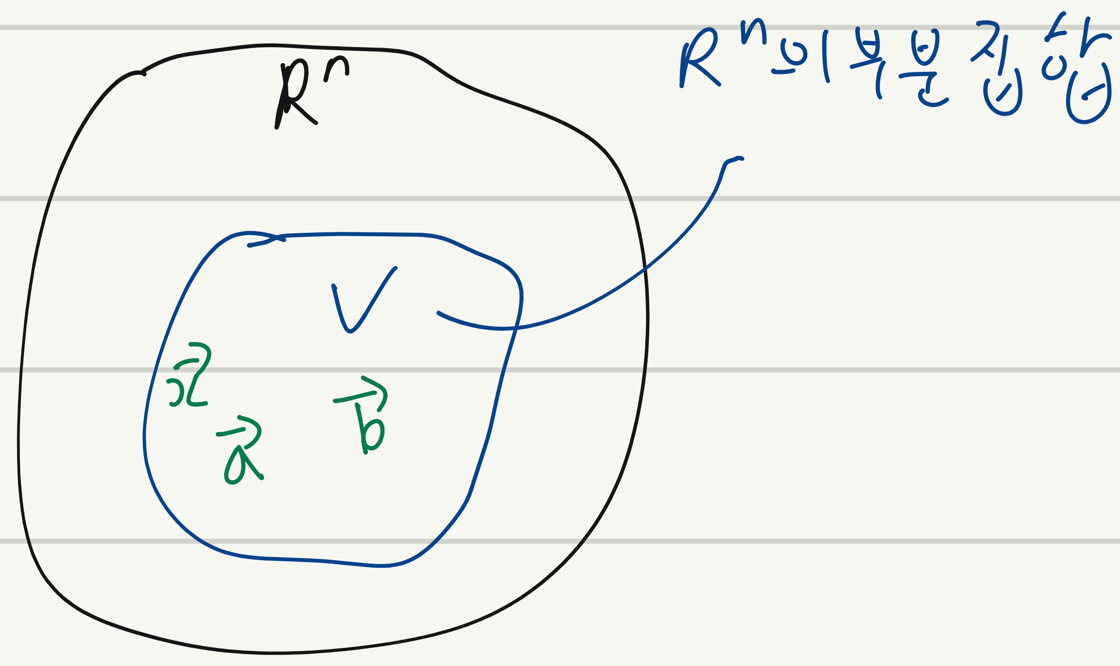
선형 부분공간

R^n의 부분공간 , V = R^n의 부분집합 =>

↳ 벡터집합 $\left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} x_i \in R , 1 \le i \le n \right.$



V는 R^n의 부분공간

부분공간의 정의

① => V가 영벡터를 포함한다는 것을 의미

$$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

② => $\vec{x}$가 V에 있고, V가 R^n의 부분공간이라면, $\vec{x}$에 임의의 스칼라를 곱한 값 또한 V에 있음.

= 스칼라 곱셈에 대해 닫혀있음.

③ => $\vec{a}$가 V에 있고, 벡터 $\vec{b}$도 V에 있고, V가 R^n의 부분공간이라면, $\vec{a}+\vec{b}$는 V에 있음

= 이 집합은 덧셈에 대해 닫혀있음.

ex1) $V = \{\underbrace{\mathbf{0}}_{\text{영벡터!}}\} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$, V는 R^3의 부분집합?

↳ ① V가 영벡터를 포함 O (영벡터밖에 없음)

② $c\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ O (곱셈에 닫혀있음)

③ $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ O (덧셈에 닫혀있음)

=> V는 R^3의 부분공간 임.

ex2) $S = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in R^2 \mid x_1 \ge 0 \right\}$,

S는 R^2의 부분집합?

