac{a_0}{2}\right)^2 + \sum_{k=1}^{+\infty} \left\{ \frac{(a_k - j b_k)(a_k - j b_k)^*}{2} + \frac{(a_k + j b_k)(a_k + j b_k)^*}{2} \right\} \\ &= \frac{a_0^2}{4} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left\{ \frac{a_k^2 + b_k^2}{4} + \frac{a_k^2 + b_k^2}{4} \right\} = \frac{a_0^2}{4} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k^2 + b_k^2}{2} \quad \checkmark \end{aligned}$$

Örnekler

Sinyal	rms değeri
$A \cos(\omega t + \phi) = A \cos \phi \cos(\omega t) - A \sin \phi \sin(\omega t)$	$\sqrt{\frac{(A \cos \phi)^2 + (-A \sin \phi)^2}{2}} = \frac{A}{\sqrt{2}}$
$3 + 7 \sin(\omega t) + 8 \cos(\omega t)$	$\sqrt{3^2 + \frac{7^2 + 8^2}{2}}$
$-4 + 10 \sin(\omega_1 t + 60^\circ) + 6 \cos(\omega_1 t) - 7 \sin(\omega_2 t)$ $= -4 + (5\sqrt{3} + 6) \cos(\omega_1 t) + 5 \sin(\omega_1 t) - 7 \sin(\omega_2 t)$	$\sqrt{4^2 + \frac{(5\sqrt{3} + 6)^2 + 5^2 + 7^2}{2}}$

Periyodik Olmayan Sinyaller İçin Fourier Serisi

Periyodik olmayan bir sinyalin Fourier serisi olmaz. Ancak, bu sinyalin ilgilendiğimiz bir zaman aralığında bu sinyale eşit olan periyodik bir sinyal tanımlarsak, o periyodik sinyalin Fourier serisini, ilgilenilen zaman aralığında periyodik olmayan sinyal için kullanabiliriz.

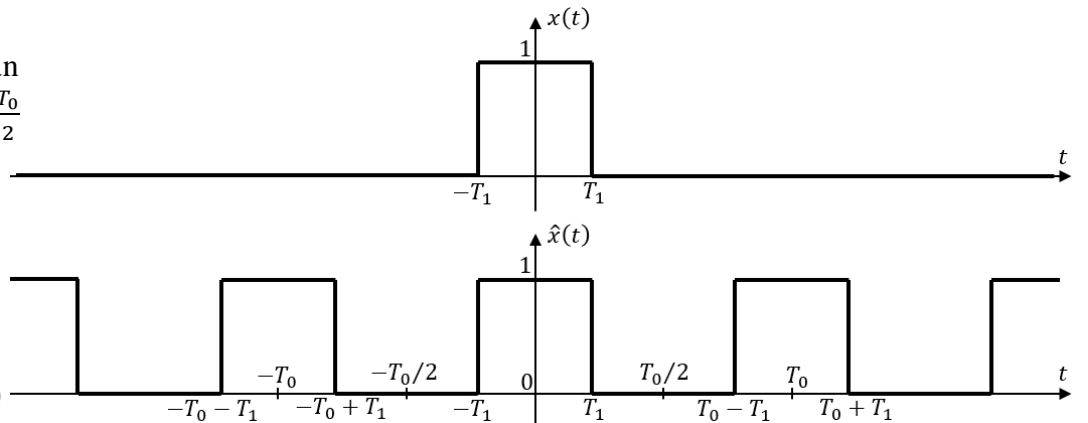
Örnek

Yandaki periyodik olmayan $x(t)$ sinyali için, $-\frac{T_0}{2} \leq t < \frac{T_0}{2}$

aralığında geçerli bir Fourier serisi bulalım.

Bunun için T_0 ile periyodik ve

$$-\frac{T_0}{2} \leq t < \frac{T_0}{2} \Rightarrow \hat{x}(t) = x(t)$$



olan bir $\hat{x}(t)$ sinyali tanımlıyoruz. Bunu karmaşık Fourier serisine açalım. Her ne kadar sinyal çift ise de bu

örneğe özel, simetri özelliğini kullanmadan daha kolay bulunmaktadır. $\omega_0 = 2\pi/T_0$ olmak üzere

$$c_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-T_1}^{T_1} 1 \cdot e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \left[\frac{e^{-jk\omega_0 t}}{-jk\omega_0} \right]_{-T_1}^{T_1} ; \quad k \neq 0$$

$$c_k = \frac{-e^{-jk\omega_0 T_1} + e^{jk\omega_0 T_1}}{jk\omega_0 T_0} = \frac{e^{jk\omega_0 T_1} - e^{-jk\omega_0 T_1}}{j2k\pi} = \frac{1}{k\pi} \sin(k\omega_0 T_1) = c_k ; \quad k \neq 0$$

Burada $\text{sinc}(p) = \begin{cases} \frac{\sin p}{p} & p \neq 0 \\ 1 & p = 0 \end{cases}$ fonksiyon

tanımını kullanalım. Dikkat edilirse $p = 0$ 'daki tanım, $p \rightarrow 0$ limit değerine eşit olduğundan $\text{sinc}(p)$ fonksiyonu süreklidir. p 'nin sıfır hariç, π 'nin tam katlarında sıfırdan geçen ve genliği iki yönde azalan bir fonksiyondur.

