ロジスティクス工学

03 最小費用流と整数最適化

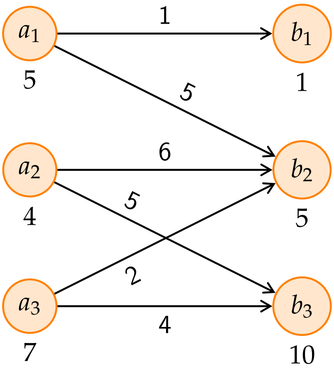
宮本 裕一郎
miyamoto **あっと** sophia.ac.jp

上智大学 理工学部 情報理工学科

目次

最小費用流と線形最適化

ヒッチコック型輸送問題【再掲】



問題例 2 部グラフ G
$(V(G) = A \cup B,\ E(G) \subset A \times B)$，
供給量 $s\colon A \to \mathbb{R}_{\geq 0}$，
需要量 $d\colon B \to \mathbb{R}_{\geq 0}$，
枝費用 $c\colon E(G) \to \mathbb{R}$．

回答 輸送量 $x\colon E(G) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ のうち，

$$\sum_{e \in \delta(a)} x(e) \leq s(a) \quad (a \in A),$$

$$\sum_{a \in \delta(b)} x(e) \geq d(b) \quad (b \in B),$$

$$f(e) \geq 0 \quad (e \in E(G))$$

を満たし

$$\sum_{e \in E(G)} c(e) \cdot x(e)$$

を最小にするもの．

ヒッチコック型輸送問題からロジスティクス・ネットワークへ

- 前回紹介したヒッチコック型輸送問題では，需要点の集合と供給点の集合が完全に分かれていた．
- よって，与えられたグラフの枝を物資がどの方向に流れるかは自明であった．
- ロジスティクス・ネットワーク（あるいはサプライ・チェイン）では一般に，需要点の集合と供給点の集合を完全にわけられるとは限らない．ある需要点が別の需要点の供給点となっている場合もあり得る．
- そのような問題を扱うため，まず，有向グラフを導入する．

有向グラフの定義

定義 (有向グラフ)

集合 V と集合 E と接続関数 $\Psi\colon E \to V \times V$ の 3 つ組 (V, E, Ψ) を有向グラフ（directed graph or digraph）という[1]．集合 V を頂点集合（vertices），集合 E を（有向）枝集合（(directed) edges）という．

- **有向グラフ G が与えられたとき，その頂点集合を $V(G)$，枝集合を $E(G)$ で表す．**
- **有向グラフ G において，枝 $e \in E(G)$ は $\Psi(e) = (v, w)$ であるとき頂点 v と w を結んで（join）いるという．このとき，v と w は有向グラフ G において隣接（adjacent）しているという．またこのとき，v と w は枝 e の端点（end point）であるという．**
- **有向グラフの枝には向きがあるので，枝 $e \in E(G)$ は $\Psi(e) = (v, w)$ であるとき v から出ている，そして w に入っているという．またこのとき，v を e の tail，w を e の head という．**

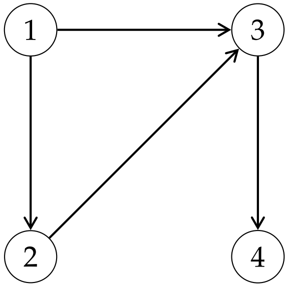
[1] ここでも，集合 V, E は有限集合とは限らない．しかし，ロジスティクスの文脈では多くの場合において有限集合である．

有向グラフの用語

- 有向グラフに対して，以前定義した「枝に向きがないグラフ」を**無向グラフ（undirected graph）**という．
- 有向枝 e の端点が同一であるとき，その枝を**自己ループ（self loop あるいは単に loop）**という．また，$e, e' \in E(G)$ が $e \neq e'$ であるにもかかわらず $\Psi(e) = \Psi(e')$ であるとき，e と e' は parallel であるという．
- Parallel な枝を含まない有向グラフを**単純有向グラフ（simple directed graph あるいは simple digraph）**という．

単純有向グラフの定義

例 (単純有向グラフ G の図)



- 単純有向グラフは簡便に以下のように定義できる．

定義 (単純有向グラフ)

単純有向グラフ G は頂点集合 V と枝集合 $E \subset \{(v,w) \mid v \in V,\ w \in V\}$ の 2 つからなる組 (V,E) である．

例 (単純有向グラフ G の式)

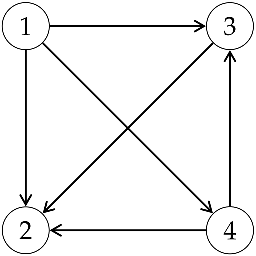
$$V(G) = \{ ①,②,③,④ \},\ E(G) = \{(①,②),\ (①,③),\ (②,③),\ (③,④)\}$$

