（内部使用）

习题一

1.1 任何一组人中都有两个人，它们在该组内认识的人数相等。

证明 设组内共有 n 个人，每个人所认识的人数为 $0,1,2,\cdots,n-1$。假设不存在这样两个人，他们所认识的人数相等，那么这 n 个人所认识的人数均互异，他们中的每一个人所认识的人数只取且仅取一次 $0,1,\cdots,n-1$ 中的一个数，从而他们中必有一人认识的人数是 0，也必有一人认识的人数是 $n-1$，这是一个矛盾，因此假设不成立。

1.2 任取 11 个整数，求证其中至少有两个数，它们的差是 10 的倍数

证明 设这 11 个数为 $a_1,a_2,\cdots,a_{11}$，它们被 10 除之后其余数为 0 ~ 9 之间的整数。由鸽巢原理可知，必有两个 a，设为 a_i 和 a_j，它们二者的余数相等，从而 $a_i-a_j=10p$（p 为一个整数），即 a_i 与 a_j 的差是 10 的倍数。

1.3 任取 n+1 个整数，求证其中至少有两个数，它们的差是 n 的倍数

证明　设这 $n+1$ 个数为 $a_1,a_2,\cdots,a_{n+1}$，则可以将它们写成

$$a_i = np_i + r_i \qquad i = 1,2,\cdots,n+1$$

式中，p_i 是 a_i 被 n 除之后的商，r_i 是余数，且 $r_i \in \{0,1,\cdots,n-1\}$。将 $a_i(i=1,\cdots,n+1)$ 当作“鸽子”，将 $0,1,\cdots,n-1$ 当作“鸽巢”，则由鸽巢原理可知，必有两个 a，其余数相等，设其为 a_i 和 a_j，则

$$a_i - a_j = (p_i - p_j)n$$

即它们的差是 n 的倍数。

1.4　**在 1.1 节例 4 中证明存在连续的一些天，棋手恰好下了 k 盘棋(k=1,2,…，21).问是否可能存在连续的一些天，棋手恰好下了 22 盘棋**

证明　设 $b_1,b_2,\cdots,b_{77}$ 分别为这 11 周内他每天下棋的盘数，令

$$a_1 = b_1$$

$$a_2 = b_1 + b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{77} = b_1 + b_2 + \cdots + b_{77}$$

由于 $b_i \geqslant 1(1 \leqslant i \leqslant 77)$ 和 $b_i + b_{i+1} + \cdots + b_{i+6} \leqslant 12(1 \leqslant i \leqslant 71)$，

所以

$$1 \leqslant a_1 < a_2 < \cdots < a_{77} \leqslant 12 \times 11 = 132$$

考虑序列

$$a_1, a_2, \cdots, a_{77}, a_1 + k, a_2 + k, \cdots, a_{77} + k \qquad (*)$$

它们的值都是 $1 \sim 132 + k$ 之间的整数。由于 $k \leqslant 21$，所以 $132 + k \leqslant 153$，而序列（*）的项数为 154，由鸽巢原理可知，序列（*）中 $a_1, a_2, \cdots, a_{77}$ 与 $a_1 + k, a_2 + k, \cdots, a_{77} + k$ 之间必有 2 项相等，即存在 $1 \leqslant i < j \leqslant 77$，使

$$a_j = a_i + k$$

则

$$k = a_j - a_i = b_{i+1} + b_{i+2} + \cdots + b_j$$

即从第 $i + 1$ 天到第 j 天这连续 $j - i$ 天中，他刚好下了 k 盘棋。

当 $k = 22$ 时，只有两种情况：

（1）$a_1, a_2, \cdots, a_{77}, a_1 + 22, a_2 + 22, \cdots, a_{77} + 22$ 这 154 项中有 2 项相等。此时由上面的讨论知结论成立，即他在连续若干天恰好下 22 盘棋。

（2）$a_1, a_2, \cdots, a_{77}, a_1 + 22, a_2 + 22, \cdots, a_{77} + 22$ 这 154 项中没有 2 项是相等的。此时它们恰好分别取 $1 \sim 154$。由于

$$23 \leqslant a_1 + 22 < a_2 + 22 < \cdots < a_{77} + 22 \leqslant 154$$

故只能有 $a_1 = 1, a_2 = 2, \cdots, a_{22} = 22$。这样，他从第 $1 \sim 22$ 天的连续 22 天里也下棋 22 盘。

1.5 将 1.1 节例 5 推广成从 1,2，…，2n 中任选 n+1 个数的问题

证明 设取出的 $n + 1$ 个数为 $a_1, a_2, \cdots, a_{n+1}$，将它们表示为

$$a_i = 2^{s_i} \times r_i \qquad i = 1, 2, \cdots, n + 1$$

式中，s_i 为非负整数；$r_i \in \{1, 3, \cdots, 2n - 1\}$。用 $r_1, r_2, \cdots, r_{n+1}$ 作“鸽子”，用 $1, 3, \cdots, 2n - 1$ 这 n 个奇数作“鸽巢”，则由鸽巢原理可知，

必有 2 个 r 取相同值，设其为 r_i 和 r_j，不妨设 $s_i < s_j$，则

$$\frac{a_j}{a_i} = \frac{2^{s_j} \times r_j}{2^{s_i} \times r_i} = 2^{s_j - s_i}$$

即 a_j 可被 a_i 整除。

1.6 从 1,2,…,200 中任取 100 个整数，其中之一小于 16，那么必有两个数，一个能被另一个整除

假设命题成立.
首先将1-200按照连续除以2，直到不能被2整除的结果分为100组，即:
1, 1*2, 1*4, . . .
3, 3*2, 3*4, . . .
. . .
197
199
每一组中的数都能互相整除. 所以如果想取100个不能互相整除的数，只能每个组取一个. 设取的数为
a1 = 1*2^k1
a3 = 3*2^k3
a5 = 5*2^k5
. . .
a199 = 199*2^k199
设那个小于16的数为ai=i*2^ki, i>=1.
则a3i=3i*2^k3i，于是k3i<ki，即k3i<=ki-1否则ai将整除a3i
ai<16
a3i=3(i*2^k3i)<=3(i*2^ki-1)=3*ai/2<3*16/2=24 以此类推
a9i=3*a3i/2<3*24/2=36
a27i=3*a9i/2<54
a81i=3*a27i/2<81
而a81i=81*（i*2^k81i)>=81 故矛盾，所以假设不成立. 命题得证明.

1.7 从 1,2,…,200 中取 100 个整数，使得其中任意两个数之间互相不能整除

1.8 任意给定 52 个数，它们之中有两个数，其和或差是 100 的倍数

证明 设 A 为这 52 个整数的集合，$|A| = 52$。记 $A_i = \{a \mid a \in A$，且 a 被 100 除之后余数是 $i\} \cup \{a \mid a \in A$，且 a 被 100 除之后余数是 $100 - i(i = 0,1,\cdots,50)\}$，则 $A_0, A_1, \cdots, A_{50}$ 构成 A 的 51 个"鸽巢"，从而存在 A_k，使 $|A_k| \geqslant 2$。设 $a, b \in A_k$，则 a 和 b 除以 100，其余数要么相同，要么其和为 100，即或者是

$$a = 100m + k \qquad b = 100n + k$$

或者是 $a = 100m + 100 - k \qquad b = 100n + 100 - k$

或者是 $a = 100m + k \qquad b = 100n + 100 - k$

无论是哪种情形，$a - b$ 或者 $a + b$ 可被 100 整除。

1.9 在坐标平面上任意给定 13 个整点（即两个坐标均为整数的点），则必有一个以它们中的三个点为顶点的三角形，其重心也是整点。

三角形重心坐标为（(x1+x2+x3)/3,(y1+y2+y3)/3);这道题的关键就是适当地分类。

对13个点的x,y分别考虑，对于所有的x（共13个）来说，按照除以3以后的余数来划分，可以分为0,1,2三类，其中必有一类为5个或以上(抽屉原理).
对于这一类的5个点，任意取三个的话，它们的重心的x坐标为整数。
考虑它们的y值，也可以分为余数为0,1,2三类,假如某一类有超过3个元素的话，取得这三个点的y值，他们的重心的y坐标为整数。

