题 1：在一个 10 类的模式识别问题中，有 3 类单独满足多类情况 1，其余的类别满足多类情况 2。问该模式识别问题所需判别函数的最少数目是多少？

答：将 10 类问题可看作 4 类满足多类情况 1 的问题，可将 3 类单独满足多类情况 1 的类找出来，剩下的 7 类全部划到 4 类中剩下的一个子类中。再在此子类中，运用多类情况 2 的判别法则进行分类，此时需要 7*（7-1）/2=21 个判别函数。故共需要 4+21=25 个判别函数。

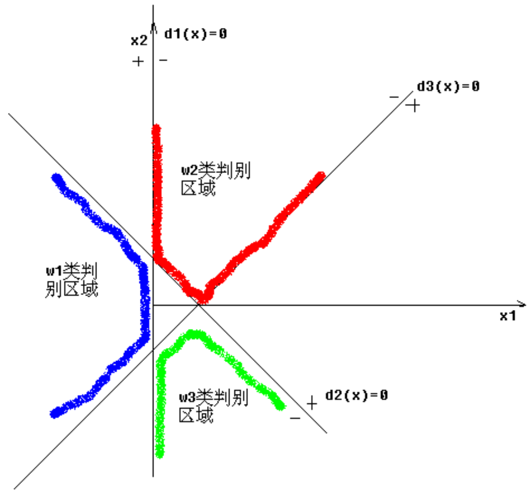
题 2：一个三类问题，其判别函数如下：

d1(x)=-x1, d2(x)=x1+x2-1, d3(x)=x1-x2-1

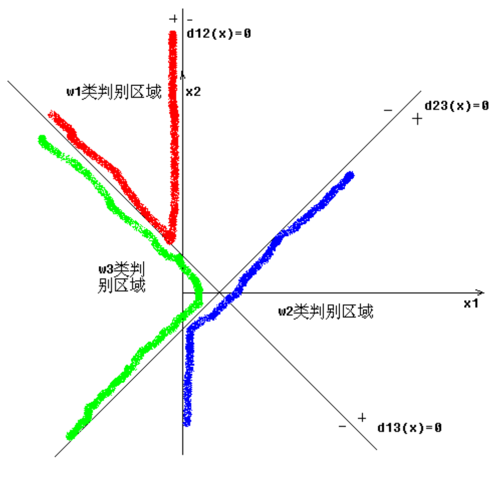
1. **设这些函数是在多类情况 1 条件下确定的，绘出其判别界面和每一个模式类别的区域。**
2. **设为多类情况 2，并使：d12(x)= d1(x), d13(x)= d2(x), d23(x)= d3(x)。绘出其判别界面和多类情况 2 的区域。**
3. **设 d1(x), d2(x)和 d3(x)是在多类情况 3 的条件下确定的，绘出其判别界面和每类的区域。**

答：三种情况分别如下图所示：

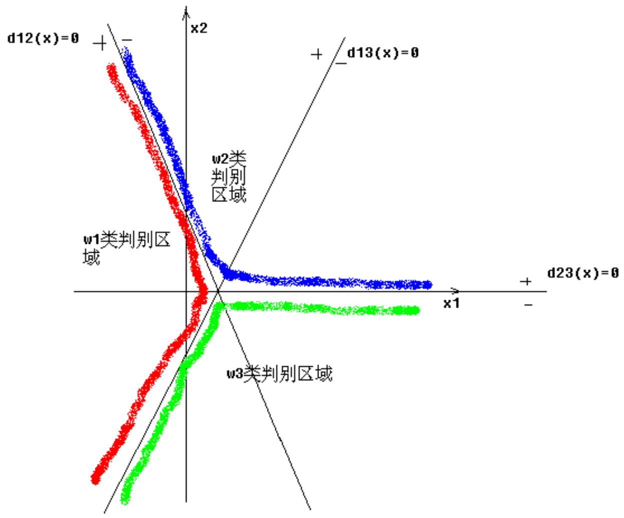
1.



