ロジスティクス工学

03 グラフ理論，モデルとデータの分離

宮本 裕一郎

miyamoto **あっと** sophia.ac.jp

上智大学 理工学部 情報理工学科

目次

グラフ理論

グラフ理論

モデルとデータの分離

モデルとデータの分離

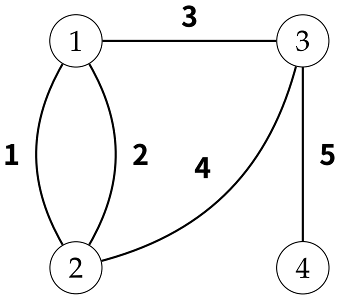
ロジスティクスにおける最適化

ロジスティクスにおける最適化

- とある物資の輸送問題のように「拠点を丸で輸送経路を線で表現するとわかりやすい」という場面がロジスティクスでは多い．
- 次は，そのような場面で便利なグラフ理論を少しだけ学ぶ．

グラフとは？

頂点[1]（vertex）を**枝**[2]（edge）で結んだものをグラフという．



グラフは

- 交通網
- 通信網
- 友達関係
- Web ページのリンク
- 状態遷移の関係

などの抽象化としてよく用いられる．

[1] 点，節点，node, などと呼ばれることもある．
[2] 辺，リンク（link），アーク（arc）などと呼ばれることもある．

グラフの定義

定義 (グラフ)

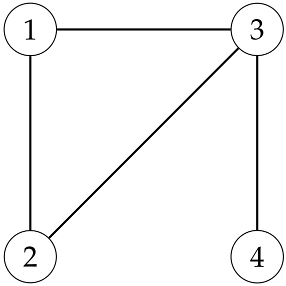
集合 V と集合 E と接続関数 $\Psi\colon E \to \{X \subset V \mid |X| = 2\}$ の 3 つ組 (V, E, Ψ) を**グラフ（graph）**という[3]．集合 V を**頂点集合（vertices）**，集合 E を**枝集合（edges）**という．

- グラフ G が与えられたとき，その頂点集合を $V(G)$，枝集合を $E(G)$ で表す．
- グラフ G において，$\Psi(e) = \{v, w\}$ である枝 $e \in E(G)$ は頂点 v と w を**結んで（join）いる**という．このとき，v と w はグラフ G において**隣接（adjacent）**しているという．またこのとき，v と w は枝 e の**端点（end point）**であるという．
- $e, e' \in E(G)$ が $e \neq e'$ であるにもかかわらず $\Psi(e) = \Psi(e')$ であるとき，e と e' は **parallel** であるという．
- Parallel な枝を含まないグラフを**単純グラフ（simple graph）**という．

[3] 集合 V, E は有限集合とは限らない．しかし，ロジスティクスの文脈では多くの場合において有限集合である．

単純グラフの定義

例 (単純グラフ G の図)



- ロジスティクスの文脈において現れるグラフの多くは単純グラフである．
- 単純グラフは parallel な枝を含まないので，接続関数の値をそのまま枝集合の要素としても正確性は失われない．よって単純グラフは簡便に以下のように定義できる．

定義 (単純グラフ)

単純グラフ G は頂点集合 V と枝集合 $E \subset \{\{v,w\} \mid v \in V,\ w \in V,\ v \neq w\}$ の 2 つからなる組 (V,E) である．

例 (単純グラフ G の式)

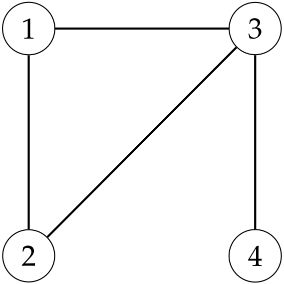
$$V(G) = \{ ①,②,③,④ \},$$
$$E(G) = \{\{ ①,② \},\ \{ ①,③ \},\ \{ ②,③ \},\ \{ ③,④ \}\})$$

部分グラフ

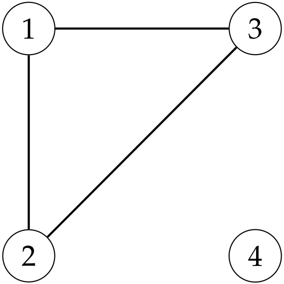
定義 (部分グラフ)

グラフ G に対して，$V(H) \subset V(G)$ かつ $E(H) \subset E(G)$ となるグラフ H を G の部分グラフ（subgraph）という．

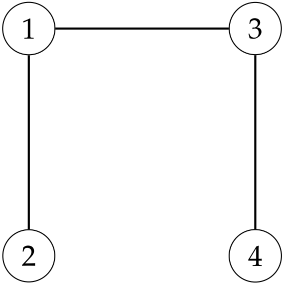
例 (グラフ G)