如果没有任何一个类有超过3个元素的话，从这三个类中各取一个元素，即可得到重心y坐标为整数的三角形。

1.10 上题中若改成 9 个整点，问是否有相同的结论？试证明你的结论

根据横坐标对3取余可分三类，分别记为

X0={(x,y):x=0(mod 3)}，

X1={(x,y):x=1(mod 3)}，

X2={(x,y):x=2(mod 3)}，

纵坐标也同样，分别记为Y0,Y1,Y2。

于是一共可以把这些点分成9类，画到下面的9宫格里

X0∩Y0 X0∩Y1 X0∩Y2

X1∩Y0 X1∩Y1 X1∩Y2

X2∩Y0 X2∩Y1 X2∩Y2

在每一格填上这个集合的元素个数。

1)若至少有一格的元素不小于3，那么从这里取3个点就满足要求。

2)接下来考虑每一格都小于3的情形。

2.1)如果至少有一行都非零，那么从这一行每个集合里各取一点即可。

2.2)如果至少有一列都非零，那么从这一列每个集合里各取一点即可。

2.3)如果至少有一条对角线(包括X0∩Y1,X1∩Y2,X2∩Y0这种)都非零，那么从这一条对角线每个集合里各取一点即可。

可以证明这3种情况不可能都不满足(若都不满足，则至少有5个0元素，剩下4个非零元都小于3，总和不可能达到9)。

1.11 证明：一个有理数的十进制数展开式自某一位后必是循环的。

证明 $$\frac{m}{n}=p_0+\frac{r_0}{n}$$

式中，$0\leqslant r_0\leqslant n-1$；$p_0$ 为整数。进一步有

$$\frac{r_0}{n}=\frac{10r_0}{10n}=\frac{1}{10}\left(\frac{10r_0}{n}\right)=\frac{1}{10}\left(p_1+\frac{r_1}{n}\right)$$

式中，$0\leqslant r_1\leqslant n-1$。

$$\frac{r_1}{n}=\frac{10r_1}{10n}=\frac{1}{10}\left(\frac{10r_1}{n}\right)=\frac{1}{10}\left(p_2+\frac{r_2}{n}\right)$$

式中，$0\leqslant r_2\leqslant n-1$。

$\vdots$

所以，$\frac{m}{n}$ 在十进制中可以写成如下形式

$$\frac{m}{n}=p_0+\frac{p_1}{10}+\frac{p_2}{10^2}+\cdots+\frac{p_k}{10^k}+\frac{1}{10^k}\cdot\frac{r_k}{n}\qquad 0\leqslant r_k\leqslant n-1$$

由于 $0\leqslant r_k\leqslant n-1$，故除法进行充分多步之后，所产生的余数 r_k 必会与前面某一步的除法余数一致，设 $r_j=r_k(j<k)$，并且 r_{j+1}，$r_{j+2},\cdots,r_{k-1}$ 均异于 r_k，从而由上面所进行的除法容易看出

$$p_{j+1}=p_{k+1},p_{j+2}=p_{k+2},\cdots,p_k=p_{2k-j}$$

而且有 $r_k=r_{2k-j}$，从而出现第三次循环节。如此往复循环下去。

1.12 证明：对任意的整数 N，存在着 N 的一个倍数，使得它仅有数字 0 和 7 组成。（例如， N=3, 我 们 有 $3\times259=777$;N=4, 有 $4\times1952=7700$;N=5,有 $5\times14=70$;……）

证明 令 $a_t=\underbrace{77\cdots7}_{t\text{个}7}$，$t=1,2,\cdots,N+1$，记

$$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_{N+1}\}$$

则 $$|A|=N+1$$

对于任一个整数 $i(0\leqslant i\leqslant N)$，令

$$A_i=\{a\mid a\in A,\text{且 } a \text{ 除以 } N \text{ 的余数为 } i\}$$

则 $A_i\subseteq A(i=0,1,\cdots,N-1)$，且 $\bigcup_{i=0}^{N-1}A_i=A$，由鸽巢原理可知，必存在一个 A_k，$|A_k|\geqslant2$。设 $a_m,a_n\in A_k$，且 $m<n$，则 a_m,a_n 被 N 除后余数均为 k，从而 a_n-a_m 能够被 N 整除，即为 N 的倍数，而

$$a_n-a_m=\underbrace{77\cdots7}_{n-m\text{个}7}\underbrace{00\cdots0}_{m\text{个}0}$$

1.13

(1) 在一边长为 1 的等边三角形中任取 5 个点，则其中必有两个点，该两点的距离至多为$\frac{1}{2}$；

(2) 在一边长为 1 的等边三角形中任取 10 个点，则其中必有两个点，该两点的距离至多为$\frac{1}{3}$；

(3) 确定m_n，使得在一边长为 1 的等边三角形中任取m_n个点，则其中必有两个点，该两点的距离至多为$\frac{1}{n}$；

1.14 一位学生有 37 天时间准备考试，根据以往的经验，她知道至多只需要 60 个小时的复习时间，她决定每天至少复习 1 小时，证明：无论她的复习计划怎样，在此期间都存在一些天，她正好复习了 13 个小时。

证明　设 a_k 为第 k 天学习的时间，则

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{37} \leqslant 60$$

且　$a_k \geqslant 1 \quad k = 1,2,\cdots,37$

令　$b_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_k, k = 1,2,\cdots,37$

则　$1 \leqslant b_1 < b_2 < \cdots < b_{37} \leqslant 60$

考察序列

$$b_1, b_2, \cdots, b_{37}, b_1 + 13, b_2 + 13, \cdots, b_{37} + 13$$

此序列共 74 项，每项均为 1 ~ 73 之间的整数。由鸽巢原理可知，$b_1, b_2, \cdots, b_{37}$ 中某一项必与 $b_1 + 13, b_2 + 13, \cdots, b_{37} + 13$ 中的某一项相等，设

$$b_k = b_j + 13$$

则　$b_k - b_j = a_{j+1} + a_{j+2} + \cdots + a_k = 13$

即这个学生从第 $j+1$ 天到第 k 天的连续期间内恰好学习了 13 h。

1.15 从 1,2,…,2n 中任选 n+1 个整数，则其中必有两个数，它们的最大公约数为 1

证明　取“鸽巢”为 $\{1,2\},\{3,4\},\cdots,\{2n-1,2n\}$ 共 n 个。当从 $\{1,2,\cdots,2n\}$ 中取 $n+1$ 个数时，由鸽巢原理可知，必有 2 个被选出的数属于同一个鸽巢，即它们的最大公约数为 1

1.16 针对 1.1 节的例 6，当 m,n 不是互素的两个整数时，举例说明例中的结论不一定成立

解　设 $m = 6, n = 4$，则 m 与 n 不互素，当 $a = 4$ 和 $b = 1$ 时，对任意正整数 p 和 q，均有

$$x = 6p + 4 \neq 4q + 1$$

（内部使用）

习题二

2.1 计算 50!的尾部有多少个零？

解 (1) 只要看 50!中因子 5^k 中的 k 是多少，其尾部就含多少零。作为因子的 1 ~ 50 这些数中含 10 个 5 作为因子，含 2 个 25 作为因子，故尾部有 10 + 2 = 12 个零。

2.2 比 5400 大的四位整数中，数字 2,7 不出现，且各位数字不同的整数有多少个？

$$\begin{cases} \text{千位上数} > 5\text{:有 } 3\times7\times6\times5 \text{ 个} \\ \text{千位上数} = 5 \begin{cases} \text{百位数} > 4\text{:有 } 3\times6\times5 \text{ 个} \\ \text{百位数} = 4 \begin{cases} \text{十位数} > 0\text{:有 } 5\times5 \text{ 个} \\ \text{十位数} = 0\text{:有 } 5 \text{ 个} \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

2.3 12 个人围坐在圆桌旁，其中一个拒绝与另一个相邻，问有多少种安排方法？

假设这 12 个人为 P1,P2,…,P12,并且假定 P1 为 A,P2 为 B,考虑 X,P3,P4,…,P12 这 11 个人的围坐方式，有 11！种，然后在每一种这样的围坐方式中用 P1P2 或 P2P1 代替 X,就可以得到 12 个人的一种围坐方式且 P1 与 P2 彼此挨着就坐，因此 P1 和 P2 不坐在一起的围坐方式数为：

12！-2*11！=11*12！=5269017600

2.4 有颜色不同的四盏灯。

(1) 把它们按不同的次序全部挂在灯竿上表示信号，共有多少种不同

的信号？

4！ =24

(2) 每次使用一盏、二盏、三盏或四盏灯按照一定的次序挂在灯竿上表示信号，共有多少种不同的信号？、

P(4,1)+P(4,2)+P(4,3)+P(4,4)=64

(3) 在（**2**）中，如果信号与灯的次序无关，共有多少种不同的信号？

$$\binom{4}{1}+\binom{4}{2}+\binom{4}{3}+\binom{4}{4}=2^4-1$$

2.5 现有 100 件产品，从其中任意抽出 3 件。

(1) 共有多少种抽法？

$$\binom{100}{3}$$

(2) 如果 **100** 件产品中有两件次品，那么抽出的产品中至少有 **1** 件次品的概率是多少？

$$\frac{\binom{100}{3}-\binom{98}{3}}{\binom{100}{3}}$$

(3) 如果 **100** 件产品中有两件次品，那么抽出的产品中恰好有 **1** 件次品的概率是多少？

$$\frac{\binom{2}{1}\times\binom{98}{2}}{\binom{100}{3}}$$

2.6 把 q 个负号和 p 个正号排在一条直线上，使得没有两个负号相邻，证明不同的排法

有$\binom{p+1}{q}$。

证明 对于这些符号的排列，q 个负号将排列分隔成 $q+1$ 段，设第一个负号的左侧有 x_1 个正号，第一个负号与第二个负号之间有 x_2 个正号，……，最后一个负号右侧有 x_{q+1} 个正号。由于没有两个负号相邻，故