2.



3.



题 3：两类模式，每类包括 5 个 3 维不同的模式，且良好分布。如果它们是线性可分的，问权向量至少需要几个系数分量？假如要建立二次的多项式判别函数，又至少需要几个系数分量？（设模式的良好分布不因模式变化而改变。）

答：（1）若是线性可分的，则权向量至少需要 $N = n+1 = 4$ 个系数分量；

（2）若要建立二次的多项式判别函数，则至少需要 $N = \dfrac{5!}{2!3!} = 10$ 个系数分量。

题 4：用感知器算法求下列模式分类的解向量 w:

ω1: {(0 0 0)T, (1 0 0)T, (1 0 1)T, (1 1 0)T}

ω2: {(0 0 1)T, (0 1 1)T, (0 1 0)T, (1 1 1)T}

解：将属于 w_2 的训练样本乘以 (-1)，并写成增广向量的形式

x1=[0 0 0 1]',x2=[1 0 0 1]',x3=[1 0 1 1]',x4=[1 1 0 1]';

x5=[0 0 -1 -1]',x6=[0 -1 -1 -1]',x7=[0 -1 0 -1]',x8=[-1 -1 -1 -1]';

迭代选取 $C=1$，$w(1)=(0,0,0,0)'$，则迭代过程中权向量 w 变化如下：

$w(2)=(0\ 0\ 0\ 1)'$ ；$w(3)=(0\ 0\ \text{-}1\ 0)'$ ；$w(4)=(0\ \text{-}1\ \text{-}1\ \text{-}1)'$ ；$w(5)=(0\ \text{-}1\ \text{-}1\ 0)'$ ；

$w(6)=(1\ \text{-}1\ \text{-}1\ 1)'$；$w(7)=(1\ \text{-}1\ \text{-}2\ 0)'$；$w(8)=(1\ \text{-}1\ \text{-}2\ 1)'$；$w(9)=(2\ \text{-}1\ \text{-}1\ 2)'$；

$w(10)=(2\ \text{-}1\ \text{-}2\ 1)'$；$w(11)=(2\ \text{-}2\ \text{-}2\ 0)'$；$w(12)=(2\ \text{-}2\ \text{-}2\ 1)'$；收敛

所以最终得到解向量 $w=(2\ \text{-}2\ \text{-}2\ 1)'$，相应的判别函数为 $d(x)=2x_1-2x_2-2x_3+1$。

题 5：用多类感知器算法求下列模式的判别函数：

ω1: (-1 -1)T，ω2: (0 0)T，ω3: (1 1)T

解：采用一般化的感知器算法，将模式样本写成增广形式，即

$$x_1=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix},x_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},x_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

取初始值 $w_1=w_2=w_3=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$，取 $C=1$，则有

第一次迭代：以 x_1 为训练样本，$d_1(1)=d_2(1)=d_3(1)=0$，故

$$w_1(2)=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix},w_2(2)=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix},w_3(2)=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

第二次迭代：以 x_2 为训练样本，$d_1(2)=1,d_2(2)=-1,d_3(2)=-1$，故

$$w_1(3)=\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix},w_2(3)=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},w_3(3)=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$$

第三次迭代：以 x_3 为训练样本，$d_1(3)=-2,d_2(3)=2,d_3(3)=0$，故

$$w_1(4)=\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix},w_2(4)=\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix},w_3(4)=\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$$

第四次迭代：以 x_1 为训练样本，$d_1(4)=2,d_2(4)=-1,d_3(4)=-5$，故

$$w_1(5)=w_1(4),w_2(5)=w_2(4),w_3(5)=w_3(4)$$

第五次迭代：以 x_2 为训练样本，$d_1(5)=0,d_2(5)=-1,d_3(5)=-1$，故

$$w_1(6)=\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix},w_2(6)=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},w_3(6)=\begin{pmatrix}2\\2\\-2\end{pmatrix}$$

