Edit by Rick_Winter

1.6
假设命题成立.
首先将 1-200 按照连续除以 2,直到不能被 2 整除的结果分为 100 组,即:
1,1*2,1*4,...
3,3*2,3*4,...
...
197
199
每一组中的数都能互相整除.所以如果想取 100 个不能互相整除的数,只能每个组取一个.设取的数为
a1 = 1*2^k1
a3 = 3*2^k3
a5 = 5*2^k5
...
a199 = 199*2^k199
设那个小于 16 的数为 ai=i*2^ki,i>=1.
则 a3i=3i*2^k3i,于是 k3i<ki,否则 ai 将整除 a3i
所以 a3i<=3*16/2=24
a9i<3*24/2=36
a27i<3*36/2=54
a81i<3*54/2=81
这与 a81i>=a81=81*2^k81>=81 矛盾,所以假设不成立.命题得证明.

1.10
在坐标平面任意给定 9 个整点,则必有其中的三点,其重心也为整点.
否则的话 9 点共线就肯定没有三角形了.
根据横坐标对 3 取余可分三类,分别记为
X0={(x,y):x=0(mod 3)},
X1={(x,y):x=1(mod 3)},
X2={(x,y):x=2(mod 3)},
纵坐标也同样,分别记为 Y0,Y1,Y2.
于是一共可以把这些点分成 9 类,画到下面的 9 宫格里
X0∩Y0 X0∩Y1 X0∩Y2
X1∩Y0 X1∩Y1 X1∩Y2
X2∩Y0 X2∩Y1 X2∩Y2
在每一格填上这个集合的元素个数.
1)若至少有一格的元素不小于 3,那么从这里取 3 个点就满足要求.
2)接下来考虑每一格都小于 3 的情形.
2.1)如果至少有一行都非零,那么从这一行每个集合里各取一点即可.
2.2)如果至少有一列都非零,那么从这一列每个集合里各取一点即可.
2.3)如果至少有一条对角线(包括 X0∩Y1,X1∩Y2,X2∩Y0 这种)都非零,那么从这

一条对角线每个集合里各取一点即可.
可以证明这 3 种情况不可能都不满足(若都不满足,则至少有 5 个 0 元素,剩下 4 个非零元都小于 3,总和不可能达到 9).

1.19

设:有顺序号 1-N,分成,A,B,C,D,E,F,六组,使每组中任一数不等于本组的二数之和,或一数之二倍.且 A 组含顺序号个数最多;
则 A 组至少有 N/6 个数,他们从大到小排列,是:a1,a2,a3,...ak;
这样,我们能找出(N/6-1)个数,a1-a2,a1-a3,a1-a4,.a1-ak;
这些数必在 B,C,D,E,F,组中,其中以 B 组最多,则至少有(1/6-1)/5 个数;
他们从大到小排列,是:b1,b2,b3,...bj;
同理,我们能找出[(N/6-1)/5-1]个数,b1-b2,b1-b3,b1-b4,.b1-bj;
这些数必在 C,D,E,F,组中,依次类推,直至 F 组,由于条件约束,F 组只能是一个数.
所以,可使每组中任一数不等于本组的二数之和,或一数之二倍.的条件满足的 N 的最大范围是满足以下方程:
[{[(N/6-1)/5-1]/4-1}/3-1]/2-1=1;
解得:N=1956;
因:1978>1956;所以必然至少有一个成员的顺序号数,与他的两个同胞的顺序号数之和相等,或是他的一个同胞的顺序号数的两倍.