部分グラフ

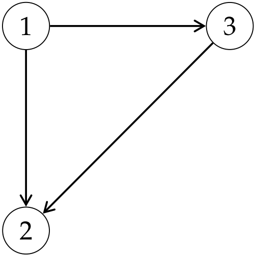
定義 (部分グラフ)

有向グラフ G に対して，$V(H) \subset V(G)$ かつ $E(H) \subset E(G)$ となるグラフ H を G の部分グラフ（subgraph）という．

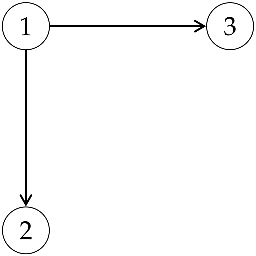
例 (有向グラフ G)



例 (G の部分グラフ H)



例 (G の部分グラフ H')

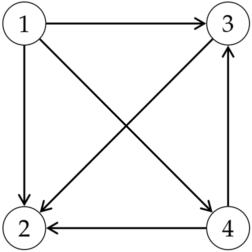


誘導部分グラフ

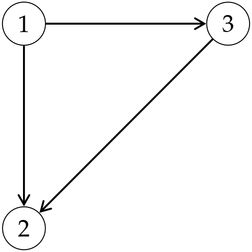
定義 (誘導部分グラフ)

有向グラフ G の部分グラフ H のうち，$E(H) = \{(v,w) \in E(G) \mid v,w \in V(H)\}$ を満たすものを誘導部分グラフ（induced subgraph）という．またこのとき，H は $V(H)$ によって誘導された部分グラフであるともいう．
グラフ G とその頂点部分集合 $S \subset V(G)$ が与えられたとき，S によって誘導される G の部分グラフを $G[S]$ で表す．

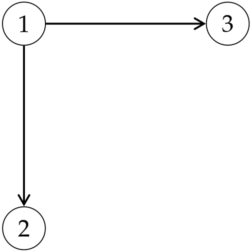
例 (有向グラフ G)



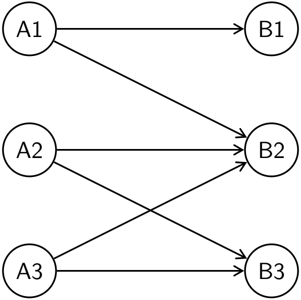
例 (G の誘導部分グラフ H)



例 (G の誘導部分グラフではない部分グラフ H')



接続枝集合



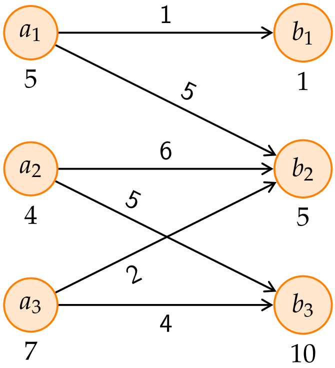
- グラフ G において頂点 $v \in V(G)$ から出る枝の集合を $\delta^+(v)$ で表す．すなわち，$\delta^+(v) = \{(v,w) \in E(G)\}$ である．左図のグラフならば，例えば，
  - $\delta^+(\mathrm{A1}) = \{(\mathrm{A1},\mathrm{B1}),\ (\mathrm{A1},\mathrm{B2})\}$，$\delta^+(\mathrm{B2}) = \emptyset$

  である．
- 同様に，グラフ G において頂点 $v \in V(G)$ に入る枝の集合を $\delta^-(v)$ で表す．すなわち，$\delta^-(v) = \{(w,v) \in E(G)\}$ である．左図のグラフならば，例えば，
  - $\delta^-(\mathrm{A1}) = \emptyset$，$\delta^-(\mathrm{B3}) = \{(\mathrm{A2},\mathrm{B3}),\ (\mathrm{A3},\mathrm{B3})\}$

  である．

有向グラフ版ヒッチコック型輸送問題

ヒッチコック型輸送問題を有向グラフの言葉で表すと以下の通りである．



問題例 有向グラフ G
($V(G) = A \cup B,\ E(G) \subset A \times B$)，
供給量 $s\colon A \to \mathbb{R}_{\geq 0}$，
需要量 $d\colon B \to \mathbb{R}_{\geq 0}$，
枝費用 $c\colon E(G) \to \mathbb{R}$．

