ロジスティクス工学

05 整数流と整数最適化

宮本 裕一郎
miyamoto あっと sophia.ac.jp

上智大学 理工学部 情報理工学科

目次

整数流と整数最適化
- 最小費用整数流
- 航空スケジューリング問題
- 市場調査設計問題
- 演習問題

整数流と整数最適化

最小費用整数流

航空スケジューリング問題

市場調査設計問題

演習問題

はじめに

- 最小費用流問題に「変数値は整数でなければならない」という制約を加えたものを最小費用整数流問題という．
- より一般には，線形最適化問題に「変数値は整数でなければならない」という制約を加えたものを**整数最適化問題**（Integer optimization Problem）という．
- 一般に，整数最適化問題は効率的に解けるとは限らない．
- ロジスティクス・ネットワーク最適化における多くの最適化問題は整数最適化問題となることが多い．これがロジスティクス・ネットワーク最適化の困難性を増している．

最小費用整数流問題

問題例 有向グラフ G，枝容量 $u\colon E(G) \to \mathbb{R}_{>0}$，
枝費用 $c\colon E(G) \to \mathbb{R}$，
点供給 $b\colon V(G) \to \mathbb{R}$（ただし $\sum_{v \in V(G)} b(v) = 0$）

回答 流量 $f\colon E(G) \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ のうち，

$$\sum_{e \in \delta^+(v)} f(e) - \sum_{e \in \delta^-(v)} f(e) = b(v) \quad (v \in V(G)),$$

$$f(e) \leq u(e) \quad (e \in E(G))$$

を満たし

$$\sum_{e \in E(G)} c(e) \cdot f(e)$$

を最小にするもの．

単なる最小費用流問題との違いは「流量が整数でなければいけない」ということだけである．しかし，これだけで問題は格段に難しくなることが知られている．

効率的に解ける最小費用整数流問題

問題例 有向グラフ G，枝容量 $u\colon E(G) \to \mathbb{N}$，
枝費用 $c\colon E(G) \to \mathbb{R}$，
点供給 $b\colon V(G) \to \mathbb{Z}$（ただし $\sum_{v \in V(G)} b(v) = 0$）

回答 流量 $f\colon E(G) \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ のうち，

$$\sum_{e \in \delta^+(v)} f(e) - \sum_{e \in \delta^-(v)} f(e) = b(v) \quad (v \in V(G)),$$

$$f(e) \leq u(e) \quad (e \in E(G))$$

を満たし

$$\sum_{e \in E(G)} c(e) \cdot f(e)$$

を最小にするもの．

最小費用整数流問題のうち，枝容量と点供給が全て整数のものは効率的に解けることが知られている．

整数最適化問題と最小費用流問題の関係のまとめ

- 最小費用流問題のうち，変数値を整数に限定したもの，すなわち

$$f(e) \in \mathbb{Z} \quad (e \in E(G))$$

  という制約が加わったものを最小費用整数流問題という．
- 一般に，整数最適化問題を厳密に解くための時間は，問題の大きさ（変数の個数など）が大きくなるにつれて，急激に増加する．
  - より詳しくは，多項式時間のアルゴリズムが見つかっている問題か見つかっていない問題かの違いがある．しかし，ここでは深く立ち入らないことにする．

最小費用整数流問題のまとめ

- 最小費用整数流問題のうち，枝容量および点供給の全てが整数値である問題，すなわち

$$u(e) \in \mathbb{Z} \ (e \in E(G)), \quad b(v) \in \mathbb{Z} \ (v \in V(G))$$

  が成り立つ問題例は比較的はやく解ける[1]．
  - 枝費用は整数値でなくてもよいことに注意する．
  - 「変数値は整数でなければならない」という制約を入れずに最小費用流問題を解いても，制約を入れた場合と同じ最適値が見つかる．このとき，仮に得られた最適解が整数解でなくても，流量の入れ替えなどで，整数解は簡単に見つかる．
  - 発展的な話題として，完全ユニモジュラー性がある．
- よって，与えられた整数最適化問題が最小費用整数流問題となっているか否か見極める力は非常に有用である．
- 以下では，最小費用整数流問題の例として，航空スケジューリング問題，市場調査設計問題を挙げる．