第六次迭代：以 x_3 为训练样本，$d_1(6)=-3,d_2(6)=0,d_3(6)=2$，故

$$w_1(7)=w_1(6),w_2(7)=w_2(6),w_3(7)=w_3(6)$$

第七次迭代：以 x_1 为训练样本，$d_1(7)=1,d_2(7)=0,d_3(7)=-6$，故

$$w_1(8)=w_1(7),w_2(8)=w_2(7),w_3(8)=w_3(7)$$

第八次迭代：以 x_2 为训练样本，$d_1(8)=-1, d_2(8)=0, d_3(8)=-2$，故

$$w_1(9)=w_1(8), w_2(9)=w_2(8), w_3(9)=w_3(8)$$

由于第六、七、八次迭代中对 x_3, x_1, x_2 均以正确分类，故权向量的解为：

$$w_1=\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix}, w_2=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, w_3=\begin{pmatrix}2\\2\\-2\end{pmatrix}$$，可得三个判别函数为：

$$d_1=-x_1-x_2-1$$
$$d_2=0$$
$$d_3=2x_1+2x_2-2$$

题 6：　采用梯度法和准则函数 $J_{(w,x,b)}=\frac{1}{8\|x\|^2}\left[(w^t x-b)-\left|w^t x-b\right|\right]^2$，式中实数 b〉0，试导出两类模式的分类算法。

解：$\frac{\partial J}{\partial w}=\frac{1}{4\|x\|^2}[(w^t x-b)-|w^t x-b|]*[x-x*\operatorname{sgn}(w^t x-b)]$

其中：$\operatorname{sgn}(w^t x-b)=\begin{cases}1, w^t x-b>0\\-1, w^t x-b\le 0\end{cases}$

得迭代式：

$$w(k+1)=w(k)+\frac{C}{4\|x\|^2}[(w(k)^t x-b)-|w(k)^t x-b|]*[x-x*\operatorname{sgn}(w(k)^t x-b)]$$

$$w(k+1)=w(k)+C\begin{cases}0 & w^t x-b>0\\ \frac{(b-w^t x)}{\|x\|^2}x & w^t x-b\le 0\end{cases}$$

题 7：用 LMSE 算法求下列模式的解向量：

ω_1: {(0 0 0)^T, (1 0 0)^T, (1 0 1)^T, (1 1 0)^T}

ω_2: {(0 0 1)^T, (0 1 1)^T, (0 1 0)^T, (1 1 1)^T}

解：写出模式的增广矩阵 X：

$$X=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\0&0&-1&-1\\0&-1&-1&-1\\0&-1&0&-1\\-1&-1&-1&-1\end{pmatrix}$$

$$X^{\#}=(X^tX)^{-1}X^t=(\begin{pmatrix}0&1&1&1&0&0&0&-1\\0&0&0&1&0&-1&-1&-1\\0&0&1&0&-1&-1&0&-1\\1&1&1&1&-1&-1&-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\0&0&-1&-1\\0&-1&-1&-1\\0&-1&0&-1\\-1&-1&-1&-1\end{pmatrix})^{-1}\begin{pmatrix}0&1&1&1&0&0&0&-1\\0&0&0&1&0&-1&-1&-1\\0&0&1&0&-1&-1&0&-1\\1&1&1&1&-1&-1&-1&-1\end{pmatrix}$$

$$=(2\begin{pmatrix}2&1&1&2\\1&2&1&2\\1&1&2&2\\2&2&2&4\end{pmatrix})^{-1}\begin{pmatrix}0&1&1&1&0&0&0&-1\\0&0&0&1&0&-1&-1&-1\\0&0&1&0&-1&-1&0&-1\\1&1&1&1&-1&-1&-1&-1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}2&0&0&-1\\0&2&0&-1\\0&0&2&-1\\-1&-1&-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&1&1&0&0&0&-1\\0&0&0&1&0&-1&-1&-1\\0&0&1&0&-1&-1&0&-1\\1&1&1&1&-1&-1&-1&-1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-1&1&1&1&1&1&1&-1\\-1&-1&-1&1&1&-1&-1&-1\\-1&-1&1&-1&-1&-1&1&-1\\2&1&0&0&-1&0&-1&1\end{pmatrix}$$

