# LYAPUNOV KARARLILIK TESTİ:

## Ön Tanımlar

olsun. Bunun bağımsız değişkenini, *n*. mertebeden bir sistemin durum değişkeni vektörü olarak düşünmek, anlama kolaylığı sağlar. ’in skaler olduğu unutulmamalıdır.

### Kesin pozitif ve kesin negatif fonksiyonlar

Eğer

için

ve

ise fonksiyonuna “kesin pozitif (positive definite)” denir. Yukarıdaki “” işareti yerine “ ” ile yazılabiliyorsa fonksiyonuna “kesin negatif (negative definite)” denir.

### Yarı kesin pozitif ve yarı kesin negatif fonksiyonlar:

Eğer

için

ve

(fakat olması olmasını gerektirmiyor) ise fonksiyonuna “yarı kesin pozitif (positive semidefinite)” denir. Yukarıdaki “” işareti yerine “ ” ile yazılan şartı sağlıyorsa fonksiyonuna “yarı kesin negatif (negative semidefinite)” denir.

#### Örnekler

için

kesin pozitiftir.

kesin pozitiftir.

yarı kesin pozitiftir.

yarı kesin negatiftir.

### Kesin/yarı-kesin pozitif/negatif matrisler

bir kare matris ve bir vektör değişken olsun. fonksiyonu,

* Kesin pozitif ise matrisine kesin pozitif denir ve diye gösterilir.
* Kesin negatif ise matrisine kesin negatif denir ve diye gösterilir.
* Yarı kesin pozitif ise matrisine yarı kesin pozitif denir ve diye gösterilir.
* Yarı kesin negatif ise matrisine yarı kesin negatif denir ve diye gösterilir.

matrisinin *ij* konumu elemanını ile gösterirsek,

diye kolayca açılabilir.

### Simetrik ve anti-simetrik (skew-symmetric) matrisler

ise matrisi simetrik,

ise matrisi anti-simetriktir (skew-symmetric).

Herhangi bir kare matrisi, simetrik () ve antisimetrik () iki bileşenin toplamı olarak yazılabilir. Bu bileşenler:

ve olup, olduğu açıktır.

Ayrıca olduğu için olduğu açıktır.

( skaler olduğu için ile eşit olduğunu unutmayınız.)

içinde ’nun anti simetrik bileşeni önemsiz olduğu için gibi ifadelerle uğraşırken genellikle ’nun simetrik olduğu durumlarla ilgileniriz. Böylece ’nun “simetrik kesin pozitif” , “simetrik yarı kesin negatif” vb. olduğu durumlarla ilgileniriz.

simetrik ise

diye kolayca açılabilir.

Dikkat, simetrik reel kare matrisinin tüm özdeğerleri reeldir. En küçük özdeğerine ve en büyük özdeğerine dersek (bunlar negatif de olabilir),

yazılabilir. Burada

Dolayısıyla simetrik reel kare matrisinin bütün özdeğerleri pozitifse , negatifse , pozitif ya da sıfırsa , negatif ya da sıfırsa demektir.

simetrik reel kare matrisinin sol üstten kesilen bütün kare alt matrislerinin determinantlarının pozitif olması ile olması arasında çift yönlü gereklilik vardır. Ama kesin negatif ya da yarı kesinler için bu şartın tersi ya da benzerlerini söyleyemeyiz. Ama ise , ya da ise olduğunu söyleyebiliriz.

#### Örnekler

matrisi, 1>0, ve olduğu için kesin pozitiftir. Zaten tüm özdeğerleri de pozitiftir. (Sol üst köşedeki eleman -1 olsaydı kesin pozitif olmazdı. Mutlak değerine değil, determinantlara bakıyoruz.) Bu matris için

yazılabilir.

matrisi, özdeğerlerinin birisi sıfır, ikisi pozitif olduğu için yarı kesin pozitiftir.

## Lyapunov Kararlılık Teoremi

sistemini düşünelim. Eğer, kesin pozitif bir fonksiyonunun zamana göre türevini ( ) negatif bulabiliyorsak sistem asimptotik kararlıdır (Lyapunov ölçütüne göre kararlıdır). Yani her başlangıç şartı ile için .

Bu teoremin mantığı, sürekli azalan kesin pozitif bir fonksiyonun sıfıra gitmek zorunda olduğudur.

