# 행 사다리꼴 행렬을 이용하여 3차연립방정식과 4개의 변수 풀기

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 7$$
$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 12$$
$$2x_1 + 4x_2 \qquad + 6x_4 = 4$$

기약행 사다리꼴

rref(A)

$m < n$ ⇒ 해가 무수히 많음.

$$A = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 2 & -1 & 12 \\ 2 & 4 & 0 & 6 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{(②행-①행)} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & +1 & -2 & +5 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & -10 \end{array}\right]$$

③행−(2×①행)

①행−②행

선행1(피벗성분)

선행1(피벗성분)

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = \text{rref}(A)$$

기약행 사다리꼴

아래1은 위의1보다 오른쪽에 있음.

③행+(2×②행)

0행(바닥, 마지막 행)

행 사다리꼴

1. 0행이 아닌 행의 처음으로 0이 아닌 숫자가 1임 (선행1)
2. 0행이 존재할경우, 이들 0은 행렬의 바닥에 모여있음.
3. 0행이 아닌 위,아래로 서로 연속된 행에서 아래행의 선행 1은 윗 행의 선행1보다 오른쪽에 위치함.

기약행 사다리꼴

4. 선행 1이 속한 열의 나머지 성분은 모두 0임

피벗 변수

자유 변수

$$x_1 + 2x_2 \qquad + 3x_4 = 2$$
$$x_3 - 2x_4 = 5$$

$$\Rightarrow x_1 = 2 - 2x_2 - 3x_4$$
$$x_3 = 5 + 2x_4$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

↳ $R^4$상의 평면

행렬을 이용하여 선형계 풀기

$$x+y+z=3$$
$$x+2y+3z=0$$
$$x+3y+4z=-2$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \end{array}\right]$$

rref

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 3 & -5 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & +1 & -1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

↳ rref

$$x = 5$$
$$y = -1$$
$$z = -1$$

행사다리꼴을 이용하여 선형계는 해가 없다는 것을 알아보기.

$$x_1+2x_2+x_3+x_4=8$$
$$x_1+2x_2+2x_3-x_4=12$$
$$2x_1+4x_2 \qquad +6x_4=4$$

($m \le n \Rightarrow$ 무수히 많은 해 or 없음)

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & 2 & -1 & 12 \\ 2 & 4 & 0 & 6 & 4 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & -12 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right]$$

rref

$$1x_1+2x_2 \qquad +3x_4=4$$
$$+1x_3-2x_4=4$$
$$0=-4$$

=? 불가능

⇓

해가 없음.

- $0=a \Rightarrow$ no solution
- $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$ unique
- $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow$ not unique (무한한 해)