取 $\mathbf{b}(1)=(1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1)^t$ 和 $C=1$

第一次迭代：

$$\mathbf{w}(1)=X^{\#}\mathbf{b}(1)=(1\quad -1\quad -1\quad 0.5)^t$$

$$\mathbf{e}(1)=X\mathbf{w}(1)-\mathbf{b}(1)=(-0.5\quad 0.5\quad -0.5\quad -0.5\quad -0.5\quad 0.5\quad -0.5\quad -0.5)^t$$

$$\mathbf{w}(2)=\mathbf{w}(1)+CX^{\#}\left|\mathbf{e}(1)\right|=(1.5\quad -1.5\quad -1.5\quad 0.75)^t$$

$$\mathbf{b}(2)=\mathbf{b}(1)+C[\mathbf{e}(1)+\left|\mathbf{e}(1)\right|]=(1\quad 2\quad 1\quad 1\quad 1\quad 2\quad 1\quad 1)^t$$

第二次迭代：

$$\mathbf{e}(2)=X\mathbf{w}(2)-\mathbf{b}(2)=(-0.25\quad 0.25\quad -0.25\quad -0.25\quad -0.25\quad 0.25\quad -0.25\quad -0.25)^t$$

$$\mathbf{w}(3)=\mathbf{w}(2)+CX^{\#}\left|\mathbf{e}(2)\right|=(1.75\quad -1.75\quad -1.75\quad 0.875)^t$$

$$\mathbf{b}(3)=\mathbf{b}(2)+C[\mathbf{e}(2)+\left|\mathbf{e}(2)\right|]=(1\quad 2.5\quad 1\quad 1\quad 1\quad 2.5\quad 1\quad 1)^t$$

第三次迭代：

$$\mathbf{e}(3)=X\mathbf{w}(3)-\mathbf{b}(3)=(-0.125\quad 0.125\quad -0.125\quad -0.125\quad -0.125\quad 0.125\quad -0.125\quad -0.125)^t$$

$$\mathbf{w}(4)=\mathbf{w}(3)+CX^{\#}\left|\mathbf{e}(3)\right|=(1.875\quad -1.875\quad -1.875\quad 0.9375)^t$$

$$\mathbf{b}(4)=\mathbf{b}(3)+C[\mathbf{e}(3)+\left|\mathbf{e}(3)\right|]=(1\quad 2.75\quad 1\quad 1\quad 1\quad 2.75\quad 1\quad 1)^t$$

第四次迭代：

$$\mathbf{e}(4)=X\mathbf{w}(4)-\mathbf{b}(4)=(-0.0625\quad 0.0625\quad -0.0625\quad -0.0625\quad -0.0625\quad 0.0625\quad -0.0625\quad -0.0625)^t$$

$$\mathbf{w}(5)=\mathbf{w}(4)+CX^{\#}\left|\mathbf{e}(4)\right|=(1.9375\quad -1.9375\quad -1.9375\quad 0.9688)^t$$

$$\mathbf{b}(5)=\mathbf{b}(4)+C[\mathbf{e}(4)+\left|\mathbf{e}(4)\right|]=(1\quad 2.875\quad 1\quad 1\quad 1\quad 2.875\quad 1\quad 1)^t$$

