№4

Найти экстремум ф-ции!

$u = (x^2+y^2+z^2)^2 - a^2(x^2+y^2-z^2)$

$u = x^4+y^4+z^4+2x^2y^2+2x^2z^2+2y^2z^2-a^2x^2-a^2y^2+a^2z^2$

Необходимое условие экстремума:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial z} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x\left(x^2+y^2+z^2-\dfrac{a^2}{2}\right) = 0 & (1) \\ 4y\left(x^2+y^2+z^2-\dfrac{a^2}{2}\right) = 0 & (2) \\ 4z\left(x^2+y^2+z^2+\dfrac{a^2}{2}\right) = 0 & (3) \end{cases}$$

Из ур-ния 3: $\left[\begin{array}{l} z = 0 \\ x^2+y^2+z^2+\dfrac{a^2}{2} = 0 \end{array}\right.$; но $x^2+y^2+z^2+\dfrac{a^2}{2} > 0$, поэтому $z = 0$ - решение

Рассмотрим 2 вида стационарных точек:

$M(0;0;0)$ и $M(x_0;y_0;0)$

Для $x_0 \neq 0, y_0 \neq 0$; рассм. ур-ния 1 и 2:

Разделим ур-ния 1 и 2 на $x \neq 0$ и $y \neq 0$ соотв., получим: $x^2+y^2+z^2 = \dfrac{a^2}{2}$; но $z = 0$, поэтому

$x^2+y^2 = \dfrac{a^2}{2}$ - геометрическое место для $(x_0;y_0)$.

Таким образом, для $\forall x_0, y_0 \in G \Rightarrow M(x_0;y_0;0)$ - стационарная точка. Исключение составляют "мертвые" точки $\left(0; \pm\dfrac{a}{\sqrt{2}}\right)$ и $\left(\pm\dfrac{a}{\sqrt{2}}; 0\right)$

G - геом. место точек, задаваемых ур-нем $x_0^2+y_0^2 = \dfrac{a^2}{2}$.

2) Проверим точки на удовлетв. достаточному условию экстремума

Найдем 2-е и смешанные производные:

$u''_{xx} = 12x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 2a^2$

$u''_{yy} = 12y^2 + 4x^2 + 4z^2 - 2a^2$

$u''_{zz} = 12z^2 + 4x^2 + 4y^2 - 2a^2$

$u''_{xy} = 8xy$

$u''_{xz} = 8xz$

$u''_{zy} = 8yz$

Стац. точки:

$M(0;0;0)$

$M_1\left(\frac{a}{2}; \frac{a}{2}; 0\right)$

$M_2\left(\frac{a}{2\sqrt{2}}; \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}a; 0\right)$

$M_1, M_2 \in G;$

2) $\delta_1 = u''_{xx}(M)$

$$\delta_2 = \begin{vmatrix} u''_{xx}(M) & u''_{xy}(M) \\ u''_{xy}(M) & u''_{yy}(M) \end{vmatrix}$$

$$\delta_3 = \begin{vmatrix} u''_{xx}(M) & u''_{xy}(M) & u''_{xz}(M) \\ u''_{yx}(M) & u''_{yy}(M) & u''_{yz}(M) \\ u''_{xz}(M) & u''_{yz}(M) & u''_{zz}(M) \end{vmatrix}$$

) Для $M(0;0;0)$ $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 0 \Rightarrow M(0;0;0)$ – не точка экстремума

) Для $M_1\left(\frac{a}{2}; \frac{a}{2}; 0\right)$ $\delta_1 > 0$; $\delta_2 > 0$; $\delta_3 > 0 \Rightarrow M_1\left(\frac{a}{2}; \frac{a}{2}; 0\right)$ – точка минимума функции

) Для $M_2\left(\frac{a}{2\sqrt{2}}; \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}a; 0\right)$ $\delta_1 > 0$; $\delta_2 > 0$; $\delta_3 > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow M_2\left(\frac{a}{2\sqrt{2}}; \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}a; 0\right)$ – точка минимума функции айдем значение ф-ии в этих точках:

M_1: $\left(\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{4}+0\right)^2 - a^2\left(\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{4}+0\right) = -\frac{a^4}{4}$

M_2: $\left(\frac{a^2}{8}+\frac{3a^2}{8}+0\right)^2 - a^2\left(\frac{a^2}{8}+\frac{3a^2}{8}+0\right) = -\frac{a^4}{4}$

Ответ: $f_{min} = -\frac{a^4}{4}$