c_k 'yı sinc fonksiyonuyla ifade etmeye çalışalım:

$$k \neq 0 \Rightarrow c_k = \frac{\sin(2k\pi T_1/T_0)}{2k\pi T_1/T_0} \cdot \frac{2T_1}{T_0}$$

c_0 ortalama değer olduğu için $c_0 = 2T_1/T_0$ olduğu kolayca görülür. Buna göre $k = 0$ da dahil olmak üzere:

$$\boxed{c_k = \frac{2T_1}{T_0} \text{sinc}(2k\pi T_1/T_0)} \quad \hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$$

Dikkat edilirse $T_0 = 4T_1$ olduğunda, $\hat{x}(t)$ yatayda simetrik bir kare dalga olur. Ayrıca ortalama değeri $(1/2)$ kadar eksiltilirse tek harmonik simetrisine de sahip olur. Zaten bu durumda k 'nın çift değerlerinde sinc içi π 'nin tam katları olur. Yani c_0 hariç çift k 'lar için $c_k = 0$ olur.

Spektrum Çizimleri

Bir büyüklüğün frekansa karşı çizilmesidir. Frekans yerine harmonik numarası kullanılarak ayrık bir çizim de olabilir. $[0, +\infty)$ frekans aralığında çizilebileceği gibi, özellikle karmaşık Fourier serisi ve Fourier dönüşümündeki gibi eksi ve artı frekanslar ayrı harmonikler gibi düşünülerek $(-\infty, +\infty)$ aralığında da çizilebilir. Mesela bir fotodiyodun hangi frekanslardaki ışığa ne derece duyarlı olduğunun grafiği, LED ışığın hangi renklerde ne kadar yoğunlaştığının grafiği, yükselticinin hangi frekanslara ne kadar kazanç ve faz kayması uyguladığının grafiği gibi.

Örnek: $x(t) = \max\{\sin t, 0\}$ sinyalinin gerçel Fourier seri katsayıları spektrumunu çizelim.

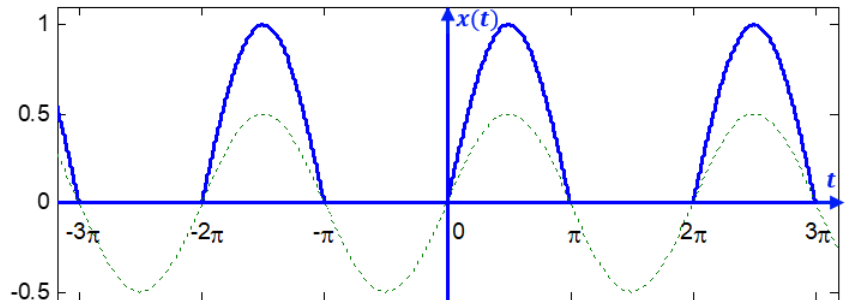
Daha önce yapılan örnekte $V = 1$ ve $\omega_0 = 1$

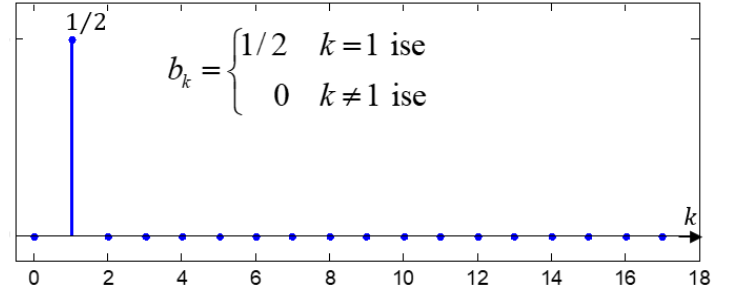
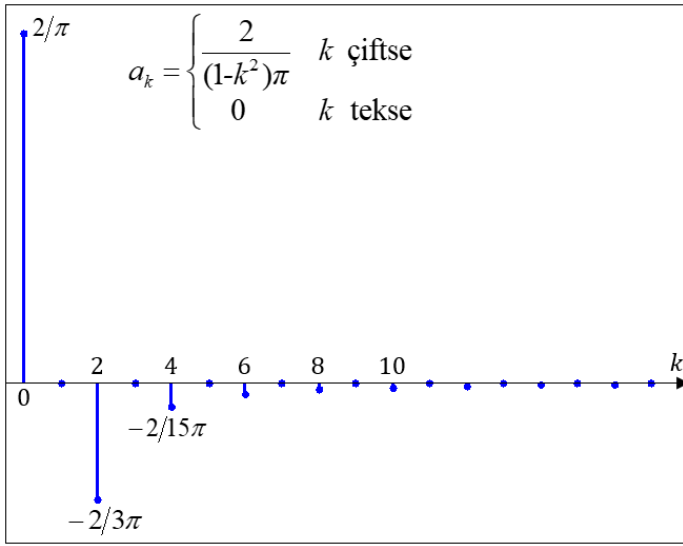
($T_0 = 2\pi$) alınıp adına $x(t)$ denilmiştir.

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t))$$

Temel bileşen yanda kesikli çizgiyle gösterilmiştir.