第五次迭代：

$$\mathbf{e}(5)=X\mathbf{w}(5)-\mathbf{b}(5)=(-0.0313\quad 0.0313\quad -0.0313\quad -0.0313\quad -0.0313\quad 0.0313\quad -0.0313\quad -0.0313)^t$$

$$\mathbf{w}(6)=\mathbf{w}(5)+CX^{\#}\left|\mathbf{e}(5)\right|=(1.9688\quad -1.9688\quad -1.9688\quad 0.9844)^t$$

$$\mathbf{b}(6)=\mathbf{b}(5)+C[\mathbf{e}(5)+\left|\mathbf{e}(5)\right|]=(1\quad 2.9375\quad 1\quad 1\quad 1\quad 2.9375\quad 1\quad 1)^t$$

第六次迭代：

$$\mathbf{e}(6)=X\mathbf{w}(6)-\mathbf{b}(6)=(-0.0156\quad 0.0156\quad -0.0156\quad -0.0156\quad -0.0156\quad 0.0156\quad -0.0156\quad -0.0156)^t$$

$$\mathbf{w}(7)=\mathbf{w}(6)+CX^{\#}\left|\mathbf{e}(6)\right|=(1.9844\quad -1.9844\quad -1.9844\quad 0.9922)^t$$

$$\mathbf{b}(7)=\mathbf{b}(6)+C[\mathbf{e}(6)+\left|\mathbf{e}(6)\right|]=(1\quad 2.9688\quad 1\quad 1\quad 1\quad 2.9688\quad 1\quad 1)^t$$

第七次迭代：

$$\mathbf{e}(7)=X\mathbf{w}(7)-\mathbf{b}(7)=(-0.0078\quad 0.0078\quad -0.0078\quad -0.0078\quad -0.0078\quad 0.0078\quad -0.0078\quad -0.0078)^t$$

$$\mathbf{w}(8)=\mathbf{w}(7)+CX^{\#}\left|\mathbf{e}(7)\right|=(1.9922\quad -1.9922\quad -1.9922\quad 0.9961)^t$$

$$\mathbf{b}(8)=\mathbf{b}(7)+C[\mathbf{e}(7)+\left|\mathbf{e}(7)\right|]=(1\quad 2.9844\quad 1\quad 1\quad 1\quad 2.9844\quad 1\quad 1)^t$$

第八次迭代：

$$\mathbf{e}(8)=X\mathbf{w}(8)-\mathbf{b}(8)=(-0.0039\quad 0.0039\quad -0.0039\quad -0.0039\quad -0.0039\quad 0.0039\quad -0.0039\quad -0.0039)^t$$

$$\mathbf{w}(9)=\mathbf{w}(8)+CX^{\#}|\mathbf{e}(8)|=(1.9961\quad -1.9961\quad -1.9961\quad 0.9980)^t$$

$$\mathbf{b}(9)=\mathbf{b}(8)+C[\mathbf{e}(8)+|\mathbf{e}(8)|]=(1\quad 2.9922\quad 1\quad 1\quad 1\quad 2.9922\quad 1\quad 1)^t$$

第九次迭代：

$$\mathbf{e}(9)=X\mathbf{w}(9)-\mathbf{b}(9)=(-0.0020\quad 0.0020\quad -0.0020\quad -0.0020\quad -0.0020\quad 0.0020\quad -0.0020\quad -0.0020)^t$$

$$\mathbf{w}(10)=\mathbf{w}(9)+CX^{\#}|\mathbf{e}(9)|=(1.9980\quad -1.9980\quad -1.9980\quad 0.9990)^t$$

$$\mathbf{b}(10)=\mathbf{b}(9)+C[\mathbf{e}(9)+|\mathbf{e}(9)|]=(1\quad 2.9961\quad 1\quad 1\quad 1\quad 2.9961\quad 1\quad 1)^t$$