[1] より厳密な言い方をすると多項式時間アルゴリズムで最適解が得られる．

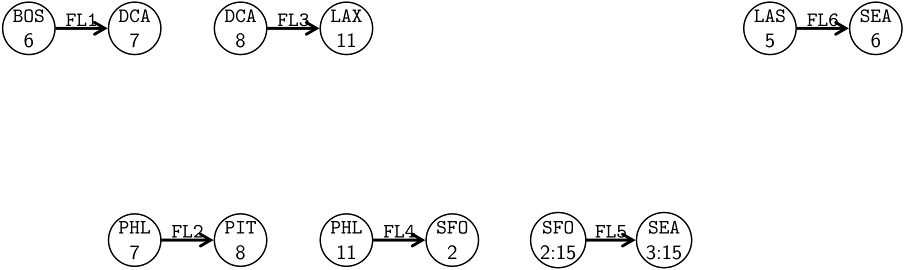
整数流と整数最適化
最小費用整数流
航空スケジューリング問題
市場調査設計問題
演習問題

非常に儲かる航空便

- 航空機のスケジューリングをする立場になったとして以下の問題を考えてみよう．
- 市場調査により，ある m 本の航空便が非常に儲かると分かったとしよう．それぞれの航空便 $j \in \{1, \ldots, m\}$ は，出発地（空港），到着地（空港），出発時刻，到着時刻で区別されているとする．
- 例えば，以下の 6 つの航空便が非常に儲かるとわかっているとする．わかりやすさのために，次ページに図を示す．

FL1 Boston (depart 6 A.M.) — Washington DC (arrive 7 A.M.)
FL2 Philadelphia (depart 7 A.M.) — Pittsburgh (arrive 8 A.M.)
FL3 Washington DC (depart 8 A.M.) — Los Angeles (arrive 11 A.M.)
FL4 Philadelphia (depart 11 A.M.) — San Francisco (arrive 2 P.M.)
FL5 San Francisco (depart 2:15 P.M.) — Seattle (arrive 3:15 P.M.)
FL6 Las Vegas (depart 5 P.M.) — Seattle (arrive 6 P.M.)

6 つの航空便の例

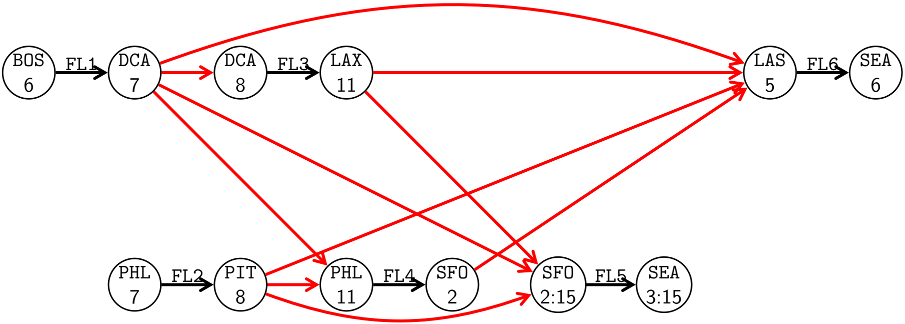

BOS
6
FL1
DCA
7
DCA
8
FL3
LAX
11
LAS
5
FL6
SEA
6
PHL
7
FL2
PIT
8
PHL
11
FL4
SFO
2
SFO
2:15
FL5
SEA
3:15

回送の考慮

- 以下の条件を満たすならば，航空便 i とその後の航空便 j で同じ機体を使えるとする．
  - 航空便 i の到着地と航空便 j の出発地が同じで，かつ，航空便 i の到着時刻と航空便 j の出発時刻の間の時間が，機体をメンテナンスするのに十分である．
  - 航空便 i の到着時刻の後で，機体をメンテナンスして航空便 j の出発地まで回送しても，航空便 j の出発時刻に十分に間に合う．
- 例えば，メンテナンスには 1 時間あれば十分だとすると，航空便 FL1 の後の航空便 FL3 でも同じ機体を使える．また，航空便 FL3 の後で機体をメンテナンスして回送
  - Los Angeles (depart 12 noon) — Las Vegas (arrive 1 P.M.)