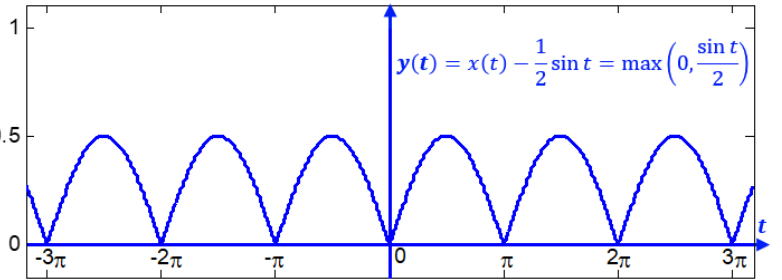
Gerçel seri katsayıları a_k ve b_k çizilebilir:



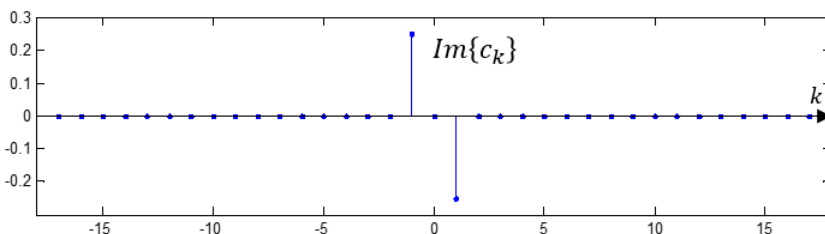
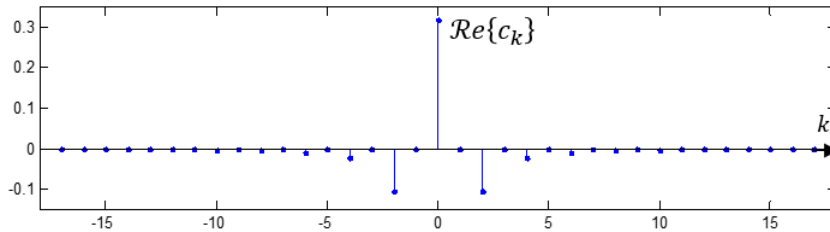
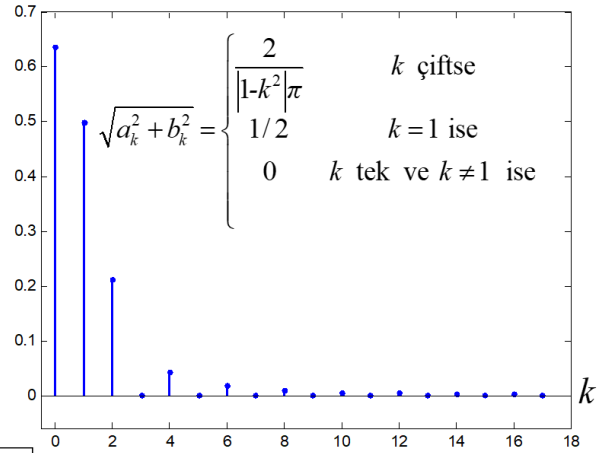


Burada 1. harmonik sadece $b_1 \sin t$ teriminden ibarettir ve bunun dışında tek harmonik bulunmamaktadır. Bunun da nedeni, eğer bu 1. harmonik sinyalden çıkarılırsa elde kalan kısmın ($y(t) = x(t) - b_1 \sin t$) çift harmonik simetrisine ($y(t + \frac{T_0}{2}) = y(t) \quad \forall t$) sahip olmasıdır ki bu da aşağıda gösterildiği gibi o kısmın periyodunun $T_0/2$ olduğu anlamına gelir. Ayrıca 1. harmonik teriminden başka sin terimi yoktur. Çünkü aşağıdaki şekilden görüldüğü gibi 1. harmonik çıkartılınca kalan kısım $y(t)$ çifttir.

Çift harmonik simetrisi, periyodun ana periyodun 2 katı alınmasıyla aynı anlama gelmektedir. Böylece ana frekansın hep çift katlarında harmonikler varmış gibi düşünülür. Çift harmonik simetrisi bu yüzden karışıklığa yol açar ve bundan pek bahsedilmez; ancak bu örnekteki gibi bir sinyalin bileşeni olarak anlamı vardır.

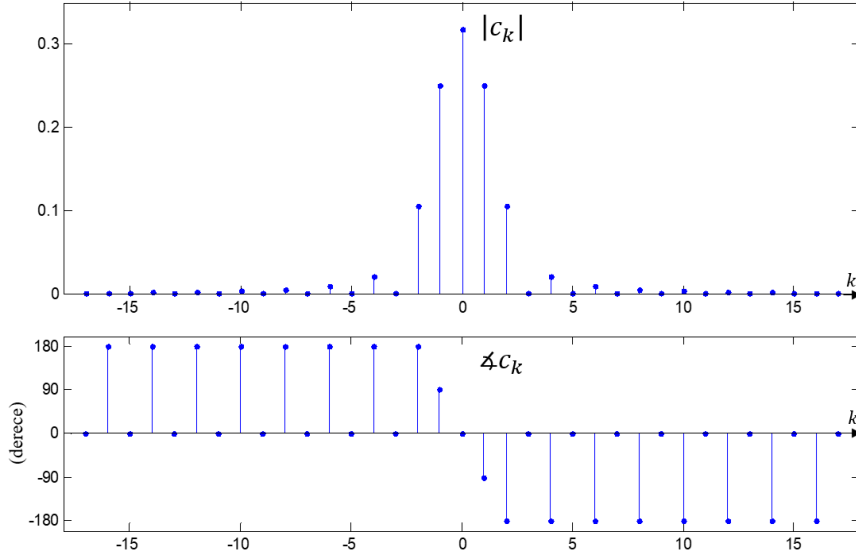


İstenirse yandaki gibi her bir harmoniğin genliği olan $\sqrt{a_k^2 + b_k^2}$ değerlerini de k 'ya karşı çizebiliriz.