第十次迭代：

$$\mathbf{e}(10)=X\mathbf{w}(10)-\mathbf{b}(10)=1.0\times10^{-3}\times(-0.9766\quad 0.9766\quad -0.9766\quad -0.98\quad -0.98\quad 0.98\quad -0.98\quad -0.98)^t$$

$$\mathbf{w}(11)=\mathbf{w}(10)+CX^{\#}|\mathbf{e}(10)|=(1.9990\quad -1.9990\quad -1.9990\quad 0.9995)^t$$

$$\mathbf{b}(11)=\mathbf{b}(10)+C[\mathbf{e}(10)+|\mathbf{e}(10)|]=(1\quad 2.9980\quad 1\quad 1\quad 1\quad 2.9980\quad 1\quad 1)^t$$

由于$e<1.0\times10^{-3}$，可以认为此时权系数调整完毕，最终的权系数为：

$$\mathbf{w}\approx(2\quad -2\quad -2\quad 1)^t$$

相应的判别函数为：

$$d(\mathbf{x})=2x_1-2x_2-2x_3+1$$

题 8：用二次埃尔米特多项式的势函数算法求解以下模式的分类问题

ω_1: {(0 1)^T, (0 -1)^T}　　　ω_2: {(1 0)^T, (-1 0)^T}

$$\varphi_1(x)=\varphi_1(x_1,x_2)=H_0(x_1)H_0(x_2)=1$$
$$\varphi_2(x)=\varphi_2(x_1,x_2)=H_0(x_1)H_1(x_2)=2x_2$$
$$\varphi_3(x)=\varphi_3(x_1,x_2)=H_0(x_1)H_2(x_2)=4x_2^2-2$$
$$\varphi_4(x)=\varphi_4(x_1,x_2)=H_1(x_1)H_0(x_2)=2x_1$$
$$\varphi_5(x)=\varphi_5(x_1,x_2)=H_1(x_1)H_1(x_2)=4x_1x_2$$
$$\varphi_6(x)=\varphi_6(x_1,x_2)=H_1(x_1)H_2(x_2)=2x_1(4x_2^2-2)$$
$$\varphi_7(x)=\varphi_7(x_1,x_2)=H_2(x_1)H_0(x_2)=4x_1^2-2$$
$$\varphi_8(x)=\varphi_8(x_1,x_2)=H_2(x_1)H_1(x_2)=2x_2(4x_1^2-2)$$
$$\varphi_9(x)=\varphi_9(x_1,x_2)=H_2(x_1)H_2(x_2)=(4x_1^2-2)(4x_2^2-2)$$

所以，势函数$K(x,x_k)=\sum_{i=1}^{9}\varphi_i(x)\varphi_i(x_k)$

第一步：取 $X_1=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\in w_1$，故 $K_1(X)=-15+20x_2+40x_2^2+24x_1^2-32x_1^2x_2-64x_1^2x_2^2$

第二步：取 $X_2=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}\in w_1$， $K_1(X_2)=5>0$，故 $K_2(X)=K_1(X)$

第三步：取 $X_3=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\in w_2$， $K_2(X_3)=9>0$，故

$$K_3(X)=K_2(X)-K(X,X_3)=20x_2+16x_2^2-20x_1-16x_1^2$$

第四步：取 $X_4=\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}\in w_2$， $K_3(X_4)=4>0$，故

$$K_4(X)=K_3(X)-K(X,X_4)=15+20x_2-56x_1^2-8x_2^2-32x_1^2x_2+64x_1^2x_2^2$$

第五步：取 $X_5=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\in w_1$， $K_4(X_5)=27>0$，故 $K_5(X)=K_4(X)$