1.20

证明：设从1到67的整数任意分成4部分p_1,p_2,p_3,p_4，作如下分析：
①由鸽笼原理知，1到67的整数中必有一部分，不妨设为p_1，至少有$\lfloor(67-1)/4\rfloor+1=17$个元素。并设这17个元素为$a_1<a_2<\ldots<a_{17}$，若$a_i$中存在一个元素是某两个元素之差，则命题得证。否则，令$b_1=a_2-a_1,b_2=a_3-a_1,\ldots,b_{16}=a_{17}-a_1$，显然$1\leqslant b_i<67$，故$b_i$不属于$p_1$，属于$p_2,p_3$或$p_4$。
②同理，b_i中至少有$\lfloor(17-1)/3\rfloor+1=6$个元素属于$p_2$，设这6个元素为$c_1<c_2<\ldots<c_6$，若$c_i$中存在一个元素是某两个元素之差，则命题得证。否则，令$d_1=c_2-c_1,d_2=c_3-c_1,\ldots,d_5=c_6-c_1$，显然$1\leqslant d_i<67$，且存在$1\leqslant l,m\leqslant 17,d_i=c_i-c_1=a_l-a_m,\ i=1,2,\ldots,5$，故$d_i$不属于$p_1,p_2$，属于$p_3,p_4$。
③d_i中至少有$\lfloor(6-1)/2\rfloor+1=3$个元素属于$p_3$，设这3个元素为$f_1<f_2<f_3$，若$f_i$中存在一个元素是某两个元素之差，则命题得证。否则，令$g_1=f_2-f_1,\ g_2=f_3-f_1$，显然$1\leqslant g_i<67$，且存在$1\leqslant l,m\leqslant 17,\ g_i=f_i-f_1=a_l-a_m,\ i=1,2$，故$f_i$不属于$p_1,p_2,p_3$，属于$p_4$。
④若$g_1=g_2-g_1$，则命题得证。否则，令$h=g_2-g_1$，显然$1\leqslant h<67$，且同上可以证明h不属于p_1,p_2,p_3,p_4中任一个，与已知矛盾。

2.16

根据题意，1 个顶点有 7 条对角线，与它相邻的顶点有 7 条对角线，这样的点 2 个； 与它不相邻的顶点有 6 条对角线（有 1 条与它重复的），这样的点 8 个；

因此 （2* C（7，1）* C（7，1）+8* C（6，1）* C（7，1））*（9+1） =4340（据说错误）

对角线数：$L = n(n-3)/2$

区域数：$S = [L(L+1)/2]+1 = [n(n-3)(n-2)(n+1)/8]+1$

线段数：$D = L^2 = n^2(n-3)^2/4$

2.22

（1）5 个 0，4 个 1 组成的字符串中，出现 01 或 10 的次数为 4 的不同字符串个数

（2）一般地，n 个 0，m 个 1 组成的字符串中，出现 01 或 10 的次数为 k 的不同字符串个数

例如，10100011 是一个满足要求的字符串（这里 10 和 01 是可以重用的，例如，010 算是出现 1 次 01，出现 1 次 10）

（这是刚刚考过的组合数学期末试题，表示没能当场做出，选错方法了- -我用了递推法，写出了递归式但是不会解，因为有 n、m、k 三个参数——这也许不是正确的方法）

———————————————————

符号说明：

1）N01 和 N10 分别表示字符串中 01 的个数和 10 的个数

2）N=N01+N10，表示字符串中 01 和 10 的总出现次数

3）C(n,m)表示 n 个不同元素中取 m 个元素的组合数

———————————————————

（1）注意到：我们可以把字符串中连续的 0 用 1 个 0 替换而不改变 N01 和 N10 的个数（N01 和 N10 分别表示字符串中 01 的个数和 10 的个数），同理也可以把字符串中连续的 1 用 1 个 1 替换，为叙述方便，称得到的为原字符串的“模式”

比如，10100011 的模式是 10101

下面考虑有几种可能的模式呢？

思路：我们考虑 0 的可能位置（考虑 1 也可以），如果 0 在左端，则对 N01 的贡献为 1；若

在右端，则对 N10 的贡献为 1；若在中间（非端点），则对 N10 和 N01 的贡献各为 1，总贡献为 2

01 或 10 出现次数为 4，那么 0 在模式中出现的情况有以下几种可能：

（1）中间没有 0——这不可能，因为即使两端都出现 0，01 或 10 出现总次数也只有 2

(2)中间有 1 个 0——这 1 个 0 对 N 的贡献为 2,那么两端必然都必须为 0,这样才会有 N=4。模式为 01010

（3）中间有 2 个 0——这 2 个 0 对 N 的贡献为 4，两端必然都必须为 1，模式为 10101

（4）中间有超过 2 个 0——这不可能

总结起来只有两种可能的模式：01010 和 10101

(还可以从模式的角度找规律，其实长为 n 的模式只有两种，分别是以 0 开头的 01 交替序列和以 1 开头的 01 交替序列，而且这两个模式对应的 N 是相同的，即包含 01 和 10 的总数是相同的。因此 n 和 N 之间构成了一一对应。n 为偶数时，模式为 0101…01 或 1010…10，对应 N=n-1；n 为奇数时，模式为 0101…010 或 1010…101，对应 N=n-1.所以总是有 N=n-1，所以你告诉我 N=4，那么对应的一定是长为 5 的两个模式，这种方法似乎更简单)