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{q+1} = p$$

$$x_1 \geqslant 0 \quad x_i \geqslant 1 \quad i = 2,3,\cdots,q \quad x_{q+1} \geqslant 0$$

这个方程的整数解个数就是问题的解，作变量代换

$$y_1 = x_1 \quad y_i = x_i - 1 \quad i = 2,3,\cdots,q$$

$$y_{q+1} = x_{q+1}$$

则方程变成

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_{q+1} = p - (q-1) \quad y_i \geqslant 0 \quad i = 1,\cdots,q+1$$

这个方程的解的个数为

$$\binom{p-(q-1)+q+1-1}{p-(q-1)} = \binom{p+1}{p+1-q} = \binom{p+1}{q}$$

2.7 **8 个棋子大小相同，其中 5 个红的，3 个蓝的。把它们放在 8*8 的棋盘上，每行每列只放一个，问有多少种放法？若放在 12*12 的棋盘上，结果如何？**

解 (1) 有 $8!\frac{8!}{5!3!}$ 种放法。

(2) 从 12 行中选出 8 行，有$\binom{12}{8}$种。从 12 列中选出 8 列，有$\binom{12}{8}$种。在所选出的行和列所形成的方格上放这些车，有 $8!\frac{8!}{5!3!}$种结果，故此时总的放法数是

$$\binom{12}{8}\binom{12}{8}8!\frac{8!}{5!3!}$$

2.8 **有纪念章 4 枚，纪念册 6 本，赠送给 10 个同学，每人得一件，共有多少种不同的**

送法？

解　从 10 位同学中选 4 人送纪念章，有$\binom{10}{4}$种选法，而其余 6 人就只能送纪念册，故不同送法数是$\binom{10}{4}$。

2.9

(1) 从 1,2，……，100 中选出两个数，使得它们的差正好是 7，有多少种不同的选法？

(2) 如果要求选出的两个数之差小于等于 7，又有多少种不同选法？

解　(1) 这只要统计有多少数对$(j,j+7)$即可，显然这样数对有 93 个。

(2) 这只要分别统计数对$(j,j+1)$，$(j,j+2)$，$(j,j+3)$，$(j,j+4)$，$(j,j+5)$，$(j,j+6)$，$(j,j+7)$即可。所以总的不同选法数为

$$99+98+97+96+95+94+93=672$$

2.10 试求不定方程 $x_1+x_2+\cdots+x_8=40$ 满足 $x_i \geq i$ $(i=1,2,\cdots,8)$的整数解的个数？

解　作变量代换

$$y_i=x_i-i \qquad i=1,2,\cdots,8$$

则原方程变为

$$y_1+y_2+\cdots+y_8=40-(1+2+\cdots+8)=4$$

$$y_i \geqslant 0 \qquad i=1,2,\cdots,8$$

这个方程的非负整数解个数为

$$\binom{4+8-1}{4}=\binom{11}{4}$$

2.11 在一次选举中，甲、乙分别得到 a 张和 b 张选票（a＞b），将全部 a＋b 张选票

按某种顺序排列，依次计票时甲所得票数总比乙多，问这种排列方法有多少种？

方案数=C(a+b,a)-2C(a+b-1,a)=C(a+b-1,a-1)-C(a+b-1,a)

解 把该问题化为网格中两点间有条件限制的路径数目. 曾有专门的例题. 过程从略. 结果为:

$$\frac{(a-b)\cdot(a+b-1)!}{a!\cdot b!}.$$

2.12 n 个不同的字符顺序进栈恰好一次，问有多少种不同的出栈方式?

解

从 n 个字符中选 1 个，进栈后出栈，有 $n = P(n,1)$ 种；

从 n 个字符中选 2 个顺序进栈，则出栈方式有 $P(n,2)$ 种；

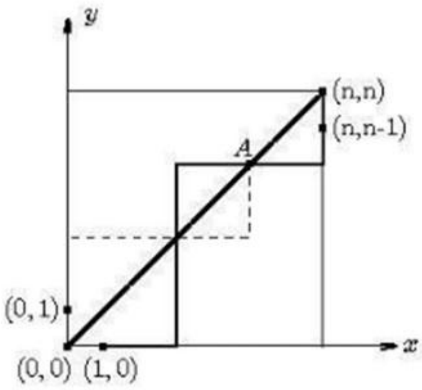
⋮

所以，不同出栈方式数为

$$P(n,1)+P(n,2)+\cdots+P(n,n)$$

2.13 计数从(0,0)点到(n,n)点的不穿过直线 y=x 的非降路径数

先考虑对角线下方的路径，这种路径都是从（0，0）点出发经过（1，0）点及（n，n-1）点到达（n，n）的。



从图中可以知道 每一条从（1，0）到（n，n-1）的穿过 y=x 的非降路径都与从（0，1）到（n，n-1）的非降路径一一对应。

故答案为 $2\left(\binom{2n-2}{n-1}-\binom{2n-2}{n}\right)=\frac{2}{n}\binom{2n-2}{n-1}$

2.14 有 n 个不同的整数，从中取出两组来，要求第一组里的最小数大于第二组里的最大数，问有多少种方案？

解 从 n 个数中取 2 个，有 $\binom{n}{2}$ 种取法，对其中每一种取法进行分组，只有一种分组方法，即小的元素作第二组，大的元素作第一组，故分组数为 $\binom{n}{2}$；从 n 个数中取 3 个，有 $\binom{n}{3}$ 种取法，这 3 个元素根据题目要求形成 2 种分组法，故对取 3 个数的分组数是 $2\binom{n}{3}$；…；取 n 个数，有 $\binom{n}{n}$ 种取法，这 n 个数按要求形成 $n-1$ 种分组法，故取 n 个数时，能分组 $(n-1)\binom{n}{n}$ 个。

综合以上结果，总的方案数为

$$1\binom{n}{2}+2\binom{n}{3}+\cdots+(n-1)\binom{n}{n}$$

2.15 试求 n 个完全一样的骰子能投出多少种不同的点数？

解 不同点数有 $6n-(n-1)=5n+1$ 种。

2.16 凸 10 边形的任意三条对角线不共点，试求该凸 10 边形的对角线交于多少个点？又把所有的对角线分割成多少段？

P(10,4)=210

凸N边形的对角线条数为：n (n-3)/2
因为每一个交点对应两条对角线，而两条对角线又对应着一个四边形。于是焦点个数就对应四边形的个数。问题转化成由凸n边形的n个顶点取4个顶点可组成多少个四边形的问题，故最多共有n(n-1)(n-2)(n-3)/24个交点。

2.17 设 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_l^{\alpha_l}$，其中，$p_1p_2\cdots p_l$ 是 l 个不同的素数，试求能整除数 n 的正整数的数目

9.解：每个能整除尽数n的正整数都可以选取每个素数p_i从0到a_i次，即每个素数有a_i+1种选择，所以能整除n的正整数数目为$(a_1+1)\cdot(a_2+1)\cdot\ldots\cdot(a_l+1)$个。题

2.18 将 52 张牌平均分给 4 个人，问每人有一个 5 张牌的同花顺的概率是多少？

取4张牌总共有C(4,52)种

4张同花顺的话，从1开始可以抽出10对（1，2，3，4，5，6，7，8，9，10），另外有4种图案，所以就是4*10=40。

最后4*4*10/C(4,52)=0.15%

2.19 取定空间中的 25 个点，其中任意 4 个点均不共面，问它们能决定多少个三角形？又能决定多少个四面体？

解：既然任意 4 个点均不共面，那么任意 3 点也不共线（若有 3 点共线，则这条线与另外任一点共面）. 故任意 3 点可以组成一个三角形，任意 4 点可以组成一个四面体. 因而这 25 个点可以组成的三角形个数为 $\binom{25}{3}=2300$，四面体个数为 $\binom{25}{4}=12650$.