例 (G の部分グラフ H)



例 (G の部分グラフ H')

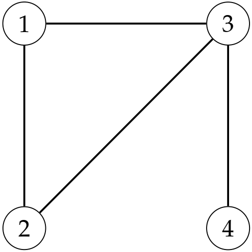


誘導部分グラフ

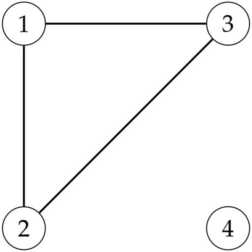
定義 (誘導部分グラフ)

グラフ G の部分グラフ H のうち，$E(H) = \{(v,w) \in E(G) \mid v,w \in V(H)\}$ を満たすものを**誘導部分グラフ（induced subgraph）**という．またこのとき，H は $V(H)$ によって誘導された部分グラフであるともいう．
グラフ G とその頂点部分集合 $S \subset V(G)$ が与えられたとき，S によって誘導される G の部分グラフを $G[S]$ で表す．

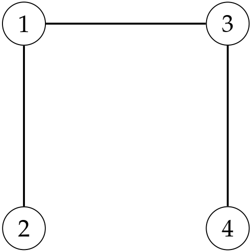
例 (グラフ G)



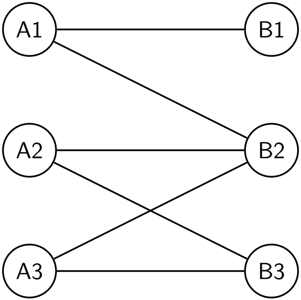
例 (G の誘導部分グラフ H)



例 (G の誘導部分グラフではない部分グラフ H')



2 部グラフ，接続枝集合



定義 (2 部グラフ)

グラフ G の頂点集合 $V(G)$ の分割 A, B（つまり $A \cup B = V(G)$, $A \cap B = \emptyset$）のうち，A により誘導される部分グラフも B により誘導される部分グラフも枝がないものを 2 部分割（bipartition）という．2 部分割を持つグラフを 2 部グラフ（bipartite graph）という．

- **グラフ G において，頂点 $v \in V(G)$ に接続する枝の集合を $\delta(v)$ で表す．すなわち，$\delta(v) = \{\{v, w\} \in E(G)\}$ である．左図のグラフならば，例えば，**
  - $\delta(\mathrm{A1}) = \{\{\mathrm{A1}, \mathrm{B1}\}, \{\mathrm{A1}, \mathrm{B2}\}\}$，$\delta(\mathrm{B2}) = \{\{\mathrm{A1}, \mathrm{B2}\}, \{\mathrm{A2}, \mathrm{B2}\}, \{\mathrm{A3}, \mathrm{B2}\}\}$

  である．

グラフ理論

グラフ理論

モデルとデータの分離

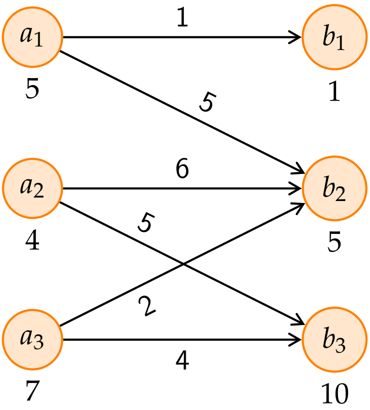
モデルとデータの分離

ロジスティクスにおける最適化

ロジスティクスにおける最適化

とある物資の輸送計画問題再掲

- とある物資の輸送計画問題をもう一度確認すると，以下のものである．



$$
\begin{aligned}
\text{min.} \quad & 1x(a_1, b_1) + 5x(a_1, b_2) + 6x(a_2, b_2) \\
& + 5x(a_2, b_3) + 2x(a_3, b_2) + 4x(a_3, b_3) \\
\text{s. t.} \quad & x(a_1, b_1) + x(a_1, b_2) \leq 5, \\
& x(a_2, b_2) + x(a_2, b_3) \leq 4, \\
& x(a_3, b_2) + x(a_3, b_3) \leq 7, \\
& x(a_1, b_1) \geq 1, \\
& x(a_1, b_2) + x(a_2, b_2) + x(a_3, b_2) \geq 5, \\
& x(a_2, b_3) + x(a_3, b_3) \geq 10, \\
& x(a_1, b_1) \geq 0,\ x(a_1, b_2) \geq 0, \\
& x(a_2, b_2) \geq 0,\ x(a_2, b_3) \geq 0, \\
& x(a_3, b_2) \geq 0,\ x(a_3, b_3) \geq 0.
\end{aligned}
$$

