

BI-VAK - úkol 1

Patrik Drbal

February 18, 2022

Zadání 8

Matematickou indukcí dokažte, že pro každé $n > 1$ platí následující rovnost.

$$\sum_{i=1}^n i(i+1)(i+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

Základní krok pro $n = 2$:

$$\sum_{i=1}^2 i(i+1)(i+2) = 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 = 30$$

$$\frac{2(2+1)(2+2)(2+3)}{4} = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$$

Pro $n = 2$ rovnost platí.

Indukční krok pro $n \geq 2$:

$$\sum_{i=1}^n i(i+1)(i+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n+1} i(i+1)(i+2) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{4}$$

Upravíme sumu

$$\sum_{i=1}^{n+1} i(i+1)(i+2) = (n+1)(n+2)(n+3) + \sum_{i=1}^n i(i+1)(i+2)$$

Z indukčního předpokladu je tento výraz roven výrazu

$$(n+1)(n+2)(n+3) + \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

Převédeme na společný jmenovatel

$$\frac{n(n+1)(n+2)(n+3) + 4(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

A vytkneme $(n+1)(n+2)(n+3)$ a díky komutativitě násobení přesuneme doleva

$$\frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{4}$$

Postupnými ekvivalentními úpravami sumy na levé straně jsme získali výraz na pravé straně, čili indukční krok platí pro všechna $n \geq 2$.

Rovnost, kterou jsme měli dokázat, je tedy korektní. ■

Bonusové zadání

$$\frac{m}{n} - \frac{1}{\lceil \frac{n}{m} \rceil}$$

Převédeme na společný jmenovatel

$$\frac{m \cdot \lceil \frac{n}{m} \rceil - n}{n \cdot \lceil \frac{n}{m} \rceil}$$

Výraz $m \cdot \lceil \frac{n}{m} \rceil$ je nanejvýš $n + m$, protože $\lceil \frac{n}{m} \rceil = \frac{k}{m}$, kde $k \geq n$ je nejbližší takové, že $m \mid k$. Čili $m \cdot \frac{k}{m} = k$, kde k je nanejvýš $n + m$.

Tedy výraz výše je roven výrazu

$$\frac{n + m - n}{n \cdot \lceil \frac{n}{m} \rceil} = \frac{m}{n \cdot \lceil \frac{n}{m} \rceil}$$

A protože $\lceil \frac{n}{m} \rceil \geq 2$ (plyne z předpokladu $1 \leq m < n$), platí

$$\frac{m}{n \cdot \lceil \frac{n}{m} \rceil} < \frac{m}{n}$$

Tedy po každé iteraci algoritmu se hodnota výrazu zmenší, a protože pracujeme pouze s kladnými celočíselnými čitateli a jmenovateli a každá iterace trvá konečný počet kroků, po konečném počtu iterací, které budou trvat konečný čas, se hodnota výrazu zmenší na nulu a v tomto okamžiku se algoritmus zastaví. ■