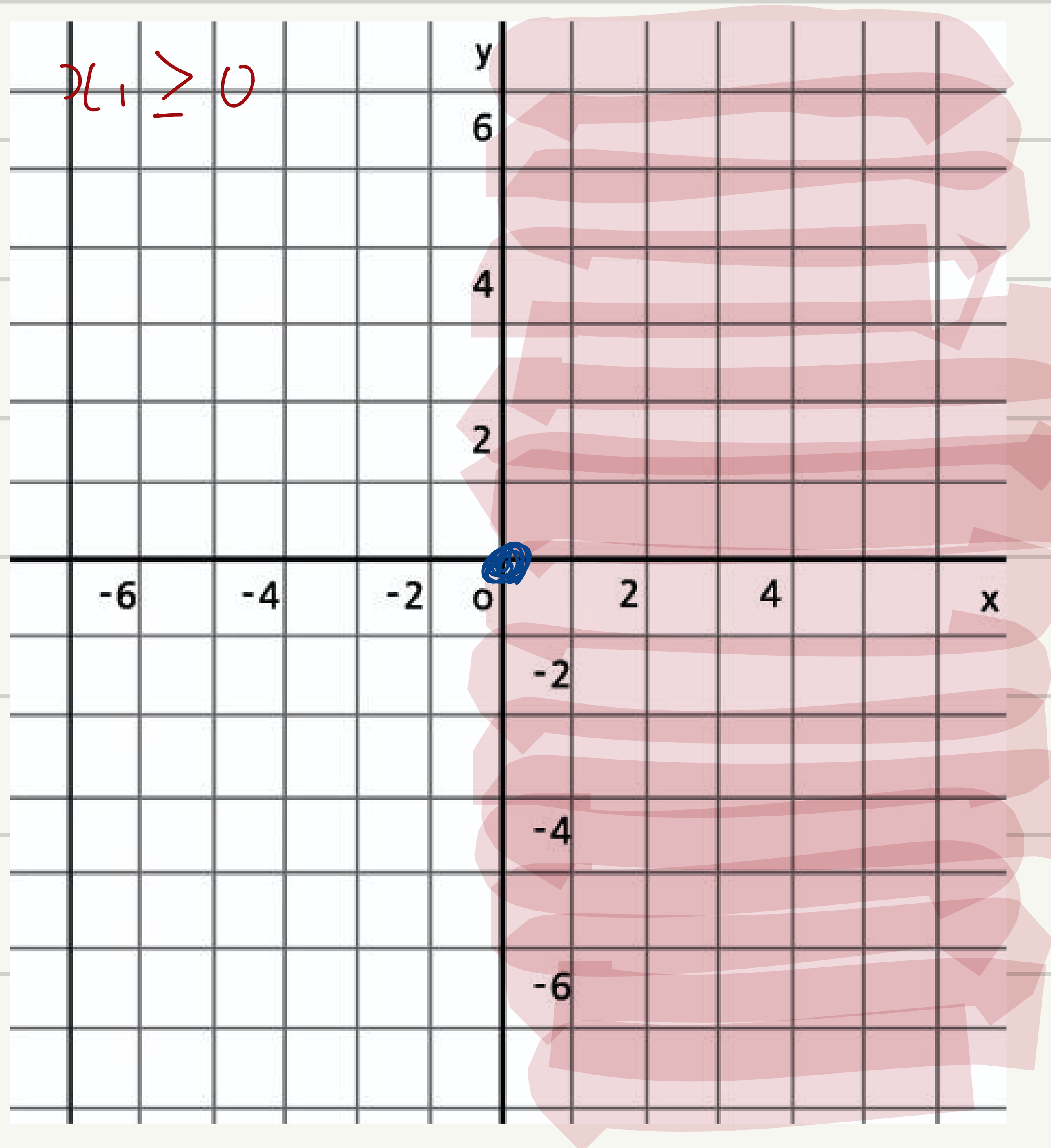
① S가 $\mathbf{0}$을 포함? O

② $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c \\ b+d \end{bmatrix}$ → $a+c \ge 0$ ∴ O

③ $-1 \times \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a \\ -b \end{bmatrix}$ → $-a \ge 0$

곱셈에 대해 열려있음.

=> S는 R^2의 부분공간이 아님.