找到模式之后，怎么计算对应的字符串有多少个呢?

对模式 01010，设“01010”的第 1 个 0 在原字符串代表 x1 个 0，第 2 个 0 代表 x2 个 0，第 3 个 0 代表 x3 个 0，则有 x1+x2+x3=5，不同的 x1，x2，x3 的取值对应的字符串是不同的，同样每个符合模式 01010 的字符串也都对应了这样一组正整数（x1，x2，x3），这是一一对应。求出这个不定方程的正整数解的个数就可以了，即为在 5 个相同的球之间插入 2 个隔板的方法数，是 C(4,2)。同样设“01010”的第 1 个 1 和第 2 个 1 在原字符串中分别代表 y1 个 1 和 y2 个 1，有 y1+y2=4，正整数解个数为 C(3,1)

因此，由乘法原则，这种模式对应的字符串有 C(4,2)＊ C(3,1)=18 个

类似可以求出 10101 对应的字符串有 C(4,1)＊ C(3,2)=12 个

所以，有 30 个满足要求的字符串。

（2）一般情况，方法是一样的

n 个 0，m 个 1，出现 01 或 10 的次数为 k

k 为偶数时，可能的模式有两个：

一个是 1010…01，其中有 k/2 个 0， k/2+1 个 1.对应的不定方程为：

$X1+ X2+ \cdots+Xk/2=n$

$y1+ y2+ \cdots+yk/2+1=m$

解的个数是 C(n-1,k/2-1)*C(m-1,k/2)

另一个是 010…010，其中有 k/2+1 个 0， k/2 个 1.对应的不定方程为：

$X1+ X2+ \cdots+Xk/2+1=n$

$y1+ y2+ \cdots+yk/2=m$

解的个数是 C(n-1,k/2)*C(m-1,k/2-1)

总的符合要求的字符串数为 C(n-1,k/2-1)*C(m-1,k/2)+ C(n-1,k/2)*C(m-1,k/2-1)

k 为奇数时，可能的模式也有两个：

一个是 010…01，其中有(k+1)/2 个 0， (k+1)/2 个 1.对应的不定方程为：

$X1+ X2+ \cdots+X(k+1)/2=n$

$y1+ y2+ \cdots+y(k+1)/2=m$

解的个数是 C(n-1,(k-1)/2)*C(m-1, (k-1)/2)

另一个是 10…010，其中同样是有(k+1)/2 个 0， (k+1)/2 个 1.对应的不定方程及解的个数和上一个一样，也是 C(n-1,(k-1)/2)*C(m-1, (k-1)/2)个解。

总的符合要求的字符串数为 2*C(n-1,(k-1)/2)*C(m-1, (k-1)/2)

在最右边插入一个 1，则贡献一个 01。
想要有 4 个 01 或 10，
1）在 4 个位置中选两个插入 1， 因为有 4 个 1，可以 11，11， 111， 1， 1，111，3 种方法。即 3*c(4，2)
2) 在做左边插入一个 1，因为一共 4 个 01 或 10， 故最右边也需要一个 1。
然后 4 个位置选一个插入 1，还剩下一个 1 有三个位置可选。
共有 3*c(4,1)
1)+2)=3*c(4,2)+3*c(4,1)=30.
------