Soldaki gibi c_k 'nın gerçel ve sanal kısımları da çizilebilir, fakat bu pek tercih edilmez.

Genellikle $|c_k|$ ve $\angle c_k$ açısı (derece) tercih edilir:

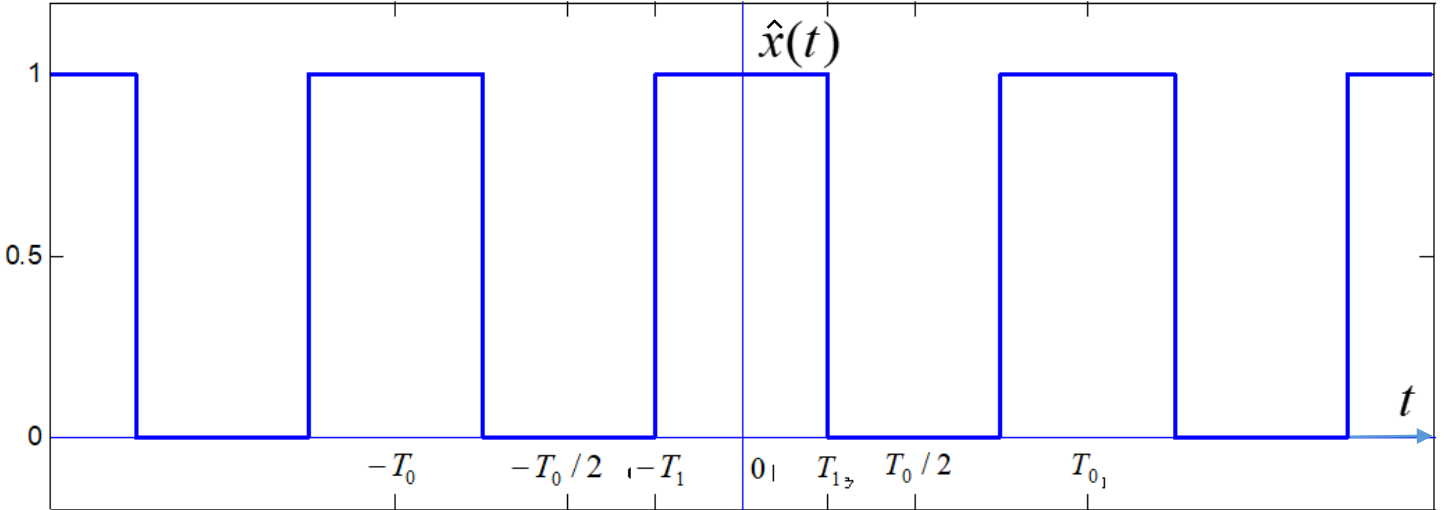


Sanal kısım sıfır ise tek bir çizimle c_k çizilebilir. Bunu sıradaki konudaki örnek üzerinde göreceğiz.

