DOĞRUSAL ZAMANLA DEĞİŞMEZ (DZD) SİSTEMLER

Ayrık Zamanlı Konvolüsyon

$\delta[n] \longrightarrow \boxed{\text{DZD sistem}} \longrightarrow h[n]$ Birim darbe tepkisi diye tanımlanır.

$\delta[n-k] \longrightarrow \boxed{\text{DZD sistem}} \longrightarrow h[n-k]$ (k sabit) Zamanla değişmezlikten.

$x[k]\delta[n-k] \longrightarrow \boxed{\text{DZD sistem}} \longrightarrow x[k]h[n-k]$ Doğrusallık gereği ($x[k]$ da sabit).

$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k] \longrightarrow \boxed{\text{DZD sistem}} \longrightarrow y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]$ Doğrusallık gereği.

Bu son toplama *konvolüsyon toplamı* denir ve şöyle gösterilir:

$$\boxed{x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]}$$

Sürekli Zamanlı Konvolüsyon

$\delta(t) \longrightarrow \boxed{\text{DZD sistem}} \longrightarrow h(t)$ Birim darbe tepkisi diye tanımlanır.

$\delta(t-\tau) \longrightarrow \boxed{\text{DZD sistem}} \longrightarrow h(t-\tau)$ (τ sabit) Zamanla değişmezlikten.

$x(\tau)\delta(t-\tau) \longrightarrow \boxed{\text{DZD sistem}} \longrightarrow x(\tau)h(t-\tau)$ Doğrusallık gereği ($x(\tau)$ da sabit).

$x(t) = \int_{\tau=-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau \longrightarrow \boxed{\text{DZD sistem}} \longrightarrow y(t) = \int_{\tau=-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$ Doğrusallık gereği.

Bu son integrale *konvolüsyon integrali* denir ve şöyle gösterilir:

$$\boxed{x(t) * h(t) = \int_{\tau=-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau}$$

Birim darbe tepkisi biliniyorsa, verilen herhangi bir giriş için çıkış bulunabilir. Bu yüzden birim darbe tepkisine *sistem fonksiyonu* da denir ve blok şemalarda sistem kutusunun içine yazılabilir.

$$x \longrightarrow \boxed{h} \longrightarrow y = x * h$$

Konvolüsyon özellikleri

Hem sürekli zamanlı hem de ayrık zamanlı konvolüsyon şu özelliklere sahiptir:

Değişme Özelliği

$$x * h = h * x$$

Anlamı:

İspat: Yalnız sürekli zamanlı için ispatlayalım. Ayrık zamanlı için de durum benzerdir.

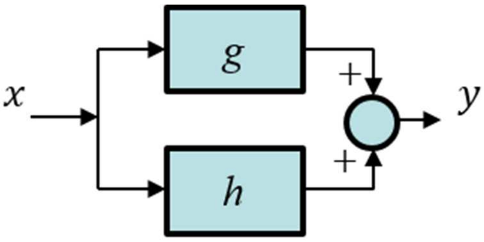
$$x(t) * h(t) = \int_{\tau=-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(\underbrace{t-\tau}_{p})\underbrace{d\tau}_{-dp} = \int_{p=+\infty}^{-\infty} x(t-p)h(p)(-dp) = \int_{p=-\infty}^{+\infty} h(p)x(t-p)dp = h(t) * x(t)$$

Çünkü $\tau = t - p$; $\tau = \pm\infty \Rightarrow p = \mp\infty$ ve $-dp$ içindeki eksi işareti sınırlar yer değiştirilerek atılıyor.

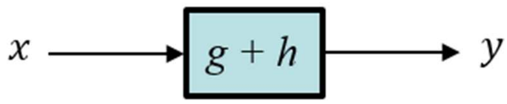
Toplama Üzerine Dağılma Özelliği

$$x * (g + h) = (x * g) + (x * h)$$

Anlamı:



≡



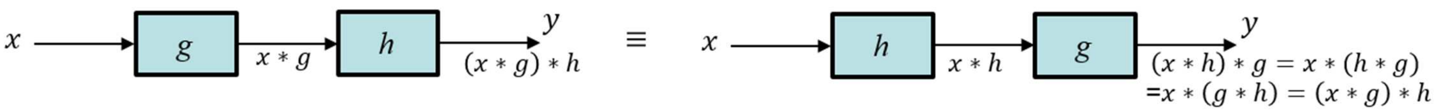
İspat gerekmeyecek kadar açıkça görülmektedir.

Birleşme Özelliği

$$x * (g * h) = (x * g) * h$$

(İspatını kendiniz yapınız.)

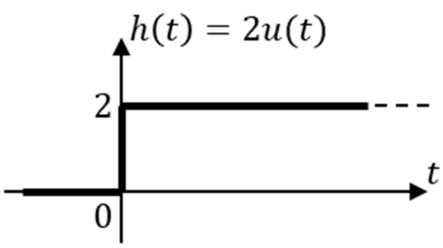
Değişme özelliği ile birlikte anlamı, seri bağlı DZD sistemlerin sırasının değiştirilmesinin, dış uçlardan görülen davranışı değiştirmemesidir. Anlamın ispatı aşağıda gösterilmiştir (Dikkat, bu özelliğin ispatı değildir).

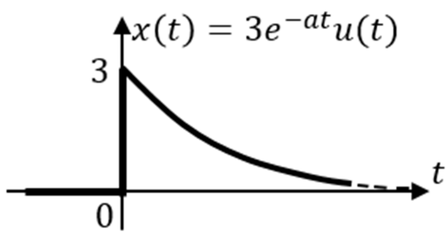


Konvolüsyon Örnekleri

Aksi söylenmedikçe bu konudaki tüm örneklerde soru kalıbı aynıdır. DZD bir sistemin birim darbe tepkisi *h* ve giriş sinyali *x* verilmekte, çıkış sinyali *y* sorulmaktadır.