2.20 考虑集合{1,2,……,n+1}的非空子集。

(1) 证明最大元素恰好是 j 的子集数为 2^{j-1}

(2) 利用（1）结论证明

$$1+2+2^2+\cdots+2^n=2^{n+1}-1$$

2.21 从整数 1,2,……,1000 中选取 3 个数，使得它们的和正好被 4 整除，问有多少种选法？

用 A_i 表示 1-1000 中除以 4 的余数为 i 的整数的集合，$|A_i|=250, i=0,1,2,3$，选法有以下几类：

(1) 三个数属于 A_0：

(2) 三个数两个属于 A_1，一个属于 A_2

(3) 三个数一个属于 A_0，两个属于 A_2

(4) 三个数一个属于 A_1，一个属于 A_3

(5)

2.22

(1) 在由 5 个 0 和 4 个 1 组成的字符串中，出现 01 和 10 的总次数为 k 的字符串有多少个？

28解：(a)先将5个0排成一列：00000，1若插在两个0中间，“010”，则出现2个“01”或“10”;若插在两端，则出现1个“01”或“10”;要使出现“01”,“10”总次数为4，有两种办法：

(1)把两个1插入0得空当内，剩下的1插入1的前面。

(2)把1个1插入0得空当内，再取两个1分别插入两端，剩下的1插入1的前面。故总方案数为C(4,2)·2 +C(4,1)·3=36.

(2) **在由 m 个 0 和 n 个 1 组成的字符串中，出现 01 和 10 的总次数为 k 的字符串有多少个？**

(b)m个0产生m-1个空当，

若k为奇数,则必有且只有1个“1”插入头或尾,总方案数为$2\cdot C(m-1,\frac{k-1}{2})\left(\frac{k+1}{2}\right)\left(n-\frac{k+1}{2}\right)$

若k为偶数,总方案数为

$C(m-1,\frac{k}{2})\left(\frac{k}{2}\right)\left(n-\frac{k}{2}\right)+C(m-1,\frac{k-1}{2})\left(\frac{k+1}{2}\right)\left(n-\frac{k+1}{2}\right)$

2.23 **5 封不同的信由通信通道传送，在两封信之间至少要放入 3 个空格，一共要加入 15 个空格，问有多少种方法？**

"5封信之间有4个可以插入空格的空当，每个空当至少3个空格，所以必须插入的空格已经有3*4=12个，还剩余3个多余的空格，需要分配到4个空当中。"

三个空格放到三个空档当中，就是 C(4,3)*1=4。

三个空格放到两个空档当中，分为两个空和一个空，C（2，4）*2=12，在这里两个和一个是有区别的。

三个空格放到一个空档当中，就是 C(4,1)*1=4，在这里三个空格是一样的。

所以就是5！*（4+12+4）=2400

2.24 将 a,b,c,d,e,f,g,h 排成一行，要求 a 在 b 的左侧，b 在 c 的左侧，问有多少种排法？

相当于5个数插4个空

5个数全排有5！=120种

只插一个有4种

只插两个又有C下面4上面2=6种

只插三个有4种

插四个有1种

插空共15种

所以共有120×15=1800种

2.25 从 1 到 100 的整数中不重复的选取两个数组成有序对(x,y)，使得 x 与 y 的乘积 xy 不能被 3 整除，共可组成多少对？

4422

2.26 在 m*n 棋盘中选取两个相邻的方格（有一条公共边的两个方格）有多少种不同的选取方法？

解：两个相邻方格在同一行上，每一行都有n-1个取法，共m（n-1）种取法，

两个相邻方格在同一列上，每一列都有m-1个取法，共n（m-1）种取法，

因为m（n-1）+n（m-1）=2mn-m-n，所以共有2mn-m-n种取法．

2.27 某电影院票房前有 2n 个人排队，每人欲购买一张 5 元的电影票。在这些人中，有 n 个人，每人一张 5 元的钞票，其余每人有一张 10 元钞票，而票房在卖票前无任何钞票，问使得每个人都能顺利地买到电影票的排队方式有多少种？

2.28 略

2.29 以$h_m(n)$表示用 **m** 种颜色去涂 **2*n** 个棋盘，使得相邻格子异色的涂色方法数， 证明：

$$h_m(n) = (\mathrm{m}2 - 3\mathrm{m} + 3)^{n-1} \times \mathrm{m} \times (\mathrm{m}-1)$$

假设已经涂好前n-1个，方案数为h(m,n-1)，剩下2个格子，加上相邻的两个格子，编号为
1颜色a 3颜色x
2颜色b 4颜色y
因为已经编号到n-1，所以a和b已经确定了，现在给x分情况
x=b的时候：x已经确定，y两侧都是b色，所以有m-1种选择
x!=b的时候：x不是a和b颜色，有m-2种，y不是b和x的颜色，有m-2种，即(m-2)(m-2)
所以有递推关系：h(m,n) = h(m,n-1)*(m-1+(m-2)(m-2))
h(m,n)/h(m,n-1) = m^2-3m+3
h(m,n-1)/h(m,n-2) = m^2-3m+3
……
h(m,2)/h(m,1) = m^2-3m+3

而h(m,1)很简单等于m*(m-1)，
上面左侧乘起来就得到你要的结果了

2.30 上题中，若以$h_m^{'}(n)$表示用 **m** 种颜色去涂 **2*n** 个棋盘，使得相邻格子异色且每种颜色至少用一次的涂色方法数，求$h_m^{'}(n)$的计数方式。

2.31 如下：

31. 有 20 根完全相同的木棍从左至右竖立成一行，占据 20 个位置。要从中选出 6 根。

(1) 有多少种选择？

(2) 如果选出的木棍中没有两根是位置相邻的，又有多少种选择？

(3) 如果在所选出的每一对棍之间必须至少有两根棍，有多少种选择？

解 (1) 有$\binom{20}{6}$种。

(2) 所选出的 6 根木棍实际上可将这 20 根排成一行的木棍分割成 7 段(加上首和尾)。设所选左边第 1 根木棍的左侧有 x_1 根未被选中的木棍；在第 1 与第 2 根所选木棍之间有 x_2 根未被选中的木棍；……；第 6 根所选中的木棍的右侧有 x_7 根未被选中的棍，则由于没有两根选出的木棍是相邻的，所以

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_7 = 14$$

$$x_1 \geqslant 0, x_7 \geqslant 0, x_i \geqslant 1 \qquad i = 2,3,\cdots,6$$

作变量代换

$$y_1 = x_1, y_7 = x_7, y_i = x_i - 1 \qquad i = 2,3,\cdots,6$$

原方程变成

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_7 = 9 \qquad y_i \geqslant 0 \qquad i = 1,2,\cdots,7$$

这个方程非负整数解的个数为

$$\binom{9+7-1}{9} = \binom{15}{9}$$

(3) 如同(2) 中的分析，此时方程及限制为

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_7 = 14$$

$$x_1 \geqslant 0, x_7 \geqslant 0, x_i \geqslant 2 \qquad i = 2,3,\cdots,6$$

经变量代换，方程变为

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_7 = 4 \qquad y_i \geqslant 0 \qquad i = 1,2,\cdots,7$$

它的非负整数解个数为

$$\binom{4+7-1}{4} = \binom{10}{4}$$

（内部使用）

习题三

3.1 用二项式定理展开 $(2x-y)^7$

利用二项式定理展开可得 $\sum_{r=0}^{7}\binom{7}{r}(2x)^r(-y)^{7-r}$

即：

$$(2x-y)^7=(2x)^7-7\times(2x)^6y+21\times(2x)^5y^2-35\times(2x)^4y^3+35\times(2x)^3y^4-21\times(2x)^2y^5+7\times(2x)y^4-y^7$$

3.2 $(3x-2y)^{18}$ 的展开式中，x^5y^{13} 的系数是什么？x^8y^{10} 的系数是什么？

(1) $\frac{18!}{5!13!}3^5\times(-2)^{13}$

(2) $\frac{18!}{8!10!}3^8\times(-2)^{10}$

3.3 证明：

(1) 设 n 为大于或等于 2 的整数，则

$$\binom{n}{1}-2\binom{n}{2}+3\binom{n}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\times n\binom{n}{n}=0$$

(2) 设 n 为正整数，则

$$1+\frac{1}{2}\binom{n}{1}+\frac{1}{3}\binom{n}{2}+\frac{1}{4}\binom{n}{3}+\cdots+\frac{1}{n+1}\binom{n}{n}=\frac{1}{n+1}\left(2^{n+1}-1\right)$$