FOURIER DÖNÜŞÜMÜ

Fourier Serisinden Fourier Dönüşümüne Geçiş

Anlatım örneği olarak,

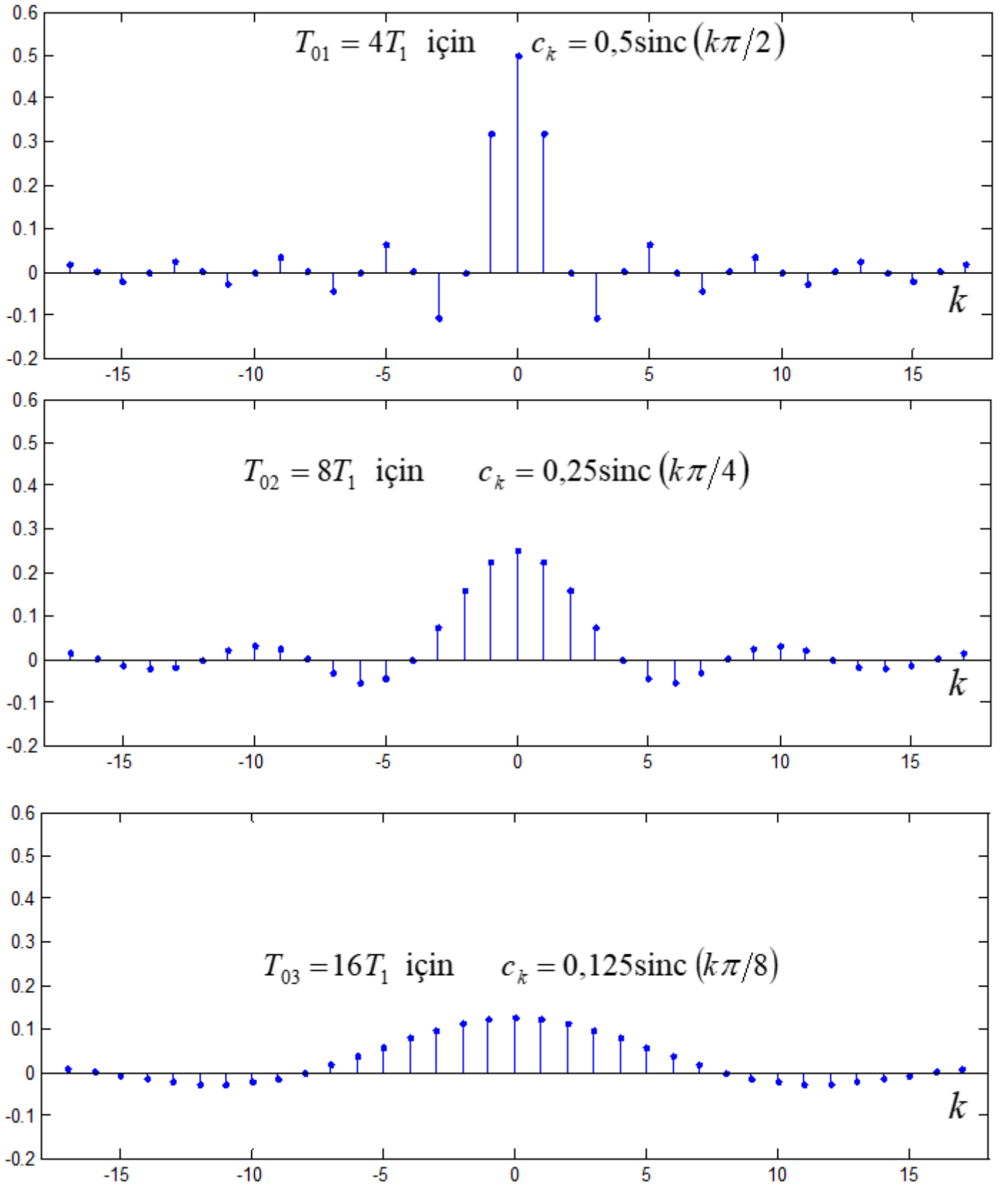


şekildeki $\hat{x}(t)$ sinyalinin daha önce bulduğumuz

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} \quad ; \quad c_k = \frac{2T_1}{T_0} \text{sinc}(2k\pi T_1/T_0)$$

karmaşık Fourier seri katsayılarının spektrumunu inceleyelim ($\omega_0 = 2\pi/T_0$).

Gerçel olduğu için c_k katsayılarının spektrumu tek bir çizimle gösterilebilir. Ancak biz şimdi aynı T_1 , farklı T_0 değerleri için bu spektrumun nasıl değiştiğine bakalım. Sırasıyla $T_{01} = 4T_1$, $T_{02} = 8T_1$ ve $T_{03} = 16T_1$ için c_k spektrumunu k değerlerine karşı çizelim:

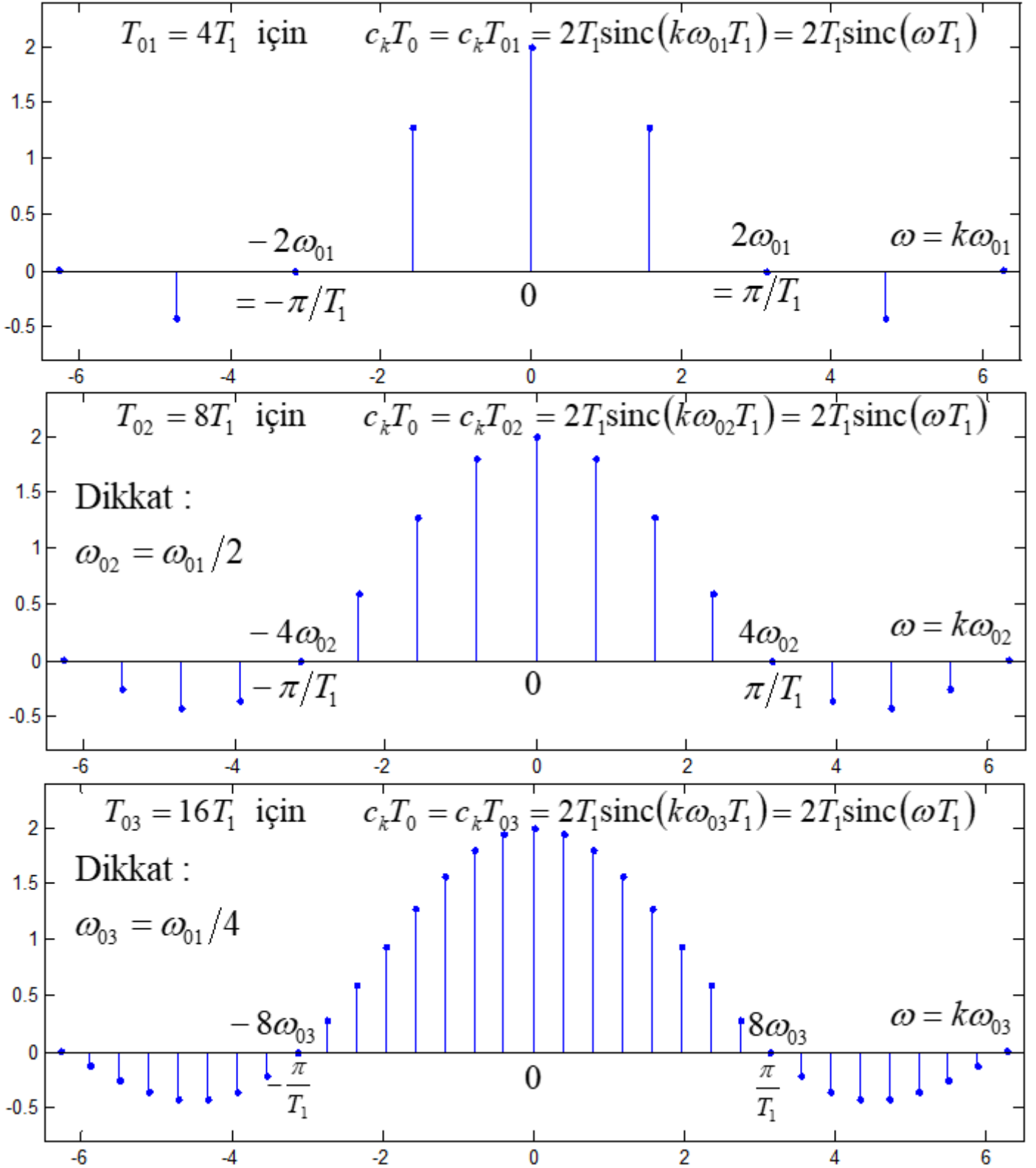


Görüldüğü gibi T_0 artarken genlik azalmakta ve spektrum yüksek harmonik numaralarına doğru genişleyerek yayılmaktadır.

Şimdi de bu üç spektrumu yatay ve dikey eksenleri farklı ölçeklerle çizelim. Dikey eksen $c_k T_0$, yatay eksen ise $\omega = k\omega_0$ diye adlandıracağımız yeni bir büyüklük olsun. Çizimler arasında T_0 değişirken ω_0 da değişecek fakat T_1 değişmeyecektir. Bu yüzden T_1 değerine göre büyüklükleri karşılaştırmak yerinde olacaktır. Önceki üç ve sonraki üç grafikteki eksenlerdeki sayısal değerler $T_1 = 1$ içindir.

$$c_k T_0 = 2T_1 \text{sinc}(2k\pi T_1/T_0) = 2T_1 \text{sinc}(k\omega_0 T_1) = 2T_1 \text{sinc}(\omega T_1)$$

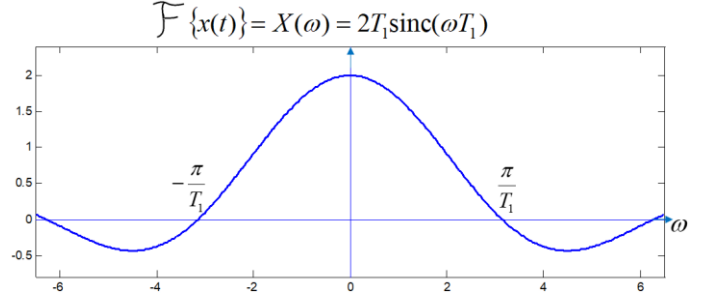
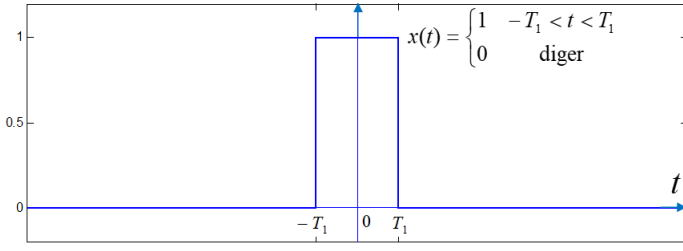
olacaktır. Çizimler şöyle olur:



Görüldüğü gibi T_0 artarken $c_k T_0$, genliği ve genişliği aynı olan bir zarf fonksiyonuna yakınsamaktadır.

$T_0 \rightarrow \infty$ 'a giderken bu kesikli çizim, sürekli bir fonksiyona yakınsar. İşte bu fonksiyon, $T_0 \rightarrow \infty$ durumunda artık periyodik olmayan $x(t)$ 'nin Fourier dönüşümü olarak tanımlanır.

Yani aşağıda soldaki $x(t)$ sinyalinin Fourier dönüşümü sağdaki $X(\omega)$ fonksiyonudur:



Fourier Dönüşümü ve Ters Fourier Dönüşümü, Anlam ve Formülleri

Periyodik sinyallerin içindeki frekans bileşenlerinin, ana frekansın tam katı frekanslarda olduğunu Fourier serileri ile görmüştük. Peki periyodik olmayan sinyaller için frekans bileşenlerinden bahsedilebilir mi? Mesela bir arabanın taşı bir yolda giderken maruz kaldığı titreşimlerin frekansından bahsedebilir miyiz? Bu titreşimler periyodik değildir, ancak araba hızlanırsa kuşkusuz titreşimler sıklaşacaktır. “Sıklık” kelimesinin eş anlamısı “frekans” olduğuna göre demek ki bahsedebilmeliyiz.

Periyodik olmayan bir $x(t)$ sinyali için bir Fourier serisi kullanabilmek için, ilgilendiğimiz aralıkta o sinyale eşit, o aralığın dışında da periyodik bir $\hat{x}(t)$ sinyali tanımlayıp onun Fourier serisini ilgilendiğimiz aralık için ilk sinyal yerine kullanabiliyorduk. $\hat{x}(t)$ sinyalini, $(-T_0/2, T_0/2)$ aralığında $x(t)$ 'ye eşit ve T_0 ile periyodik olarak tanımlarsak, ve $\lim T_0 \rightarrow \infty$ için $\hat{x}(t)$ 'yi Fourier serisine açarsak, tüm zamanlarda $x(t)$ 'ye eşit olacağından, aradığımız frekans bileşenlerini bulacağımızı düşünebiliriz. Ancak bu durumda ana frekans $\omega_0 = 2\pi/T_0$ sonsuz küçük olacağından, bunun katlarındaki frekans bileşenleri sonsuz küçük frekans adımlarıyla bulunacaktır. Bu iyi bir şeydir; $k\omega_0 = \omega$ tanımıyla sürekli bir frekans değişkenine göre incelemek mümkün olur. Fakat $\lim T_0 \rightarrow \infty$ için seri katsayıları, yani frekans bileşenlerinin katsayıları da genellikle sonsuz küçük olacaktır. Farklı sinyallerin frekans bileşenlerini karşılaştırmak için bu haliyle kullanışsızdır. Ama katsayıların T_0 ile çarpılması, onları karşılaştırılabilir büyüklüklere getireceğinden, $\hat{x}(t)$ 'nin karmaşık Fourier seri katsayılarının T_0 ile çarpımı olan $c_k T_0$ 'ın $\omega = k\omega_0 = 2k\pi/T_0$ tanımıyla $\lim T_0 \rightarrow \infty$ hali, ilk sinyalimiz $x(t)$ 'nin Fourier dönüşümü olarak tanımlanır ve $X(\omega)$ şeklinde gösterilir.

