BI-VAK - úkol 9

Patrik Drbal

July 1, 2022

Zadání 1 - Maximální řez

Vstup

Graf G.

Výstup

Rozdělení vrcholů na množiny A a B takové, že počet hran mezi A a B je maximalizován.

Řešení

Za každý vrchol $v_i \in V(G)$ zvolíme logickou proměnnou x_i.
Hodnota proměnné x_i bude indikovat, jestli vrchol patří do komponenty A (1), nebo do komponenty B (0).

Za každou hranu $e = \{u, v\} \in E(G)$ zvolíme logickou proměnnou $y_{u,v}$.
Hodnota proměnné $y_{u,v}$ bude indikovat, jestli hrana patří (1) do maximálního řezu, nebo nepatří (0).
Počet proměnných $y_{u,v}$ nastavených na 1 chceme maximalizovat.

Nejdříve potřebujeme pro každou dvojici vrcholů x_i, x_j zajistit, aby ve výsledném řezu nebyla hrana $y_{i,j}$, pokud jsou oba ve stejné komponentě (mají stejnou hodnotu).

Máme tedy

$$(x_i \wedge x_j) \implies \neg y_{i,j}$$

pro x_i a x_j v komponentě 1.
A

$$(\neg x_i \wedge \neg x_j) \implies \neg y_{i,j}$$

pro x_i a x_j v komponentě 0

Dohromady dostáváme výraz

$$(x_i \wedge x_j) \vee (\neg x_i \wedge \neg x_j) \implies \neg y_{i,j}$$

Zároveň chceme zajistit, že pokud hrana $y_{i,j}$ není vybrána do maximálního řezu, vrcholy x_i a x_j jsou ve stejných komponentách. Čili spolu s předchozím dostáváme následující ekvivalenci

$$(x_i \wedge x_j) \vee (\neg x_i \wedge \neg x_j) \iff \neg y_{i,j}$$

Nebo logicky ekvivalentně

$$\boxed{y_{i,j} \iff (x_i \wedge \neg x_j) \vee (\neg x_i \wedge x_j)}$$

Pro použití v SAT řešiči musíme formuli převést do CNF.

Přepisem formule podle pravidla

$$(a \iff b) \vdash ((a \implies b) \wedge (b \implies a)) \vdash ((a \vee \neg b) \wedge (\neg a \vee b))$$

dostáváme

$$(y_{i,j} \vee \neg((x_i \wedge \neg x_j) \vee (\neg x_i \wedge x_j))) \wedge (\neg y_{i,j} \vee (x_i \wedge \neg x_j) \vee (\neg x_i \wedge x_j))$$

Což lze dalšími logicky ekvivalentními úpravami zjednodušit na

$$\boxed{(y_{i,j} \vee \neg x_i \vee x_j) \wedge (y_{i,j} \vee x_i \vee \neg x_j) \wedge (\neg y_{i,j} \vee x_i \vee x_j) \wedge (\neg y_{i,j} \vee \neg x_i \vee \neg x_j)}$$

A to už je formule v konjunktivním normálním tvaru.

Dále je zřejmé, že každý vrchol připojený nějakými hranami, musí alespoň jednu z těchto hran využít v maximálním řezu.

To lze dokázat rozborem případů. Předpokládáme, že žádná hrana incidentní s daným vrcholem není součástí maximálního řezu (její logická proměnná má hodnotu 0).

1) Vrchol je BÚNO v komponentě 1 a všechny jeho hrany vedou do komponenty 0.

Tato situace nikdy nenastane, protože je již zakázána pravidlem, že pokud hrana spojuje vrcholy z různých komponent, musí být součástí maximálního řezu.

I kdyby ale nastala, můžeme všechny incidentní hrany vybrat do maximálního řezu.

2) Vrchol je BÚNO v komponentě 1 a všechny jeho hrany vedou do komponenty 1.

V této situaci můžeme vrchol přesunout do komponenty 0 a tím problém převést na předchozí možnost.

3) Vrchol je BÚNO v komponentě 1 a některé jeho hrany vedou do komponenty 1, zatímco ostatní jeho hrany vedou do komponenty 0.

Všechny hrany vedoucí do komponenty 0 lze prohlásit za hrany maximálního řezu.

Tedy pro každý vrchol x_i existuje alespoň jedna hrana $y_{i,j}$, která je součástí maximálního řezu (má hodnotu 1).

Toto chování lze vynutit klauzulemi

$$\boxed{y_{i,j_1} \vee y_{i,j_2} \vee \ldots \vee y_{i,j_n}}$$

pro každý vrchol x_i

Protože chceme získat explicitní ohodnocení pro všechny proměnné x_i, přidáme SAT řešiči následující podmínku pro každou z těchto proměnných. Tím ho přinutíme vybrat si jednu z hodnot.

$$\boxed{x_i \vee \neg x_i}$$

V této fázi již máme pomocí formulí v CNF formě definované všechny podmínky pro to, aby nám SAT řešič našel některý z řezů na zadaném grafu G.

Abychom našli ten maximální, použijeme postup uvedený v přednášce a budeme si počítat TRUE proměnné.

Konkrétně budeme počítat počet proměnných $y_{i,j}$ ohodnocených jako 1, čili vytvoříme pomyslnou tabulku nových proměnných $s_{k,l}$, kde $k, l \in \{1, 2, ..., |E(G)|\}$ podle přednášky. Hrany grafu G si můžeme nejdříve seřadit a očíslovat, abychom mohli tabulku využít stejně jako na přednášce.

Dle tohoto principu dokážeme vynutit, aby se počet hran hledaného řezu rovnal konstantě K a pomocí binárního půlení pomocí $O(\log |E(G)|)$ volání SAT řešiče najít i hledaný maximální řez. ■