  を入れられるならば，航空便 FL3 の後の航空便 FL6 でも同じ機体を使える．
- 同じ空港で同じ機体を使うことも回送とよぶことにする．非常に儲かる航空便に回送を加えたデータの例を次ページに示す．

回送を考慮したデータの例



- この図では，非常に儲かる航空便を黒，回送を赤の有向枝で表している．
- 非常に儲かる航空便を（それぞれ 1 機の機体で）カバーするには，何機の機体が必要であろうか？

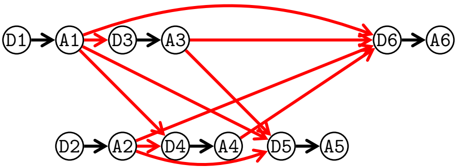
航空スケジューリング問題

問題 (航空スケジューリング)

問題例　（出発地，出発時刻）の集合 D，（到着地，到着時刻）の集合 A，航空便の集合 $F \subset D \times A$，回送便の集合 $E \subset A \times D$．

回答　全ての航空便をカバーできる最小の機体数

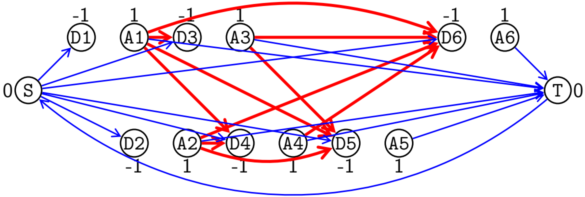
例 (航空スケジューリング)



$$D = \{\mathtt{D1},\ \mathtt{D2},\ \mathtt{D3},\ \mathtt{D4},\ \mathtt{D5},\ \mathtt{D6}\},$$
$$A = \{\mathtt{A1},\ \mathtt{A2},\ \mathtt{A3},\ \mathtt{A4},\ \mathtt{A5},\ \mathtt{A6}\},$$
$$F = \{(\mathtt{D1},\mathtt{A1}),\ (\mathtt{D2},\mathtt{A2}),\ (\mathtt{D3},\mathtt{A3}),\ (\mathtt{D4},\mathtt{A4}),\ (\mathtt{D5},\mathtt{A5}),\ (\mathtt{D6},\mathtt{A6})\},$$
$$E = \{(\mathtt{A1},\mathtt{D3}),\ (\mathtt{A1},\mathtt{D4}),\ (\mathtt{A1},\mathtt{D5}),\ (\mathtt{A1},\mathtt{D6}),\ (\mathtt{A2},\mathtt{D4}),\ (\mathtt{A2},\mathtt{D5}),\ (\mathtt{A2},\mathtt{D6}),\ (\mathtt{A3},\mathtt{D6}),\ (\mathtt{A3},\mathtt{D6}),\ (\mathtt{A4},\mathtt{D6})\},$$

航空スケジューリング問題から最小費用整数流問題へ

- (D, A, F, E) を航空スケジューリング問題の問題例とする．
- この問題例に対して，本質的に同値な最小費用整数流問題の問題例を以下の方法で作れる．
  - $V(G) = D \cup A \cup \{s, t\}$,
  - $E(G) = E \cup \{(s, d) \mid d \in D\} \cup \{(a, t) \mid a \in A\} \cup \{(t, s)\}$,
  - $u(e) = M \ (e \in E(G))$（ただしここで M は十分に大きな値（例えば $M = |F|$）とする），
  - $b = \begin{cases} 1 & (v \in A), \\ -1 & (v \in D), \\ 0 & (\text{otherwise}), \end{cases} \quad c(e) = \begin{cases} 1 & (e = (t, s)), \\ 0 & (\text{otherwise}). \end{cases}$