Yukarıdaki şartın sağlanmadığı durumda sistemin kararsız olduğunu söyleyemeyiz. Belki bir başka Lyapunov fonksiyonu seçimiyle o şartı sağlatmak mümkün olabilir. Ancak kesin ya da yarı kesin pozitif bulunuyorsa sistemin kararsız olduğu söylenebilir.

yarı kesin negatif bulunan bazı durumlarda da sistemin kararlılığından söz edilebilir. Ama bunun için ek bazı dayanaklara ihtiyaç vardır.

#### Örnek

sisteminin kararlılığını inceleyelim.

seçersek

yarı kesin negatif bulundu. Çünkü olursa ne olursa olsun olmaktadır. Ancak tam olarak sıfıra oturunca de tam olarak sıfıra oturmalıdır. Yani de sıfır olmalıdır. zaten sıfır olduğu için de sıfır olmalıdır. Yani sistem kararlıdır.

#### Örnek

sisteminin kararlılığını inceleyelim.

seçersek ’in kesin negatif olduğu açıkça görülür:

Yani durum değişken vektörü asimptotik olarak sıfıra gitmektedir.

### Doğrusal Zamanla Değişmez Sistemlere Uygulaması

sistemini düşünelim. simetrik kesin pozitif bir matris olmak üzere Lyapunov fonksiyonu olarak

seçelim ve bunun türevini kesin negatif yapmaya çalışalım.

Eğer simetrik kesin pozitif olduğu bilinen belli bir matrisi ile

simetrik denklemden çözülen , simetrik kesin pozitif bulunuyorsa sistem kararlıdır.

## Lyapunov Yönteminden Faydalanarak Doğrusal Olmayan Denetleyici Tasarımı

Bu kez sistemdeki girişi sıfırlamayalım. Kesin pozitif herhangi bir Lyapunov fonksiyonunun zamana göre türevini incelerken ortaya çıkan terimlerinden dolayı terimi de ortaya çıkacaktır. kesin negatif çıkacak şekilde atanabilirse kararlı bir denetim elde edilir.

### Uygulama 1

hata dinamiğini düşünelim. Burada hata olup, sabit olmak zorunda değildir, bir referans modelden gelebileceği gibi verilen bir fonksiyon da olabilir. Hatanın sıfıra gitmesi isteniyor.

diye düşünüp kazanç matrisini doğrusal sistemlerdeki gibi matrisinin özdeğerlerini kararlı ve istediğimiz gibi ayarlayarak atayalım. Böylece simetrik kesin pozitif olduğu bilinen belli bir matrisi ile

simetrik denklemden çözülen , simetrik kesin pozitif olacaktır. Lyapunov fonksiyonu olarak

seçelim ve bunun türevini kesin negatif yapmaya çalışalım.

olur.

olacak şekilde atanırsa, girişi ile kararlı bir denetim sağlanır.

#### Örnek

Hata dinamiği tanımıyla ve seçimiyle

Derste anlatılan yöntemle, ’nin özdeğerlerini , yapmak için , bulunur. birim matris alınabilir. MATLAB’dan

P=lyap(Ac,Q)

komutuyla bulunur ve bu kesin pozitiftir.

denkleminden

bulunur. ve sıfıra iyice yaklaşınca 0/0 belirsizliğinde paydanın sıfır olmasına karşı bir önlem de almak gerekir.

, , ve 1ms simülasyon adımlarıyla çözüldüğünde sistemin aslında kararsız olmasına rağmen denetimin kararlı olduğu yakınsamalardan görülmektedir(soldaki , sağdaki yakınsamasını göstermektedir):

 

### Uygulama 2

Kesin pozitif herhangi bir için olmak üzere olacak şekilde atanır. Böylece kesin negatif olmuş olur.

#### Örnek

sistemini düşünelim. olması isteniyor. Buna göre ve

tanımıyla

olsun ve yapan girişini bulalım.

Buradan çekilirse:

bulunur. Yİne payda sıfıra iyice yaklaşınca 0/0 belirsizliğinde paydanın sıfır olmasına karşı bir önlem almak gerekir.

Bu yöntemi 1 ms adımlarla simüle edip paydayı () mutlak değerce ile sınırlarsak şu sonuçları buluruz (Soldaki ’in yakınsaması, sağdaki de ’nin ’ye yakınsaması):



### Sonuç:

Lyapunov yöntemlerine dayalı denetimler, özellikle 2. uygulama, genellikle kaliteli değildir. Paydanın sıfıra yaklaşması aniden hedeften sapmaya yol açmakta, sürekli zamanlı sistemin ayrık zamanlı uygulanmasından dolayı da hassas olamamaktadır.