答案：

(1) 由二项式定理可得 $(1-x)^n=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}(-x)^{n-r}$，对 $(1-x)^n$ 求导可知

$$n(1-x)^{n-1}=\sum_{r=0}^{n}(\mathrm{n}-\mathrm{r})\binom{n}{r}(-x)^{n-r-1}$$

取 $x=1$ 即可以证明原命题

(2) 由二项式定理可知 $(1+x)^n=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}x^r$，对该式在[0,1]区间上进行定积分可以得到 $\int_0^1(1+x)^n dx=\int_0^1\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}x^r dx$，对该式进行展开原命题得证

3.4 给出

(1) 把它们按不同的次序全部挂在灯竿上表示信号，共有多少种不同的信号？

4！ =24

(2) 每次使用一盏、二盏、三盏或四盏灯按照一定的次序挂在灯竿上表示信号，共有多少种不同的信号？、

P(4,1)+P(4,2)+P(4,3)+P(4,4)=64

(3) 在（**2**）中，如果信号与灯的次序无关，共有多少种不同的信号？

$$\binom{4}{1}+\binom{4}{2}+\binom{4}{3}+\binom{4}{4}=2^4-1$$

3.5 现有 100 件产品，从其中任意抽出 3 件。

(1) 共有多少种抽法？

$$\binom{100}{3}$$

(2) 如果 **100** 件产品中有两件次品，那么抽出的产品中至少有 **1** 件次品的概率是多少？

$$\frac{\binom{100}{3}-\binom{98}{3}}{\binom{100}{3}}$$

(3) 如果 **100** 件产品中有两件次品，那么抽出的产品中恰好有 **1** 件次品的概率是多少？

$$\frac{\binom{2}{1}\times\binom{98}{2}}{\binom{100}{3}}$$

3.6 把 q 个负号和 p 个正号排在一条直线上，使得没有两个负号相邻，证明不同的排法有 $\binom{p+1}{q}$。

证明 对于这些符号的排列，q 个负号将排列分隔成 $q+1$ 段，设第一个负号的左侧有 x_1 个正号，第一个负号与第二个负号之间有 x_2 个正号，……，最后一个负号右侧有 x_{q+1} 个正号。由于没有两个负号相邻，故

$$x_1+x_2+\cdots+x_{q+1}=p$$

$$x_1\geqslant 0\quad x_i\geqslant 1\quad i=2,3,\cdots,q\quad x_{q+1}\geqslant 0$$

这个方程的整数解个数就是问题的解，作变量代换

$$y_1=x_1\quad y_i=x_i-1\quad i=2,3,\cdots,q$$

$$y_{q+1}=x_{q+1}$$

则方程变成

$$y_1+y_2+\cdots+y_{q+1}=p-(q-1)\quad y_i\geqslant 0\quad i=1,\cdots,q+1$$

这个方程的解的个数为

$$\binom{p-(q-1)+q+1-1}{p-(q-1)}=\binom{p+1}{p+1-q}=\binom{p+1}{q}$$

3.7 8 个棋子大小相同，其中 5 个红的，3 个蓝的。把它们放在 8*8 的棋盘上，每行每列只放一个，问有多少种放法？若放在

12*12 的棋盘上，结果如何？

解 (1) 有 $8!\frac{8!}{5!3!}$ 种放法。

(2) 从 12 行中选出 8 行，有 $\binom{12}{8}$ 种。从 12 列中选出 8 列，有 $\binom{12}{8}$ 种。在所选出的行和列所形成的方格上放这些车，有 $8!\frac{8!}{5!3!}$ 种结果，故此时总的放法数是

$$\binom{12}{8}\binom{12}{8}8!\frac{8!}{5!3!}$$

3.8 有纪念章 4 枚，纪念册 6 本，赠送给 10 个同学，每人得一件，共有多少种不同的送法？

解 从 10 位同学中选 4 人送纪念章，有 $\binom{10}{4}$ 种选法，而其余 6 人就只能送纪念册，故不同送法数是 $\binom{10}{4}$。

3.9

(1) 从 **1,2**，……，**100** 中选出两个数，使得它们的差正好是 **7**，有多少种不同的选法？

(2) 如果要求选出的两个数之差小于等于 **7**，又有多少种不同选法？

解 (1) 这只要统计有多少数对 $(j,j+7)$ 即可，显然这样数对有 93 个。

(2) 这只要分别统计数对 $(j,j+1)$，$(j,j+2)$，$(j,j+3)$，$(j,j+4)$，$(j,j+5)$，$(j,j+6)$，$(j,j+7)$ 即可。所以总的不同选法数为

$$99+98+97+96+95+94+93=672$$

3.10 试求不定方程 $x_1+x_2+\cdots+x_8=40$ 满足 $x_i \geq i$

$(i=1,2,\cdots,8)$的整数解的个数？

解 作变量代换

$$y_i = x_i - i \qquad i = 1,2,\cdots,8$$

则原方程变为

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_8 = 40 - (1+2+\cdots+8) = 4$$

$$y_i \geq 0 \qquad i = 1,2,\cdots,8$$

这个方程的非负整数解个数为

$$\binom{4+8-1}{4} = \binom{11}{4}$$

3.11 在一次选举中，甲、乙分别得到 a 张和 b 张选票（a＞b），将全部 a＋b 张选票按某种顺序排列，依次计票时甲所得票数总比乙多，问这种排列方法有多少种？

方案数=C(a+b,a)-2C(a+b-1,a)=C(a+b-1,a-1)-C(a+b-1,a)

解 把该问题化为网格中两点间有条件限制的路径数目. 曾有专门的例题. 过程从略. 结果为:

$$\frac{(a-b)\cdot(a+b-1)!}{a!\cdot b!}.$$

3.12 n 个不同的字符顺序进栈恰好一次，问有多少种不同的出栈方式？

解

从 n 个字符中选 1 个,进栈后出栈,有 $n = P(n,1)$ 种;

从 n 个字符中选 2 个顺序进栈,则出栈方式有 $P(n,2)$ 种;

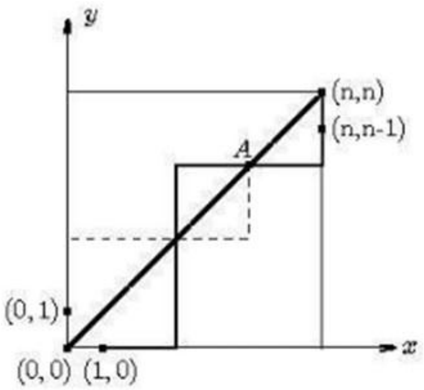
⋮

所以,不同出栈方式数为

$$P(n,1) + P(n,2) + \cdots + P(n,n)$$

3.13 计数从(0,0)点到(n,n)点的不穿过直线 y=x 的非降路径数

先考虑对角线下方的路径，这种路径都是从（0，0）点出发经过（1，0）点及（n，n-1）点到达（n，n）的。



从图中可以知道 每一条从（1，0）到（n，n-1）的穿过 y=x 的非降路径都与从（0，1）到（n，n-1）的非降路径一一对应。

故答案为 $2\left(\binom{2n-2}{n-1}-\binom{2n-2}{n}\right)=\frac{2}{n}\binom{2n-2}{n-1}$

3.14 有 n 个不同的整数，从中取出两组来，要求第一组里的最小数大于第二组里的最大数，问有多少种方案？

解　从 n 个数中取2个，有$\binom{n}{2}$种取法，对其中每一种取法进行分组，只有一种分组方法，即小的元素作第二组，大的元素作第一组，故分组数为$\binom{n}{2}$；从 n 个数中取 3 个，有$\binom{n}{3}$种取法，这 3 个元素根据题目要求形成 2 种分组法，故对取 3 个数的分组数是 $2\binom{n}{3}$；…；取 n 个数，有$\binom{n}{n}$种取法，这 n 个数按要求形成 $n-1$ 种分组法，故取 n 个数时，能分组$(n-1)\binom{n}{n}$个。

综合以上结果，总的方案数为

$$1\binom{n}{2}+2\binom{n}{3}+\cdots+(n-1)\binom{n}{n}$$

3.15 试求 n 个完全一样的骰子能投出多少种不同的点数？

解　不同点数有 $6n-(n-1)=5n+1$ 种。

3.16 凸 10 边形的任意三条对角线不共点，试求该凸 10 边形的对角线交于多少个点？又把所有的对角线分割成多少段？

P(10,4)=210

凸N边形的对角线条数为：n（n-3)/2
因为每一个交点对应两条对角线，而两条对角线又对应着一个四边形。于是焦点个数就对应四边形的个数。问题转化成由凸n边形的n个顶点取4个顶点可组成多少个四边形的问题，故最多共有n(n-1)(n-2)(n-3)/24个交点。

3.17 设 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_l^{\alpha_l}$， 其中， $p_1p_2\cdots p_l$ 是 l 个不同的素数，试求能整除数 n 的正整数的数目

9.解：每个能整除尽数n的正整数都可以选取每个素数p_i从0到a_i次，即每个素数有a_i+1种选择，所以能整除n的正整数数目为$(a_1+1)\cdot(a_2+1)\cdot\ldots\cdot(a_l+1)$个。题

3.18 将 52 张牌平均分给 4 个人，问每人有一个 5 张牌的同花顺的概率是多少？

取4张牌总共有C(4,52)种

4张同花顺的话，从1开始可以抽出10对（1，2，3，4，5，6，7，8，9，10），另外有4种图案，所以就是4*10=40。

最后4*4*10/C(4,52)=0.15%

3.19 取定空间中的 25 个点，其中任意 4 个点均不共面，问它们能决定多少个三角形？又能决定多少个四面体？

解：既然任意 4 个点均不共面，那么任意 3 点也不共线（若有 3 点共线，则这条线与另外任一点共面）. 故任意 3 点可以组成一个三角形，任意 4 点可以组成一个四面体. 因而这 25 个点可以组成的三角形个数为$\binom{25}{3}=2300$，四面体个数为$\binom{25}{4}=12650$.