Örnek 1)





$a > 0$

$y(t) = ?$

Çözüm:

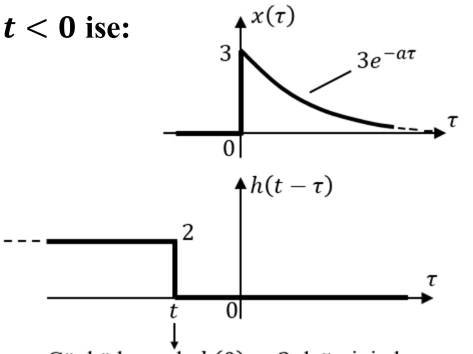
$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{\tau=-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

İntegral alınana kadar t 'ye sabit gözüyle bakılır. İntegral değişkeni τ 'dur. τ 'ya göre belirli integral alındığı için integral işlemi bittiğinde τ diye bir sembol kalmamalıdır. Kalmışsa kesinlikle hata yapılmış demektir.

t 'ye sabit gözüyle bakılsa da değerinin her ihtimali düşünülmelidir. Neyin integrali alınıyorsa (integrand) onun, integral değişkeni τ 'ya göre yazılması gerekir. Burada integrand $x(\tau)h(t-\tau)$ 'dur.

$x(\tau)$ ile $h(t-\tau)$ 'yu alt alta çizip bunların çarpımını yazmaya çalıştığımızda, yazılış biçiminin, şimdilik sabit varsayılan t 'nin değerine bağlı olduğunu görürüz. İntegrandın yazılış biçimini değiştiren her t bölgesi ayrı ayrı incelenmelidir.

***t* < 0 ise:**

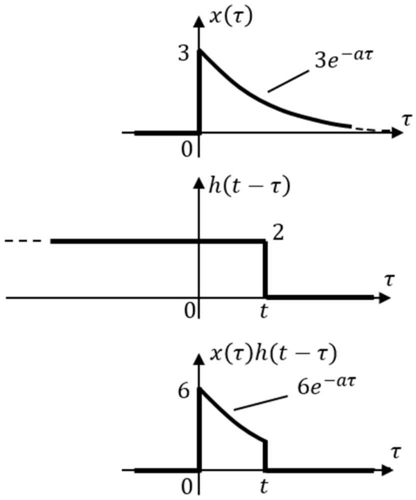


Çünkü bu anda $h(0) = 2$ değerini alıyor.
Yani parantez içi $t-\tau = 0 \;\rightarrow\; \boxed{\tau = t}$
(Yatay eksen değişkeninin değeri yazılıyor.)

$$x(\tau)h(t-\tau) = 0 \quad \forall\tau$$

$$y(t) = \int_{\tau=-\infty}^{+\infty} 0 \cdot d\tau = 0$$

***t* ≥ 0 ise:**



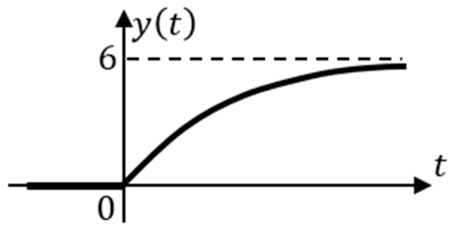
$$x(\tau)h(t-\tau) = \begin{cases} 2 \times 3e^{-a\tau} & 0 \le \tau \le t \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$$

$$y(t) = \int_{\tau=0}^{t} 6e^{-a\tau} d\tau = \left[\frac{-6}{a} e^{-a\tau}\right]_{\tau=0}^{t} = \frac{6(1-e^{-at})}{a}$$

Sonuç (tüm zamanlar için):

$$y(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 6(1-e^{-at})/a & t \ge 0 \end{cases}$$

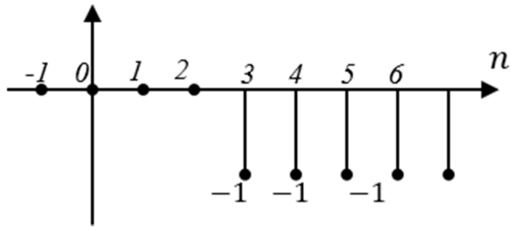
$$\boxed{y(t) = \frac{6(1-e^{-at})}{a} u(t)}$$



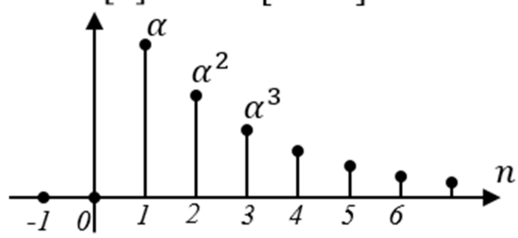
Not: "<" ile "≤" ya da ">" ile "≥" işaretlerinden hangisini kullanacağımız, darbe içermeyen <u>sürekli zaman</u> sinyallerin konvolüsyonunda fark etmez, çünkü böyle konvolüsyonlar süreklidir, sıçramalı olmaz. Yine aynı sebeple, τ 'ya göre yazılan integrand ifadelerinde de darbe içermeyen anlarda, eşitliğin tanım bölgelerinin hangi tarafına dahil edildiği fark etmez, integral süreklidir.

Örnek 2)

$h[n] = -u[n-3]$



$x[n] = \alpha^n u[n-1]$ $\qquad \alpha \neq 1$



Çözüm:

$$y[n] = x[n] * h[n] = h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n-k]$$

Toplam alınana kadar n 'ye sabit gözüyle bakılır. Toplam değişkeni k 'dır. k 'ya göre belirli toplam alındığı için toplam işlemi bittiğinde k diye bir sembol kalmamalıdır. Kalmışsa kesinlikle hata yapılmış demektir.

