数学基础课程-同等学力计算机综合真题及答案
（2004-2006、2007-2014、2017）

2004 年数学

第一部分 数学基础课程
（共 40 分）

一、形式化下列语句（共 3 分，第 1 题 1 分，第 2 题 2 分）

1．有些人勤奋，但并非所有人都勤奋。

答：设 M(x): x 是人； R(x): x 勤奋； N(x, y)：x 与 y 不相同，则原语句可表示为：

$\exists x\exists y\,(N(x,y)\wedge M(x)\wedge M(y)\wedge R(x)\ \wedge\neg R(y))$

2．不管白猫黑猫，抓住老鼠就是好猫。

答：设 G(x): x 是猫；Y(x): x 是白猫；H(x): x 是黑猫；M(x): x 能抓老鼠；N(x): x 是好猫；则原语句可表示为：

$\forall x\,(G(x)\wedge(Y(x)\vee H(x))\wedge M(x)\ \to N(x))$

二、填空（共 3 分，每空 1 分）

1、设 A={a, b, c}，B={1, 2, 3, 4}，从 A 到 B 不同的二元关系共有（ 2^{12} ）个。

答：|A|=3 , |B|=4 ,因此二元关系共有$2^{|A|\times|B|}=4^3$个。

2、设 A={a, b, c}，B={1, 2, 3, 4}，从 A 到 B 不同的函数共有（ 4^3 ）个。

答：|A|=3 , |B|=4 ,因此共有$|B|^{|A|}=4^3$个。

3、设集合 A 的基数|A|为 n，在 A 上有（ 2^{n^2-n} ）个不同的自反关系。

答：设集合 A 的基数|A|为 n，在 A 上有$\underline{\ \ 2^{n^2-n}\ \ }$个不同的自反关系，有$\underline{\ 2^{\frac{n(n+1)}{2}}\ \ }$ 个不同的对称关系。

解析：A 上的关系可以用一个 n×n 的关系矩阵表示，自反关系只要求对角线上的元素为 1，其他位置上的元素任意，可以 0 或 1，因此 A 上的自反关系个数为$\underline{2^{n^2-n}}$种。A 上的对称关系个数为$\underline{2^{\frac{n^2+n}{2}}}$种。

三、证明（共 6 分，每题 3 分）

1、下列等值式是否正确，如正确请证明，如错误请举出反例。

$$(\exists x)\big(P(x)\to Q(x)\big)=(\forall x)P(x)\to(\exists x)Q(x)$$

2、用等势定义证明(1, 2]≈(a, b]，（a, b∈R, a<b, R 为实数集）。

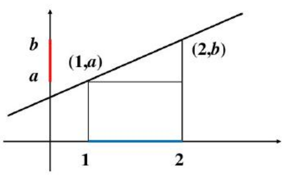
T 答：y=kx+l 过点（1，a）（2，b）

$$\begin{cases} x=1\,,y=a & 则\ a=k+l \\ X=2\,,y=b & 则\ b=2k+l \end{cases}$$

得 k=b-a l=a-k=2a-b

∴y=(b−a)x+2a−b

原答：



令f : (1,2]→(a,b], $f(x)=(b-a)x-b+2a$

f为从 (1,2] 到 (a,b] 的双射函数，因此 (1,2]≈(a,b].

四、（6 分）设 H 是群 G 的正规子群，且$[G:H]$=m，则对任意 $x\in G$，均有 $x^m\in G$。

证：结论应该改为 $x^m\in H$.

考虑商群 G/H, 对于任意 $x\in G$，$Hx\in G/H$.

由于$[G:H]=m$, 即 $|G/H|=m$,

且 G/H 的单位元是H, 因此 $(Hx)^m=H$.

于是得到 $Hx^m=H$.

根据陪集相等的充要条件有 $x^m\in H$.

五、（6 分）证明 5 个顶点的完全图K_5是不可平面的。

六、（6 分）求字母集{a,b,c,d}上含偶数个 a 的 K 元字的个数（用生成函数方法）。

解：设这种字的个数为 h_k，那么 $\{h_k\}$ 的指数生成函数为：

$$G_e(x)=(e^x)^3\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\frac{1}{2}e^{4x}+\frac{1}{2}e^{2x}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}4^k x^k+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}2^k x^k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\frac{4^k+2^k}{2}x^k$$

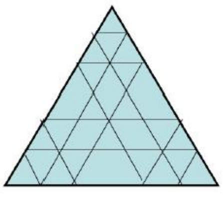
$$h_k=\frac{4^k+2^k}{2}$$

七、（5 分）证明边长为 1 的正三角形内任取 n^2+1个点，必有两点的距离不超过 $\frac{1}{n}$。

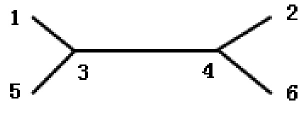
证：如图，将每条边划分成n等份，用$n-1$条平行于边的直线将每两条边的分点连接起来。这样所有的$3n-3$条直线将原来的三角形恰好划分成

$1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$

个边长为$1/n$的小等边三角形。在大三角形内任取n^2+1个点，根据鸽巢原理，必有2个点取自同一个三角形。这两个点的距离不超过 $1/n$.



八、（5 分）如下图是一个用钢丝折成的六点对称图，现在要将这 6 个点分别染上红色或兰色问有多少种染色法？



解：考虑作用于顶点的置换群G，G中置换如下：

σ_1= (1) (2) (3) (4) (5) (6)

σ_2= (1 5) (2 6) (3) (4)

σ_3= (1 2) (5 6) (3 4)

σ_4= (1 6) (2 5) (3 4)

根据 Polya 定理，染色方案数为：

$$M=\frac{1}{4}(2^6+2^4+2^3+2^3)=24$$

2005 年数学

第一部分 数学基础课程

（共 40 分）

一、形式化下列语句（共 3 分）

1.（1 分）有且有一个太阳

S 答：全域：全部天体　P(x)表示 x 为太阳；　Q(x,y) 表示 x 与 y 相等，则：$\exists x\forall y(P(x) \wedge (P(y)\rightarrow Q(x,y)))$

原答：　P∧q，　其中，p：有太阳，q：有一个太阳

2.（2 分）任意两个相异实数 x,y 之间必可找到另一个实数 z.

・**S 答：**全域：全体实数　R(x):　x 为实数　则原句可形式化为：

$\forall x\forall y(R(x) \wedge R(y) \wedge x \neq y \rightarrow \exists z(R(z) \wedge (x<z<y \vee y<z<x))$

或设 R(x):　x 为实数　N(x,y): $x \neq y$　G(x,z,y): x<z<y　则原句可形式化为：

$\forall x\forall y(R(x) \wedge R(y) \wedge N(x,y) \rightarrow \exists z(R(z) \wedge (G(x,z,y) \vee G(y<z<x)))$

原答：R(x):x 是实数　E(z,y):x=y　L(x,y):x>y

$\forall x\forall y(R(x) \wedge R(y) \wedge \neg E(x,y)) \rightarrow \exists z((R(z) \wedge L(x,z) \wedge L(z,y)) \vee (R(z) \wedge L(y,z) \wedge L(z,x)))$

二、填空题（共 9 分）

1、（2 分）设 A=[1，2，3，4]，则在 A 上的二元关系共有 __2^{16}__ 个；其中有 __15__ 个是等价关系。

答：2^{16}　；　15

1）集合 A 元素个数|A|=4，所以 A 上二元关系的个数为$2^{4\times4}$=2^{16} =65536 个。

2）因为等价关系与集合划分一一对应，所以找出集合 A 的所有划分，每一个划分对应一个等价关系，共 15 个

划分的子集对应于等价关系的等价集

划分成一个等价集(1 个等价关系):{1,2,3,4}

划分成两个等价集(7 个等价关系):{1,2,3},{4} {1,2,4},{3} /{1,3,4},{2} /{2,3,4},{1} /{1,2},{3,4} /{1,3},{2,4} /{1,4},{2,3}

划分成三个等价集(6 个等价关系):{1,2},{3},{4} /{1,3},{2},{4}/{1,4},{2},{3}/{1},{2,3},{4}/{1},{2,4},{3} /{1},{2},{3,4}

划分成四个等价集(1 个等价关系):{1},{2},{3},{4}

（注：等价关系：设 R 是非空集合 A 上的二元关系，若 R 是自反的、对称的、传递的，则称 R 是 A 上的等价关系。）

2、（1 分）设｜A｜=n (即集合 A 的基数为 n), 则在 A 上有 __$2^{\frac{n(n+1)}{2}}$__ 个不同的对称关系。

答：设集合 A 的基数|A|为 n，在 A 上有 __2^{n^2-n}__ 个不同的自反关系，有 __$2^{\frac{n(n+1)}{2}}$__ 个不同的对称关系。

解析：A 上的关系可以用一个 n×n 的关系矩阵表示，自反关系只要求对角线上的元素为 1，其他位置上的元素任意，可以 0 或 1，因此 A 上的自反关系个数为 __2^{n^2-n}__ 种。A 上的对称关系个数为 __$2^{\frac{n^2+n}{2}}$__ 种。

3、（2 分）$(a+b+c)^4$ 的展开式经过合并同类项后有 __C(6,4)=15__ 项。

原答：共 $C_6^4=15$ 项　　（ $x_1+x_2+x_3$=4 的非负整数解 ）

S 答：三项式可以将其中两项合成整体，用二项式定理来处理：$(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b^1+\cdots+C_n^ka^{n-k}b^k+\cdots+C_n^nb^n$

$((a+b)+c)^4=C_4^0(a+b)^4+C_4^1(a+b)^3c^1+C_4^1(a+b)^2c^2+C_4^3c^3+C_4^4c^4$

$(a+b)^4$ 共 5 项

$(a+b)^3=C_3^0a^3+C_3^1a^2b^1+C_3^2a^1b^2+C_3^3b^3$ 共 4 项

$(a+b)^2$ 共 3 项

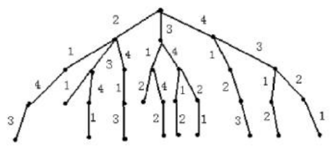
$(a+b)^1$ 共 2 项

共 5+4+3+2+1=15 项

4、（2 分）标有 1、2、3、4 的四张数字卡片，要求数 1 不排在千位上，数 2 不排在百位上，数 3 不排在十位上，数 4 不排在个位上，那么用这四张卡片组成的满足要求的四位数共__$D_4=9$__个。

答：考完全错排 $D_4=4!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}\right)=24\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{24}\right)=9$

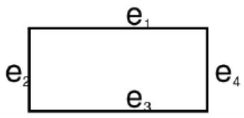
树形图——枚举法



第4题的树形图

解：2143, 2341, 2413, 3142, 3412, 3421, 4123, 4312, 4321

5、（2 分）以三种不同的颜色来给某房间的四个墙壁着色， 房间的地面为长方形（如下图所示）， 每个墙壁只着一种颜色，任何相邻的两个墙壁的颜色都不同，共有 __18__ 种着色方案。



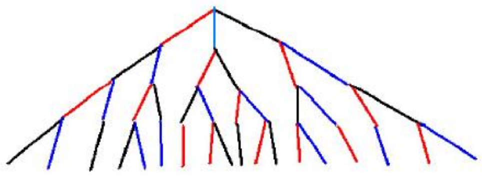
答：利用容斥原理

$\bar{A}$：表 e1 和 e2 同色，$\bar{B}$：表 e2 和 e3 同色， $\bar{C}$：表 e3 和 e4 同色， $\bar{D}$：表 e4 和 e2 同色，

$|\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C}\cap\bar{D}|=|S|-|A\cup B\cup C\cup D|=|S|-|A|-|B|-|C|-|D|+|A\cap B|+|A\cap C|+|A\cap D|+|B\cap C|+|B\cap D|+|C\cap D|-|A\cap B\cap C|-|A\cap B\cap D|-|A\cap C\cap D|-|B\cap C\cap D|+|A\cap B\cap C\cap D|$

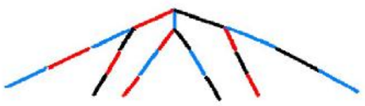
$=3^4-4\times 3^3+6\times 3^2-4\times 3+3=81-108+54-12+3=18$

若不允许用 2 种颜色，要减去 6 种方案。



第5题的树形图，18个解

如果不允许使用2种颜色，还需要减去以下6种.