m,n,k。
若 2|k,
1）选择 k/2 个位置，有 c(m-1,k/2)，还剩下 n-k/2 个 1，相当于 n-k/2 个相同的球放到 k/2 个不同盒子里，有 c(n-k/2+k/2-1, n-k/2)=c(n-1,k/2-1) . is c(n-1, k/2-1)*c(m-1,k/2)
2) left most 一个 1，right most 一个 1，还剩下 k-2 个 01 或 10，中间选择(k-2)/2 个位置即可，c(m-1,(k-2)/2)，还剩下(n-2-(k-2)/2)=n-k/2-1 个 1，相当于 n-k/2-1 个相同的球放入(k-2)/2+2=k/2+1 个不同的盒子中，
有 c(n-k/2-1+k/2+1-1, n-k/2-1)=c(n-1,k/2)，is c(n-1,k/2) * c(m-1, k/2-1).
total: c(n-1,k/2-1)*c(m-1,k/2)+c(n-1,k/2)*c(m-1,k/2-1)

01010 或 10101 则四次 然后剩下的 0 挨 0 放.1 挨 1 放则四次
第一种 01010 剩 2 个 0 2 个 1 放 1 6 种（分开放 3 种,放一起 3 种） 放 0 3 种（1 个 0 处 1 个 1 种,2 个 0 都放一起 2 种） 故 3*6=18
第二种 剩 2 个 0,一个 1,4*3=12
一共 30
故 30 种
3.k 为奇数 01010101 或 10101010
k 为偶数 010101010 或 101010101
挡板问题,自己研究下
x 个球分 y 份,每份可以没有,份数有次序
C y-1/x+1
奇数的剩 m-（k+1）/2 个 0,n-（k+1）/2 个 1
C[(k+1)/2-1],[m-（k+1）/2 +1] * C[(k+1)/2-1],[n-（k+1）/2 +1]
两种情况*2 则 2*C[(k+1)/2-1],[m-（k+1）/2 +1] * C[(k+1)/2-1],[n-（k+1）/2 +1]
偶数的 第一个剩 m-(k/2+1)个 0 ,n-k/2 个 1
C[k/2+1-1],[m-(k/2+1)+1] * C[k/2-1],[n-k/2 +1]
第二个 m-k/2 个 0 ,n-（k/2+1）个 1
C[k/2-1],[m-k/2+1] * C[k/2+1-1],[n-(k/2+1)+1]

2.29
假设已经涂好前 n-1 个，方案数为 h(m,n-1)，剩下 2 个格子，加上相邻的两个格子，编号为
1 颜色 a 3 颜色 x
2 颜色 b 4 颜色 y
因为已经编号到 n-1，所以 a 和 b 已经确定了，现在给 x 分情况
x=b 的时候：x 已经确定，y 两侧都是 b 色，所以有 m-1 种选择
x!=b 的时候：x 不是 a 和 b 颜色，有 m-2 种，y 不是 b 和 x 的颜色，有 m-2 种，即(m-2)(m-2)
所以有递推关系：h(m,n) = h(m,n-1)*(m-1+(m-2)(m-2))
h(m,n)/h(m,n-1) = m^2-3m+3
h(m,n-1)/h(m,n-2) = m^2-3m+3
……
h(m,2)/h(m,1) = m^2-3m+3
而 h(m,1)很简单等于 m*(m-1)，

4、用$m(m\ge 2)$种颜色去涂$1\times n(n\ge 2)$棋盘，每个方格涂一种颜色，使得相邻方格颜色相异的涂色方案有多少？

解 第一个方格可涂m种颜色之一，有m种涂色方法；为使相邻方格颜色相异，只须使其余$n-1$个方格的颜色异于它左边相邻的那个方格的颜色，于是其余的每个方格都有$m-1$种涂法。故所求的涂色方案有$m(m-1)^{n-1}$种。

若题目改成：用$m(m\ge 2)$种颜色去涂$1\times n(n\ge 2)$棋盘，每个方格涂一种颜色，使得相邻方格颜色相异，首末两格也异色的涂色方案有多少？