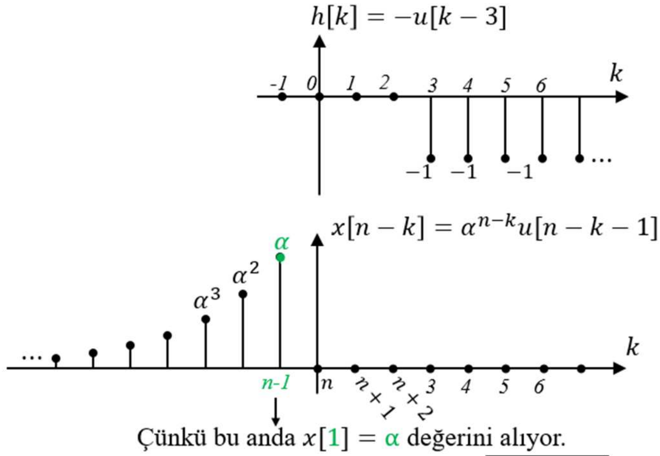
n ’ye sabit gözüyle bakılsa da değerinin her ihtimali düşünülmelidir. Neyin toplamı alınıyorsa onun, toplam değişkeni k ’ya göre yazılması gerekir. Burada $h[k]x[n-k]$ ’nın toplamı alınmaktadır.

$h[k]$ ile $x[n-k]$ ’yı alt alta çizip bunların çarpımını yazmaya çalıştığımızda, yazılış biçiminin, şimdilik sabit varsayılan n ’nin değerine bağlı olduğunu görürüz. Toplamı alınan $h[k]x[n-k]$ ’nın yazılış biçimini değiştiren her n bölgesi ayrı ayrı incelenmelidir.

$n-1<3$ yani $\boldsymbol{n<4}$ **ise:**

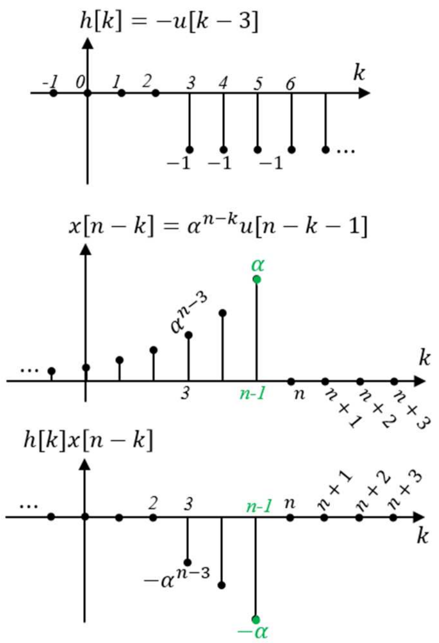
$$h[k]x[n-k]=0 \quad \forall k$$

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} 0=0$$



Çünkü bu anda $x[1]=\alpha$ değerini alıyor.
Yani parantez içi $n-k=1 \rightarrow \boxed{k=n-1}$
(Yatay eksen değişkeninin değeri yazılıyor.)

$n-1\geq 3$ yani $\boldsymbol{n\geq 4}$ **ise:**



Şekiller $0<\alpha<1$ ve $n=6$’ya göre çizilmiş ise de prensipte tüm $n\geq 4$ durumlarını anlatmaktadır.

$$h[k]x[n-k]=\begin{cases}-1\cdot\alpha^{n-k} & 3\leq k\leq n-1\\ 0 & \text{diğer}\end{cases}$$

$$y[n]=\sum_{k=3}^{n-1}-(\alpha^{n-k})=\sum_{k=0}^{n-3-1}-\left(\alpha^{n-(k+3)}\right)$$

Alt sınırı sıfır yapmak için sınırları 3 kadar geriletip, içeride k yerine $k+3$ yazarız. Böylece her iki tarafta da ilk terimin $-\alpha^{n-3}$, son terimin $-\alpha$ olmasını sağlarız.

$$y[n]=-\sum_{k=0}^{n-4}\alpha^{n-k-3}=-\alpha^{n-3}\sum_{k=0}^{n-4}(\alpha^{-1})^k$$

Bu biçime getirme nedenimiz, elimizde geometrik seri toplamına ait formülün o biçimde olmasıdır. Formülü çıkartımıyla gösterelim:

$$S_N=\sum_{k=0}^{N}\beta^k=1+\beta+\beta^2+\cdots+\beta^N$$

$$\beta S_N=\beta+\beta^2+\cdots+\beta^N+\beta^{N+1}$$

$$S_N-\beta S_N=(1-\beta)S_N=1-\beta^{N+1} \quad\rightarrow\quad S_N=\boxed{\sum_{k=0}^{N}\beta^k=\frac{1-\beta^{N+1}}{1-\beta}}$$

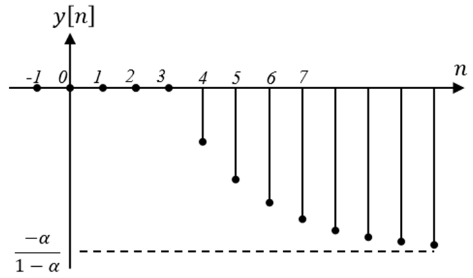
Dikkat: $\beta=1$ ise bu formülde pay ve paydadaki $(1-\beta)$ çarpanları sadeleştirildikten sonra $\beta=1$ yerine yazılmalıdır ki bu da N+1 sonucunu verir.

Şimdi $\beta=\alpha^{-1}$ ve $N=n-4$ için bu formülü kullanarak

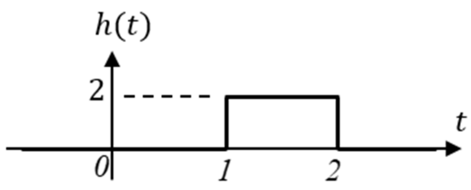
$$y[n] = -\alpha^{n-3}\frac{1-(\alpha^{-1})^{n-3}}{1-\alpha^{-1}} = \frac{-\alpha^{n-3}+1}{1-\alpha^{-1}} = -\frac{\alpha-\alpha^{n-2}}{1-\alpha} = y[n]$$

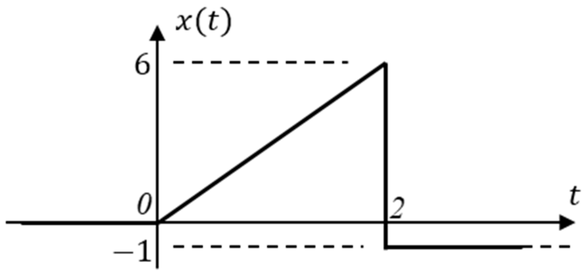
Sonuç (tüm zamanlar için):

$$\boxed{y[n] = -\frac{\alpha-\alpha^{n-2}}{1-\alpha}u[n-4]}$$



Örnek 3)