三、问答题（6 分）

有r 个正方形排成一行，今用红、黄、白、蓝四种颜色给这个r 个正方形染色，每个正方形只能染一种颜色，如果要求染红、黄、白色的正方形分别至少出现一个，问有多少种不同的染法？

答：考指数型母函数

$$G_e(x)=\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\frac{x^n}{n!}\right)\left(\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\frac{x^n}{n!}\right)^3$$

$$=e^x(e^x-1)^3=e^{4x}-3e^{3x}+3e^{2x}-e^x$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}4^kx^k-3\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}3^kx^k+3\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}2^kx^k-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}x^k$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(4^k-3^{k+1}+3\cdot 2^k-1)x^k$$

方案数 $a_r=4^r-3^{r+1}+3\cdot 2^r-1$

四、证明（共 22 分）

1、（3 分）下列等值式是否正确，如正确请证明，如错误请举出反例。

(∀x)(∀y)(P(x) ∧ Q(y) → S(x, y)) = ¬(∃x)(∃y)(P(x) ∧ Q(y) ∧ ¬S(x, y))

解：正确，推理如下

(∀x) (∀y) (P(x)∧P(y) →Q(x,y))

=((∃x) (∃y) (P(x)∧P(y))) →Q(x,y))　　　　量词辖域收缩等值式

=¬((∃x) (∃y) (P(x) ∧ P(y))) ∨ Q(x, y))　　蕴含等值式

=¬((∃x) (∃y) (P(x) ∧ P(y))) ∨ ¬¬Q(x, y))

=¬((∃x) (∃y) (P(x) ∧ P(y))) ∧ ¬Q(x, y))　德摩根等值式

（注：同 2011 年四-1）

2、（3 分）设 f: R×R→R， f(x,y)=x+y;

g: R×R→R, g (x,y)=x×y

证明：(1) f 是满射的，但不是单射的。

(2) g 是满射的，但不是单射的。

证 1：

(1)对于任意的 b∈R，存在<0,b>∈R×R，满足 f(0,b)=0+b=b 因此 f 是满射的。但由于 f(0,1)= f(1,0)=1，因此 f 不是单射的。

(2)对于任意的 b∈R，存在<1,b>∈R×R，满足 g(1,b)=1×b=b 因此 g 是满射的。但由于 g(0,1)=g(1,0)=0，因此 f 不是单射的。

证 2：（1）因为对于任意 B∈R，皆存在<x,y>∈R×R，使得 f<x,y>=x+y=B 成立，根据概念，f 是满射的。

但从 x+y=B 中，并不能确定唯一对应的<x,y>，故 f 不是单射的。

（2）因为对于任意 B∈R，皆存在<x,y>∈R×R，使得 f<x,y>=x×y=B 成立，根据概念，f 是满射的。

但从 x×y=B 中，并不能确定唯一对应的<x,y>，故 f 不是单射的。

3、（4 分）设 G 是一个有 n 个结点 m 条边的连通简单平面图，若 n≥3, 则 m≤3n－6.

证明：设 G 有 k(k≥1)个连通分支,若 G 为树或森林,则 m=n-k≤3n-6(n≥3)，若 G 不是树也不是森林，则 G 中必含圈，又因为 G 是简单图,所以各圈的长度均大于或等于 3，因各面次数至少为 l (l≥3),又$\frac{l}{l-2} = 1 + \frac{2}{l-2}$在 l =3 时达到最大值.

4、（4 分）证明：任何连通简单平面图至少有一个结点的度数不超过 5。

证 1：假设每个结点度数都大于 6，则$\sum^r d(v_i) >= 6n$，由握手定理可知：$2m = \sum^r d(v_i) >= 6n$。

因而 m≥3n，G 是简单平面图 m≤3n－6 即 m+6≤3n，与上题结论矛盾，问题得证。

证 2：若 G 的阶数 n≤6，结论显然成立，n≥7,若最小度 δ ≥6，由握手定理可知：$2m = \sum^r d(v_i) >= 6n$。

因而 m≥3n，与上题结论矛盾，问题得证。

5、（8 分）给定群< G,o>，且 a∈G,定义映射 f (x) = a o x o a^{-1}，x∈G. 证明：f 是< G, o>到其自身的同构映射。

证 1： 显然有 f:G→G，下面证明 f 的满射性与单射性。

对任意 y∈G，存在 a^{-1}oyoa 属于 G，使得 f(a^{-1}oyoa) =ao(a^{-1}oyoa) o a^{-1} = y ，因此 f 是满射的。

假设 f(x)=f(y)，那么有 a^{-1}oxoa = a^{-1}oyoa，根据群的消去律，必有 x=y。因此 f 是单射的。

最后验证 f 为同态映射。对于任意 x,y 属于 G

f(xoy) = a o(xoy)o a^{-1} =aoxoyo a^{-1} =(aoxo a^{-1})(aoyo a^{-1}) = f(x) of(y)

证 2：对于 x, y∈G 有 f (x ∘ y) = a ∘ (x ∘ y) a^{-1} = (a ∘ x ∘ a^{-1}) ∘ (a ∘ y ∘ a^{-1}) = f (x) ∘ f (y) 所以 f 是 G 的自同态。

任取 y∈G ，则a^{-1}∘ y ∘ a∈G，且满足 f (a^{-1}∘ y ∘ a) = a ∘(a^{-1}∘ y ∘ a) ∘a^{-1} = y 所以 f 是满射的。

假若 f(x)=f(y)，即a^{-1}∘ x ∘ a = a^{-1}∘ y ∘ a，由 G 中的消去律必有 x=y，从而 f 是单射的。

综上所述， f 是< G, o>到其自身同构映射。

2006 年数学

第一部分 数学基础课程
（共 40 分）

一、形式化下列语句（共 4 分）

1．(1 分)没有不犯错误的人。

答：设 M（x）：x 是人。Q（x）：x 犯错误。形式化为：(∀ x)(M(x) -> Q(x))

2．(2 分)虚数既不是有理数也不是无理数。

答：设 W（x）：x 是虚数。P（x）：x 是有理数。Q（x）：x 是无理数。形式化为：(∀ x)(W(x) ∧¬P(x) ∧¬Q(x))

二、填空题(共 9 分)

1、（3 分）设集合 A={a,b,c}，I_A为 A 上的恒等关系，E_A 为 A 上全域关系。

（1）设写出E_A - I_A = {<a,b>,<a,c>,<b,a>,<b,c>,<c,a>,<c,b>}

（2）A 上含有序对个数为 4 或 5 **的二元关系数目最多，这样的二元关系数目为** C(9,4)=C(9,5)=126 **。**

解析：（1）E_A={<a,a>,<a,b>,<a,c>,<b,a>,<b,b>,<b,c>,<c,a>,<c,b>,<c,c>},

I_A={<a,a>,<b,b>,<c,c>}。

（2）因为在 A 上的任何二元关系都是 A×A 的子集，而 A×A 共有 9 个元素，

共可组成$C_9^0+C_9^1+\cdots+C_9^9=2^9$个子集，$C_9^4=C_9^5$最大，因此含有序对个数为 4 或 5 的二元关系数目最多为C_9^4=126。

2、（2 分）把 6 个人分成两组，每组至少 2 人，共有 C(6,2)+C(6,3)/2=25 **种不同的分组方式。**

解析：有两种分组方案，①一组 2 人，一组 4 人，②两组都是 3 人，故共有$C_6^2+C_6^3/2=25$种不同的分组方式。

3、（2 分）$(x+2y+3z+4w)^4$ 展开式经过合并同类项之后，xyzw 的系数为 4!*2*3*4=576 **。**

解析：由多项式定理

$$(x_1+x_2+\cdots+x_t)^n=\sum\binom{n}{n_1 n_2 \dots n_t}{x_1}^{n_1}{x_2}^{n_2}\dots{x_t}^{n_t}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/5 & 0 & 1 & 0 & 1/5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right.$$

，其中$\binom{n}{n_1 n_2 \dots n_t}=\dfrac{n!}{n_1!n_2!\dots n_t!}$，

{

$n_1+n_2+\cdots+n_t=n$。故$x^1(2y)^1(3z)^1 4w^1$的系数为4！=24。xyzw 的系数为 24*24=576.

4、(2 分)从 1 到 30 的正整数中任意选取三个不同的数，使得它们的和能被 3 整除，则共有 $3C(10,3)+C(10,1)^3=1360$ **种不同的选取方法。**

解析：1，2,⋯，30 这 30 个数可以分成三组：被 3 整除者为一组，除以 3 余 1 者为一组，除以 3 余 2 者为一组，显然每组有 10 个整数。如果三个整数都选自同一组，其和必能被 3 整除，如果每组选取一个整数，其和也必能被 3 整除。因此选取方法总数为：C（10，3）+C（10，3）+C（10，3）+10^3 =1360

三、解答题（共 11 分）

1、（3 分）设 P↑Q=¬（P∧Q）,试将¬P，P∧Q，P∨Q 仅用联结词↑表示出来。

解析：P↑Q 表示 P 和 Q 进行先与后非的操作。

¬ P= P↑P

p∧Q = (P↑Q)↑(P↑Q)

p∨Q = ¬ P ↑ ¬ Q = (P↑P)↑(Q↑Q)

2、（8 分）在信道上传输仅由上而下个字母 a,b,c,d,e 组成并且长度为 n 的词，规定连续出现两个 a 的词不允许传输，用 h(n)表示这个信道上允许传输的长为 n 的词的个数。

（1）求 h(1),h(2);　　　　（2）建立关于 h(n)的递归关系；　　　　（3）求 h(n)的通项公式。

原解：h(n)表示信道上允许传输的长为 n 的词的个数,则 h(1) =5，h(2) =5*5-1=24，

令 n>=2,如果单词第一个字母是 b 或 c,d,e，则余下长度 n-1 的位置上仍然是在相同限制条件下对 a,b,c,d,e 这 5 类字母的排列，排列方法为 h(n-1).如果单词第一个字母是 a,那么第二个字母就是 b 或 c,d,e。

如果第二个字母是 b,则该单词可以有 h(n-2)种方法构成，如果第二个字母是 c 或 d,e,同样该单词也可以有 h(n-2)种方法构成。于是有 h(n)=4h(n-1)+4h(n-2) n>=2　该递推关系的特征方程 x^2-4x-4 = 0 的根为 $2+2\sqrt{2}$和 $2-2\sqrt{2}$ ，即

h(n) = $c_1(2+2\sqrt{2})^n+c_2(2-2\sqrt{2})^n$　　利用 h(1) =5，h(2) =5*5- 1=24 可解得

h(n)＝$\frac{4+3\sqrt{2}}{8}(2+2\sqrt{2})^n+\frac{4-3\sqrt{2}}{8}(2-2\sqrt{2})^n$　　n>=2

类似的题：在信道上传输仅用 3 个字母 a, b, c 组成并且长度为 n 的词．规定连续出现两个 a 的词不能传输．试确定这个信道允许传输的词的个数.

T 解：令 h(n)为允许传输长度为 n 的词总数, n=1,2,⋯. 直接计算知, h(1)=3, h(2)=8.

设 n⩾3, 第一个字母是 b 或 c 的词数均为 h(n-1); 第一个字母是 a 的词, 第二个字母必须是 b 或 c, 这种词的数目为 2h(n-2).

故有以下递归关系:h(n)=2h(n-1)+2h(n-2), n=3,4...　　且 h(1)=3, h(2)=8.

该递归关系的特征方程为$x^2-2x-2=0$　　其特征根为$q_1=1+\sqrt{3}$ ，$q_2=1-\sqrt{3}$

故一般解为：h(n) = $c_1(1+\sqrt{3})^n+c_2(1-\sqrt{3})^n$,n=3,4,...　　由边界条件 h(1) =3，h(2) =8 解方程组：

$$\begin{cases} c_1(1+\sqrt{3})+c_2(1-\sqrt{3})=3 \\ c_1(1+\sqrt{3})^2+c_2(1-\sqrt{3})^2=8 \end{cases}$$　　得$c_1=\frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$ ，$c_1=\frac{-2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$

h(n)＝$\frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}(1+\sqrt{3})^n+\frac{-2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}(1-\sqrt{3})^n$

四、证明题（共 17 分）

1、（3 分）设 A={<a,b>｜a,b 为任意正整数}，A 上的二元关系，R={<<a,b>,<c,d>>｜ad=bc},证明 R 是 A 上的等价关系。

证 $<<a,b>,<c,d>>\in R \Leftrightarrow ad=bc \Leftrightarrow a/b=c/d$

任取$<a,b>$属于A，a,b是正整数，那么有

$a/b=a/b \Rightarrow <<a,b>,<a,b>>\in R$，$R$是自反的。

任取$<a,b>,<c,d>$属于A，有

$<<a,b>,<c,d>>\in R \Rightarrow a/b=c/d \Rightarrow c/d=a/b \Rightarrow <<c,d>,<a,b>>\in R$

R是对称的。

任取$<a,b>,<c,d>,<e,f>$属于A，有

$<<a,b>,<c,d>>\in R \wedge <<c,d>,<e,f>>\in R \Rightarrow a/b=c/d \wedge c/d=e/f$

$\Rightarrow a/b=e/f \Rightarrow <<a,b>,<e,f>>\in R$，$R$是传递的。

证 2：①任给<x,y> ∈A 有 xy=yx ⇒ <<x,y>,<x,y>> ∈R ,即 R 是自反的。

② 任给<x,y>，<p,q>∈A 若 <<x,y>，<p,q>>∈R 则 xq=yp，可得 py=qx⇒ <<p,q>，<x,y>>∈R,因此 R 是对称的。

③ 任给<x,y>，<p,q>，<m,n>∈A 若 <<x,y>，<p,q>>∈R 且<<p,q>，<m,n>>∈R

则 xq=yp，pn=qm⇒ $PM2_{+3}(11)=3$ ⇒xn=ym ⇒ <<x,y>，<m,n>>∈R,因此 R 是传递的。

因为 R 是自反的，对称的，传递，因此 R 是 A 上的等价关系。

2、（4 分）设 G 是一个简单图，G 的每个顶点的度数至少是 3。证明图 G 中一定存在长度为偶数的图。

解析：对简单图 G 的结点个数 n 进行数学归纳证明：当 n=4 时，G 为完全图，结论显然成立所得的圈的长度为 4.设当 n=k 时结论成立，长度为偶数的圈为 C。则当 n=k+1 时，长度为偶数的圈 C 也在结点数为 k+1 的图中，因此结论成立。

