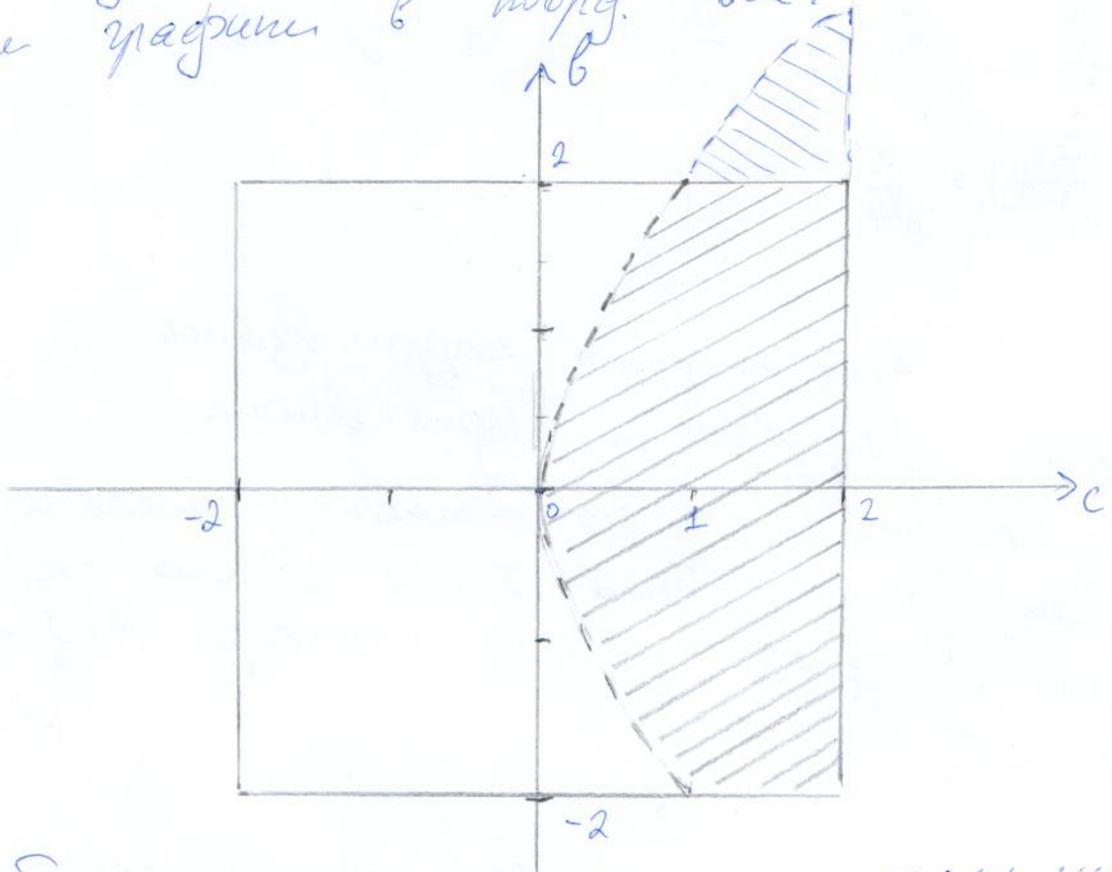
$f(x) = x^2 + bx + c$

$D = b^2 - 4c$; $D < 0$ – мнимые корни.

Таким образом, условие мнимых корней: $b^2 < 4c$

Т.к. числа выбираются из квадрата, решим задачу при помощи геометрического определения вероятности: $P(A) = \frac{g}{G}$, где G – площадь квадрата, а g – площадь части квадрата, удовлетв. условию $b^2 < 4c$

Построим графики в коорд. осях:



Таким, образом, площадь, ограниченная прямыми $x=2$, $y=2$, $y=-2$ и $b^2 = 4c$ (это уже привал), является мерой g (из формулы $P(A)$)

Заметим, что $b^2 = 4c$ симметрична отн. оси Oc, и $g = 2S$, где S – площадь части, ограниченная прямыми $y=2$, $y=0$, $x=2$ и ~~b^2~~ $b = 2\sqrt{c}$

Найдем S: Т.к. в „чистом" виде это не вычислить, достроим фигуру до пересечения с $x=2$ и вычислим как разницу большой фигуры и достроенной:

$$S = 2\int_0^2 \sqrt{x}\,dx - 2\int_1^2 (\sqrt{x} - 1)\,dx$$

Площадь самой фигуры считается именно
по формуле $S = \int_a^b (f(x)-g(x))\,dx$, т.к. вся
часть графика $y = 2\sqrt{x}$ лежит выше $y = 2$

$$= 2\int_0^2 \sqrt{x}\,dx - 2\int_1^2 (\sqrt{x}-1)\,dx = \frac{4x^{3/2}}{3}\Big|_0^2 - \left(\frac{4x^{3/2}}{3} - 2x\right)\Big|_1^2 =$$

$$\frac{8\sqrt{2}-10}{3}$$

$$\frac{8\sqrt{2}}{3} - \frac{8\sqrt{2}}{3} + \frac{10}{3} = \frac{10}{3}$$

Таким образом, $\cancel{G = \frac{10}{3}}$, $g = \frac{20}{3}$, $G = 16$, тогда:

$$P(A) = \frac{g}{G} = \frac{20}{3} \cdot \frac{1}{16} = \frac{20}{48} = \frac{5}{24} \cdot 2 = \frac{10}{24} = \frac{5}{12}$$

Ответ: $P(A) = \frac{5}{24} \cdot 2 = \frac{5}{12}$

№3

Выпишем все пары, которых могут взять:
Вася - Петя Вася - Миша Петя - Миша
Т.к. Петю точно берут, то остается только
пары - Вася - Петя и Петя - Миша. Всего пар 2,
Вася есть в одной из них, поэтому $P = \frac{1}{2} = 0{,}5$

Ответ: $P = 0{,}5$

№5

Для каждого конверта есть вероятность ровно $\frac{1}{n}$,
что в него попадет правильное письмо.
Тогда по формуле мат. ожидания:

$$M(A) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = \underbrace{1 \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \cdot 1 + 1 \cdot \frac{1}{n} + 1 \cdot \frac{1}{n} \dots + 1 \cdot \frac{1}{n}}_{n \text{ слагаемых}} = n \cdot \frac{1}{n} = 1.$$

Ответ: в среднем одно письмо попадает в свой конверт