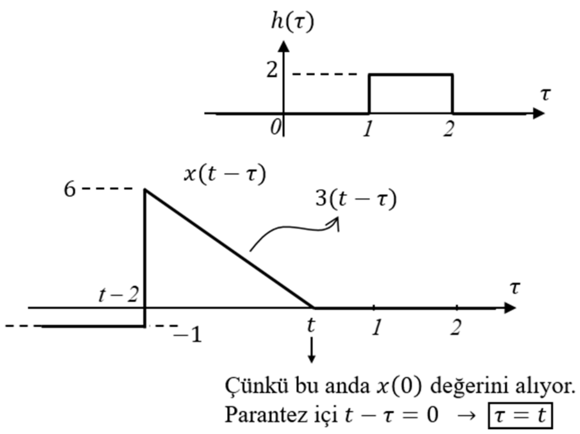
Çözüm:

$$y(t) = x(t) * h(t) = h(t) * x(t) = \int_{\tau=-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

İntegrandın integral değişkeni τ 'ya göre yazılması gerekir. Burada integrand $h(\tau)x(t-\tau)$ 'dur.

$h(\tau)$ ile $x(t-\tau)$ 'yu alt alta çizip bunların çarpımını yazmaya çalıştığımızda, yazılış biçimini değiştiren her t bölgesi ayrı ayrı incelenmelidir.

$t < 1$ ise:

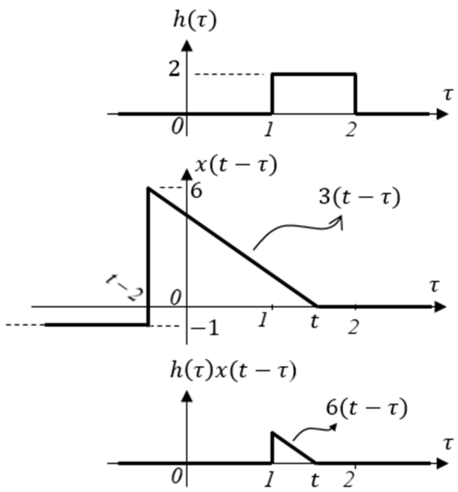


$$h(\tau)x(t-\tau) = 0 \quad \forall\tau$$

$$y(t) = \int_{\tau=-\infty}^{+\infty} 0 \cdot d\tau = 0$$

(Yanda $x(t-\tau)$ için düşey ekseni özellikle çizmedik, çünkü yeri t'nin değerine bağlı; ama bu aralıkta olmak şartıyla bu çözümü etkilemiyor.)

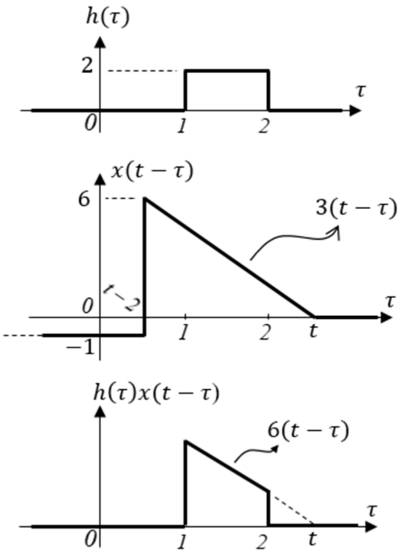
$1 \leq t < 2$ ise:



$$h(\tau)x(t-\tau) = \begin{cases} 2 \times 3(t-\tau) & 1 < \tau \leq t \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$$

$$y(t) = \int_{\tau=1}^{t} 6(t-\tau)d\tau = [-3(t-\tau)^2]_{\tau=1}^{t}$$
$$= 3(t-1)^2$$

$t \geq 2$ ve $t-2 \leq 1$ yani $\mathbf{2 < \boldsymbol{t} \leq 3}$ **ise:**



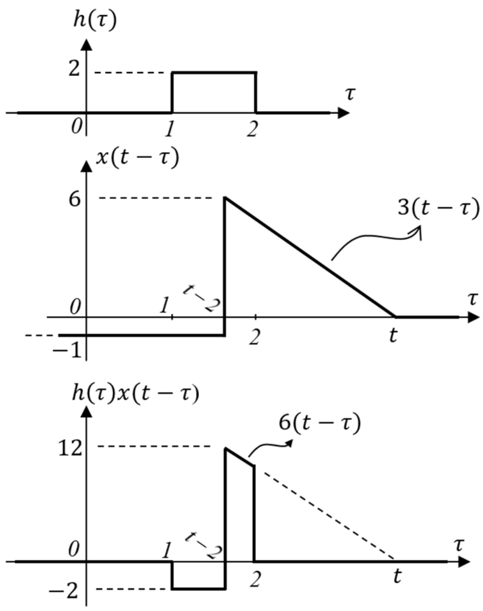
$$h(\tau)x(t-\tau) = \begin{cases} 2 \times 3(t-\tau) & 1 < \tau \leq 2 \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$$

$$y(t) = \int_{\tau=1}^{2} 6(t-\tau)d\tau = [-3(t-\tau)^2]_{\tau=1}^{2}$$

$$y(t) = 3(t-1)^2 - 3(t-2)^2 = 6t - 9$$

$$y(t) = 6t - 9$$

$1 \leq t-2 < 2$ yani $\mathbf{3 \leq \boldsymbol{t} < 4}$ **ise:**



$$h(\tau)x(t-\tau) = \begin{cases} 2 \times (-1) & 1 < \tau \leq t-2 \\ 2 \times 3(t-\tau) & t-2 < \tau \leq 2 \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$$