3、（4 分）设 G 是一个简单连通图，G'是 G 的子图，而且｜V(G')｜<｜V(G)| 。证明 G 中必然存在这样一条边 e, e 的一个端点属于 G'，另一个端点不属于 G'。

解析：用反证法，由于｜V(G')｜<｜V(G)| ,不妨设点集 V（S）=V（G）-V（G'），假设 G 中不存在一个端点属于 G'，另一个端点不属于 G'的边 e，那么图 G 可分成两个互补连通的子图 S 和 G'，这与 G 是简单连通图相矛盾。因此假设不成立，G 中必然存在这样一条边 e, e 的一个端点属于 G'，另一个端点不属于 G'。

4、（6 分）设 H，K 是有限群 G 的两个子群，e 是 G 的单位元，这两个子群的阶分别为| H｜=m,｜K｜=n. 如果 m 与 n 互素，那么 H∩K={e}。

解析：因为 H,K 是有限群 G 的子群，那么必有 G 的单位元 e∈H 且 e∈K，即 e∈H∩K。 不妨设存在与 e 相异的元素 a 也属于 H∩K，令|H∩K|=t>=2，由于 H∩K 是 H 和 K 的子群，根据拉格郎日定理 t|m 且 t|n，这与条件 m 与 n 互素相矛盾。故元素 a 不存在。|H∩K|=1，即 H∩K={e}。　（参考《离散数学》教材，第十章24题）

2007 年数学

第一部分 数学基础课程

（共 40 分）

一、用逻辑符号表达下列语句（每小题 2 分，共 4 分）

1．分别用两种量词形式写出：在北京居住的人未必都是北京人。

S 答：全域：所有人 P(x)表示 x 居住在北京； Q(x) 表示 x 为北京人，则：

全称量词表示为： ¬∀x(P(x)→Q(x)) 存在量词表示为： (P(x)→¬Q(x))

2. 不存在比一切实数都大的实数。

T 答：全域：所有数 R(x)表 x 是实数 M(x,y)表 x<y

（1）任何一个实数，都存在另一个实数比它大: ∀x∃y R(x)∧R(y) →M(x<y)

（2）不存在比一切实数大的实数: ¬(∃x∀y R(x) ∧R(y) ∧M(y,x))

二、填空题（共 10 分）

1.（4 分，每空 1 分）设 A={a,b,c}，B={1,2}

B^A中可以定义（ 8 ）个函数，其中有（ 6 ）个满射函数。

A^B中可以定义（ 9 ）个函数，其中有（ 3 ）个不是单射函数。

2.（2 分，每空 1 分）一个有 v 个顶点ε条边和 f 个面的平面图的邻接矩阵是（ n ）行（ n ）列的矩阵。

3.（2 分）由 2 个 x，1 个 y，2 个 z 共 5 个元素组成的不同排列的总数是（ 5!/2!2!1!=30 ）。

4.（2 分）能除尽 600 的正整数有（ 4*2*3=24 ）个。

解析：$600=2^3\times3\times5^2=2^{x1}\times3^{x2}\times5^{x3}$ $0\le x1\le3$ $0\le x1\le1$ $0\le x1\le2$ 则 4*2*3=24

三、计算题（共 14 分）

1.（4 分）计算$\neg(P\to Q)\leftrightarrow(P\to\neg Q)$的主析取范式，并分别给出该式为真和为假时，P、Q 的赋值。

2.(5 分)求由八个相异元素$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8$作成的全排列中只有四个元素不在原排列位置上的排列数，（这里$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8$是指原排列）。

答：

$$\binom{8}{4}D_4=\frac{8\times7\times6\times5}{4!}\times4!\times[1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}]=630$$

3.（5 分）n 个完全一样的球放到 8 个不同的盒子里（n≥8），不允许有空盒，问共有多少种不同的组合方案？（用母函数的方法）。

答：

$$G(x)=(x+x^2+x^3+\ldots)^8=\frac{x^8}{(1-x)^8}=x^8\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+8-1}{n}x^n$$

$$a_n=\binom{n+8-1-8}{n-8}=\binom{n-1}{n-8}=\binom{n-1}{7}$$

四、证明题（共 12 分）

1.（4 分）设 R 是集合 A 上的二元关系，试证明：如果 R 是自反的，并且是传递的，则合成关系 R°R 满足 R°R=R.

证 任取<a,b>,

$\langle a,b\rangle\in R\circ R\Rightarrow\exists c\in A(\langle a,c\rangle\in R\wedge\langle c,b\rangle\in R)$

$\Rightarrow\langle a,b\rangle\in R$ （R的传递性）

于是$R\circ R\subseteq R$

反之，任取<a,b>,

$\langle a,b\rangle\in R\Rightarrow\langle a,a\rangle\in R\wedge\langle a,b\rangle\in R$ （由于R自反）

$\Rightarrow\langle a,b\rangle\in R\circ R$

于是$R\subseteq R\circ R$.

综上所述，命题得证。

2.（8 分）设 G 是有 n≥3 个顶点的简单连通图，且 G 的最小度$\delta\ge\frac{n}{2}$，试证：G 是汉密尔顿（Hamilton）图。

2008 年数学

第一部分 数学基础课程

（共 40 分）

一、用逻辑符号形式化下列语句（本大题共 2 小题，每小题 2 分，共 4 分）

1. 每个人的指纹都不相同。

答：设 $M(x)$：x 是人；$N(x, y)$：$x \neq y$，即 x 与 y 是不同的人；$E(x, y)$：x 与 y 的指纹相同。

则原句可形式化为以下两种形式之一：

- ① $\forall x \forall y (M(x) \wedge M(y) \wedge N(x, y) \rightarrow \neg E(x, y))$

  ② $(\forall x)(M(x) \rightarrow (\forall y)(M(y) \wedge N(x, y) \rightarrow \neg E(x, y)))$

说明：如仅缺少 $N(x, y)$的内容，则只给 1 分。

2. 自然数不是奇数就是偶数，且奇数不能被 2 整除。

- 答：设 $P(x)$：x 是自然数，$Q(x)$：x 是奇数，$R(x)$：x 是偶数，$D(x)$：x 能被 2 整除。

原句可形式化为：

$\forall x((P(x) \rightarrow (Q(x) \vee R(x)) \wedge (Q(x) \rightarrow \neg D(x)))$

说明：（1）如仅答对部分内容最多给 1 分。

（2）全句必须写成一个式子，且中间用联结词∧联结，否则扣 0.5 分。

二、填空题（本大题共 4 小题，第 1 小题每空 1 分，第 2、3、4 小题每空 2 分，共 10 分）

1. 设A、B 均为有穷集合，A 和B 的基数分别是m 和n（m >0，n >0）。

（1）当m 和n满足 m=n 时，存在从A 到B 的双射函数。此时共可生成 n! 个不同的双射函数。

（2）当m 和n满足 $m \leq n$ 时，存在从A 到B 的单射函数。此时共可生成 $C_n^m m! = A_n^m$ 个不同的单射函数。

2. 已知5 位老师和3 位学生围圆桌就座，如果要求学生两两不相邻，则有4! •P(5,3)=4! •5 •4 •3或1440种就座方案。

3. 整除2310 的正奇数有 $2^4=16$ 个。

提示：2310＝2×3×5×7×11，2310的奇因子是$3^a 5^b 7^c 11^d$的形式，其中a,b,c,d=0,1。

4. 设图G的顶点集合为$V(G)=\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$，边集合为$E(G)=\{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_1, v_1v_3\}$。则G的生成树有 8 棵。

三、解答题（本大题共3 小题，第1、2 小题每题4 分，第3 小题8 分，共16 分）

1. 设$P \downarrow Q = \neg(P \vee Q)$，仅用联结词↓分别表示出¬P，P∧Q，P∨Q。

解：（1）$\neg P \Leftrightarrow \neg (P \vee P) \Leftrightarrow P \downarrow P$ -----1 分

（2）$P \wedge Q$

$\Leftrightarrow \neg (\neg P \vee \neg Q)$

$\Leftrightarrow (\neg P) \downarrow (\neg Q)$

$\Leftrightarrow (P \downarrow P) \downarrow (Q \downarrow Q)$ （见下面说明）

（3） $P \vee Q$

$\Leftrightarrow \neg (\neg(P \vee Q))$

$\Leftrightarrow \neg (P \downarrow Q)$

$\Leftrightarrow (P \downarrow Q) \downarrow (P \downarrow Q)$

如（2）、（3）小题中仅做对一题则给2分，（2）和（3）小题都做对则给3分。

2. 设T 是一棵有13 个顶点的树，称树中度为1 的顶点为叶子。如果T 的顶点的度只可能是1,2,5 且T 恰好有3 个度为2 的顶点，那么，T 中有多少个叶子？

解：设T中有x个叶子，则T中有13—3—x＝10—x个度为 5 的顶点，

由于树中的边数等于顶点个数减去1，即边数为12 -----2 分

由顶点度数之和等于边数的两倍得

$1*x+2*3+5*(10-x)=2*12$

解得 x=8，故T中有 8 个叶子。 -----2 分

3．求1,4,5,8,9 这五个数字组成的位数的个数，要求4,8 出现的次数均为偶数，而1,5,9 出现的次数不加限制。

3．解 设满足条件的 i 位数的个数为 a_i，则序列 a_1, a_2, a_3, L 对应的指数型母函数 $G(x)$ 为

$$G(x)=(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+L)^2(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+L)^3$$ -----------2 分

由于 $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+L$ 故 $e^{-x}=1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+L$

于是 $1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+L=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$ ---------3 分

故 $G(x)=\frac{1}{4}(e^x+e^{-x})^2e^{3x}=\frac{1}{4}(e^{5x}+2e^{3x}+e^x)$

$$=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(5^n+2\cdot 3^n+1)\frac{x^n}{n!}$$ ---------2 分

故 $a_n=\frac{1}{4}(5^n+2\cdot 3^n+1)$ ---------1 分

四、证明题（本大题共2 小题，第1 小题4 分，第2 小题6 分，共10 分）

1．设R 是非空集合A 上的二元关系，R 满足条件：

（1）R 是自反的；

（2）若<a，b>∈R ∧<a，c>∈R，则<b，c>∈R；

试证明R 是A 上的等价关系。

证明 参考《离散数学》第七章，39题

证明：由条件（1），R已满足自反性。需证明R满足对称性和传递性。

1）对于任意的 <a，b>，

<a，b>∈R 且由条件（1）

=> <a，b>∈R ∧<a，a>∈R -----1 分

由条件（2） => <b，a>∈R -----1 分

所以，R满足对称性。

2）对于任意的 <a，b>，<b，c>

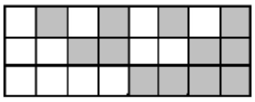
<a，b>∈R ∧<b，c>∈R

由对称性 <b，a>∈R ∧<b，c>∈R -----1 分

由条件（2） <a，c>∈R -----1 分

所以，R满足传递性。 综合1），2）可得，R是A上的等价关系。

2．随意地把一个 9×3 棋盘的每个方格涂成红色或蓝色，求证：必有两行方格的涂色是一样的。



证明：用红、蓝两色去涂 1×3 棋盘，共有2^3= 8 种涂色方法。 -----2 分

设a_i(i=1, 2, L, 8)表示第 i 种涂色方法. 设 J 是任一个已用红、蓝涂了色的 9×3 棋盘，

以b_k(k=1, 2, L, 9)表示 J 的第 k 行的涂色方法。

设 B={b_1, b_2, L, b_9}，并令B_j={b|b∈B 且 b 与a_j相同}，(j=1, 2, L, 8)。则a_j⊆B 且$\cup_{j=1}^{8} B_j$=B -----2 分

B 中 9 个元素放到B_j(j=1, 2, L, 8)这 8 个抽屉里，由鸽笼原理，必有正整数 t(1≤ t ≤ 8)，使得$|B_t| \geq 2$，

即B_t中至少有两个元素不妨设为b_m和b_l，这说明在涂色 J 中，棋盘的第 m 行和第l行的涂色一样。 -----2 分

2009 年数学

第一部分 数学基础课程

（共 40 分）

一、用逻辑符号形式化下列语句（每小题 2 分，共 4 分）

1．并非一切事情都能由机器来完成。

• 答：设 W(x): x 是事情；M(y): y 是机器；C(x, y)：x 能由 y 来完成。原句可形式化为以下两种形式之一：

（1）$\neg\forall x\exists y\,(W(x)\ \wedge M(y) \rightarrow C(x, y))$

（2）$\exists x\forall y\,(W(x)\ \wedge\ M(y)\ \wedge\neg C(x, y))$

说明：写出上述任一种形式均可得满分。但如缺少设置的内容，则只给 1 分。

2．存在一个唯一的偶素数。

• 答：设 P(x)：x 是素数； E(x)：x 是偶数，T(x, y)：x = y； 则原句可形式化为以下两种形式之一：

（1）$\exists x(P(x)\wedge E(x)\wedge\forall y(P(y)\wedge E(y) \rightarrow T(x, y)))$