解 用h_n表示所求方法数。易知$h_2=m(m-1)$.
用m种颜色去涂$1\times n$ $(n\ge m)$棋盘，每格涂一种颜色，使得相邻格子异色的涂色方法数有$m(m-1)^{n-1}$种，其中使得首末两格同色的涂色方法有h_{n-1}种，所以

$$h_n=m(m-1)^{n-1}-h_{n-1}\quad (n\ge 2)$$

从而

$$
\begin{aligned}
h_n &= m(m-1)^{n-1} - h_{n-1} \\
&= m(m-1)^{n-1} - m(m-1)^{n-2} + (-1)^2 h_{n-2} \\
&= \cdots \\
&= m(m-1)^{n-1} - m(m-1)^{n-2} + \cdots + (-1)^{n-3} m(m-1)^2 + (-1)^{n-2} h_2 \\
&= m(m-1)^{n-1} - m(m-1)^{n-2} + \cdots + (-1)^{n-3} m(m-1)^2 + (-1)^{n-2} m(m-1) \\
&= m(m-1)[(m-1)^{n-2} - (m-1)^{n-3} + \cdots + (-1)^{n-3}(m-1) + (-1)^{n-2}] \\
&= m(m-1)\frac{(m-1)^{n-1} + (-1)^{n-2}}{(m-1)+1} \\
&= (m-1)[(m-1)^{n-1} + (-1)^{n-2}] = (m-1)^n + (-1)^n (m-1)
\end{aligned}
$$

3.4

两边都是从 n+r+1 个元素的集合中中取 n-m+r+1 个的方法总数

左边简单

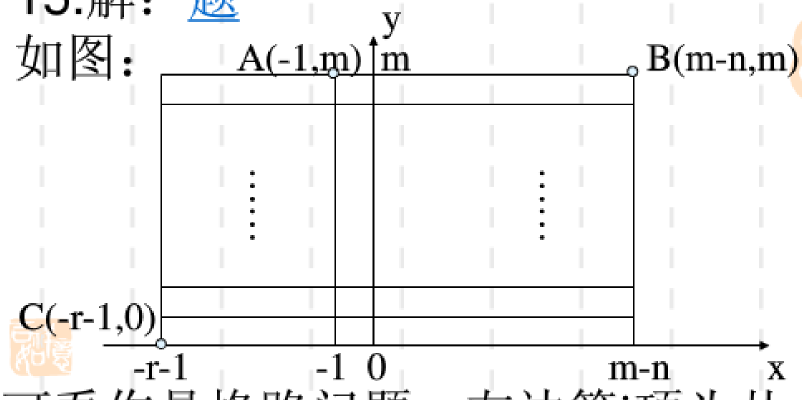
右边先改写成 求和(i 从 0 到 m)C(n-m,n-i)C(r,r+i)

上式的组合意义是：将原集合中元素从左到右编号.将所有取法按每种方法所取的第 n-m+1 个元素在原来 n+r+1 个数中所排的位置分类；第 n-m+1 个元素所在的位置只能是从 n-m+1 到 n+1,这 m+1 个数分别是右式的 m+1 项.

把 n+r+1 个数想象成一列，下证明式子的右边是 n+r+1 个元素中取 n-m+r+1 个的方法总数 考虑所取出的数中的第 n-m+1 个所在的位置。 如果是在这列数的第 n-m+1 个，要从此元素左边的 n-m 个中取 n-m 个元素，从右边的 m+r 个元素中取 n-m+r+1-(n-m)-1=r 个元素，共 c(n-m,n-m)c(r,m+r)； ...这个是最后一项 如果在第 n-m+2 位置上，要从左边取 n-m 个，右边取 r 个，有 c(n-m,n-m+1)c(r,m+r-1)种； ...这个是倒数第二项

- 15.解：题

如图：



可看作是格路问题：左边第i项为从点C到点(-1,i)直接经过(0,i)的路径,再到点B的所有路径数。左边所有项的和就是从点C到B的所有路径数即为右边的意义。

3.5

16.解：C(n+1,r+1)是指从n+1个元素a_1, $a_2,\ldots,a_{n+1}$中任取r+1个进行组合的方案数。左边：若一定要选a_{n+1},则方案数为C(n,r). 若不选a_{n+1},一定要选a_n,则方案数为C(n-1,r).若不选$a_{n+1},a_n,\ldots a_{r+2}$,则方案数为C(r,r).