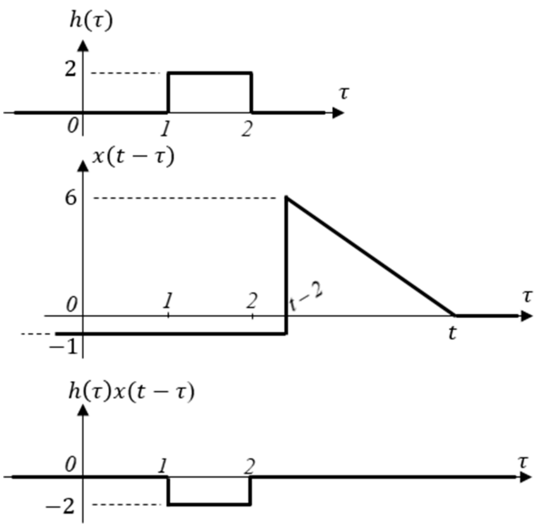
$$y(t) = \int_{\tau=1}^{t-2} (-2)d\tau + \int_{t-2}^{2} 6(t-\tau)d\tau$$

$$y(t) = [-2\tau]_1^{t-2} + [-3(t-\tau)^2]_{t-2}^{2}$$

$$y(t) = -2t + 4 + 2 - 3(t-2)^2 + 12$$

$$y(t) = -3t^2 + 10t + 6$$

$t-2 \geq 2$ yani $\boldsymbol{t} \geq \mathbf{4}$ **ise:**



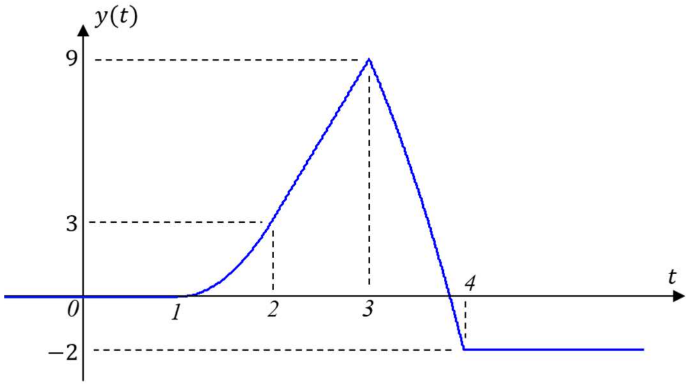
$$h(\tau)x(t-\tau) = \begin{cases} 2 \times (-1) & 1 < \tau \leq 2 \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$$

$$y(t) = \int_{\tau=1}^{2} 2d\tau = [-2\tau]_{\tau=1}^{2} = -2 = y(t)$$

Sonuç (tüm zamanlar için):

$$y(t)=\begin{cases}0 & t<1 \text{ ise}\\ 3(t-1)^2 & 1\le t<2 \text{ ise}\\ 6t-9 & 2\le t<3 \text{ ise}\\ -3t^2+10t+6 & 3\le t<4 \text{ ise}\\ -2 & t\ge 4 \text{ ise}\end{cases}$$

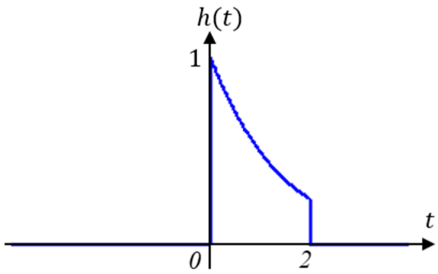
Dikkat edilirse sınırların her iki taraftan da aynı değerin bulunduğu görülmektedir.

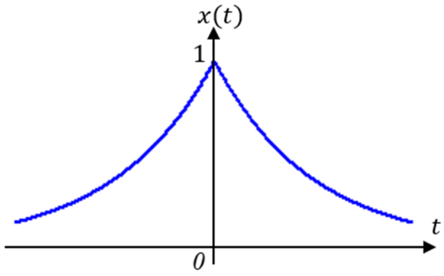


Örnek 4)

$h(t)=e^{-at}\cdot(u(t)-u(t-2))$

$x(t)=e^{-b|t|} \qquad 0<b<a$

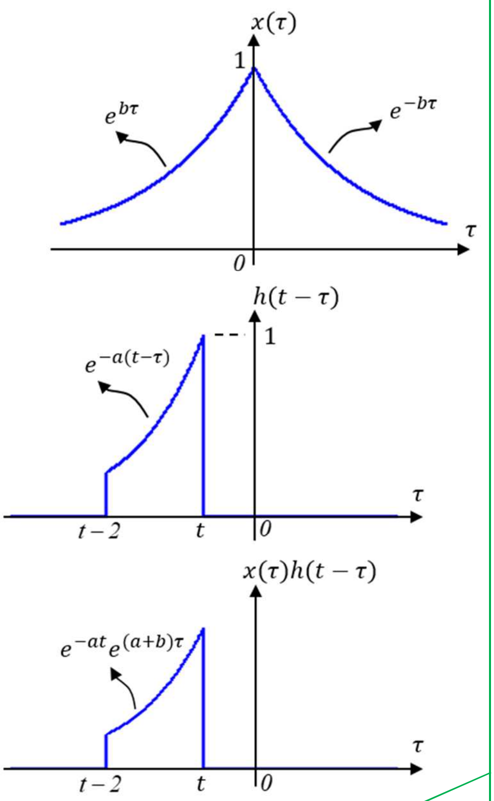




Çözüm:

$$y(t)=x(t)*h(t)=\int_{\tau=-\infty}^{+\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

$t<0$ ise:

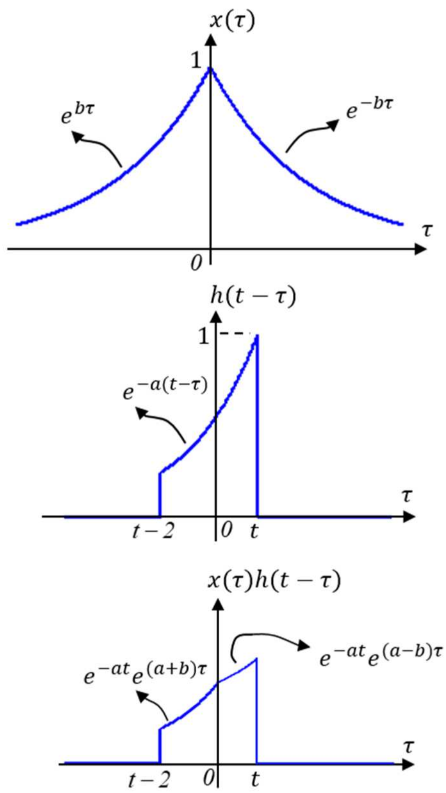


$$y(t)=\int_{\tau=t-2}^{t}\underbrace{e^{-at}}_{\text{sabit}}e^{(a+b)\tau}d\tau$$

$$y(t)=e^{-at}\left[\frac{e^{(a+b)\tau}}{a+b}\right]_{\tau=t-2}^{t}$$

$$y(t)=\frac{1-e^{-2(a+b)}}{a+b}e^{bt}$$

$0\le t<2$ ise:

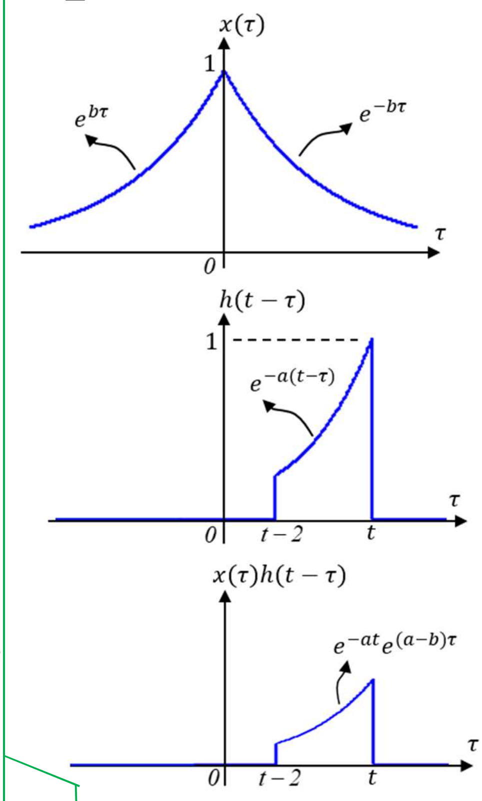


$$y(t)=e^{-at}\left(\int_{\tau=t-2}^{0}e^{(a+b)\tau}d\tau+\int_{\tau=0}^{t}e^{(a-b)\tau}d\tau\right)$$

$$y(t)=e^{-at}\left(\left[\frac{e^{(a+b)\tau}}{a+b}\right]_{\tau=t-2}^{0}+\left[\frac{e^{(a-b)\tau}}{a-b}\right]_{\tau=0}^{t}\right)$$

$$y(t)=\frac{e^{-at}-e^{-2(a+b)}e^{bt}}{a+b}+\frac{e^{-bt}-e^{-at}}{a-b}$$

$t\ge 2$ ise:



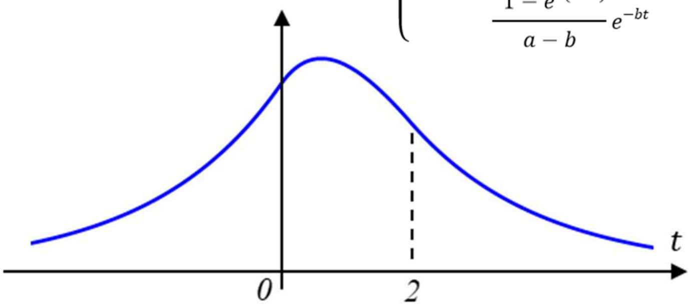
$$y(t)=\int_{\tau=t-2}^{t}\underbrace{e^{-at}}_{\text{sabit}}e^{(a-b)\tau}d\tau$$

$$y(t)=e^{-at}\left[\frac{e^{(a-b)\tau}}{a-b}\right]_{\tau=t-2}^{t}$$

$$y(t)=\frac{1-e^{2(b-a)}}{a-b}e^{-bt}$$

Sonuç:

$$y(t)=\begin{cases}\dfrac{1-e^{-2(a+b)}}{a+b}e^{bt} & t<0\\[2mm] \dfrac{e^{-at}-e^{-2(a+b)}e^{bt}}{a+b}+\dfrac{e^{-bt}-e^{-at}}{a-b} & 0\le t<2\\[2mm] \dfrac{1-e^{2(b-a)}}{a-b}e^{-bt} & 2\le t<4\end{cases}$$

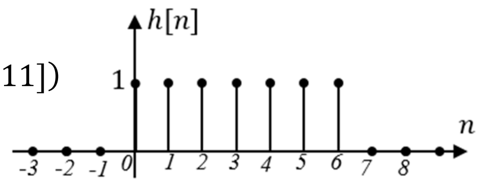


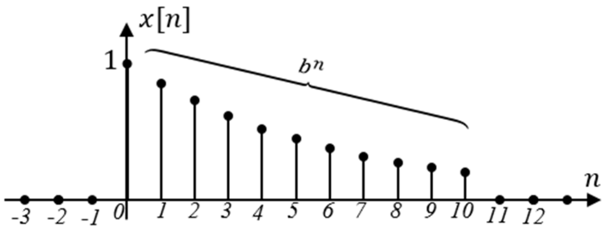
Örnek 5)

$h[n]=u[n]-u[n-7]$

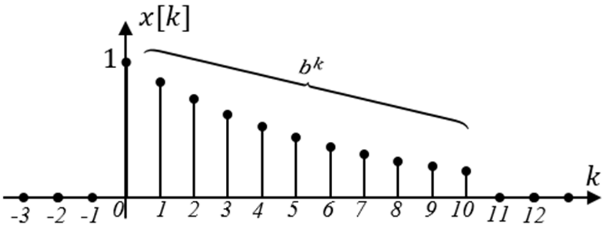
$x[n]=b^n(u[n]-u[n-11])$

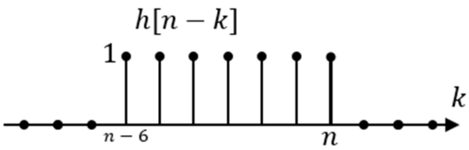
Çözüm:





$$y[n]=x[n]*h[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]h[n-k]$$





$n<0$ ise:

$$x[k]h[n-k]=0\quad\forall k\quad\rightarrow\quad y[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}0=0$$