3.20 考虑集合{1,2,……,n+1}的非空子集。

(1) 证明最大元素恰好是 j 的子集数为2^{j-1}

(2) 利用（1）结论证明

$$1+2+2^2+\cdots+2^n=2^{n+1}-1$$

3.21 从整数 1,2,……,1000 中选取 3 个数，使得它们的和正好被 4 整除，问有多少种选法？

用 A_i 表示 **1-1000** 中除以 **4** 的余数为 **i** 的整数的集合，

$|A_i|=250, i=0,1,2,3$，选法有以下几类：

(1) 三个数属于 A_0：

(2) 三个数两个属于 A_1，一个属于 A_2

(3) 三个数一个属于 A_0，两个属于 A_2

(4) 三个数一个属于 A_1，一个属于 A_3

(5)

3. 22

(1) 在由 5 个 0 和 4 个 1 组成的字符串中，出现 01 和 10 的总次数为 k 的字符串有多少个？

28解：(a)先将5个0排成一列：00000，1若插在两个0中间，“010”，则出现2个“01”或“10”;若插在两端，则出现1个“01”或“10”;要使出现“01”，“10”总次数为4，有两种办法：

(1)把两个1插入0得空当内，剩下的1插入1的前面。

(2)把1个1插入0得空当内，再取两个1分别插入两端，剩下的1插入1的前面。

故总方案数为C(4,2)·2 +C(4,1)·3=36.

(2) 在由 m 个 0 和 n 个 1 组成的字符串中，出现 01 和 10 的总次数为 k 的字符串有

多少个？

(b)m个0产生m-1个空当，

若k为奇数,则必有且只有1个“1”插入头或尾,总方案数为$2\cdot C(m-1,\frac{k-1}{2})\binom{n-\frac{k+1}{2}}{\frac{k+1}{2}}$

若k为偶数,总方案数为

$$C(m-1,\frac{k}{2})\binom{n-\frac{k}{2}}{\frac{k}{2}}+C(m-1,\frac{k-1}{2})\binom{n-\frac{k+1}{2}}{\frac{k+1}{2}}$$

3.23 5 封不同的信由通信通道传送，在两封信之间至少要放入 3 个空格，一共要加入 15 个空格，问有多少种方法？

“5封信之间有4个可以插入空格的空当，每个空当至少3个空格，所以必须插入的空格已经有3*4=12个，还剩余3个多余的空格，需要分配到4个空当中。”

三个空格放到三个空档当中，就是 C(4,3)*1=4。

三个空格放到两个空档当中，分为两个空和一个空，C（2，4）*2=12，在这里两个和一个是有区别的。

三个空格放到一个空档当中，就是 C(4,1)*1=4，在这里三个空格是一样的。

所以就是5！*（4+12+4）=2400

3.24 将 a,b,c,d,e,f,g,h 排成一行，要求 a 在 b 的左侧，b 在 c 的左侧，问有多少种排法？

相当于5个数插4个空

5个数全排有5！=120种

只插一个有4种

只插两个又有C下面4上面2=6种

只插三个有4种

插四个有1种

插空共15种

所以共有120×15=1800种

3.25 从 1 到 100 的整数中不重复的选取两个数组成有序对(x,y)，使

得 x 与 y 的乘积 xy 不能被 3 整除，共可组成多少对？

4422

3.26 在 **m*n** 棋盘中选取两个相邻的方格（有一条公共边的两个方格）有多少种不同的选取方法？

解：两个相邻方格在同一行上，每一行都有n-1个取法，共m（n-1）种取法，
两个相邻方格在同一列上，每一列都有m-1个取法，共n（m-1）种取法，
因为m（n-1）+n（m-1）=2mn-m-n，所以共有2mn-m-n种取法.

3.27 某电影院票房前有 **2n** 个人排队，每人欲购买一张 **5** 元的电影票。在这些人中，有 **n** 个人，每人一张 **5** 元的钞票，其余每人有一张 **10** 元钞票，而票房在卖票前无任何钞票，问使得每个人都能顺利地买到电影票的排队方式有多少种？

3.28 略

3.29 以 $h_m(n)$ 表示用 **m** 种颜色去涂 **2*n** 个棋盘，使得相邻格子异色的涂色方法数， 证明：

$$h_m(n) = (\mathrm{m}2 - 3\mathrm{m} + 3)^{\mathrm{n}-1} \times \mathrm{m} \times (\mathrm{m}-1)$$

假设已经涂好前n-1个，方案数为h(m,n-1)，剩下2个格子，加上相邻的两个格子，编号为

1颜色a 3颜色x

2颜色b 4颜色y

因为已经编号到n-1，所以a和b已经确定了，现在给x分情况

x=b的时候：x已经确定，y两侧都是b色，所以有m-1种选择

x!=b的时候：x不是a和b颜色，有m-2种，y不是b和x的颜色，有m-2种，即(m-2)(m-2)

所以有递推关系：h(m,n) = h(m,n-1)*(m-1+(m-2)(m-2))

h(m,n)/h(m,n-1) = m^2-3m+3

h(m,n-1)/h(m,n-2) = m^2-3m+3

……

h(m,2)/h(m,1) = m^2-3m+3

而h(m,1)很简单等于m*(m-1)，

上面左侧乘起来就得到你要的结果了

3.30 上题中，若以$h_m^{'}(n)$表示用 m 种颜色去涂 2*n 个棋盘，使得相邻格子异色且每种颜色至少用一次的涂色方法数，求$h_m^{'}(n)$的计数方式。

3.31 如下：

31. 有 20 根完全相同的木棍从左至右竖立成一行，占据 20 个位置。要从中选出 6 根。

(1) 有多少种选择？

(2) 如果选出的木棍中没有两根是位置相邻的，又有多少种选择？

(3) 如果在所选出的每一对棍之间必须至少有两根棍，有多少种选择？

解 (1) 有$\binom{20}{6}$种。

(2) 所选出的 6 根木棍实际上可将这 20 根排成一行的木棍分割成 7 段(加上首和尾)。设所选左边第 1 根木棍的左侧有 x_1 根未被选中的木棍；在第 1 与第 2 根所选木棍之间有 x_2 根未被选中的木棍；……；第 6 根所选中的木棍的右侧有 x_7 根未被选中的棍，则由于没有两根选出的木棍是相邻的，所以

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_7 = 14$$

$$x_1 \geqslant 0, x_7 \geqslant 0, x_i \geqslant 1 \qquad i = 2,3,\cdots,6$$

作变量代换

$$y_1 = x_1, y_7 = x_7, y_i = x_i - 1 \qquad i = 2,3,\cdots,6$$

原方程变成

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_7 = 9 \qquad y_i \geqslant 0 \qquad i = 1,2,\cdots,7$$

这个方程非负整数解的个数为

$$\binom{9+7-1}{9} = \binom{15}{9}$$

(3) 如同(2) 中的分析,此时方程及限制为

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_7 = 14$$

$$x_1 \geqslant 0, x_7 \geqslant 0, x_i \geqslant 2 \qquad i = 2,3,\cdots,6$$

经变量代换,方程变为

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_7 = 4 \qquad y_i \geqslant 0 \qquad i = 1,2,\cdots,7$$

