状态按离散步骤（事件或转移）变化的系统，称为转移系统

定义1

转移系统是一个三元组（triple）$S=(C,\to,I)$

C是配置集，$\to$是C上的二元转移关系，I是初始配置的一个子集

转移关系$\to$是$C\times C$的一个子集，表$r\to s$

定义2

$S=(C,\to,I)$是转移系统，S的一次执行的最大序列$E=(r_0,r_1,\dots)$

其中$r_0\in I$，且对所有$i\geq 0$，$r_i\to r_{i+1}$

终止配置：不存在s满足$r\to s$，对于序列E $\begin{cases}\text{无限的}\\\text{以终止配置结束}\end{cases}$ 最大的。

定义3 可达的。

断言/性质总是成立。

安全性：$S=(C,\to,I)$

$\{P\}\to\{Q\}$表示 对于每一次转移$r\to s$，

如果$P(r)$，则$Q(s)$，即$\{P\}\to\{Q\}$含义为：如果P在任一转移前成立，则Q在转移后成立。

定义 对于所有$r\in I$，$P(r)$成立且$\{P\}\to\{P\}$，断言P总是成立。

在每个初始配置中，不变式P（断言/性质）总是成立且在每次转移过程中保持不变。

由此，在每一可达配置中，不变式成立

定理1.

如果P是S的一个不变式，那么对S的每次执行的每一配置，P成立

证：E为S的一次执行$(r_0,r_1,\dots)$ 对于每个i，$P(r_i)$成立（归纳法）

①首先$r_0\in I$，由定义可得$P(r_0)$成立 ②假设$P(r_i)$成立，由定义，$P(r_{i+1})$成立

∴由归纳法，成立，定理证毕。

思考：是否对于每一执行的每一断言都成立的断言/性质就是不变式呢？

Ex 给出一个转移系统和断言P，满足P在S中总为真，但P不是S不变式的。

定理2. 设Q是S的不变式，设$Q\Rightarrow P$（对于每一$r\in C$），那么P在S的每一执行的每一配置中成立。

证：由定理，每个执行中每一配置Q成立，又∵$Q\Rightarrow P$（对于每一$r\in C$），∴对于每一执行每一配置P成立

（先证明强不变式，再证明弱不变式），例如证明存在有人 $\begin{cases}\text{存在有女人}\\\text{存在有男人}\end{cases}$

定义 S为转移系统，P、Q为断言。

如：对于所有$r\in I$，$Q(r)\Rightarrow P(r)$，且$\{Q\wedge P\}\to\{Q\Rightarrow P\}$

and.

$Q\wedge P$在转移前成立

$Q\Rightarrow P$在转移后成立

则称P为Q-导出的。

定理3. 如Q是不变式，P是Q-导出的，则$P\wedge Q$为不变式

根据不变式定义，$\begin{cases}\text{对于所有}r\in I，P(r)\wedge Q(r)\text{成立}\\\{Q\wedge P\}\to\{Q\wedge P\}\end{cases}$

由Q不变式，∴$Q(r)$成立，

对∵P是Q-导出的，$Q(r)\Rightarrow P(r)$，∴$P(r)$成立，∴$Q(r)\wedge P(r)$成立

设$r\to s$

$\{Q\wedge P\}\to\{Q\Rightarrow P\}$，∴$\{Q(r)\wedge P(r)\}\to\{Q(s)\Rightarrow P(s)\}$

∵Q是不变式，∴$Q(s)$成立，又∵$Q(s)\Rightarrow P(s)$，∴$P(s)$成立

∴$Q(s)\wedge P(s)$成立，∴$\{Q\wedge P\}\to\{Q\wedge P\}$，证毕。