第六步：取 $X_6=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}\in w_1$， $K_5(X_6)=-13<0$，故

$$K_6(X)=K_5(X)+K(X,X_6)=-32x_1^2+32x_2^2$$

第七步：取 $X_7=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\in w_2$， $K_6(X_7)=-32<0$，故

$$K_7(X)=K_6(X)$$

第八步：取 $X_8=\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}\in w_2$， $K_7(X_8)=-32<0$，故

$$K_8(X)=K_7(X)$$

第九步：取 $X_9=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\in w_1$， $K_8(X_9)=32>0$，故

$$K_9(X)=K_8(X)$$

第十步：取 $X_{10}=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}\in w_1$， $K_9(X_{10})=32>0$，故

$$K_{10}(X)=K_9(X)$$

从第七步到第十步的迭代过程中，全部模式都已正确分类，故算法已经收敛于判别函数：

$d(X)=K_{10}(X)=-32x_1^2+32x_2^2$

题 9：用下列势函数

$$K(X,X_k)=e^{-\alpha\|X-X_k\|^2}$$

求解以下模式的分类问题

ω 1: {(0 1)T, (0 -1)T}

ω 2: {(1 0)T, (-1 0)T}

选取 $\alpha=1$，在二维情况下，势函数为

$K(X,X_k)=\exp\{-\|X-X_k\|^2\}=\exp\{-[(x_1-x_{k_1})^2+(x_2-x_{k_2})^2]\}$

以下为势函数迭代算法：

第一步：取 $X_1=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\in w_1$， 故 $K_1(X)=\exp\{-x_1^2-(x_2-1)^2\}$

第二步：取 $X_2=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}\in w_1$， $K_1(X_2)=\exp\{-4\}>0$， 故 $K_2(X)=K_1(X)$

第三步：取 $X_3=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\in w_2$， $K_2(X_3)=\exp\{-1\}>0$， 故

$$K_3(X)=K_2(X)-K(X,X_3)=\exp\{-x_1^2-(x_2-1)^2\}-\exp\{-(x_1-1)^2-x_2^2\}$$

第四步：取 $X_4=\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}\in w_2$， $K_3(X_4)=\exp\{-2\}-\exp\{-4\}>0$， 故

$$K_4(X)=K_3(X)-K(X,X_4)=\exp\{-x_1^2-(x_2-1)^2\}-\exp\{-(x_1-1)^2-x_2^2\}-\exp\{-(x_1+1)^2-x_2^2\}$$

第五步：取 $X_5=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\in w_1$， $K_4(X_5)=1-\exp\{-2\}-\exp\{-2\}>0$， 故 $K_5(X)=K_4(X)$

第六步：取 $X_6=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}\in w_1$， $K_5(X_6)=\exp\{-4\}-\exp\{-2\}-\exp\{-2\}<0$， 故

$$K_6(X)=K_5(X)+K(X,X_6)=\exp\{-x_1^2-(x_2+1)^2\}+\exp\{-x_1^2-(x_2-1)^2\}-\\ \exp\{-(x_1-1)^2-x_2^2\}-\exp\{-(x_1+1)^2-x_2^2\}$$

第七步：取 $X_7=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\in w_2$， $K_6(X_7)=\exp\{-2\}+\exp\{-2\}-1-\exp\{-4\}<0$， 故

$$K_7(X)=K_6(X)$$

第八步：取 $X_8 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in w_2$， $K_7(X_8) = \exp\{-2\} + \exp\{-2\} - \exp\{-4\} - 1 < 0$，故

$$K_8(X) = K_7(X)$$

第九步：取 $X_9 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in w_1$， $K_8(X_9) = \exp\{-4\} + 1 - \exp\{-2\} - \exp\{-2\} > 0$，故

$$K_9(X) = K_8(X)$$

第十步：取 $X_{10} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in w_1$， $K_9(X_{10}) = 1 + \exp\{-4\} - \exp\{-2\} - \exp\{-2\} > 0$，故

$$K_{10}(X) = K_9(X)$$

从第七步到第十步的迭代过程中，全部模式都已正确分类，故算法已经收敛于判别函数：

$$\begin{aligned} d(X) = K_{10}(X) &= \exp\{-x_1^2 - (x_2+1)^2\} + \exp\{-x_1^2 - (x_2-1)^2\} \\ &\quad - \exp\{-(x_1-1)^2 - x_2^2\} - \exp\{-(x_1+1)^2 - x_2^2\} \end{aligned}$$