선형결합(Linear Combination)과 생성

· 벡터들의 선형결합 $= c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 + \cdots + c_n v_n \quad (c \in \mathbb{R})$

↳상수배 ↳상수배 ↳상수배 ↳상수배

ex1) $\vec{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ $\vec{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ $\Rightarrow 0\vec{a} + 0\vec{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{0}$ (영벡터)

$\Rightarrow 3\vec{a} + -2\vec{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow$ $\mathbb{R}^2$ 위의 어떤 벡터든 두 $\vec{a}, \vec{b}$의 선형결합으로 나타낼 수 있음. (이 벡터들이 $\mathbb{R}^2$의 기저를 이룸)

· 생성(span)$(\vec{a}, \vec{b}) = \mathbb{R}^2$

- 그러나 $\vec{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\vec{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}$라고 가정했을 때, $\vec{a}, \vec{b}$의 선형결합은 동일 선상에 놓이게 되므로, $\mathbb{R}^2$ 위의 모든 벡터를 나타낼 수 없음.

- 영벡터(span(0))는 자신의 선형결합으로 얻을 수 있는 유일한 벡터는 영벡터 자신뿐임.

- 결국 '생성'은 $\underline{\text{span}(v_1, v_2 \cdots v_n) = \{c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_n v_n \mid c_i \in \mathbb{R}\}}$

ex) $\vec{a}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\vec{b}\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow c_1\vec{a} + c_2\vec{b} = \vec{x}$ $\Rightarrow \underbrace{\text{span}\left(\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}\right\}\right)}_{\text{모든 집합}} = \mathbb{R}^2$

$\Rightarrow c_1\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow 1c_1 + 0c_2 = x_1$

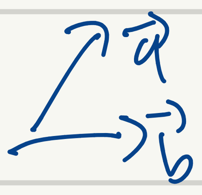
$2c_1 + 3c_2 = x_2$

→ 이 벡터들의 선형결합으로 나타낼 수 있는 '모든 벡터'의 집합!

선형독립이란?

· 선형종속 = 집합의 한 벡터를 집합의 다른 벡터의 선형결합으로 나타낼수 있는것.

(선형결합을 취했을 때, 하나의 벡터로 줄어드는 것 (동일선상 에 위치))

ex) 

이 두 벡터는 동일 선상에 위치하지 않으므로

$\mathbb{R}^2$ 의 모든 공간을 정의 함.

이때, $\mathbb{R}^3$를 정의하기 위해선 집합 내의 세번째 벡터 ($\vec{c}$)는

이 두 벡터 ($\vec{a}, \vec{b}$)와 동일 평면상에 위치할 수 없음.

(동일 평면에 있으면 $\vec{c}$는 선형종속이 됨!)

· 선형독립 = 선형종속이 아닌 집합 $\mathrm{span}(v_1, v_2) = \mathbb{R}^2$, $\mathrm{span}(v_1, v_2, v_3 \cdots v_n) = \mathbb{R}^n$

- 한 벡터의 스칼라 배인 벡터가 없어야 하고,
- 두벡터의 합이 한 벡터가 되면 안 됨.
- 여분의 벡터가 선형종속인 경우는 선형독립이 됨!

선형독립 or 선형종속 ☆

$\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\} \Rightarrow c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 = 0$

c_1 OR c_2 가 0이 아니면 이 집합은 선형종속임.

c_1 and c_2 가 둘 다 0이면 ⇒ 선형독립

"즉, 위 식이 성립하게 하는 유일한 해가 0 이면, 선형독립임."

ex) $S\left\{\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}\right\} \Rightarrow c_1\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$

$\Rightarrow 2c_1 + 3c_2 = 0$

$c_1 + 2c_2 = 0$

$\Rightarrow c_1 + \frac{3}{2}c_2 = 0$

$c_1 + 2c_2 = 0$

$\frac{1}{2}c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = 0$

$c_1 + 0 = 0$, $\therefore c_1 = 0$

$c_1 = 0, c_2 = 0$

⇒ 선형독립 집합

$\Rightarrow \mathrm{span}(S) = \mathbb{R}^2$

중복되는 벡터가 없음!