$0\le n\le 6$ ise:

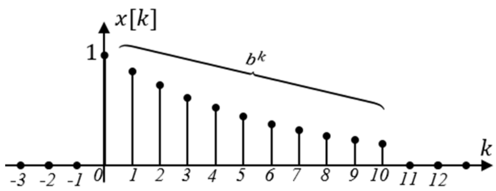
$$x[k]h[n-k]=\begin{cases}1\cdot b^k & 0\le k\le n\\ 0 & \text{diğer}\end{cases}$$

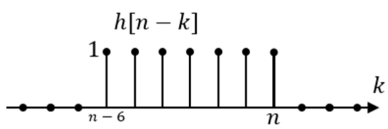
$$y[n]=\sum_{k=0}^{n}b^k=\frac{1-b^{n+1}}{1-b}$$

$n\le 10$ ve $n-6\ge 0$ yani **$6\le n\le 10$ ise:**

$$x[k]h[n-k]=\begin{cases}1\cdot b^k & n-6\le k\le n\\ 0 & \text{diğer}\end{cases}$$

$$y[n]=\sum_{k=n-6}^{n}b^k=\sum_{k=0}^{6}b^{k+n-6}=b^{n-6}\sum_{k=0}^{6}b^k=\frac{1-b^7}{1-b}b^{n-6}$$



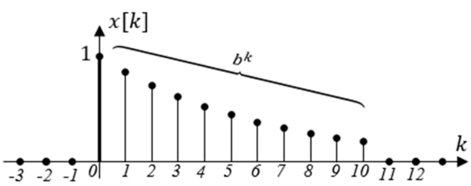


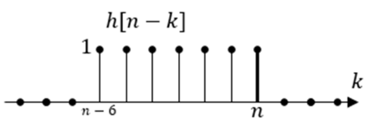
$n-6\le 10$ ve $n\ge 10$ yani **$10\le n\le 16$ ise:**

$$x[k]h[n-k]=\begin{cases}1\cdot b^k & n-6\le k\le 10\\ 0 & \text{diğer}\end{cases}$$

$$y[n]=\sum_{k=n-6}^{10}b^k=\sum_{k=0}^{16-n}b^{k+n-6}=b^{n-6}\sum_{k=0}^{16-n}b^k$$

$$y[n]=\frac{1-b^{17-n}}{1-b}b^{n-6}=\frac{b^{n-6}-b^{11}}{1-b}$$



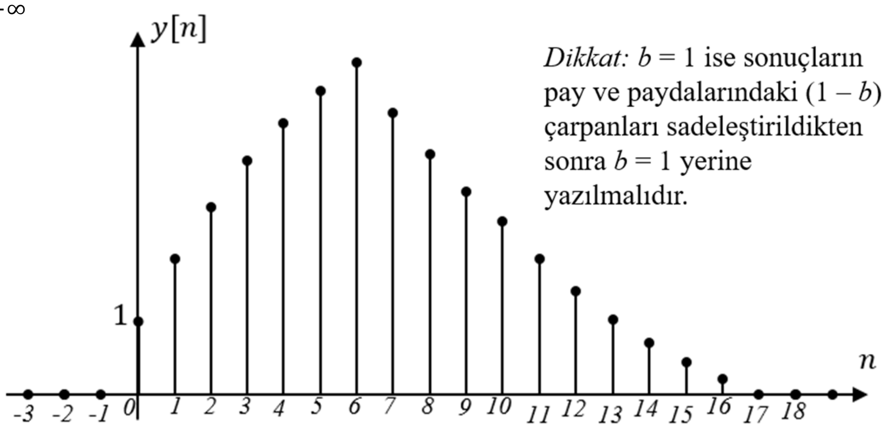


$n-6>10$ yani $\boldsymbol{n>16}$ **ise:**

$$x[k]h[n-k]=0 \quad \forall k \quad \rightarrow \quad y[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} 0=0$$

Sonuç:

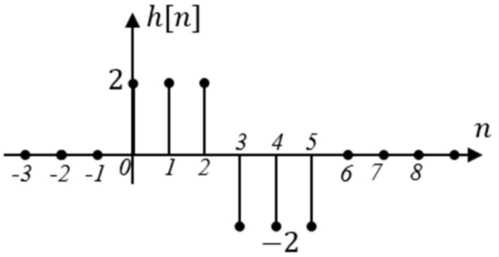
$$y[n]=\begin{cases} 0 & n<0 \\ \dfrac{1-b^{n+1}}{1-b} & 0\le n\le 6 \\ \dfrac{1-b^{7}}{1-b}b^{n-6} & 6\le n\le 10 \\ \dfrac{b^{n-6}-b^{11}}{1-b} & 10\le n\le 16 \\ 0 & n>16 \end{cases}$$



Dikkat: $b=1$ ise sonuçların pay ve paydalarındaki $(1-b)$ çarpanları sadeleştirildikten sonra $b=1$ yerine yazılmalıdır.

Bazı sınır değerler her iki tarafın kuralına da uyduğu için fazladan dahil edildi. Bunları sağlama amacıyla kullanabiliriz, yani aynı anın değerini iki taraftan da aynı bulmalıyız.

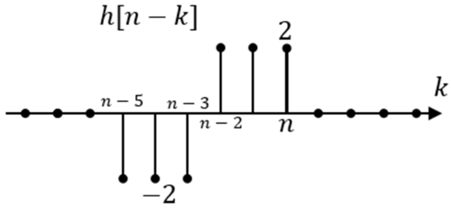
Örnek 6)



Birim darbe sinyali yandaki gibi olan DZD sistemin girişine sabit $x[n]=4$ sinyali uygulanırsa çıkış ne olur?

Çözüm:

$$y[n]=x[n]*h[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\underbrace{x[k]}_{4}h[n-k]$$



Dikkat: Sabit ile konvolüsyon sabit ile çarpım değildir!