$$c_k T_0 = \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \underbrace{\hat{x}(t)}_{x(t)} e^{-jk\omega_0 t} dt \rightarrow \boxed{\mathcal{F}\{x(t)\} = X(\omega) = \int_{t=-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt}$$

Dikkat: Fourier dönüşümü, Fourier serisinin limit hali değildir! Seri katsayılarının limit halinin yatay ve dikey eksenlerde ölçeklendirilmiş halidir. Fourier serisinin limit hali ise ters Fourier (\mathcal{F}^{-1}) dönüşümü olarak tanımlanır.

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (c_k T_0) e^{jk\omega_0 t} \underbrace{\frac{2\pi}{T_0}}_{\omega_0}$$

$\omega = k\omega_0$ ve $\lim T_0 \rightarrow \infty$ için, $\hat{x}(t) \rightarrow x(t)$, $(c_k T_0) \rightarrow X(\omega)$, $\omega_0 \rightarrow d\omega$ (ω 'daki sonsuz küçük bir adımlık değişim) ve

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \rightarrow \int_{\omega=-\infty}^{+\infty}$$

olacağından,

$$\boxed{\mathcal{F}^{-1}\{X(\omega)\} = x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega}$$

$x(t)$ ile $X(\omega)$ arasındaki ilişki, şu şekillerde de gösterilebilir:

$$x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega)$$

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega)$$

$$X(\omega) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} x(t)$$

Fourier dönüşümü, periyodik olan veya olmayan sinyallerin frekans analizi için kullanılır. Zaman uzayındaki (*domain* = tanım kümesi) bir sinyalin, frekans uzayındaki (domenindeki) karşılığını verir. Dönüşüm genellikle aynı fonksiyon sembolünün büyük harfle yazılmasıyla gösterilir. Frekans uzayında zaman değişkeni yoktur, frekans değişkeni ω vardır (rad/s).

Fourier dönüşümünün kutupsal gösterimdeki mutlak değeri ve açısı sırasıyla, sinyalin frekans bileşenlerinin hangi frekansta ne kadar yoğunlaştığını ve ne kadar faz kaymasına maruz kaldığını verir. $x(t)$ 'deki yavaş değişen bileşenler, $|X(\omega)|$ 'da sıfır frekans civarında kendini gösterir. Hızlı değişen bileşenler ise $|X(\omega)|$ 'da $+$ – yüksek frekanslarda kendini gösterir.

Örnek 1:

$\Re\{a\} > 0$ olmak üzere $x(t) = e^{-at}u(t)$ sinyalinin Fourier dönüşümünü bulalım:

$$\mathcal{F}\{e^{-at}u(t)\} = X(\omega) = \int_{t=-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{t=-\infty}^{+\infty} e^{-at} \underbrace{u(t)}_{\substack{t < 0 \Rightarrow 0 \\ t \geq 0 \Rightarrow 1}} e^{-j\omega t}dt = \int_{t=0}^{+\infty} e^{-(a+j\omega)t}dt$$

$$X(\omega) = \left[\frac{e^{-(a+j\omega)t}}{-(a+j\omega)} \right]_{t=0}^{+\infty} = \frac{1}{(a+j\omega)} - \frac{1}{(a+j\omega)} \underbrace{\left(\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-(a+j\omega)t} \right)}_{\substack{e^{-\Re\{a\} \cdot \infty} \cdot \underbrace{e^{-j\omega t}=0}_{\text{sonlu}}}}$$

$$X(\omega) = \boxed{\mathcal{F}\{e^{-at}u(t)\} = \frac{1}{a+j\omega}} \quad \Re\{a\} > 0$$

Örnek 2:

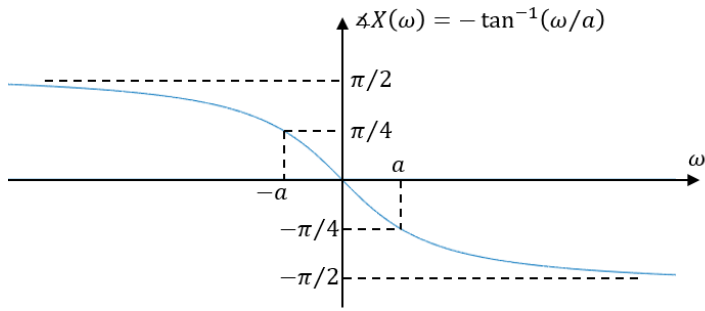
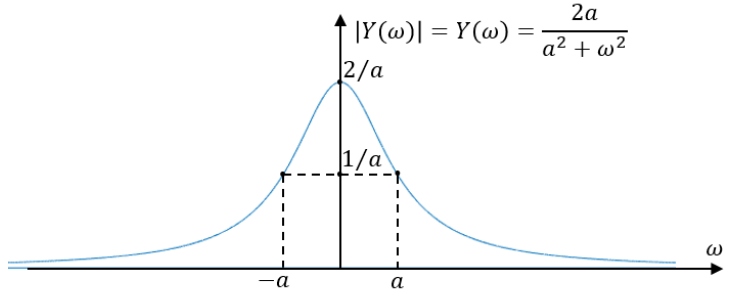
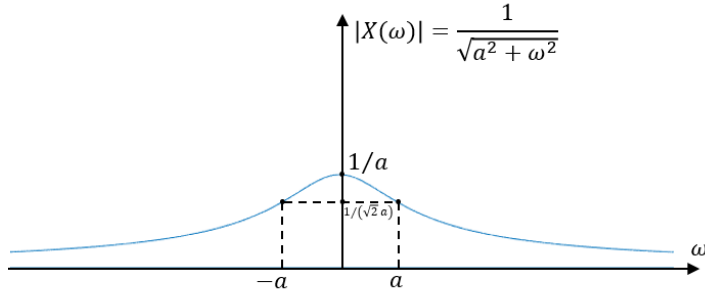
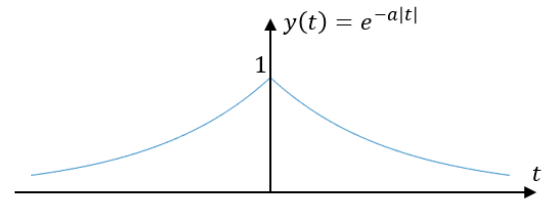
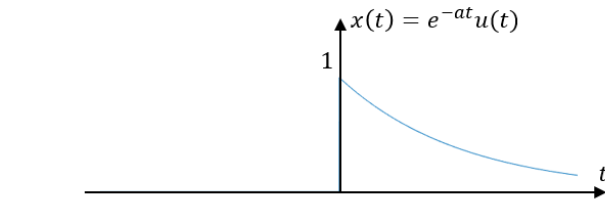
$\Re\{a\} > 0$ olmak üzere $y(t) = e^{-a|t|}$ sinyalinin Fourier dönüşümünü bulalım:

$$\mathcal{F}\{e^{-a|t|}\} = Y(\omega) = \int_{t=-\infty}^{+\infty} e^{-a|t|}e^{-j\omega t}dt = \int_{t=-\infty}^0 e^{(a-j\omega)t}dt + \underbrace{\int_{t=0}^{+\infty} e^{-(a+j\omega)t}dt}_{1/(a+j\omega)}$$

$$Y(\omega) = \frac{1}{(a+j\omega)} + \left[\frac{e^{(a-j\omega)t}}{a-j\omega} \right]_{t=-\infty}^0 = \frac{1}{(a+j\omega)} + \frac{1}{(a-j\omega)} \left(1 - \underbrace{\lim_{t \rightarrow -\infty} e^{(a-j\omega)t}}_0 \right)$$

$$Y(\omega) = \frac{1}{a+j\omega} + \frac{1}{a-j\omega} = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}$$

Şimdi son iki örnekteki iki sinyali, hem zaman hem frekans uzaylarında karşılaştıralım. Gerçek a için $Y(\omega)$ gerçel olduğundan tek bir çizimle gösterilebilir. $X(\omega)$ ise karmaşık olduğundan kutupsal gösterimdeki mutlak değeri $|X(\omega)|$ ve açısı $\angle X(\omega)$ ile gösterilecektir.



$y(t)$ sinyali, $x(t)$ sinyalinin sıfırdan farklı kısmının simetrisini de içerdği için, yavaş değişen bileşenleri $x(t)$ 'dekinin 2 katıdır. Bu yüzden sıfır frekansta $|Y(0)| = 2 \cdot |X(0)|$.

$y(t)$ sinyali ani değişim içermemektedir; sadece $t = 0$ 'daki türevinde ani değişim vardır. $x(t)$ sinyali ise $t = 0$ anında ani değişim gösterdiği için hızlı değişen bileşenleri $y(t)$ 'dekinden daha çoktur. Bu yüzden artı ve eksi yüksek frekanslarda $|X(\omega)| > |Y(\omega)|$.

Fourier Dönüşümünün Mevcudiyeti için Şartlar

Fourier dönüşümü için Drichlet şartları denilen şu 4 şartın tümünü sağlayan sinyallerin Fourier dönüşümü alınabilir:

- 1) $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt < \infty$ (yani sonlu) olmalı. Mesela $u(t)$ gibi olmamalı.
- 2) $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt < \infty$ olmalı. Mesela $\delta(t)$ gibi olmamalı.
- 3) Her sonlu zaman aralığındaki ekstremum (maksimum, minimum ve büküm) nokta sayısı sonlu olmalı.
- 4) Her sonlu zaman aralığındaki süreksizlik nokta sayısı sonlu olmalı.

Bunlar yeterlilik şartlarıdır, gereklilik değil. Bu şartları sağlamayan bazı sinyallerin de Fourier dönüşümü alınabilmektedir. Mesela bahsi geçen $u(t)$ ve $\delta(t)$ sinyalleri tüm şartları sağlamasa da Fourier dönüşümleri mevcuttur.

.....