

행 사다리꼴 행렬을 이용하여 계수 방정식과 4개의 변수 풀기

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 7$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 12$$

$$2x_1 + 4x_2 + 6x_4 = 4$$

기약행 사다리꼴

$\text{rref}(A)$

$m < n \Rightarrow$ 해가 무수히 많음.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & | & 7 \\ 1 & 2 & 2 & -1 & | & 12 \\ 2 & 4 & 0 & 6 & | & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{2\text{행} - 1\text{행} \\ 3\text{행} - 2\text{행}}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & | & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & | & 5 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & | & -10 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{0\text{행} - 1\text{행} \\ 2\text{행} + (2 \times 1\text{행})}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & | & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

~ 아래 1은 위 1보다 오른쪽에 있음.

$\rightarrow 0$ 행 (바닥, 마지막 행)

$= \text{rref}(A)$ 기약행 사다리꼴

- 행 사다리꼴
1. 0행이 아닌 행의 처음으로 0이 아닌 숫자가 1일 (선행 1)
 2. 0행이 존재할 경우, 이들 0은 행렬의 바닥에 모여있음.
 3. 0행이 아닌 위 아래로 서로 연속된 행에서 아래행의 선행 1은 위 행의 선행 1보다 오른쪽에 위치함.
- 기약행 사다리꼴
4. 선행 1이 속한 열의 나머지 성분은 모두 0임

$$\underbrace{x_1 + 2x_2}_{\text{피벗 변수}} + \underbrace{3x_4}_{\text{자유 변수}} = 2$$

$$+ \underbrace{x_3 - 2x_4}_{\text{피벗 변수}} = 5$$

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 - 2x_2 - 3x_4 \\ x_3 &= 5 + 2x_4 \end{aligned} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\hookrightarrow \mathbb{R}^4$ 상의 1-파라미터

행렬을 이용하여 선형계 풀기

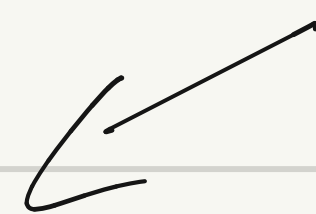
$$x + y + z = 3$$

$$x + 2y + 3z = 0$$

$$x + 3y + 4z = -2$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \end{array} \right]$$

$$\text{rref} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 3 & -5 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & +1 & -1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right]$$



↪ rref

$$x = 5$$

$$y = -1$$

$$z = -1$$

행사다리꼴을 이용하여 선형계는 해가 없다는 것을 알아보기.

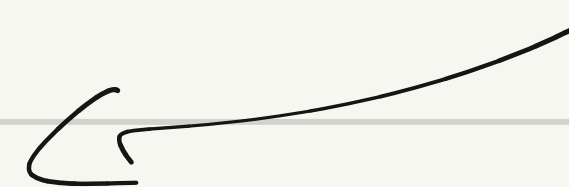
$$x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 8$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 12$$

$$2x_1 + 4x_2 + 6x_4 = 4$$

($m \leq n \Rightarrow$ 무조건 해가 있거나 없거나)

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & 2 & -1 & 12 \\ 2 & 4 & 0 & 6 & 4 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & -12 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{array} \right]$$



↪ rref

$$x_1 + 2x_2 + 3x_4 = 4$$

$$+ 1x_3 - 2x_4 = 4$$

$$0 = -4 = ? \text{ 불가능}$$

↙
해가 없음.

• $0 = a \Rightarrow$ no solution

• $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow$ unique

• $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow$ not unique (무한히 많음)