

# 作业二

2018 年 5 月 14 日

## 作业提交要求

- 作业提交邮箱：CS05150@outlook.com
- 邮件和压缩包命名格式：信号与信息处理第二次作业-学号-姓名。
- 提交文件应包含公式推导或证明的 pdf 文档以及代码源文件。

## 回声状态网络

具有  $N$  个中间节点的回声状态网络表示一个参数化的输入驱动的状态空间模型（如图1），其状态更新和读出映射分别用以下公式表示

$$\mathbf{x}(t) = \tanh(R\mathbf{x}(t-1) + V\mathbf{u}(t)) \quad (1)$$

$$\mathbf{f}(t) = W\mathbf{x}(t) \quad (2)$$

其中  $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^D$ ,  $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^N$ ,  $\mathbf{f}(t) \in \mathbb{R}^D$  分别表示  $t$  时刻的输入，网络状态和输出； $V \in \mathbb{R}^{N \times D}$ ,  $R \in \mathbb{R}^{N \times N}$ ,  $W \in \mathbb{R}^{D \times N}$  分别表示输入权重、中间权重及输出权重矩阵， $\tanh(\cdot)$  为激活函数。

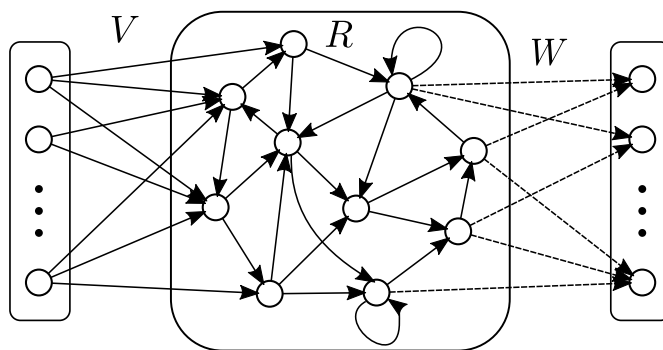


图 1: 回声状态网络

假设给定数据集  $\{\mathbf{u}(t), \mathbf{y}(t)\}_{t=1}^L$ , 其中  $\{\mathbf{u}(t)\}_{t=1}^L$  和  $\{\mathbf{y}(t)\}_{t=1}^L$  分别为输入序列及对应的输出序列, 则输入权重  $V$  和中间权重  $R$  的值是随机产生的 (比如从  $[0, 1]$  区间的均匀分布中随机采样得到), 而输出权重可以用  $t$  时刻网络的输出  $\mathbf{f}(t)$  来拟合  $t$  时刻的期望输出  $\mathbf{y}(t)$  并通过最小化它们之间的平方误差来计算得到。

提示: 多维情况下, 可以在得到网络状态以后对每一维进行单独拟合。

1. 如果对输出权重  $W \in \mathbb{R}^{D \times N}$  的每一行  $W_i$  进行 2 范数正则, 假设正则化系数为  $\lambda$ , 记网络状态矩阵  $X = [\mathbf{x}(1), \dots, \mathbf{x}(L)] \in \mathbb{R}^{N \times L}$ , 输出序列矩阵  $Y = [\mathbf{y}(1), \dots, \mathbf{y}(L)] \in \mathbb{R}^{D \times L}$ ,  $Y_i \in \mathbb{R}^L$  为  $Y$  的第  $i$  行, 请写出输出权重  $W$  的计算公式。(要有推导过程, 最后用  $X, Y, \lambda$  表示。)
2. 假设  $N = 500$ ,  $\lambda = 1 \times 10^{-8}$ , 将 MackeyGlass-t17 序列 (见 MackeyGlass-t17.txt) 的 1–3000 时刻和 2–3001 时刻的数据分别作为输入序列和输出序列来训练回声状态网络 (即用  $t$  时刻的数据来预测  $t+1$  时刻的数据), 利用得到的网络用 3001–4000 时刻的数据来预测 3002–4001 时刻的序列, 请写代码计算预测值与真实值之间的均方误差。(参考代码 `minimalESN.m`, 注意, *i*) 代码中考虑了输入节点到输出节点之间的连接权重, 并且使用了漏水节点  $\mathbf{x}(t) = (1 - a)\mathbf{x}(t-1) + a \tanh(R\mathbf{x}(t-1) + V\mathbf{u}(t))$ ; *ii*) 一般会在输入序列上加入一维为 1 的数值作为偏差 (见代码实现 `minimalESN.m`); *iii*) 可以使用参考代码中的网络结构, 也可以按题目中定义的网络结构自己实现代码。)
3. 考虑概率情况,  $\mathbf{y}(t) = \mathbf{f}(t) + \boldsymbol{\epsilon}$ , 其中  $\boldsymbol{\epsilon} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \beta^{-1}I)$ , 且  $W_i \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \alpha^{-1}I)$ 。证明最大化后验  $p(W_i | X, Y_i)$  得到的输出权重与第 1 问中最小二乘法得到的输出权重等价。
4. 确定性跳跃循环状态网络 (CRJ) 是回声状态网络的一个变种, 如图2所示。在 CRJ 中, 中间节点通过单

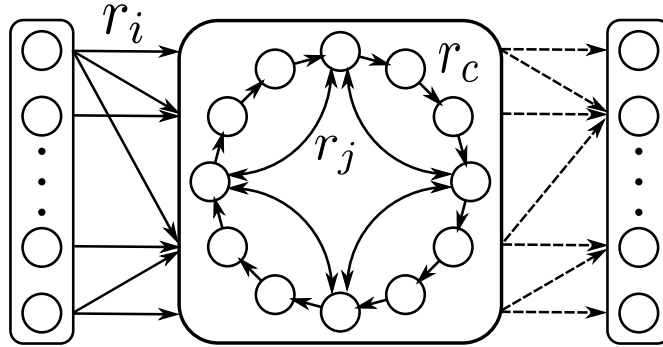


图 2: 确定性跳跃循环状态网络

向的循环边和双向的跳跃边连接, 所有的输入权重、循环权重、跳跃权重分别共享值  $r_i, r_c, r_j$ 。特别地, 输入权重的符号由某个无理数的小数展开  $d_0.d_1d_2d_3\cdots$  决定, 如果  $0 \leq d_n \leq 4$ , 则第  $n$  个输入连接的符号为  $-$ ; 反之, 如果  $5 \leq d_n \leq 9$ , 则第  $n$  个输入连接的符号为  $+$ 。

给定  $N = 500, r_i = 0.5, r_c = 0.8, r_j = 0.7$ , 跳跃步长  $l = 10$ , 输入连接的符号见文件 `signv.mat` 中变量  $y$ 。例如, 假设中间节点的个数为  $R_{no}$ , 输入节点的个数为  $V_{no}$ , 则输入连接的符号为  $y(1 : R_{no}, 1 : V_{no} + 1)$ , 这里  $V_{no} + 1$  是因为一般会在输入序列上加入一维全为 1 的数值作为偏差 (见代码实现 `minimalESN.m`)。请实现 CRJ 代码 (命名为 `minimalCRJ.m`), 并依据第 2 问的条件求均方误差。