（2）或直接设：P(x)：x 是偶素数，T(x, y)：x = y； 则原句可形式化为：

$\exists x(P(x)\wedge\forall y(P(y) \rightarrow T(x, y)))$

说明：写出上述任一种形式均可得分。但如缺少设置的内容，则只给 1 分。如果写成$(\exists!x)\ P(x)$只给 1 分。

二、填空题（前两小题每题 2 分，最后一小题 3 分，共 7 分）

1．5 位男生和 5 位女生排成男女相间的一列，有 2 • 5! • 5! **种不同的排法。**

2． 具有 n (n>1) 个顶点的连通图至少有 n-1 **条边。**

3．一个大正方形是由四个相同的小正方形构成，如图 1 所示， 用黑白两种颜色对 4 个小正方形着色，如果经过某种旋转，颜色能完全吻合的方案认为是相同的，则有 6 **种不同的方案。**

2	1
3	4

图 1

解析：$M=\frac{1}{4}(2^4+2^2+2^1+2^1)=6$

三、解答题（前两小题每题 5 分，第 3 小题 7 分，第 4 小题 6 分，共 23 分）

1．求由 2 个 0、3 个 2 和 3 个 5 构成的八位数共有多少个。

解 1：设所求的个数为 x，则由 2 个 0、3 个 2 和 3 个 5 构成的首项为 2 的八位数有$\frac{(2+2+3)!}{2!2!3!}=210$个 ……2 分

则由 2 个 0、3 个 2 和 3 个 5 构成的首项为 5 的八位数也有$\frac{(2+2+3)!}{2!2!3!}=210$个 ……2 分

故由加法原则得 x=210+210=420. ……1 分

解 2：$\{2\cdot 0, 3\cdot 2, 3\cdot 5\}$的全排列，个数为 $\boxed{\frac{8!}{2!3!3!}-\frac{7!}{1!3!3!}=560-140=420}$

2．设图 G 有 14 个顶点，27 条边，每个顶点的度只可能为 3、4 或 5，且 G 有 6 个度为 4 的顶点，问 G 有多少个度为 3 的顶点？多少个度为 5 的顶点？

解：设 G 中有 x 个度为 3 的顶点，

则 G 中有 14—6 —x=8—x 个度为 5 的顶点 ……2 分

由于顶点度数之和等于边数的两倍得

3x +4×6+5× (8—x) = 2×27

即 x =5 ……2 分

故 G 中有 5 个度为 3 的顶点，3 个度为 5 的顶点。 ……1 分

3．有 200 本相同的书，欲摆放在四个不同的书柜里，使得每个书柜摆放的书的数目只可能是 20、40、60、80、100 本，

问有多少种摆放方法？

解 1：

3．解：所求的放法数对应

$(x^{20}+x^{40}+x^{60}+x^{80}+x^{100})^4$ 中 x^{200} 的系数。 ……2 分

$(x^{20}+x^{40}+x^{60}+x^{80}+x^{100})^4=x^{80}(1+x^{20}+x^{40}+x^{60}+x^{80})^4$

$=x^{80}\left(\frac{1-x^{100}}{1-x^{20}}\right)^4$ ……2 分

$(1-x^{100})^4=1-4x^{100}+6x^{200}-4x^{300}+x^{400}$

$(1-x^{20})^{-4}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+3}{3}x^{20k}$

$(x^{20}+x^{40}+x^{60}+x^{80}+x^{100})^4=x^{80}(1-4x^{100}+6x^{200}-4x^{300}+x^{400})\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+3}{3}x^{20k}$ ……2 分

故 x^{200} 的系数为 $\binom{6+3}{3}-4\binom{1+3}{3}=84-16=68$，

所以有 68 种放法。 ……1 分

解 2：

解：令书柜1，2，3，4的书数分别为 a,b,c,d，那么

$a+b+c+d=200$，$a,b,c,d=20,40,60,80,100$

令$A=a/20$，$B=b/20$，$C=c/20$，$D=d/20$，那么

$A+B+C+D=10$，$A,B,C,D=1,2,3,4,5$

生成函数为$G(y)=(y+y^2+y^3+y^4+y^5)^4$，$G(y)$的$y^{10}$的系数是68，

因此摆放的方法数是68。

4．设集合 A={a, b}，试回答下列问题：

（1）写出 A 上所有的偏序关系。

（2）写出 A 上所有的函数，并指出哪些是双射函数。

解：（1）A 上的偏序关系有 3 个：

$R_1=I_A$ = {<a,a>, <b,b>}；

$R_2=I_A$ ∪{<a, b>}；

$R_3=I_A$ ∪{< b, a>}； ……3 分

（2）A 上的函数共有 4 个：

f_1 = {<a, a>, <b, a>}；

f_2 =I_A = {<a, a>, <b, b>}；

f_3 ={<a, b>, <b, a>}；

f_4 = {<a, b>, <b, b>}

其中 f_2、 f_3是双射函数。 ……3 分

四、证明题（共 6 分）对任意集合 A、B，试证明 A∩B＝A ⇔ A⊆B。

证明：先证 A∩B = A => A⊆B

若 A∩B = A，则：

∀x，x∈A

⇔ x∈A∩B (A∩B = A)

⇔ x∈A∧ x∈B (集合交定义)

⇔ x∈B (命题逻辑化简律)

从而有 A∩B = A => A⊆B。 ......3 分

再证 A⊆B => A∩B = A

利用反证法，假设 A ⊆ B，但 A ∩ B≠A，则

（1）必存在元素 e，e∈A，但 e 不属于 A ∩ B。

即 e∈A∧e∉B，而由 A ⊆ B 知，e∈A 必有 e∈B，

则 e∈A 必有 e∈A ∩B，所以假设不成立。

或

（2）假设 A⊆B，但 A∩B≠A，则存在元素 e∈A∩B，但 e 不属于 A。

由 e∈A∩B，则有 e∈A∧e∈B，同样与假设矛盾。 ...3 分

综合上述，有 A∩B = A ⇔ A ⊆ B 成立。

证 “⇒”

任取x，

$x\in A\Rightarrow x\in A\cap B$ (因为$A\cap B=A$)

$\Rightarrow x\in A\wedge x\in B$

$\Rightarrow x\in B$

从而得到$A\subseteq B$。

“⇐” 显然有 $A\cap B\subseteq A$，下面证明$A\subseteq A\cap B$.

任取 x，

$x\in A\Rightarrow x\in A\wedge x\in A$ （幂等律）

$\Rightarrow x\in A\wedge x\in B$ （因为$A\subseteq B$）

$\Rightarrow x\in A\cap B$

综合上述有$A\cap B=A$。

2010 年数学

第一部分 数学基础课程

（共 40 分）

一、用逻辑符号表达下列语句（每小题 2 分，共 4 分）

1．猫必捕鼠。

• 答：1）全域：一切事物 C(x)表示 x 是猫；B(x) x 捉老鼠，则：全称表示: ∀xC(x)→B (x) 存在表示：¬(∃xC(x)∧¬B(x))

2）设 C(x): x 是猫； M(y): y 是老鼠； S(x, y)：x 捕 y。 原句可形式化： ∀x ∀y (C(x)∧M(y) → S(x, y))

评分说明：设的符号形式可以不同，但必须设 3 项。如缺少设置或逻辑符号使用有错误则只给 1 分（如 S(x, y)之前用的是∧）。

2．任意两个不同的实数之间必存在另一个实数。

• 答：设 R(x)：x 是实数， 则原句可形式化为：

（1）∀x∀y (R(x)∧R(y)∧x≠y → ∃z(R(z)∧(x<z<y∨y<z< x)))

或设 R(x)：x 是实数； N(x, y)：x≠y； G(x, z, y): x<z<y, 则原句可形式化为：

（2）∀x∀y (R(x)∧R(y)∧N(x, y) → ∃z(R(z)∧(G(x, z, y)∨G(y, z, x))))

评分说明：形式化结果不能缺项，如蕴含词前面的部分书写正确可给 1 分，后面的部分，析取词两端的内容必须完整，否则需扣 1 分。

二、填空题（每小题 2 分，共 6 分）

1．设 k_n 是个 n 顶点(n 为正整数)的完全图，对 k_n 的每条边进行红、蓝两种颜色任意着色，都至少存在一个红色边三角形或蓝色边三角形，则最小的 n 是___6___。

解析：考拉姆齐(Ramsey)定理

在组合数学上，拉姆齐(Ramsey)定理是要解决以下问题：要找这样一个最小的数 n，使得 n 个人中必定有 k 个人相识或 l 个人互不相识。

通俗表述：（1）6 个人中至少存在 3 人相互认识或者相互不认识。

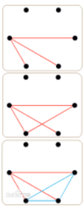
（2）该定理等价于证明这 6 个顶点的完全图的边，用红、蓝二色任意着色，必然至少存在一个红色边三角形，或蓝色边三角形。

证明如下：首先，把这 6 个人设为 A、B、C、D、E、F 六个点。由 A 点可以引出 AB、AC、AD、AE、AF 五条线段。

设：如果两个人认识，则设这两个人组成的线段为红色；如果两个人不认识，则设这两个人组成的线段为蓝色。

由抽屉原理可知：这五条线段中至少有三条是同色的。不妨设 AB、AC、AD 为红色。若 BC 或 CD 为红色，则结论显然成立。

若 BC 和 CD 均为蓝色，则若 BD 为红色，则一定有三个人相互认识；若 BD 为蓝色，则一定有三个人互相不认识。



2．$\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\binom{n}{3}+\ldots+(-1)^n\binom{n}{n}=$ ___0___。其中$\binom{n}{k}$表示从 n 个不同元素中取 k 个的组合数。

3．设 G 是有 n 个顶点的简单图，除其中一个顶点外，其余顶点的度（次）均为奇数。在 G 的补图中有___n-1___个度为奇数的顶点。

解析：由题简单图有 n 个点=1 个偶度点+其余 n-1 个点为奇度，由握手定理,简单图奇度点个数为偶数个,得 n 为奇数 Kn 完全图，就是任意两点间都有连线，n 为奇数，假设 n=5，看其中一个点，它和其余 4 个点都有连线，假设 n=7，看其中一个点，它和其余 6 个点都有连线；则这 n 个点，每个点上的连线都是 n-1 个也就是偶数个连线，即完全图每个点的度都为偶数。

偶数+偶数=偶数 原图就 1 个偶度点，补图为了凑成偶数，也只能有一个偶度

奇数+奇数=偶数 原图有 n-1 个奇度点，补图为了补，为了凑成偶数，也要 n-1 个奇度点。

故，补图也有 1 个偶度点，n-1 个奇度点。

三、计算题（共 16 分）

1.（3 分）计算$\forall xP(x) \to \exists yP(y)$ 的否定式。 否定式中仅可使用{¬,∨,∧}中的联结词，且否定词“¬”不能出现在量词的前面。

解：记原式为 A = $\forall xP(x) \to \exists yP(y)$。 题目要求计算¬A。

为书写简便，设 B = $\forall xP(x)$，C = $\exists yP(y)$ （1）

则原式可化为 A = (B→C)。

¬A

= ¬ (B→C)

= ¬ (¬B∨C)

= B∧¬C

= $\forall xP(x) \wedge \neg\exists yP(y)$ 代入式（1） 得到此步的结果给 2 分

= $\forall xP(x) \wedge \forall y \neg P(y)$ （根据题目要求将量词前面的否定词挪到后面）

故 $\forall xP(x) \to \exists yP(y)$ 的否定式为 $\forall xP(x) \wedge \forall y \neg P(y)$ 。

2.（5 分）求方程$x_1+x_2+x_3+x_4=10$ 正整数解的个数。

S 解：利用挡板法求组合题，

正整数 10 可以等价看成 10 个 1 组成，有 9 个空，三个挡板放在 9 个空里边，C（9,3）=84

原解 1：相当于方程：$x_1+x_2+x_3+x_4=6$ 的非负整数解的个数，即 C(6+4-1,6)=C(9,6)=C(9,3)=84

原解 2：

2.（5 分）

解：令 $y_1=x_1-1,\ y_2=x_2-1,\ y_3=x_3-1,\ y_4=x_4-1$，则此问题等价于求满足方程

$y_1+y_2+y_3+y_4=6$ 的非负整数解的个数 -----------------3 分

而 $y_1+y_2+y_3+y_4=6$ 非负整数解的个数等价于从 6+4−1 个中取出 3 个的组合数，即

$$\binom{6+4-1}{3}=\binom{9}{3}=\frac{9\times8\times7}{3\times2\times1}=84$$ -----------------2 分

评分说明：如果算出非负整数解的个数$\binom{10+4-1}{3}=\binom{13}{3}=\frac{13\times12\times11}{3\times2\times1}=286$，给 3 分。

3.（8 分）设 n 个人的包事先存放在会议寄存处，且寄存处只存有这 n 个包。会后，这 n 个人随机进入这间黑暗的寄存处，每人随意取回一个包。试问所有人都拿错包的概率是多少？

3.（8 分）

解：求所有人都拿错包的方法数 D_n 等价于求 n 个数$1,2,3,\cdots,n$ 的错排数目问题 ----2 分

设 $A_i\ (i=1,2,\cdots,n)$ 是第 i 个人拿回自己包的结果集合，则取回包的总方法数为 $n!$，

$|A_i|=(n-1)!$，$|A_i\cap A_j|=(n-2)!,\cdots,|A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots A_{i_k}|=(n-k)!$. 利用容斥原理，

$$D_n=|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\cdots\cap\overline{A_n}|=n!-\binom{n}{1}(n-1)!+\binom{n}{2}(n-2)!-\binom{n}{3}(n-3)!+\cdots+(-1)^n\binom{n}{n}$$

$$=n!(1-1+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!})$$ ---------4 分

n 个人取回包的总方法数是 $n!$

故所有人都拿错包的概率是$\frac{D_n}{n!}=(1-1+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!})$ ---------2 分