题 所有这些可能性相加就得到了总方案数。

3.10

[证].(a)方法一：采用（串值）数学归纳法

[基始]当 n=1 时，0 出现偶数次，长度为 1 的字符串有$\frac{3^1+1}{2}$=2 个（即 1 和 2 两个长度为 1 的字符串）。所证结论成立；

[归纳假设]当 n=m(1≤m≤k)时，假设所证结论成立。即，0 出现偶数次，长度为 m 的字符串有$\frac{3^m+1}{2}$个；

[归纳]当 n=k+1 时，0 出现偶数次，长度为 k+1 的字符串包括两部分：

(1)给 0 出现偶数次，长度为 k 的字符串后面再增加一位不是 0 的数（只能是 1 或 2），因此，按乘法原理，由归纳假设，此种字符串有$\frac{3^k+1}{2}\cdot 2=3^k+1$个；

(2)给 0 出现奇数次，长度为 k 的字符串后面再增加一位是 0 的数，因此，按乘法原理，由归纳假设，此种字符串有$\left(3^k-\frac{3^k+1}{2}\right)\cdot 1=\frac{3^k-1}{2}$个；

所以，按加法原理，0 出现偶数次，长度为 k+1 的字符串共有

$(3^k+1)+\frac{3^k-1}{2}=\frac{3^{k+1}+1}{2}$个。所证结论成立；

归纳完毕。

(b)利用组合意义法来证

考虑 0 出现偶数次，长度为 n 的字符串的个数。根据上面(a)，已证其个数为 $\frac{3^n+1}{2}$；

另一方面，相当于先从 n 个位置中选取 2m(0≤2m≤n)个（有 $\binom{n}{2m}$ 种选择）放置上数 0，再在剩下的 n-2m 个位置上放置数 1 或 2（有 2^{n-2m} 种放法），按乘法原理，是 $\binom{n}{2m}2^{n-2m}$ 个，m=0, 1, 2, …, q　（$q=2\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$）的方案数。

按加法原理，此方案数为 $\binom{n}{0}2^n+\binom{n}{2}2^{n-2}+\cdots+\binom{n}{q}2^{n-q}$。因此，我们有

$$\binom{n}{0}2^n+\binom{n}{2}2^{n-2}+\cdots+\binom{n}{q}2^{n-q}=\frac{3^n+1}{2}。$$

3.18 Σ(i=0,n)i^2*C(n,i)=n*(n+1)*2^(n-2); 还有一个：Σ(i=0,n)(1/(i+1)(i+2))C(n,i)=(2^(n+2)-n-3)/((n+1)(n+2))

第一个,利用 (1+x)^n=Σ(i=0,n) C(n,i)*x^i,两边对 x 求导,得：

n*(1+x)^(n-1)=Σ(i=1,n) i*C(n,i)*x^(i-1).两边同乘以 x,得：

n*x*(1+x)^(n-1)=Σ(i=1,n) i*C(n,i)*x^i.两边再对 x 求导,得：

n*(1+x)^(n-1)+n*x*(n-1)*(1+x)^(n-2)=Σ(i=1,n) i^2*C(n,i)*x^(i-1).令 x=1,整理,得证.

第二个,利用 A:Σ(i=0,n) C(n,i)=2^n 和 B:Σ(i=1,n) i*C(n,i)=n*2^(n-1).

左式=Σ(i=0,n) (1/(i+1)-1/(i+2))*C(n,i)

=(1-1/2)*C(n,0)+(1/2-1/3)*C(n,1)+(1/3-1/4)*C(n,2)+...+(1/n-1/(n+1))*C(n,n-1)+(1/(n+1)-1/(n+2))*C(n,n)

=C(n,0)-(1/(n+2))*C(n,n)+(1/2)*(C(n,1)-C(n,0))+(1/3)*(C(n,2)-C(n,1))+...+(1/(n+1))*(C(n,n)-(n,n-1))

=1-1/(n+2)+Σ(i=1,n) (1/(i+1))*(C(n,i)-C(n,i-1))

=(n+1)/(n+2)+Σ (1/(i+1))*(n!/ (i!*(n-i)!) - n!/ ((i-1)!*(n-i+1)!))

=(n+1)/(n+2)+Σ (1/(i+1))*((n-i-1-i)*n!) / (i!*(n-i+1)!)