最小費用流問題としての定式化（問題例）

$$
\begin{aligned}
\text{min.} \quad & f((\mathtt{T},\mathtt{S})) \\
\text{s. t.} \quad & f((\mathtt{S},\mathtt{D1})) + f((\mathtt{S},\mathtt{D2})) + f((\mathtt{S},\mathtt{D3})) + f((\mathtt{S},\mathtt{D4})) + f((\mathtt{S},\mathtt{D5})) + f((\mathtt{S},\mathtt{D6})) - f((\mathtt{T},\mathtt{S})) = 0 \\
& -f((\mathtt{S},\mathtt{D1})) = -1 \\
& -f((\mathtt{S},\mathtt{D2})) = -1 \\
& -f((\mathtt{S},\mathtt{D3})) - f((\mathtt{A1},\mathtt{D3})) = -1 \\
& -f((\mathtt{S},\mathtt{D4})) - f((\mathtt{A1},\mathtt{D4})) - f((\mathtt{A2},\mathtt{D4})) = -1 \\
& -f((\mathtt{S},\mathtt{D5})) - f((\mathtt{A1},\mathtt{D5})) - f((\mathtt{A2},\mathtt{D5})) - f((\mathtt{A3},\mathtt{D5})) = -1 \\
& -f((\mathtt{S},\mathtt{D6})) - f((\mathtt{A1},\mathtt{D6})) - f((\mathtt{A2},\mathtt{D6})) - f((\mathtt{A3},\mathtt{D6})) - f((\mathtt{A4},\mathtt{D6})) = -1 \\
& f((\mathtt{A1},\mathtt{D3})) + f((\mathtt{A1},\mathtt{D4})) + f((\mathtt{A1},\mathtt{D5})) + f((\mathtt{A1},\mathtt{D6})) + f((\mathtt{A1},\mathtt{T})) = 1 \\
& f((\mathtt{A2},\mathtt{D4})) + f((\mathtt{A2},\mathtt{D5})) + f((\mathtt{A2},\mathtt{D6})) + f((\mathtt{A2},\mathtt{T})) = 1 \\
& f((\mathtt{A3},\mathtt{D5})) + f((\mathtt{A3},\mathtt{D6})) + f((\mathtt{A3},\mathtt{T})) = 1 \\
& f((\mathtt{A4},\mathtt{D6})) + f((\mathtt{A4},\mathtt{T})) = 1 \\
& f((\mathtt{A5},\mathtt{T})) = 1 \\
& f((\mathtt{A6},\mathtt{T})) = 1 \\
& f((\mathtt{T},\mathtt{S})) - f((\mathtt{A1},\mathtt{T})) - f((\mathtt{A2},\mathtt{T})) - f((\mathtt{A3},\mathtt{T})) - f((\mathtt{A4},\mathtt{T})) - f((\mathtt{A5},\mathtt{T})) - f((\mathtt{A6},\mathtt{T})) = 0,
\end{aligned}
$$

あと，非負制約と容量制約.

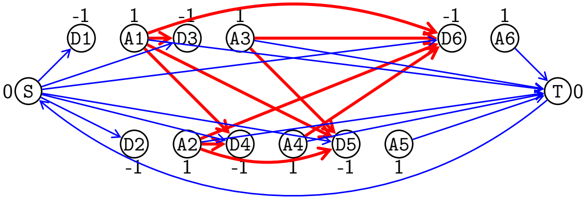
最小費用流問題としての定式化（一般）

$$\text{min.}\quad f((t,s))$$

$$\text{s. t.}\quad \sum_{e\in\delta^+(v)} f(e) - \sum_{e\in\delta^-(v)} f(e) = \begin{cases} 0 & (v \in \{s,t\}) \\ -1 & (v \in D) \\ 1 & (v \in A) \end{cases} \qquad (v \in V(G)),$$

$$f(e) \le |F| \quad (e \in E(G)),$$

$$f(e) \ge 0 \quad (e \in E(G)).$$



整数流と整数最適化

最小費用整数流
航空スケジューリング問題
市場調査設計問題
演習問題

市場調査設計問題

すでにいくつかの製品をいくつかの顧客に販売している実績のある企業がある．顧客にアンケート用紙を送って，顧客の嗜好を調査したい．

- 顧客の集合 C と製品の集合 P がわかっている．
- 各顧客 $c \in C$ が購入した製品 $b(c) \subset P$ がわかっている．
- 各顧客 $c \in C$ には $q(c)$ 個以上 $q'(c)$ 個以下の製品に関してアンケート用紙を送りたい．ただしその顧客が購入した製品に関してのみ，そして各製品に関しては高々 1 枚だけアンケート用紙を送りたい．
- 各製品 $p \in P$ に関して $r(p)$ 個以上 $r'(p)$ 個以下のアンケート用紙を送りたい．ただしその製品を購入した顧客からのみ，そして各顧客に関しては高々 1 回だけアンケート用紙を送りたい．