评分说明：没有证明过程直接给出 $D_n=n!(1-1+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!})$ 扣 2 分。

解 设{1, 2, … , n} 的错位排列数为D_n，那么所求概率为

$$\frac{D_n}{n!}=\frac{n!}{n!}[1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\ldots+(-1)^n\frac{1}{n!}]$$

当 n 充分大时，上述概率近似为$1/e$

四、证明题（共 14 分）

1.（5 分）证明自然数集 N 上的整除关系 R 是 N 上的偏序关系。

证 1：需分别证明 N 上的整除关系 R 满足自反性、反对称性和传递性。

（1）对任意 $n\in N$, 显然有 nRn, 故自反性成立。 -------1 分

（2）对任意 $m, n\in N$，

若 mRn 且 nRm, 则有 $m\leqslant n$ 且 $n\leqslant m$, 从而 m =n。故反对称性成立。 -------2 分

（3）对任意 $m, n, k\in N$,

若 mRn 且 nRk, 设 n=pm, k=qn (p, q 为自然数)

则 k=qn =q(pm) = (qp)m，从而 mRk。 故传递性成立。 -------2 分

综合以上（1），（2），（3）即得，自然数集 N 上的整除关系 R 是 N 上的偏序关系。证毕。

证 2：

证 这里首先应该假设N中不含有**0.**

对任意 x属于N，显然 $x|x$，因此R是自反的。

对任意 x,y 属于N，若 $x|y$ 且 $y|x$，那么有$x=y$，因此R是反对称的。

对任意 x,y,z 属于N，若$x|y$且$y|z$，那么$x|z$，因此R是传递的。

因此R是N上的偏序关系。

2.（4 分）设 f：A→B，g：B→C，其中，对于任意的 $b\in B$，$g(b)=\{x|x\in A\wedge f(x)=b\}$，证明：当 f 为满射时，g 为单射。

证 1：因为 f 是满射的，所以对于任意的 $b\in B$, $g(b)\neq\Phi$。

若 g 非单射，必存在 b_1，$b_2\in B$, 且 $b_1\neq b_2$，使得 $g(b_1) = g(b_2)$。

于是，对于任意的 x，$x\in g(b_1) \Leftrightarrow x\in g(b_2)$，而

$x\in g(b_1) => f(x)= b_1$， （1）

$x\in g(b_2) => f(x)= b_2$， （2）

由（1），（2）可知 $b_1= b_2$，这与 $b_1\neq b_2$ 矛盾。所以 g 是单射的。证毕。

证 2：

证 假设存在 b_1和$b_2\in B$ 使得$g(b_1)=g(b_2)=T\subseteq A$，那么有

$\{ x \mid x\in A \wedge f(x)=b_1\}=T=\{ x \mid x\in A \wedge f(x) = b_2\}$

如果存在 $x\in T\subseteq A$，那么由于 f 是函数，对于x只有唯一的值，因此 $b_1=f(x)=b_2$

如果T是空集，那么不存在$x\in A$使得 $f(x)=b_1=b_2$, 因此b_1和b_2不属于ran$f$，这与函数 f 的满射性矛盾。

3.（5 分）设 G 是一个顶点个数为 n（n≥5）、边数为 m 的连通平面图，如果 G 的最小圈的长度为 5，证明：$m\leq \frac{5}{3}(n-2)$ 。

证：设 G 的面的个数为 f 。因为 G 的最小圈的长度为 5，故 G 的每个面的度数（也称为‘次数’）至少为 5。

由于面的度数之和等于边数的两倍，故 $5f\leq 2m$，即 $f\leq\frac{2}{5}m$ -----2 分

将 $f\leq\frac{2}{5}m$ 代入欧拉公式 $n-m+f=2$，解得 $m\leq\frac{5}{3}(n-2)$ 。 ------3 分

2011 年数学

第一部分 数学基础课程

（共 40 分）

一、用逻辑符号表达下列语句（每小题 2 分，共 4 分）

1．有些人运气好，但并非所有人都运气好。

答：设 M(x): x 是人； R(x): x 运气好； N(x, y)：x 与 y 不相同，则原语句可表示为：

$\exists x \exists y\,(N(x,y) \wedge M(x) \wedge M(y) \wedge R(x) \wedge \neg R(y))$

2．不管黄狗还是花狗，能够看家护院就是好狗。

答：设 G(x): x 是狗；Y(x): x 是黄色的；H(x): x 是花色的；M(x): x 能看家护院；N(x): x 是好狗；则原语句可表示为：

$\forall x\,(G(x) \wedge (Y(x) \vee H(x)) \wedge M(x) \rightarrow N(x))$

二、填空题（每小题 2 分，共 12 分）

1．设 A ={1,2,3,4}, B ={a,b,c}，从 A 到 B 不同的二元关系共有 2^{12}或4096 **个。从 A 到 B 不同的函数共有** 3^4或81 **个。**

解析：|A×B|=12，因此从 A 到 B 的有序对有 12 个，这些有序对组成的集合的任何一个子集都是一个二元关系，因此从 A 到 B 不同的二元关系共有2^{12}=4096 个。 因为|A|=4，|B|=3，因此从 A 到 B 不同的函数共有3^4=81 个。

2．设 |A| = n（即集合 A 的基数为 n），问在 A 上有 $2^{\frac{n^2+2}{2}}$ **个不同的对称关系。**

解析：A 上的关系可以由一个 n×n 的关系矩阵表示，对称关系要求 A 中元素满足$a_{ij}=a_{ji}$，因此关系矩阵的 n 个主对角线元素和右上三角部分的$\frac{n^2-2}{2}$个元素来确定，而每个元素可取 0 或 1，所以 A 上不同的对称关系个数为$2^{\frac{n^2+2}{2}}$

3．对（$2x_1—3x_2 + x_3$）^{6}进行展开合并同类项后， $x_1^3 x_2 x_3^2$ 的系数是 -1440 **。**

解析：按多项式定理展开后，每项的系数分为两部分：多项式系数和各字母自带的系数。因此这道题中$x_1{}^3x_2x_3{}^2$的系数为：$\binom{6}{312} * 2^3 * (-3)^1 * 1^2$=$\frac{6!}{3!1!2!}$*8*(-3)= -1440

4．从 m 个人中选取 n 个人（n≤m）围成一个圆桌就座，则不同的就座方法数是 m!/(n(m-n)!) **。**

解析：m 元素的 n-环排列个数：$\frac{P(m,n)}{n}=\frac{m!}{m(m-n)!}$

5．设 G 是顶点个数为 n，边数为 e，连通分支数为 k 的简单图，T 是包含 G 的所有顶点的森林，则 G 的不在 T 中的边有 e+k-n **条。**

解析：因为 n 个顶点，**连通分支数为 k 的森林有 n-k 条边**，而 G 中有 e 条边，因此 G 的不在 T 中的边有 e-(n-k)条。

注：连通分支：图被分成几个小块,每个小块是联通的,但小块之间不联通,那么每个小块称为联通分支.一个孤立点也是一个联通分支。

连通分支数：如果无向图由树组成，每一棵树是连通的，但树与树之间没有树枝相连。因而，每棵树都可视为一个连通分支，树的个数为连通分枝数。 一个树有 n-1 条边，连通分支数为 k 的森林有 n-k 条边。

6．设 u,v 是图 G 的两个不邻接的顶点，S 是图 G 的顶点割集，且 u,v 是属于 G—S 的两个不同的连通分支，称 S 为一个 uv 分离集。设最小的 uv 分离集中所含顶点的个数为 a，且 G 中从 u 到 v 内部不相交的路的最大条数为 b ，则 a 和 b 满足的关系为 a=b **。**

解析：虽然图的点连通度≤ 边连通度 ≤最小度，但是对于内部不相交的路，其最大条数等于分离集的最小个数。
根据 Menge 定理：图的连通度为 k，则任意点间必有 k 条不相交路径。
Menge 定理应用：互连网络中构造点不相交路径（即并行路）是并行与分布式系统设计与实现的基本问题之一。根据 Menger 的定理，连通度为 k 的网络中任两不同节点之间存在至少有 k 条并行路。

三、计算题（每个问题 4 分，共 8 分）

设a_1，a_2，a_3，a_4，a_5 ，a_6 ，a_7 是 7 个互不相同的非零实数， 这七个数的全排列中， 数a_i（i=1, ...,7）的原来位置是指第 i 个位置。求这七个数的全排列中：

（1） a_1，a_3，a_5，a_7都不在原来的位置上，而a_2，a_4，a_6都在原来位置上的排列数目。

（2） a_2，a_4，a_6都不在原来位置上的排列数目。

解：（1）相当于a_2，a_4，a_6都在原来的位置上，而a_1，a_3，a_5，a_7在各自位置上进行错位排列，因此排列数 D4=9。

（2）设 S 表示这 7 个数任意排列，设 A、B、C 分别表示a_2，a_4，a_6排列在原来位置，由容斥原理知所求排列数目为：

$|\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C}|=|S|-|A|-|B|-|C|+|A\cap B|+|A\cap C|+|B\cap C|-|A\cap B\cap C|=7!-3\cdot6!+3\cdot5!-4!=3216$

(1) a_1,a_3,a_5,a_7的错位排列数 $D_4=4![1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}]=9$

(2) 设A,B,C分别表示a_2,a_4,a_6在原来位置的排列集合，则

$$N=|\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C}|=7!-(6!+6!+6!)+(5!+5!+5!)-4!$$
$$=134\times4!=3216$$

四、证明题（第 1，2 小题各 4 分，第 3 小题 8 分，共 16 分）

1．下列公式是否正确？如正确请证明，如错误试举出反例。

(∀x) (∀y) (P(x)∧P(y) →Q(x,y)) =¬ (∃x) (∃y) (P(x)∧P(y)∧¬Q(x,y))

解：正确，推理如下

(∀x) (∀y) (P(x)∧P(y) →Q(x,y))

=((∃x) (∃y) (P(x)∧P(y))) →Q(x,y)) 量词辖域收缩等值式

=¬((∃x) (∃y) (P(x) ∧ P(y))) ∨ Q(x, y)) 蕴含等值式

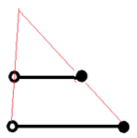
=¬((∃x) (∃y) (P(x) ∧ P(y))) ∨ ¬¬Q(x, y))

=¬((∃x) (∃y) (P(x) ∧ P(y))) ∧ ¬Q(x, y)) 德摩根等值式

（注：同 2005 年四-1）

2．用“≈”表示等势，试证明(0,1] ≈ (a, b] (a, b∈R, a < b，R 为实数集)。

T 答：斜率 k=$\frac{b-a}{1-0}$ (y-a) =$\frac{b-a}{1-0}$ (x-0) 得$\begin{cases}f(0)=a\\f(1)=b\end{cases}$



$$f(x)=a+\frac{x-0}{1}(b-a)$$
$$=a+x(b-a)$$
$$(0<x\le1)$$

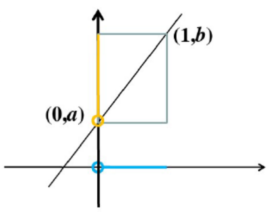
原答：

证 做过(0,a)和(1,b)点的直线

$f(x)=(b-a)x+a$

f 是从(0,1]到(a,b]的双射函数

从而有(0,1] ≈(a,b]



证明：只需要找到集合(0,1]和集合(a, b]之间的一个双射函数即可，设 f(x)=kx+c,则 f(0)=a, f(1)=b，

解得 k=b-a，c=a，即 f(x)=(b-a)x+a，因此(0,1] ≈ (a, b]。

3．设$\{a_1, a_2, \ldots, a_n\ldots\}$满足$a_n=\sum_{k=1}^{n-1}a_ka_{n-k}$且$\{a_1, a_2, \ldots, a_n\ldots\}$的母函数为$A(x)=\sum_{n\geq 1}a_nx^n$ $a_1=1$ (缺条件)

（1）（4 分）证明 $A^2(x)-A(x)+x=0$

（2）（4 分）证明$a_n=\frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$，n≥1，其中$\binom{2n-2}{n-1}$表示从 2n—2 个数中取出 n—1 个的组合数。

证明：（1）对字母数$A(x)=\sum_{n\geq 1}a_nx^n$两边平方得

$$A^2(x)=\sum_{k=1}^{\infty}a_kx^k\cdot\sum_{l=1}^{\infty}a_lx^l=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}a_ka_lx^{k+l}$$

$$=\sum_{n=2}^{\infty}x^n(\sum_{k=1}^{n-1}a_ka_{n-k})=\sum_{n=2}^{\infty}a_nx^n$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n-a_1x$$

$$=A(x)-x$$

因此 $A^2(x)-A(x)+x=0$。

（2）上式是一个关于 A（x）的一元二次方程，利用求根公式得到：

$$A_1(x)=\frac{1+\sqrt{1-4x}}{2},\qquad 舍去\ A(x)=\frac{1+(1-4x)^{1/2}}{2}$$

$$A_2(x)=\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2}$$

由于 A（0）=0，因此取$A(x)=A_2(x)$，将 A（x）展开得：

$$A(x)=\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(1-4x)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n2^{2n-1}}\binom{2n-2}{n-1}(-4x)^n\right]$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n2^{2n}}\binom{2n-2}{n-1}(-1)^n2^{2n}x^n$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}x^n$$