它的非负整数解个数为

$$\binom{4+7-1}{4} = \binom{10}{4}$$

（内部使用）

习题四

4.1 **在 1 与 1000 之间不能被 4,5 和 6 整除的数有多少个？**

令 $S=\{1,2,\cdots,1000\}$，A_1 是 S 中可被 4 整除的整数集合，

4.2 **求从 1 到 500 的整数中能被 3 和 5 整除，但不能被 7 整除的数的个数**

4.3 **求 1 与 1000 之间既不是平方数又不是立方数的整数个数**

4.4 **求多重集合 $S=\{\infty\cdot a,3\cdot b,5\cdot c,7\cdot d\}$ 的 10 组合数**

4.5 **求不定方程 $x_1+x_2+x_3=14$ 的数值不超过 8 的正整数解的个数**

4.6 **在宴会后，7 位男士检查他们的帽子，**

问有多少种方法，使得

(1) 没有人接到自己的帽子

(2) 至少有一人接到自己的帽子

(3) 至少有两人接到自己的帽子

4. 7

(1) 把它们按不同的次序全部挂在灯竿上表示信号，共有多少种不同的信号？

4！=24

(2) 每次使用一盏、二盏、三盏或四盏灯按照一定的次序挂在灯竿上表示信号，共有多少种不同的信号？、

P(4,1)+P(4,2)+P(4,3)+P(4,4)=64

(3) 在（**2**）中，如果信号与灯的次序无关，共有多少种不同的信号？

$$\binom{4}{1}+\binom{4}{2}+\binom{4}{3}+\binom{4}{4}=2^4-1$$

4. 8　现有 100 件产品，从其中任意抽出 3 件。

(1) 共有多少种抽法？

$$\binom{100}{3}$$

(2) 如果 **100** 件产品中有两件次品，那么抽出的产品中至少有 **1** 件次品的概率是多少？

$$\frac{\binom{100}{3}-\binom{98}{3}}{\binom{100}{3}}$$

(3) 如果 100 件产品中有两件次品，那么抽出的产品中恰好有 1 件次品的概率是多少？

$$\frac{\binom{2}{1}\times\binom{98}{2}}{\binom{100}{3}}$$

4.9 把 q 个负号和 p 个正号排在一条直线上，使得没有两个负号相邻，证明不同的排法有 $\binom{p+1}{q}$。

证明 对于这些符号的排列，q 个负号将排列分隔成 $q+1$ 段，设第一个负号的左侧有 x_1 个正号，第一个负号与第二个负号之间有 x_2 个正号，……，最后一个负号右侧有 x_{q+1} 个正号。由于没有两个负号相邻，故

$$x_1+x_2+\cdots+x_{q+1}=p$$

$$x_1\geqslant 0 \quad x_i\geqslant 1 \quad i=2,3,\cdots,q \quad x_{q+1}\geqslant 0$$

这个方程的整数解个数就是问题的解，作变量代换

$$y_1=x_1 \quad y_i=x_i-1 \quad i=2,3,\cdots,q$$

$$y_{q+1}=x_{q+1}$$

则方程变成

$$y_1+y_2+\cdots+y_{q+1}=p-(q-1) \quad y_i\geqslant 0 \quad i=1,\cdots,q+1$$

这个方程的解的个数为

$$\binom{p-(q-1)+q+1-1}{p-(q-1)}=\binom{p+1}{p+1-q}=\binom{p+1}{q}$$

4.10 8 个棋子大小相同，其中 5 个红的，3 个蓝的。把它们放在 8*8 的棋盘上，每行每列只放一个，问有多少种放法？若放在 12*12 的棋盘上，结果如何？

解　(1) 有 $8!\frac{8!}{5!3!}$ 种放法。

(2) 从 12 行中选出 8 行，有 $\binom{12}{8}$ 种。从 12 列中选出 8 列，有 $\binom{12}{8}$ 种。在所选出的行和列所形成的方格上放这些车，有 $8!\frac{8!}{5!3!}$ 种结果，故此时总的放法数是

$$\binom{12}{8}\binom{12}{8}8!\frac{8!}{5!3!}$$

4.11 有纪念章 4 枚，纪念册 6 本，赠送给 10 个同学，每人得一件，共有多少种不同的送法？

解　从 10 位同学中选 4 人送纪念章，有 $\binom{10}{4}$ 种选法，而其余 6 人就只能送纪念册，故不同送法数是 $\binom{10}{4}$。

4.12

(1) 从 **1,2**，……，**100** 中选出两个数，使得它们的差正好是 **7**，有多少种不同的选法？

(2) 如果要求选出的两个数之差小于等于 **7**，又有多少种不同选法？

解　(1) 这只要统计有多少数对 $(j,j+7)$ 即可，显然这样数对有 93 个。

(2) 这只要分别统计数对 $(j,j+1)$，$(j,j+2)$，$(j,j+3)$，$(j,j+4)$，$(j,j+5)$，$(j,j+6)$，$(j,j+7)$ 即可。所以总的不同选法数为

$$99+98+97+96+95+94+93=672$$

4.13 试求不定方程 $x_1+x_2+\cdots+x_8=40$ 满足 $x_i \geq i$ $(i=1,2,\cdots,8)$ 的整数解的个数？

解　作变量代换

$$y_i = x_i - i \qquad i = 1,2,\cdots,8$$

则原方程变为

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_8 = 40 - (1 + 2 + \cdots + 8) = 4$$

$$y_i \geqslant 0 \qquad i = 1,2,\cdots,8$$

这个方程的非负整数解个数为

$$\binom{4+8-1}{4} = \binom{11}{4}$$

4.14 在一次选举中，甲、乙分别得到 a 张和 b 张选票（a＞b），将全部 a＋b 张选票按某种顺序排列，依次计票时甲所得票数总比乙多，问这种排列方法有多少种？

方案数=C(a+b,a)-2C(a+b-1,a)=C(a+b-1,a-1)-C(a+b-1,a)

解 把该问题化为网格中两点间有条件限制的路径数目. 曾有专门的例题. 过程从略. 结果为:

$$\frac{(a-b)\cdot(a+b-1)!}{a!\cdot b!}.$$

4.15 n 个不同的字符顺序进栈恰好一次，问有多少种不同的出栈方式？

解

从 n 个字符中选 1 个，进栈后出栈，有 $n = P(n,1)$ 种；

从 n 个字符中选 2 个顺序进栈，则出栈方式有 $P(n,2)$ 种；

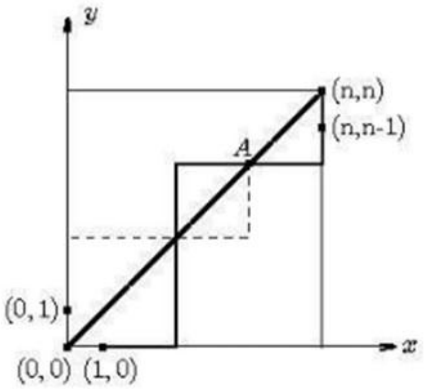
⋮

所以，不同出栈方式数为

$$P(n,1) + P(n,2) + \cdots + P(n,n)$$

4.16 计数从(0,0)点到(n,n)点的不穿过直线 y=x 的非降路径数

先考虑对角线下方的路径，这种路径都是从（0，0）点出发经过（1，0）点及（n，n-1）点到达（n，n）的。



从图中可以知道 每一条从（1，0）到（n，n-1）的穿过 y=x 的非降路径都与从（0，1）到（n，n-1）的非降路径一一对应。

故答案为 $2\left(\binom{2n-2}{n-1}-\binom{2n-2}{n}\right)=\frac{2}{n}\binom{2n-2}{n-1}$

4.17 有 n 个不同的整数，从中取出两组来，要求第一组里的最小数大于第二组里的最大数，问有多少种方案?