Dikkat: Konvolüsyon parçalı hesaplanmak zorunda değildir; bazen tek bölge üzerinden hesaplama yeterlidir.

$$y[n]=4\sum_{k=-\infty}^{+\infty}h[n-k]=4\cdot(-2-2-2+2+2+2)=\boxed{y[n]=0 \ \ \forall n}$$

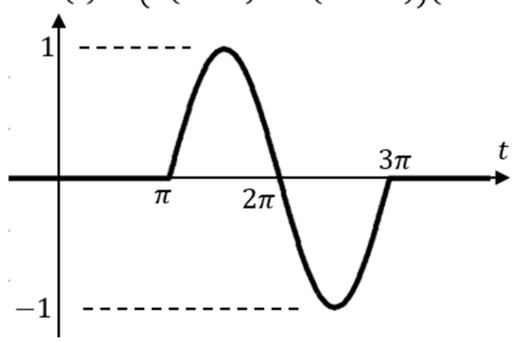
Dikkat: DZD sistemlerin girişi veya birim darbe tepkisi sıfır ise çıkışı kesinlikle sıfırdır. Fakat hem giriş hem birim darbe tepkisi sinyalleri sıfırdan farklı iken de çıkış sıfır sinyal olabilir. Bunun sürekli zamanlı örneği de sıradaki sorudur.

Örnek 7)

Birim darbe sinyali yandaki gibi olan DZD sistemin girişine sabit $x(t)=2$ sinyali uygulanırsa çıkış ne olur?

(Bunun çözümünü de siz yapınız. Cevap: $\boxed{y(t)=0 \ \ \forall t}$)

$$h(t)=\big(u(t-\pi)-u(t-3\pi)\big)(-\sin t)$$

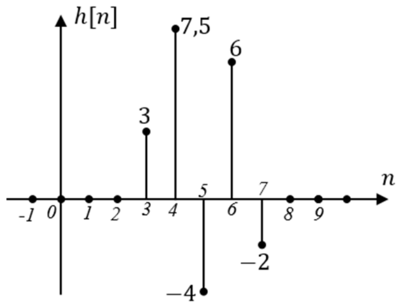


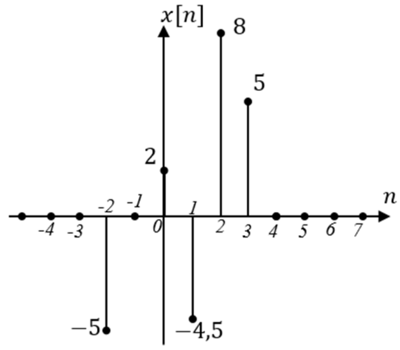
Sonlu Süreli Ayrık Zamanlı Sinyallerin Konvolüsyon Kolaylığı

Her iki sinyal de sonlu süreli ise, yani sıfırdan farklı nokta sayısı sonlu ise, klasik çarpmaya benzer (fakat çarpma değil!), sinyalin değerlerinin birer rakam gibi kullanıldığı fakat elde aktarımı yapılmayan bir yöntem vardır. Bu yöntem bir örnek üzerinde kolayca anlaşılabilir.

Örnek 8)

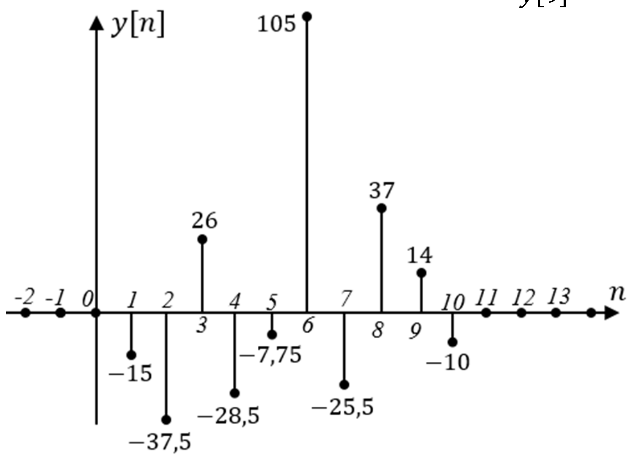
Klasik çarpmadaki gibi tercihen en sol ve en sağdaki sıfırları yazmıyoruz ama aradaki sıfırları yazıyoruz. Sağdan hizalıyoruz. Klasik çarpma gibi ama elde aktarımı yapmaksızın, eksi veya virgüllü ne çıktıysa bir rakam gibi yazıyoruz. Sonucun zamanlarını gösterildiği gibi buluyoruz. Diğer anlarda $y[n]=0$ olur.





$y[n]=x[n]*h[n]$

					-5	0	2	-4,5	8	5	→ sonuncusu $x[3]$
				×		3	7,5	-4	6	-2	→ sonuncusu $h[7]$
					10	0	-4	9	-16	-10	
				-30	0	12	-27	48	30		
			20	0	-8	18	-32	-20			
		-37,5	0	15	-33,75	60	37,5				
+	-15	0	6	-13,5	24	15					
	-15	-37,5	26	-28,5	-7,75	105	-25,5	37	14	-10	→ sonuncusu $y[3+7]$
	$y[1]$	$y[2]$	⋯						$y[9]$		$=y[10]$



Bir Sinyalin Bir Darbe ile Konvolüsyonu

$$x(t)*\delta(t-a)=x(t-a)$$

$$x[n]*\delta[n-a]=x[n-a]$$

İspat:

$$x(t)*\delta(t-a)=\delta(t-a)*x(t)=\int_{\tau=-\infty}^{+\infty}\underbrace{\delta(\tau-a)x(t-\tau)}_{\delta(\tau-a)\underbrace{x(t-a)}_{\text{sabit}}}d\tau=x(t-a)\underbrace{\int_{\tau=-\infty}^{+\infty}\delta(\tau-a)d\tau}_{1}=x(t-a)$$

$$x[n]*\delta[n-a]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\underbrace{x[k]\delta[n-a-k]}_{\underbrace{x[n-a]}_{\text{sabit}}\delta[n-a-k]}=x[n-a]\underbrace{\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta[n-a-k]}_{1}=x[n-a]$$

Soru: Bu özellikten faydalanarak konvolüsyon işleminin etkisiz elemanını bulunuz.