とある物資の輸送計画問題の数値例

- ここでグラフ理論の記号を用いて，数理最適化問題として記述する際に必要な数値などを書き下してみる．
- 供給点の集合を $A = \{a_1, a_2, a_3\}$，供給量を $s\colon A \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ で表すと，$s(a_1) = 5,\ s(a_2) = 4,\ s(a_3) = 7$ である．
- 需要点の集合を $B = \{b_1, b_2, b_3\}$，需要量を $d\colon B \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ で表すと，$d(b_1) = 1,\ d(b_2) = 5,\ d(b_3) = 10$ である．
- 次に，可能な輸送経路が 2 部グラフ G であるとすると，
  $V(G) = A \cup B$，
  $E(G) = \{\{a_1, b_1\},\ \{a_1, b_2\},\ \{a_2, b_2\},\ \{a_2, b_3\},\ \{a_3, b_2\},\ \{a_3, b_3\}\}$
  である．
- 最後に，単位物資あたりの輸送費用を $c\colon E(G) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ で表すと，$c(\{a_1, b_1\}) = 1,\ c(\{a_1, b_2\}) = 5,\ c(\{a_2, b_2\}) = 6,\ c(\{a_2, b_3\}) = 5,\ c(\{a_3, b_2\}) = 2,\ c(\{a_3, b_3\}) = 4$ である．

入力データを記号にしたとある物資の輸送計画問題

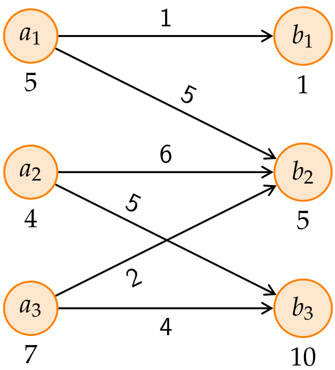
- **以上を踏まえて，もう一度とある物資の輸送計画問題を書き下すと以下の通りである．**
- **入力データ**
  - **供給点の集合** A，**供給量** $s\colon A \to \mathbb{R}_{\geq 0}$，
  - **需要点の集合** B，**需要量** $d\colon B \to \mathbb{R}_{\geq 0}$，
  - 2 **部グラフ** G，**ただし** $V(G) = A \cup B$，
  - **費用** $c\colon E(G) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$．
- **数理最適化問題**:

$$
\begin{aligned}
\text{min.}\quad & \sum_{\{a,b\}\in E(G)} c(\{a,b\}) \cdot x(a,b) \\
\text{s. t.}\quad & \sum_{\{a,b\}\in \delta(a)} x(a,b) \leq s(a) \quad (a \in A), \\
& \sum_{\{a,b\}\in \delta(b)} x(a,b) \geq d(b) \quad (b \in B), \\
& x(a,b) \geq 0 \quad (\{a,b\} \in E(G)).
\end{aligned}
$$

モデルとデータの分離

- 前ページにおけるとある物資の輸送計画問題の記述は「入力データ」と「数理最適化問題の形」を分離した記述と言える．
- 「入力データ」のことを単に「データ」あるいは問題例とよぶこともある．「数理最適化問題の形」のことを「モデル」とよぶこともある．
- データが変わっても，モデルが同じならば同じ解き方が通用する．
- モデルを作る者と，データを入力する者で分業できる．
- ちなみに，とある物資の輸送問題は一般に**ヒッチコック型輸送問題（Hitchcock problem）** [Hitchcock, 1941] とよばれる．

ヒッチコック型輸送問題



問題例 2部グラフ G
$(V(G) = A \cup B,\ E(G) \subset A \times B)$,
供給量 $s\colon A \to \mathbb{R}_{\geq 0}$,
需要量 $d\colon B \to \mathbb{R}_{\geq 0}$,
枝費用 $c\colon E(G) \to \mathbb{R}$.

回答 輸送量 $x\colon E(G) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ のうち,

$$\sum_{e \in \delta(a)} x(e) \leq s(a) \quad (a \in A),$$

$$\sum_{a \in \delta(b)} x(e) \geq d(b) \quad (b \in B),$$

$$f(e) \geq 0 \quad (e \in E(G))$$

を満たし

$$\sum_{e \in E(G)} c(e) \cdot x(e)$$

を最小にするもの.

グラフ理論

グラフ理論

モデルとデータの分離

モデルとデータの分離

ロジスティクスにおける最適化

ロジスティクスにおける最適化

ロジスティクスにおける最適化

- まず問題を捉える（理解する）．
- 具体的な問題を式で表現してみる．
- ソルバーなどで解いてみる．
- モデルとデータを分離してみる．これは問題の一般化と捉えることもできる．
- 他の問題に適用してみる．

参考文献

[Hitchcock, 1941] Hitchcock, F. L. (1941).
The distribution of a product from several sources to numerous localities.
Studies in Applied Mathematics, 20(1-4):224–230.