因此$a_n=\frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$，n≥1。

注 1：牛顿广义二项式定理 (可以推广到对任意实数次幂的展开)

$$(x+y)^{\alpha}=\sum_{n=0}^{\alpha}C_{\alpha}^{n}x^{\alpha-n}x^n，其中C_{\alpha}^{n}=\frac{\alpha!}{n!\,(\alpha-n)!}=\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)}{n!}$$

那么$(1+x)^{\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}C_{\frac{1}{2}}^{n}x^n=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)(\frac{1}{2}-3)\ldots(\frac{1}{2}-n+1)}{n!}x^n=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}*1*3*5*\ldots*(2n-3)}{2^n*n!}x^n$

$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}*(2n-2)!}{2^n*n!*2^{n-1}(n-1)!}x^n=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}*(2n-2)!}{2^{2n-1}*n!*(n-1)!}x^n=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}*(2n-2)!}{2^{2n-1}*n*(n-1)!(n-1)!}x^n=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n-1}*n}C_{2n-2}^{n-1}x^n$

注 2：(2n)! = 1*3*5*…*(2n-1) * 2*4*6*…*(2n) = (1*3*5*…*(2n-1))*(2^n(1*2*3*…n))= $(1*3*5*\ldots*(2n-1))*2^nn!$

(2(n-1))! =(2n-2)!= 1*3*5*…*(2n-3) * $2^{n-1}(n-1)!$ 则，1*3*5*…*(2n-3) =(2n-2)! / $2^{n-1}(n-1)!$

注 3：C(n,m)=P(n,m)/m!=n!/((n-m)!*m!) 则 C(2n-2,n-1)=$\frac{(2n-2)!}{((2n-2)-(n-1))!(n-1)!}=\frac{(2n-2)!}{(n-1)!(n-1)!}$

二项式定理可以用以下公式表示：

$$(a+b)^n=\sum_{r=0}^{n}C_n^ra^{n-r}b^r$$

其中，$C_n^r=\frac{n!}{r!(n-r)!}$又有$\binom{n}{r}$等记法，称为二项式系数(binomial coefficient)，即取的组合数目。此系数亦可表示为杨辉三角形。它们之间是互通的关系。

2012 年数学

第一部分 数学基础课程

（共 40 分）

一、用逻辑符号表达下列语句（每小题 2 分，共 4 分）

1．在中国居住的人未必都是中国人（要求分别用存在量词和全称量词各给出一个表达式）。

T 答：全域：所有人 P(x)表示 x 住在中国； Q(x) 表示 x 为中国人，则：

全称量词表示为： $\neg\forall x(P(x)\rightarrow Q(x))$

存在量词表示为： $\exists x(P(x)\rightarrow\neg Q(x))$

2．有且仅有一个火星。

T 答：全域：星球 P(x)表示 x 为火星； Q(x,y) 表示 x 与 y 相等，则：$\exists x\forall y(P(x)\wedge(P(y)\rightarrow Q(x,y)))$

原答：(1)：设 C（x）:x 是中国人；R（x）:x 居住在中国，则：

原句可用存在量词表示为：$\exists x(\neg C(x)\wedge R(x))$

原句可用全称量词表示为：$\neg\forall x(R(x)\rightarrow C(x))$

(2)：设 C（x）:x 是火星；S（x,y）:x 与 y 是不同的星球，则原句可表示为：$\exists x\forall y((C(x)\wedge\neg C(y))\wedge S(x,y))$

二、填空题（每空 2 分，共 14 分）

1．在$(1+2x)^n$的展开式中 x^k 的系数是__________，其中 (1≤k≤n)。

答：$2^k C_n^k$ $=\frac{n!2^k}{k!(n-k)!}$

T 解:由牛二$(1+ax)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^k x^k$ $(1+2x)^n$的二项展开式的第 k 项为$C_n^k(2x)^k$，故x^k的系数为$2^kC_n^k$，k 取 0,1,2…n

2．设数列{ a_n } 满足递推关系：$a_n=a_{n-1}+2$且a_1=1，则满足此递推关系a_n的解是__________。

T 答： a_n =2n-1 T 解：考试用归纳法省时间

原解：根据递推关系可知，数列$\{a_n\}$为首项为 1，公差为 2 的等差数列，因而易得$a_n=2n-1$。

3．设 G 是一个有 n 个顶点和 f 个面的连通平面图，则 G 有__________条边。

T 答：n+f-2

解析：根据欧拉定理，对连通平面图 G 有欧拉公式 n-e+f=2 成立，其中 e 为 G 的边数，点-边+面=2

则 G 的边数 e=n+f-2。

4．如果五个文科生和五个理科生排成一排，共有__________种不同的排法； 如果要求文科生和理科生交替排成一排，则共有__________种不同的排法。

答：10! ， 2*5!*5!

T 解：（1）十个人全排列 P_{10}=3628800 （2）$P_5P_5P_2$=28800

原解：将五个文科生和五个理科生排成一排，无其他要求，那么就是对这 10 个人进行全排列，共有 10!种不同的排法。如果要求文科生和理科生交替排成一排，那么可先对 5 个文科生进行全排列（5!），排完后得到 6 个空位（即两个文科生之间的空位有 4 个，再加上两边各 1 个空位），对理科生进行全排列（5!）后依次插入前五个或后五个空位中，共有 2*5!* 5!排法。

5．由 3 个 a，1 个 b，2 个 c 这六个元素组成的不同排列的总数是__________。

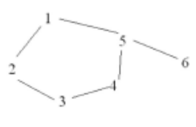
答：60

解析：首先假设这 6 个元素两两之间互不相同，则不同的排列总数有 6!个，而事实上 3 个 a 是相同的，2 个 c 是相同的，因此要除去对这两项进行全排列而多出来的排列次数，即最后结果为$\frac{6!}{3!1!2!}$=60。

6．设图 G 的顶点集合 V(G)={ v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 , v_6}，边集合为 E(G)={ v_1v_2 , v_2v_3 , v_3v_4 , v_4v_5 , v_5v_1 , v_5v_6 ,}，则 G 的不同生成树的棵数为__________。

答：5

解析：图 G 的示意图如下图所示，去掉边v_1v_2 , v_2v_3 , v_3v_4 , v_4v_5 , v_5v_1中的任意一个即可得到图 G 的生成树，因而 G 的不同生成树棵数为 5。



三、解答题（共 16 分）

1.（5 分）设用数字 2,4,6,8（数字可重复使用）可组成 a_n 个含奇数个 2，偶数个 6 且至少含一个 8 的 n 位数(n≥2)。

（1）（2 分）写出数列{ a_n} 的指数型母函数 g(x)；

（2）（3 分）求出 a_n 的表达式。

T 答：{ a_n }的指数型母函数为

(1) $G_e(x)=(x+\frac{x^3}{3!}+\cdots)(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots)(x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots)(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots)$

$=\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)(e^x-1)e^x=\frac{1}{4}(e^{4x}-e^{3x}+e^{-x}-1)$

$=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(4^n-3^n+(-1)^n)\frac{x^n}{n!}-\frac{1}{4}$

(2)故，$a_n=\frac{1}{4}(4^n-3^n+(-1)^n)$

原答：(1)该 n 位数中数字 2 的个数为 1,3,5,7,…，数字 6 的个数为 0,2,4,6,…，数字 8 的个数为 1，数字 4 的个数为 0,1,2,3,…，其他数字的个数为 0，因而 g(x)数列{a_n}的指数型母函数 g(x)为：$g(x)=\frac{a_2}{2!}x^2+\frac{a_3}{3!}x^3+\frac{a_4}{4!}x^4+\cdots+\frac{a_k}{k!}x^k+\ldots$ (2)暂无答案

2.（5 分）把 4 个相异的球放到 3 个相异的盒子中，使得不出现空盒，有多少种不同的放法？

T 答：$C_3^1C_4^2A_2$=36　含义：C_3^1先选 1 个盒子准备放 2 个球，C_4^2从 4 个球中选 2

原答：先从 4 个相异的球中选 3 个，共有 4 种选法，将这 3 个球进行全排列后依次放入 3 个盒子中，再选一个盒子将剩下的那个求放进去，这样一共有 4*3!*3 种方法，但是这种方法会有重复，需最后再除以 2，即有$\frac{4*3!*3}{2}$=36 种不同的放法。

方法一：分步处理：将 4 个球划分成 3 组，恰好有 2 个球分到一组，选 2 个球的方法数是 c(4,2)=6.

把这 3 个组放入 3 个相异的盒子，方法数恰好是 3!，根据乘法法则，方法数是 6x6=36

方法二：放球问题的公式$m!C_m^n=3!C_3^4=3!C_2^4$=36

3.（6 分）设 A ={1,2,3}，（1）计算 A 上二元关系的个数。（2）求出 A 上所有的等价关系。

T 答：（1）|A|=3　|A×A|=9　2^9=512 个二元关系

（2）等价关系与 A 上的划分一一对应。因为 A 上的划分有 3+1+1=5 个，所以 A 上的等价关系有 5 个

1 块 {123}　1 个

2 块 {12,3} {13,2} {23,1}　3 个

3 块 {1,2,3}　1 个　共 5 个

原答 1：

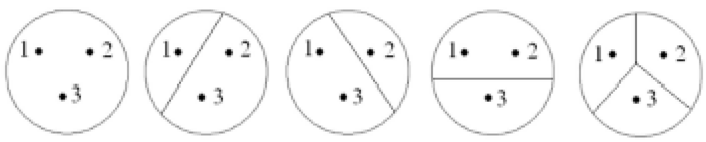
解：(1) 二元关系数是$2^{3\times3}=2^9=512$

(2) 等价关系数等于3元集的划分个数，即

$$\begin{Bmatrix}3\\1\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}3\\2\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}3\\3\end{Bmatrix}=1+3+1=5$$

原答 2：（1）由于|A|=3，所以 A 上二元关系的个数为$2^{3\times3}$=512 个。

（2）先求 A 的各种划分：只有 1 个划分块的划分π_1，具有两个划分块的划分π_2，π_3和π_4，具有 3 个划分块的划分π_5。



设对应于划分的π_i等价关系R_i，i=1,2,3,…,5，则有：

R_1={<1,1>,<1,2>,<1,3>,<2,2>,<2,1>,<2,3>,<3,3>,<3,1>,<3,2>}

R_2={<1,1>,<2,2>,<2,3>,<3,3>,<3,2>}

R_3={<2,2>,<1,1>,<1,3>,<3,3>,<3,1>}

R_4={<3,3>,<1,1>,<1,2>,<2,2>,<2,1>}

R_5={<1,1>,<2,2>,<3,3>}

四、证明题 （6 分）

证明：对任意集合 A，B，C，有$(A\cap B)\cup C = A\cap(B\cup C)$当且仅当 $C\subseteq A$。

T 答：

1. 当 $C\subseteq A$ 时，$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\ \cap(B\cup C)= A\cap(B\cup C)$

2. 当$(A\cap B)\cup C = A\cap(B\cup C)$时，假设存在 $a\in C-A$

则 $a\in(A\cap B)\cup C$ $a\notin A\cap(B\cup C)$ $(A\cap B)\cup C \neq A\cap(B\cup C)$

矛盾，因此假设错误，应当有 $C\subseteq A$

原答：1.当 $C\subseteq A$ 时，$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\ \cap(B\cup C)= A\cap(B\cup C)$

2.当$(A\cap B)\cup C = A\cap(B\cup C)$时，$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\ \cap(B\cup C)= A\cap(B\cup C)$

所以 $A= A\cup C$，所以 $C\subseteq A$。

原答：

证 充分性. 假设$C\subseteq A$,

$(A\cap B)\cup C$

$=(A\cup C)\cap(B\cup C)$ (分配律)

$= A\cap(B\cup C)$ （由$C\subseteq A$ 得 $A\cup C=A$）

必要性. 假设C不是A的子集，则存在 $x\in C$ 但 $x\notin A$.

$x\in C \Rightarrow x\in(A\cap B)\cup C$

$x\notin A \Rightarrow x\notin A\cap(B\cup C)$

这与 $(A\cap B)\cup C = A\cap(B\cup C)$ 矛盾.

2013 年数学

第一部分 数学基础课程

（共 40 分）

一、用逻辑符号表达下列语句（每小题 2 分，共 4 分）

1.发光的不都是金子。（注：给出两种表达，一种用存在量词，另一种用全称量词）

T 答：(1)：全域：一切事物 P(x)表示 x 发光； Q(x) 表示 x 为金子，则：

全称量词表示为： ¬∀x(P(x)→Q(x)) 存在量词表示为： ∃x(P(x)∧¬Q(x))

原答：(1)：设 M(x)：x 发光；N(x)：x 是金子，则：存在量词表示为：∃x(M(x)∧¬N(x)) 全称量词表示为：¬∀x(M(x) → N(x))

2.有些大学生不尊敬老人。

T 答：全域：人 P(x)表示 x 为大学生； Q(x) 表示 x 尊敬老人，则：∃x(P(x)∧¬Q(x))

原答：设 M(x)：x 是大学生； N(x)：x 不尊重老人，则：原句用逻辑符号表达为：∃x(M(x)∧N(x))

二、填空题（第 1 小题 2 分，第 2 到第 6 小题每空 2 分，共 16 分）

1．设集合 A 有 100 个元素，则 A 有__________个子集。其中有__________个子集其元素个数为奇数。

答：2^{100}，2^{99}

$$2^{100}$$

$$C_{100}^{1}+C_{100}^{3}+\ldots+C_{100}^{99}$$

(5) C(m,0)+C(m,1)+…+C(m,m)=2^m.