どの顧客にどの製品に関するアンケート用紙を送れば上記の条件を満たすだろうか？

- これはマーケティングの分野で現れる典型的かつ単純な問題の一つである顧客嗜好（consumer preference）調査であり，データマイニング（data mining）の一例でもある．

問題例

顧客の集合 C，製品の集合 P，顧客が購入した商品 $b : C \to P$，顧客に送りたいアンケートの個数の下限 $q : C \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$，上限 $q' : C \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$，製品に関して送りたいアンケートの個数の下限 $r : P \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$，上限 $r' : P \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$

例

- $C = \{c_1, c_2, c_3\},\ P = \{p_1, p_2\}$
- $b(c_1) = \{p_1, p_2\},\ b(c_2) = \{p_1\},\ b(c_3) = \{p_2\}$
- $q(c) = q'(c) = 1\ (c \in C)$
- $r(p) = 1,\ r'(p) = 2\ (p \in P)$

変数

顧客 $c \in C$ に製品 $p \in P$ に関して送るアンケートの数を変数 x_{cp} とする．

市場調査設計問題の具体的な定式化

以下に，整数最適化問題としての，具体的な定式化を示す．この市場調査設計問題では目的は存在しない．しかし，数理最適化問題は基本的に目的を伴うので，擬似的に目的関数を入れてある．

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & x_{c_1p_1} + x_{c_1p_2} + x_{c_2p_1} + x_{c_3p_2} \\
\text{subject to} & x_{c_1p_1} + x_{c_1p_2} = 1, \\
& x_{c_2p_1} = 1, \\
& x_{c_3p_2} = 1, \\
& 1 \leq x_{c_1p_1} + x_{c_2p_1}, \quad x_{c_1p_1} + x_{c_2p_1} \leq 2, \\
& 1 \leq x_{c_1p_2} + x_{c_3p_2}, \quad x_{c_1p_2} + x_{c_3p_2} \leq 2, \\
& 0 \leq x_{c_1p_1}, \quad x_{c_1p_1} \in \mathbb{Z}, \\
& 0 \leq x_{c_1p_2}, \quad x_{c_1p_2} \in \mathbb{Z}, \\
& 0 \leq x_{c_2p_1}, \quad x_{c_2p_1} \in \mathbb{Z}, \\
& 0 \leq x_{c_3p_2}, \quad x_{c_3p_2} \in \mathbb{Z}.
\end{array}
$$

市場調査設計問題の一般的な定式化

より一般的には，以下のように定式化できる．

$$
\begin{array}{lll}
\text{minimize} & \displaystyle\sum_{c \in C} \sum_{p \in b(c)} x_{cp} & \\
\text{subject to} & q_c \le \displaystyle\sum_{p \in b(c)} x_{cp} & (c \in C), \\
& \displaystyle\sum_{p \in b(c)} x_{cp} \le q'(c) & (c \in C), \\
& r_p \le \displaystyle\sum_{c \in C \,\mid\, p \in b(c)} x_{cp} & (p \in P), \\
& \displaystyle\sum_{c \in C \,\mid\, p \in b(c)} x_{cp} \le r'(p) & (p \in P), \\
& 0 \le x_{cp} & (c \in C,\ p \in b(c)), \\
& x_{cp} \in \mathbb{Z} & (c \in C,\ p \in b(c)).
\end{array}
$$

整数流と整数最適化

最小費用整数流

航空スケジューリング問題

市場調査設計問題

演習問題

演習問題

- 市場調査設計問題が最小費用整数流問題であることを確かめてみよう．
  - すなわち，有向グラフ（頂点集合と枝集合），枝容量，枝費用，点供給が何に対応するのか，具体的なデータの場合と一般の場合で記述してみよう．

さらなる勉強のために

航空スケジューリング問題（airline scheduling problem**）および市場調査設計問題（**survey design problem**）はテキスト** [1] **からの引用である．**

[1] Jon Kleinberg and Eva Tardos.
Algorithm Design.
Addison-Wesley, 2005.