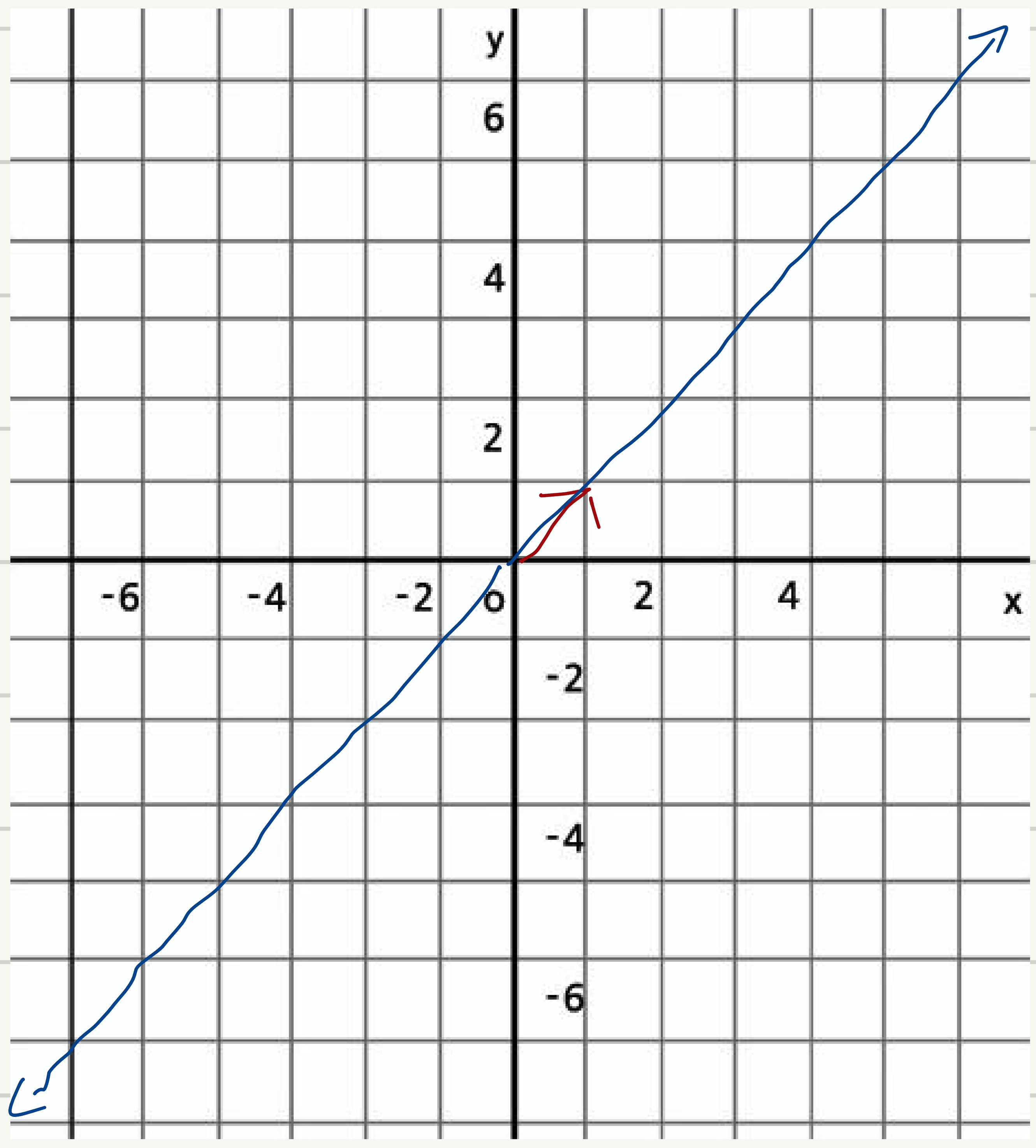
ex3) $U = span(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix})$

① $0\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ O

선형결합에 속해있음 ←

② $c_1\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ O

③ $c_1\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ O



=> 모두 생성도 O

부분공간의 기저

기저: 어떤 공간을 생성하는데 필요한 최소한의 벡터집합. (한 부분공간에 여러개의 기저가 있을수 있음)

↳ 선형독립 ↳ 부분집합

$V = span(\vec{v}_1, \vec{v}_2 \cdots \vec{v}_n)$

S 집합이 $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2 \cdots \vec{v}_n\}$ 이면 -

→ S는 V의 기저(basis)임.

(V가 B의 기저이면, V의 생성은 B가 될수있음)

T 집합이 $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2 \cdots \vec{v}_n, \vec{v}_5\}$ 이면,

↳ $\vec{v}_5$는 $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$ 이면 = Non선형독립

→ T는 V의 부분공간을 생성하지만, 선형종속이므로,

T는 V의 기저(basis)가 아님.

ex1.)

$S = \{\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}7\\0\end{bmatrix}\}$.

① span(S) = ? S는 생성(span)인가?

$c_1\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix}7\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{matrix}2c_1 + 7c_2 = x_1\\3c_1 + 0 = x_2\end{matrix} \Rightarrow c_1 = \frac{x_2}{3}, \; c_2 = \frac{x_1}{7} - \frac{2}{21}x_2$

→ x_1, x_2에 어떤 수가 와도 풀 수있음. O

참고)

$T = \{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\}$

⇓

표준 기저(집합 벡터)

② S는 선형독립인가? 성립해야 선형독립!

$c_1\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix}7\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ ← x_1, x_2에 0 대입

$c_1 = \frac{0}{3}, \; c_2 = \frac{0}{7} - \frac{2}{21}0 \quad \therefore c_1 = 0, c_2 = 0$ O

=> 집합 S는 $\mathbb{R}^2$의 기저(basis)임.