解 从 n 个数中取2个，有 $\binom{n}{2}$ 种取法，对其中每一种取法进行分组，只有一种分组方法，即小的元素作第二组，大的元素作第一组，故分组数为 $\binom{n}{2}$；从 n 个数中取3个，有 $\binom{n}{3}$ 种取法，这3个元素根据题目要求形成2种分组法，故对取3个数的分组数是 $2\binom{n}{3}$；…；取 n 个数，有 $\binom{n}{n}$ 种取法，这 n 个数按要求形成 $n-1$ 种分组法，故取 n 个数时，能分组 $(n-1)\binom{n}{n}$ 个。

综合以上结果，总的方案数为

$$1\binom{n}{2}+2\binom{n}{3}+\cdots+(n-1)\binom{n}{n}$$

4.18 试求 n 个完全一样的骰子能投出多少种不同的点数？

解 不同点数有 $6n-(n-1)=5n+1$ 种。

4.19 凸 10 边形的任意三条对角线不共点，试求该凸 10 边形的对角线交于多少个点？又把所有的对角线分割成多少段？

P(10,4)=210

凸N边形的对角线条数为：n（n-3)/2
因为每一个交点对应两条对角线，而两条对角线又对应着一个四边形。于是焦点个数就对应四边形的个数。问题转化成由凸n边形的n个顶点取4个顶点可组成多少个四边形的问题，故最多共有n(n-1)(n-2)(n-3)/24个交点。

4.20 设 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_l^{\alpha_l}$， 其中， $p_1p_2\cdots p_l$ 是 l 个不同的素数，试求能整除数 n 的正整数的数目

9.解：每个能整除尽数n的正整数都可以选取每个素数p_i从0到a_i次，即每个素数有a_i+1种选择，所以能整除n的正整数数目为$(a_1+1)\cdot(a_2+1)\cdot\ldots\cdot(a_l+1)$个。题

4.21 **将 52 张牌平均分给 4 个人，问每人有一个 5 张牌的同花顺的概率是多少？**

取4张牌总共有C(4,52)种

4张同花顺的话，从1开始可以抽出10对（1，2，3，4，5，6，7，8，9，10），另外有4种图案，所以就是4*10=40。

最后4*4*10/C(4,52)=0.15%

4.22 **取定空间中的 25 个点，其中任意 4 个点均不共面，问它们能决定多少个三角形？又能决定多少个四面体？**

解： 既然任意 4 个点均不共面，那么任意 3 点也不共线（若有 3 点共线，则这条线与另外任一点共面）. 故任意 3 点可以组成一个三角形，任意 4 点可以组成一个四面体. 因而这 25 个点可以组成的三角形个数为$\binom{25}{3}=2300$，四面体个数为$\binom{25}{4}=12650$.

4.23 **考虑集合{1,2,……,n+1}的非空子集。**

(1) 证明最大元素恰好是 j 的子集数为2^{j-1}

(2) 利用（1）结论证明

$$1+2+2^2+\cdots+2^n=2^{n+1}-1$$

4.24 **从整数 1,2,……,1000 中选取 3 个数，使得它们的和正好被 4 整除，问有多少种选法？**

用 A_i 表示 **1-1000** 中除以 **4** 的余数为 **i** 的整数的集合，

$|A_i| = 250, i = 0,1,2,3$，选法有以下几类：

(1) 三个数属于 A_0：

(2) 三个数两个属于 A_1，一个属于 A_2

(3) 三个数一个属于 A_0，两个属于 A_2

(4) 三个数一个属于 A_1，一个属于 A_3

(5)

4.25

(1) 在由 5 个 0 和 4 个 1 组成的字符串中，出现 01 和 10 的总次数为 k 的字符串有多少个？

28解：(a)先将5个0排成一列：00000，1若插在两个0中间，“010”，则出现2个“01”或“10”;若插在两端，则出现1个“01”或“10”;要使出现“01”，“10”总次数为4，有两种办法：

(1)把两个1插入0得空当内，剩下的1插入1的前面。

(2)把1个1插入0得空当内，再取两个1分别插入两端，剩下的1插入1的前面。

故总方案数为C(4,2)·2 +C(4,1)·3=36.

(2) 在由 m 个 0 和 n 个 1 组成的字符串中，出现 01 和 10 的总次数为 k 的字符串有

多少个？

(b)m个0产生m-1个空当，

若k为奇数,则必有且只有1个“1”插入头或尾,总方案数为$2\cdot C(m-1,\frac{k-1}{2})(\frac{k+1}{2})(n-\frac{k+1}{2})$

若k为偶数,总方案数为

$C(m-1,\frac{k}{2})(n-\frac{k}{2}) + C(m-1,\frac{k-1}{2})(\frac{k+1}{2})(n-\frac{k+1}{2})$

4.26 5 封不同的信由通信通道传送，在两封信之间至少要放入 3 个空格，一共要加入 15 个空格，问有多少种方法？

“5封信之间有4个可以插入空格的空当，每个空当至少3个空格，所以必须插入的空格已经有3*4=12个，还剩余3个多余的空格，需要分配到4个空当中。”

三个空格放到三个空档当中，就是 C(4,3)*1=4。

三个空格放到两个空档当中，分为两个空和一个空，C（2，4）*2=12，在这里两个和一个是有区别的。

三个空格放到一个空档当中，就是 C(4,1)*1=4，在这里三个空格是一样的。

所以就是5！*（4+12+4）=2400

4.27 将 a,b,c,d,e,f,g,h 排成一行，要求 a 在 b 的左侧，b 在 c 的左侧，问有多少种排法？

相当于5个数插4个空

5个数全排有5！=120种

只插一个有4种

只插两个又有C下面4上面2=6种

只插三个有4种

插四个有1种

插空共15种

所以共有120×15=1800种

4.28 从 1 到 100 的整数中不重复的选取两个数组成有序对(x,y)，使

得 x 与 y 的乘积 xy 不能被 3 整除，共可组成多少对？

4422

4.29 在 m*n 棋盘中选取两个相邻的方格（有一条公共边的两个方格）有多少种不同的选取方法？

解：两个相邻方格在同一行上，每一行都有n-1个取法，共m（n-1）种取法，
两个相邻方格在同一列上，每一列都有m-1个取法，共n（m-1）种取法，
因为m（n-1）+n（m-1）=2mn-m-n，所以共有2mn-m-n种取法.

4.30 某电影院票房前有 2n 个人排队，每人欲购买一张 5 元的电影票。在这些人中，有 n 个人，每人一张 5 元的钞票，其余每人有一张 10 元钞票，而票房在卖票前无任何钞票，问使得每个人都能顺利地买到电影票的排队方式有多少种？

4.31 略

4.32 以 $h_m(n)$ 表示用 m 种颜色去涂 2*n 个棋盘，使得相邻格子异色的涂色方法数， 证明：

$$h_m(n) = (\mathrm{m}2 - 3\mathrm{m} + 3)^{\mathrm{n}-1} \times \mathrm{m} \times (\mathrm{m}-1)$$

假设已经涂好前n-1个，方案数为h(m,n-1)，剩下2个格子，加上相邻的两个格子，编号为

1颜色a 3颜色x

2颜色b 4颜色y

因为已经编号到n-1，所以a和b已经确定了，现在给x分情况

x=b的时候：x已经确定，y两侧都是b色，所以有m-1种选择

x!=b的时候：x不是a和b颜色，有m-2种，y不是b和x的颜色，有m-2种，即(m-2)(m-2)

所以有递推关系：h(m,n) = h(m,n-1)*(m-1+(m-2)(m-2))

h(m,n)/h(m,n-1) = m^2-3m+3

h(m,n-1)/h(m,n-2) = m^2-3m+3

……

h(m,2)/h(m,1) = m^2-3m+3

而h(m,1)很简单等于m*(m-1)，

上面左侧乘起来就得到你要的结果了

4.33 上题中，若以$h_m^{'}(n)$表示用 **m** 种颜色去涂 **2*n** 个棋盘，使得相邻格子异色且每种颜色至少用一次的涂色方法数，求$h_m^{'}(n)$的计数方式。

4.34 如下：

31. 有 20 根完全相同的木棍从左至右竖立成一行，占据 20 个位置。要从中选出 6 根。

(1) 有多少种选择?

(2) 如果选出的木棍中没有两根是位置相邻的，又有多少种选择?

(3) 如果在所选出的每一对棍之间必须至少有两根棍，有多少种选择?

解 (1) 有$\binom{20}{6}$种。

(2) 所选出的 6 根木棍实际上可将这 20 根排成一行的木棍分割成 7 段(加上首和尾)。设所选左边第 1 根木棍的左侧有 x_1 根未被选中的木棍;在第 1 与第 2 根所选木棍之间有 x_2 根未被选中的木棍;……;第 6 根所选中的木棍的右侧有 x_7 根未被选中的棍，则由于没有两根选出的木棍是相邻的，所以

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_7 = 14$$

$$x_1 \geqslant 0, x_7 \geqslant 0, x_i \geqslant 1 \qquad i = 2,3,\cdots,6$$

作变量代换

$$y_1 = x_1, y_7 = x_7, y_i = x_i - 1 \qquad i = 2,3,\cdots,6$$

原方程变成

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_7 = 9 \qquad y_i \geqslant 0 \qquad i = 1,2,\cdots,7$$

这个方程非负整数解的个数为

$$\binom{9+7-1}{9} = \binom{15}{9}$$

(3) 如同(2) 中的分析,此时方程及限制为

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_7 = 14$$

$$x_1 \geqslant 0, x_7 \geqslant 0, x_i \geqslant 2 \qquad i = 2,3,\cdots,6$$

经变量代换,方程变为

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_7 = 4 \qquad y_i \geqslant 0 \qquad i = 1,2,\cdots,7$$

它的非负整数解个数为

$$\binom{4+7-1}{4} = \binom{10}{4}$$