=(n+1)/(n+2)+Σ ((n-2*i+1)/(n+1)*(n+2))*((n+2)!/ ((i+1)!*(n-i+1)!))

=(n+1)/(n+2)+1/((n+1)(n+2)) Σ (n+3-2*i-2)*C(n+2,i+1)

=(n+1)/(n+2)+(n+3)/((n+1)*(n+2)) Σ C(n+2,i+1) - 2/((n+1)*(n+2)) Σ (i+1)*C(n+2,i+1)

利用 A 化简第二项

=(n+1)/(n+2)+((n+3)*(2^(n+2)-n-4)) / ((n+1)*(n+2)) - 2/((n+1)*(n+2)) Σ(i=2,n+1) i*C(n+2,i)

利用 B 化简第三项

=(n+1)/(n+2)+((n+3)*(2^(n+2)-n-4))/((n+1)*(n+2)) - (2*((n+2)*2^(n+1)-2*n-4)) / ((n+1)*(n+2))

然后化简一下,就得证啦.

5.10 用生成函数法证明下列等式：

（1）$\binom{n+2}{r}-2\binom{n+1}{r}+\binom{n}{r}=\binom{n}{r-2}$

证明：$(1+x)^{n+2}=(1+x)^n \cdot (1+x)^2=(1+2x+x^2)(1+x)^n=x^2(1+x)^n+2(1+x)^{n+1}-(1+x)^n$

对比左右两边 x^r 的系数，左边=$\binom{n+2}{r}$，右边=$\binom{n}{r-2}+2\binom{n+1}{r}-\binom{n}{r}$，

整理得：$\binom{n+2}{r}-2\binom{n+1}{r}+\binom{n}{r}=\binom{n}{r-2}$.

等式得证.

（2）$\sum_{j=0}^{q}(-1)^j\binom{q}{j}\binom{n+q-j}{r}=\binom{n}{r-q}$

证明：$(1+x)^n[(1+x)-1]^q=x^q(1+x)^n$，

对比左右两边 x^r 的系数，

左边 = $(1+x)^n\sum_{j=0}^{q}(-1)^j\binom{q}{j}(1+x)^{q-j}=\sum_{j=0}^{q}(-1)^j\binom{q}{j}\binom{n+q-j}{r}$，右边 =$\binom{n}{r-q}$，

因此等式得证.

5.12

有重为 **1*g*** 的砝码重为 **1*g*** 的 **3** 个，重为 **2*g*** 的 **4** 个，重为 **4*g*** 的 **2** 个，求能称出多少种重量？

解：即求多项式$(1+x+x^2+x^3)(1+x^2+x^4+x^6+x^8)(1+x^4+x^8)$中展开式有多少项

(除 1 外)，原多项式

$=(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7+x^8+x^9+x^{10}+x^{11})(1+x^2+x^4+x^6+x^8)$ 故共有 **19** 种重量。

解：由题意知，$M_1=\{0,1,2,3\}$，$M_2=\{0,1,2,3,4\}$，$M_4=\{0,1,2\}$，故生成函数为

$(1+x+x^2+x^3)(1+x^2+x^4+x^6+x^8)(1+x^4+x^8)$
$=1+x+2x^2+2x^3+3x^4+3x^5+4x^6+4x^7+5x^8+5x^9+5x^{10}+5x^{11}+4x^{12}+4x^{13}+3x^{14}+3x^{15}$
$+2x^{16}+2x^{17}+x^{18}+x^{19}$

故共能称出 20 种重量（当 0g 不算的时候为 19 种），指数即为重量类型，系数为方案数

5.20

在一个程序设计课程里,每个学生的每个任务最多可以运行 10 次.教员发现某个任务共运行了 38 次.设有 15 名学生,每个学生对这一任务至少做一次.求观察到的总次数的组合数.

解：$M_1=M_2=\ldots=M_{15}=\{1,2,3,\ldots,10\}$，生成函数为

$$(x+x^2+x^3+\cdots+x^{10})^{15}=x^{15}\left(\frac{1-x^{10}}{1-x}\right)^{15},$$

其中 x^{38} 的系数为$\binom{37}{14}-\binom{15}{1}\binom{27}{14}+\binom{15}{2}\binom{17}{14}$。