回答 輸送量 $x\colon E(G) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ のうち，

$$\sum_{e \in \delta^+(a)} x(e) \leq s(a) \quad (a \in A),$$

$$\sum_{a \in \delta^-(b)} x(e) \geq d(b) \quad (b \in B),$$

$$f(e) \geq 0 \quad (e \in E(G))$$

を満たし

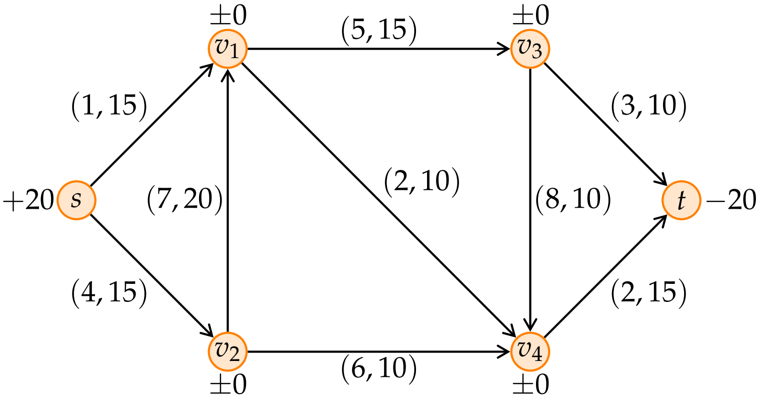
$$\sum_{e \in E(G)} c(e) \cdot x(e)$$

を最小にするもの．

最小費用流と線形最適化

- 有向グラフ
- 最小費用流問題
- 線形最適化問題
- 演習問題

最小費用流問題の例



- 頂点の近くの数値は，その頂点における供給量である．
- 枝の近くのカッコは（単位流量あたりの費用，容量）である．
- 供給量の条件を満たす（s から t への）総費用最小の定常流は？

最小費用流問題

問題例 有向グラフ G，
枝容量 $u\colon E(G) \to \mathbb{R}_{>0}$，
枝費用 $c\colon E(G) \to \mathbb{R}$，
点供給 $b\colon V(G) \to \mathbb{R}$（ただし $\sum_{v \in V(G)} b(v) = 0$）

回答 流量 $f\colon E(G) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ のうち，

$$\sum_{e \in \delta^+(v)} f(e) - \sum_{e \in \delta^-(v)} f(e) = b(v) \qquad (v \in V(G)), \qquad (1)$$

$$f(e) \leq u(e) \qquad (e \in E(G)) \qquad (2)$$

を満たし
$$\sum_{e \in E(G)} c(e) \cdot f(e)$$
を最小にするもの．

式 (??) は「流量整合性条件」，式 (??) は「容量制約」などとよばれる．

最小費用流問題の問題例の数式表現

前前ページの問題例を数式で表すと

$V(G) = \{s,\ v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4,\ t\}$,

$E(G) =$

$\{(s, v_1),\ (s, v_2),\ (v_1, v_3),\ (v_1, v_4),\ (v_2, v_1),\ (v_2, v_4),\ (v_3, v_4),\ (v_3, t),\ (v_4, t)\}$

$u((s, v_1)) = u((s, v_2)) = u((v_1, v_3)) = u((v_4, t)) = 15$,

$u((v_1, v_4)) = u((v_2, v_4)) = u((v_3, v_4)) = u((v_3, t)) = 10,\ u((v_2, v_1)) =$

20,

$c((s, v_1)) = 1,\ c((s, v_2)) = 4,\ c((v_1, v_3)) = 5$,

$c((v_1, v_4)) = 2,\ c((v_2, v_1)) = 7,\ c((v_2, v_4)) = 6$,

$c((v_3, v_4)) = 8,\ c((v_3, t)) = 3,\ c((v_4, t)) = 2$,

$b(s) = 20,\ b(t) = -20,\ b(v_1) = b(v_2) = b(v_3) = b(v_4) = 0$,

である．

線形最適化問題

- ヒッチコック型輸送問題や最小費用流問題のように，目的関数も制約の式も一次式（線形式）で表せる数理最適化問題を**線形最適化問題（Linear optimization Problem）**という．
- 詳細は省略するが，線形最適化問題は効率的に（短い計算時間で）解ける[2]．

[2] 詳細に興味がある方は大学院科目の「数理最適化特論」を受講して下さい．

最小費用流問題の特徴

- ヒッチコック型輸送問題は最小費用流問題である [3].
- 最小費用流問題は線形最適化問題である.
- 一般の線形最適化問題よりも早く解ける.
  - 専用の高速な解法（アルゴリズム）が知られている.
  - 線形最適化問題だと思って解いても，ネットワーク単体法とよばれる動きをするのでやっぱり速い.

[3] より発展的な話題として最小費用流問題はヒッチコック型輸送問題として表現できるという事実がある.

最小費用流と線形最適化

演習問題

- とある物資の輸送問題を SCIP で解いてみよう．最適値は？ 最適解は？
- 図で表現された最小費用流問題のデータをモデルに当てはめて，具体的な数値が入った線形最適化問題として定式化してみよう．
- さらに定式化した最小費用流問題を SCIP で解いてみよう．最適値は？ 最適解は？