$(x+y)^m=x^m+C(m,1)x^{m-1}y+C(m,2)x^{m-2}y^2+\ldots+y^m$

T 解： (6) C(n,0)-C(n,1)+C(n,2)-…±C(n,n)=0.

原解：A 的子集个数=$C_{100}^{0}+C_{100}^{1}+C_{100}^{2}+C_{100}^{3}+\cdots+C_{100}^{100}=(1+1)^{100}$=$2^{100}$

A 的元素个数为奇数的子集个数=$C_{100}^{1}+C_{100}^{3}+\cdots+C_{100}^{99}=C_{99}^{0}+C_{99}^{1}+C_{99}^{2}+C_{99}^{3}+\cdots+C_{99}^{98}+C_{99}^{99}$=$2^{99}$

2．任意一个图中度数是奇数的顶点个数一定是__________。

T 答：偶数 原答：由握手定理，无向图中各顶点的度数之和为该图中边数的 2 倍，因而可推出该图中度数是奇数的顶点个数一定是偶数。

3．如果四对夫妻围圆桌就座，没有任何限制条件，共有______种不同的座法；如果这四对夫妻中的四个男士和四个女士排成一排，要求男女交替，则有_______种不同的排法；如果这四对夫妻围圆桌就座，要求夫妻相邻的座法有______种。

答：7! ；1152 ；96 **T 解：**(1) Q(n,n)=(n-1)!=7! (2)$P_4P_4P_2$ (3)3!× 2^4

原解：(1)n 个人围圆桌就坐，没有任何限制条件，则有(n-1)!种不同的座法，我们称这种排列为环排列 Q(n,n)=(n-1)!=7!；

(2)如果这四对夫妻中四个男士和四个女士排成一排，要求男女交替可先对四个男士进行全排列，让其站成一排，这样，四个男士之间出现三个空位，根据题意，这三个空位中必须为女士，四个男士排成队列两边各有一个空位，一共形成 5 个空位，可对四个女士进行全排列，然后让她们依次插入前四个空位或者后四个空位，这样，易得共有 2×4! ×4!=1152 种不同的排法；

(3)先将每对夫妻看成一个整体，对四对夫妻进行环排列，有 3!=6 种排列方法，然后在每对夫妻内部进行排序，有2^4=16 种排法，共有 6×16=96 种座法。

4. 设 G=(V,E)是顶点集为 V、边集为 E 的图。令 D(G)=$\frac{1}{|V|}\sum_{v\in V} d(v)$，则用 D(G)和|V|把|E|表示出来的表达式是__________。

这里 d(v)是顶点 v 的度数（或次数），|V|和|E|分别是 V 和 E 中所含元素的个数。

T 答：D(G) • $\frac{|V|}{2}$

解析：由握手定理：所有顶点度数之和为边数 2 倍（无向图）

|E|是图 G 中边的个数，根据握手定理，$\sum_{v\in V} d(v)=2|E|$，而 D(G)=$\frac{1}{|V|}\sum_{v\in V} d(v)$，因而|E|= D(G) • $\frac{|V|}{2}$

5. 设 Q 是一个有理数集。对任意的 a,b∈Q，定义二元运算 aΔb = (a×b) / 2，则 Q 关于运算 Δ 的单位元是__________，其中“×”是有理数中通常的乘法运算。

答：2

T 解：考代数结构 aΔb=$\frac{a\times b}{2}$=a =>b=2 隐含意：根据 a • e=e • a=a，则 aΔb=>a • $\frac{b}{2}$ =a （注：乘法单位元为 1）

原解：显然 2∈ Q，当 a=2 时，对任意的b ∈ Q，都有 aΔb=$\frac{(2\times b)}{2}$=b，则根据单位元的定义，2 就是 Q 关于运算 Δ 的单位元。

6．把 6 个相同的球分到 3 个同学手里，允许有的同学未分配到球的情况出现，则有________种不同的分法。

T 答：C(8,2) =28　　　**原答：**3^6

T 解：等价于 6 个相同的球，放不同的盒子，允许重复。且允许为空 6(球)+2(壁)=8 ，则 C(8,2) =28，8 个里选 2 个为盒壁。

原解：将每个球随机分给 3 个同学，1 个球有 3 种分法，一共 6 个球，那么一共有3^6种分法。

三、计算题（第 1 小题 3 分，第 2 小题 4 分，第 3 小题 6 分，共 13 分）

1．定义 P↑Q = ¬(P∧Q)，试仅用与非联结词↑分别表示出（1）¬P　（2）P∧Q　（3）P→Q　均要求结果简洁。

S 答：　　（提示：与非$P \uparrow Q = \neg(P \wedge Q)$　　或非$P \downarrow Q = \neg(P \vee Q)$）

(1)$\neg P \Leftrightarrow \neg(P \wedge P) \Leftrightarrow P \uparrow P$

(2)$P \wedge Q \Leftrightarrow \neg\neg(P \wedge Q)$

$\Leftrightarrow \neg(P \uparrow Q)$　　由（1）结果代入

$\Leftrightarrow (P \uparrow Q) \uparrow (P \uparrow Q)$

(3) $P \to Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$

$\Leftrightarrow \neg(P \wedge \neg Q)$

$\Leftrightarrow \neg(P \wedge (Q \uparrow Q))$

$\Leftrightarrow P \uparrow (Q \uparrow Q)$

2．设 a、b、c、d 这四个元素的全排列中不允许出现 ac 和 bd 的排列数。

T 答：考容斥原理，有限制的排列　$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2}| = 4! - |A_1| - |A_2| + |A_1 \cap A_2| = 4! - 3! - 3! + 2! = 14$

原答：先对 a、b、c、d 进行全排列，有 4!=24 种排列方法，其中出现 ac 的排列有 3!=6 种，出现 bd 的排列也是 3!=6，而这两种排列中，均有 acbd 和 bdac 这两种排列方法，所以全排列中不允许出现 ac 和 bd 的排列数为 24-6-6+2=14。

3. 用红、黄、蓝色对 1× n 的棋盘方格涂色，设涂红色方格的个数是偶数且至少有一个方格涂黄色的涂色方法数为 h_n（n 是正整数）。

（1）试确定 h_n 的指数型生成函数；　　（2）求 h_n 。

T 答：

$$G_e(x) = \left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\right)\left(x + \frac{x^2}{2!-} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)$$

$$= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)\left(e^x - 1\right)e^x = \frac{1}{2}\left(e^{3x} - e^{2x} - e^x + 1\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(3^n - 2^n + 1\right)\frac{x^n}{n!} + \frac{1}{2}$$

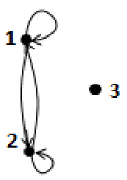
$$\boxed{a_n = \frac{1}{2}\left(3^n - 2^n + 1\right)}$$

四、证明题（第 1 小题 4 分，第 2 小题 3 分，共 7 分）

1．给出命题：“对于集合 A 上的任意关系 R，如果 R 是对称的和传递的，则 R 一定是自反的。” 若命题正确，则给出完整证明；　若命题错误，则指出错误所在，并在集合{1, 2, 3}上构造一个关系 R_1（反例）使得 R_1 是对称的和传递的，但不是自反的。

T 答：错误

R={(1,2),(2,1),(1,1),(2,2)}



注：3 没有环

2．设 A 为包含 n 个元素的有限集，R 是 A 上的关系，则必存在 s 和 t，使得R^s=R^t，且 0≤s< t≤2^{n^2} 。

T 答：由幂运算的性质

定理 7.6 设 A 为 n 元集，R 是 A 上的关系，则存在自然数 s 和 t，使得R^s=R^t

证：R 为 A 上的关系（有限的），由于|A|=n，A 上的不同关系只有2^{n^2}个

当列出 R 的各次幂（无穷的）R^0，R^1，R^2，…，$R^{2^{n^2}}$，…，

由鸽笼原理，必存在自然数 s 和 t，使得R^s=R^t

2014 年数学

第一部分 数学基础课程

（共 40 分）

一、用逻辑符号表达下列语句（每小题 2 分，共 4 分）

1．所有正整数都可以开平方。（注：所设论域均为包含一切事物的集合，下同）。

T 答：全域：全体整数　　P(x)表示 x 为正数；　Q(x) 表示 x 可以开平方，则：$\forall x(P(x)\to Q(x))$

原答：设 M(x)：x 为正数；　N(x)：x 可以开平方，则原句可化为以下形式：$\forall x(M(x)\land N(x))$

2．没有最大的自然数。

T 答：全域：全体自然数　P(x,y)表示 x<y ，则：$\forall x(\exists y P(x,y))$

原答：设 M(x)：x 为自然数；　N(x,y)：x 比 y 大，则原句可以化为以下形式：$\neg\exists x\forall y(M(x)\land M(y)\land N(x,y))$

二、填空题（第 1 小题 2 分，其他每小题 3 分，共 14 分）

1．如果$\frac{1}{(1-2x)^2}=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k$，则$a_k=$__________。

答：代公式法

$$(1-x)^{-n}=\sum_{k=0}^{\infty}C(n+k-1,k)x^k$$

$$a_kx^k=C(2+k-1,k)\left(2x\right)^k=C(k+1,k)2^kx^k$$
$$=C(k+1,k)2^kx^k=(k+1)2^kx^k$$

$$a_k=(k+1)2^k$$

1．n 个男同学和 n 个女同学参加舞会，

当第一首舞曲响起时，每个男同学要找一位女同学跳舞，n 个男同学一共有____________种方法选择女同学。

当第二首舞曲响起时，要求每个人都要更换舞伴，这时 n 个男同学选择女同学的方法数是_____________。

T 答：n! ；$D_n=n!\,(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!}$　　　T 解：(2)考完全错排

原解：(1)假设 n 个男同学按顺序选择舞伴，那么第一个男同学有 n 个选择，第二个男同学有 n-1 个选择…最后一个男同学只有 1 个选择，即对 n 个女同学进行全排列，共有 n!种选择方法。

(2) 我们再重申一下，排列$i_1i_2\ldots i_n$是排列 12…n 的一个错排，当且仅$i_1\neq 1,i_2\neq 2,\ldots,i_n\neq n$

我们曾把 n 个元素全部不同错排的数目记为D_n .当时得到的结论如下：

$$\boldsymbol{D_n=n!\,(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!}}$$

3．设 G 是 n 个顶点的简单连通平面图且每个面的度数（也称次数）都是 3，则此图的边数是__________。

T 答：e=3n-6

[定理6] （欧拉定理） 设有一个连通的平面图G，共有v个结点e条边和r个面，则欧拉公式v—e＋r=2成立。

点 - 边 + 面

$$n-e+r=2 \qquad \Rightarrow n-e+\frac{2}{3}e=2$$
$$3r=2e \qquad \Rightarrow e=3n-6$$

4．设 G 是有 n 个顶点的图，如果 n 是奇数，则 G 的正常边着色数是__________。

答：3

（思路：n 为奇数， 三角形，五边形，均着 3 个色。 另，边染色难于点染色。）

5．设a_n满足的递推关系和初始条件分别为$a_n=3a_{n-1}+1$，$a_1=2$，则a_n的精确表达式是__________。

T 解：根据母函数 a_2=3*2+1　a_3=3*3*2+3*1+1　　$1+3+3^2+\ldots+3^{n-1}+3^{n-1}$

$a_1=2,a_2=7,a_3=22,a_4=67\ldots$

$a_1=2;$

$a_2=3\times2+1;$

$a_3=3^2\times2+3+1;$

$a_4=3^3\times2+3^2+3+1;$

$a_n=3^{n-1}\times2+3^{n-1}+3^{n-2}+\ldots+1=3^{n-1}\times2+\dfrac{3^{n-1}-1}{2}$

原解：$3^n\times2+\frac{(3^n-1)}{2}$

由递推关系可知：，a_n=3a_{n-1}+1，a_{n-1}=3a_{n-2}+1 则a_n=3(3$a_{n-2}+1$)+1=$3^2a_{n-2}+3+1$，同理，

a_n=$3^3a_{n-3}+3^2+3+1$=$3^4a_{n-3}+3^3+3^2+3+1=\cdots$=$3^na_1+3^{n-1}+\cdots+3^1+3^0$=$3^na_{n-3}$=$3^n\times2+\frac{(3^n-1)}{2}$

三、计算题（共 12 分）

1．(3 分) 设集合 A={1,2}，则 B={a,b,c}。

（1）问从 A 到 B 有多少个单射函数。

（2）试写出从 A 到 B 所有非单射的函数。

答：(1)　若一个 A 到 B 的函数为单射函数，则 A 中的两个元素分别映射 B 中的两个不同元素，则共有A_3^2=3×2=6 种不同的映射方法，则从 A 到 B 有 6 个单射函数。

(2) 从 A 到 B 所有函数共有3^2=9 个，单射函数有 6 个，所以非单射函数有 9-6=3 个，这三个非单射函数可表示如下：

① g(1)=a，g(2)=a；

② g(1)=b，g(2)=b；

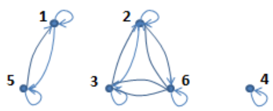
③ g(1)=c，g(2)=c；

2．(3 分)已知集合 A={1,2,…,6}上的等价关系 R 定义为:

R=I_A ∪{<1,5>,<5,1><2,3>,<3,2>,<2,6>,<6,2>,<3,6>,<6,3>} 求出由 R 诱导的 A 的划分（即由 R 的商集诱导的划分）。

T 答：因I_A为恒等关系，元素为所有的关系，即{<1, 1>, <2, 2>, …<6, 6>}

∵等价关系和划分一一对应



∴[1]={1, 5}

[2]={2, 3, 6}

[4]={4}

（提示：恒等关系，是满足且只满足自身与自身的关系，当 A={a, b, c}，其上关系 R={<a, a>, <b, b>, <c, c>}，对应关系矩阵是单位矩阵。）

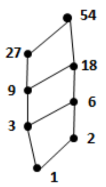
3．(6 分)已知 A 是由 54 的所有因子组成的集合，设%为 A 上的整除关系，

（1）画出偏序集<A,%>的哈斯图。

（2）确定 A 中最长链的长度，并按字典序写出 A 中所有最长的链。

（3）A 中元素至少可以划分成多少个互不相交的反链，并完整写出这些反链。

T 答：(1)偏序关系<A , R>　　54=2*3^3 => A={1,3,9,27,2,6,18,54}　　哈斯图如下，



(2) 最长链长度 5，最长链有 {1,2,6,18,54} , {1,3,6,18,54} , {1,3,9,27,54} ,{1,3,9,18,54}

(3) 最少需要分成 5 个反链{1} ,{54} ,{2,3} ,{6,9} ,{18,27}

（反链应用：例如 A 表示一个单位里所有工作人员的集合，表示领导关系，则<A>为一偏序集，其中部份工作人员之间有领导关系的组成一个链。还有部份工作人员没有领导关系的组成一个反链。那么找没有利害关系的人可以从反链里找）

四、解答题（每小题 5 分，共 10 分）

1．求方程$t_1+t_2+t_3+t_4$=20 整数解的个数，其中$t_1\geq 3$，$t_2\geq 1$，$t_3\geq 0$，$t_4\geq 5$。

法一：根据母函数，整数分解

$$G(x)=(x^3+x^4+x^5+\cdots)(x+x^2+x^3+\cdots)$$
$$(1+x+x^2+\cdots)(x^5+x^6+x^7+\cdots)$$
$$=x^9(1+x+x^2+\cdots)^4$$
$$=x^9(\frac{1}{1-x})^4=x^9(1-x)^{-4} \qquad \Leftarrow (1-x)^{-n}=\sum_{k=0}^{\infty}C(n+k-1,k)x^k$$
$$=x^9\sum_{k=0}^{\infty}C(4+k-1,k)x^k$$
$$C(4+11-1,11)=C(14,11)=C(14,3)=\frac{14\times 13\times 12}{3!}=364$$

法二： 当t_1、t_2、t_3均取得最小值即t_1=3，t_2=1，t_3=0 时，t_4取得最大值，且t_4=16，则t_4的取值范围为 5~6 的整数，共有 12 种取值情况，我们对这 12 种取值情况进行讨论：

①当t_4=16 时，t_1、t_2、t_3只有 1 种取值；

②当t_4=15 时，我们可以认为①中的t_4减了 1，那么这个 1 要加到另外三个数中，共有 3 种方法；

③当t_4=14 时，我们可以认为①中的t_4减了 2 个 1，那么这 2 个 1 要分别加到另外三个数中，共有3^2种方法；

…

⑫当t_4=5 时，我们可以认为①中的t_4减了 11 个 1，那么这 11 个 1 要分别加到另外三个数中，共有3^{11}种方法。

综上所述，方程$t_1+t_2+t_3+t_4$=20 整数解的个数为 1+3+3^2+...+3^{11} $=\frac{(3^{12}-1)}{2}$

2．设 S={∞ • 2, ∞ • 4, ∞ • 5, ∞ • 7, ∞ • 9} 是给定的重集，其中 2,4,5,7,9 是 S 中的五个不同元素，且每个元素在集合中可以有无穷多。设h_n表示从 S 中取 n 个元素（可以重复取）且要求 2 和 4 出现偶数次的排列数，求h_n。

T 答：排列问题 – 用指数型母函数

G_e(x)= $(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots)^2\cdot(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots)^3$

=$(\frac{e^x+e^{-x}}{2})^2e^{3x}$=$\frac{1}{4}(e^x+2e^{3x}+e^{5x})$

= $\frac{1}{4}(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}+2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3x)^n}{n!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(5x)^n}{n!})$

= $\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(1+2\times 3^n+5^n)\frac{x^n}{n!}$

故，h_n= $\frac{1}{4}$(1+2× 3^n+5^n)

类似例题：

例5.3由1，2，3，4，5五个数字组成的n位数，求其中4，5出现偶数次，1，2，3出现次数不限的数的个数a_n.

解：$\{a_n\}$的指数型母函数为

$$G_e(x)=\left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\right)^2\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)^3$$
$$=\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2e^{3x}=\frac{1}{4}\left(e^x+2e^{3x}+e^{5x}\right)=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+2\times 3^n+5^n\right)\frac{x^n}{n!}$$
$$\boxed{a_n=\frac{1}{4}\left(1+2\times 3^n+5^n\right)}$$

2015 年数学（暂无）

2016 年数学（暂无）

2017 年数学

第一部分 数学基础课程

(共 40 分)

一、逻辑化语句（论域为一切事物，共 5 分）

1、（2 分）只有天不下雨，我才开车出行

S 答：全域：一切事物 C(x)：x 天不下雨； B(x)：x 开车出行，则：∀x(C(x)→B (x))

2、（3 分）猫必捉鼠（要求写出两种形式，一种用全称量词，一种用存在量词）

T 答：全域：一切事物 C(x)表示 x 是猫； B(x) x 捉老鼠，则：

全称量词表示为： ∀xC(x)→B (x)

存在量词表示为： ¬(∃xC(x)∧¬B(x))

二、填空（每项 2 分，共 8 分）

1、 函数 f(t) =（1-2t）$^{-7}$ 中 t^5 的系数是___________

T 答：$C_{11}^{5}2^5$

直接套公式 $(1-2x)^{-7}$=$\sum_{k=0}^{\infty} C(7+k-1,k)(2x)^k$ 因为 k=5，得$C_{11}^{5}2^5$

2、 设 T 是有 K 个顶点的树，则 T 的着色数是___________

T 答：2 个

3、 一个饭店提供 3 种不同的甜点，假设顾客小王进饭店时，每种甜点足够多，则小王选取 4 个甜点的方式有_______

T 答 1：直接列 3+C_3^2*3+C_3^1 = 15

T 答 2：母函数 $(1+x+x^2+\cdots)^3$=$(\frac{1}{1-x})^3$=$(1-x)^{-3}$=$\sum C_{3+k-1}^{k}x^k$ 因 k=4 ，得C_6^2= 15

4、 设 m=$P_1^{t_1}P_2^{t_2}\dots P_1^{t_k}$ 是 m 的唯一素数分解，其中$P_1P_2\dots P_k$是不同的素数。

定义：函数 *u*(*m*)=$\begin{cases} 1 & \text{如} m=1 \\ 0 & \text{如} \exists i \in \{1,2,\dots k\} \text{使} t_i>1\text{（或} t_i \ge 2\text{）} \\ (-1)^k & \text{如} \forall i \in \{1,2,\dots k\}\text{，} t_i=1 \end{cases}$

对于大于 1 的整数 n， $\sum_{d/_n} u(d)$=___________

T 答：0

解析：u=$P_1^{t_1}P_2^{t_2}\dots P_1^{t_k}$

d=$P_1^{l_1}P_2^{l_2}\dots P_1^{l_k}$

$0 \le l_1 \le t_1$

$0 \le l_2 \le t_2$

$$\sum u(d)=\sum(-1)^{l_1+l_2+\cdots+l_k}=\sum C_n^k(-1)^k=(1+(-1))^n=0$$

考试时，举例试就行

(1) n=1 时，u(1)=1

(2) n=2 时，d=1,2 , u(2) =$(-1)^1$=-1

(3) n=2 时，d=1,3 , u(3) =$(-1)^1$=-1

(4) n=4 时，d=1,2,4 , $4=2^2$, u(4) =0

(5) n=6 时，d=1,2,3,6 , $\sum u(6)$= u(1)+ u(2)+ u(3)+ u(6)=1+$(-1)^1$+$(-1)^1$+$(-1)^2$=1+(-1)+(-1)+1=0

三、计算题（要求写出详细运算步骤，共 15 分）

1、 (5 分)求在[99 , 1000]范围内不能被 5、6、8 中任何一个数整除的数的个数。

答：根据容斥原理

1000-98=902个 （1~1000 中除去1~98）

A_i :被i除 i=5,6,8

则902-$|A_5|$-$|A_6|$-$|A_8|$+ $|A_5 \cap A_6|$+ $|A_5 \cap A_8|$+ $|A_6 \cap A_8|$ - $|A_5 \cap A_6 \cap A_8|$

$|A_5|=[\frac{902}{5}]=180$ $|A_6|=[\frac{902}{6}]=150$ $|A_8|=[\frac{902}{8}]=112$

$|A_5 \cap A_6| =[\frac{902}{30}]=30$ $|A_5 \cap A_8| =[\frac{902}{40}]=22$ $|A_6 \cap A_8| =[\frac{902}{24}]=37$

$|A_5 \cap A_6 \cap A_8| =[\frac{902}{120}]=7$ (注：被5、6、8整除的数有30、40、24、120)

=902-180-150-112+30+22+37-7=542

故，不能被i整除的整数个数为542个

2、(4 分)求¬(P ↔ Q) ∧ (¬P → R)的主析取范式和主合取范式。(要求分别用极大项和极小项，以及相应的简介形式表示。)

S 答：P、Q、R 三个命题变项形成的极小项和极大项由下表给出：

P	Q	R	¬P	P ↔ Q	¬(P ↔ Q)	¬P → R	¬(P ↔ Q) ∧ (¬P → R)=A	名称
0	0	0	1	1	0	0	0	m_0
0	0	1	1	1	0	1	0	m_1
0	1	0	1	0	1	0	0	m_2
0	1	1	1	0	1	1	1	m_3
1	0	0	0	0	1	1	1	m_4
1	0	1	0	0	1	1	1	m_5
1	1	0	0	1	0	1	0	m_6
1	1	1	0	1	0	1	0	m_7

A=¬(P ↔ Q) ∧ (¬P → R)的主析取范式为：$m_3 \vee m_4 \vee m_5$

A=¬(P ↔ Q) ∧ (¬P → R)的主合取范式为：$M_0 \wedge M_1 \wedge M_2 \wedge M_6 \wedge M_7$

3、(6 分)有 t 个球排一排，t ≥3, 用红橙黄绿蓝,5 种颜色染色,每个球一种颜色，要求染红、橙、黄的球至少出现一个。有多少种方法？

答：根据指数型母函数

$(x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots)^3\ (1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots)^2$

$= (e^x-1)^3 * e^{2x}$

$=(e^{3x}-3e^{2x}+3e^x-1)\, e^{2x}$

$=e^{5x}-3e^{4x}+3e^{2x}-e^x$

$=\sum(5^k-3*4^k+3*2^k-1)\frac{x^k}{k!}$

四、解答题（8 分）

设教室有 8 个座位排成一排。八位同学 A_1，A_2，⋯，A_8 需要坐在这里上两节课。设第一节课 A_i 坐在第 i 个座位上。

（1）若第二节课要求 A_1~A_4 与自己第一节课时位置不同，A_5~A_8 与第一节课相同，有多少种坐法？

（2）第二节课要求只有四位同学与第一节课不同，但不指定是哪四位。有多少种坐法？

答: (1) 根据完全错排 $D_4 = 4!\,(1-1+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!})$

(2) $C_8^4\, D_4$

(思路：先挑4个不动，剩下4个动的)

五、证明题（4 分）

设⊕表示两个集合的对称差。对于三个集合 A、B、C，已知 A⊕B=A⊕C，证明 B=C

T 答： （1）∀x ∈ B

$\left.\begin{array}{l}\text{若 } x\in A \wedge x\in B \Rightarrow x \notin A\oplus B=A\oplus C \Rightarrow x\in C \\ \text{若 } x \notin A \wedge x\in B \Rightarrow x\in A\oplus B=A\oplus C \Rightarrow x\in C\end{array}\right\}$则$x \in C \Rightarrow B \subseteq C$

（2）∀x ∈ C

$\left.\begin{array}{l}\text{若 } x\in A \wedge x\in C \Rightarrow x \notin A\oplus C = A\oplus B \Rightarrow x\in B \\ \text{若 } x \notin A \wedge x\in C \Rightarrow x\in A\oplus C = A\oplus B \Rightarrow x\in B\end{array}\right\}$则 $x\in B \Rightarrow C \subseteq B$

那么，B=C

S 答：用反证法，假设 B≠ C，由左边 A⊕B=A⊕C ⇔ A⊕(A⊕B)= A⊕(A⊕C)，利用结合律(A⊕A)⊕B= (A⊕A)⊕C

又因为 A⊕A=∅，A⊕∅ = A，则∅⊕B= ∅⊕C ⇔ B=C，结果与假设 B≠ C 矛盾，故结论成立。