# ロジスティクス工学

## 07 ネットワーク設計:
## シュタイナー木，サバイバルネットワーク設計

**宮本 裕一郎**

miyamoto **あっと** sophia.ac.jp

**上智大学 理工学部 情報理工学科**

# 目次

## ネットワーク設計

- Steiner 木
- サバイバルネットワーク設計

- 「ネットワーク設計問題」という特定の問題があるわけではない．
- ネットワークを設計したいそれぞれの場面に対して，いろいろなモデルが提案されているだけである．
- ここでは Steiner 木問題とサバイバルネットワーク設計問題という，有名かつ代表的な問題（モデル）を紹介する．

# Euclidean Steiner 木問題

**砂漠地点に点在する都市を最低限結ぶ電線（ネットワーク）を設置したい．電線を設置する際には，電線の長さに（線形）比例して費用がかかるとする．例えば，3 都市であればどのように電線を設置したら良いであろうか？**

**問題 (最小 Euclidean Steiner 木)**

**問題例** ユークリッド空間内の点の集合 $T$

**回答** $T$ のすべての点を結ぶ線図のうち，そのユークリッド長さの合計が最小のもの

- 入力の点を**ターミナル（Terminal）**といい，入力の点でない分岐点を **Steiner 点**という．すべてのターミナル点を連結する線図を Steiner 木という．

# Geometric Steiner 木問題に関するコメント

- ユークリッド距離ではない問題設定も考えられる．よく見かけるのは，$l_1$ ノルム（俗に言うマンハッタン距離）である．より一般に，何らかの距離空間内で長さ最小の Steiner 木を見つける問題を Geometric Steiner 木問題という．
- Geometric Steiner 木問題は一般に NP 困難である．
- Geometric Steiner 木問題専用のソルバーもある[1]．最適解（厳密解）を 24 時間以内で得られる問題サイズは大まかに言って 10,000 点程度である．
- $l_1$ ノルム（俗に言うマンハッタン距離）における Steiner 木は，データ間の因果関係，例えば進化系統樹の最適化などに応用されている．
- 一方で，応用によっては「Steiner 点や線の候補は予め与えられている」ということも多い．そのような場面で便利な「グラフ Steiner 木問題」を以降で紹介する．

[1] ただし整数最適化ソルバーほど流通してはいない

# グラフ理論の用語追加: 歩道，閉路，森 [1]

**定義 (歩道)**

頂点と枝の列 $(v_1, e_1, v_2, \ldots, v_k, e_k, v_{k+1})$ は，すべての $i \in \{1, \ldots, k\}$ に関して $e_i = \{v_i, v_{i+1}\} \in E(G)$ を満たすとき，グラフ上の**歩道**（walk）であるという．

**定義 (閉路)**

グラフ $C$ の頂点集合 $V(C)$ を $\{v_1, \ldots, v_n\}$，枝集合を $\{e_1, \ldots, e_n\}$ とする．$(v_1, e_1, v_2, \ldots, v_n, e_n, v_1)$ が歩道となっているならば，グラフ $C$ を**閉路**（cycle or circuit）という．

**定義 (森)**

グラフのうち，部分グラフとして閉路を含まないものを**森**（forest）という．

# グラフ理論の用語追加: 連結グラフ，木，Steiner 木 [1]

**定義 (連結グラフ)**

**すべての頂点の間に歩道があるグラフを連結グラフ（connected graph）という．**

**定義 (木)**

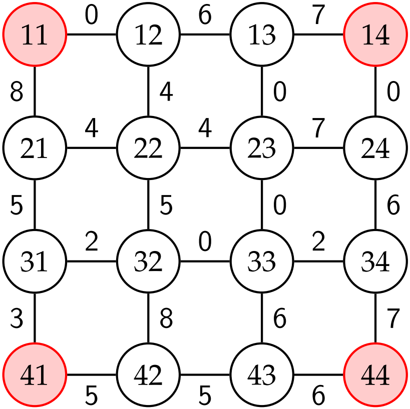
**森のうち，連結なものを木（tree）という．**

**定義 (Steiner 木)**

**$G$ をグラフとし，$G$ の頂点部分集合を $T \subset V(G)$ とする．$G$ の部分グラフ $S$ は，木でありかつ，$T \subset V(S) \subset V(G)$ であるとき $G$ の $T$ に関する Steiner 木であるという．**

- **$D$ 次元ユークリッド空間内の点集合を頂点集合とし，任意の 2 頂点間に枝があるグラフを考える．そしてそのそれぞれの枝の長さは，枝の端点のユークリッド距離であるとする．こうすると先述の Euclidean Steiner 木もこの定義に含まれる．**

# グラフ Steiner 木問題



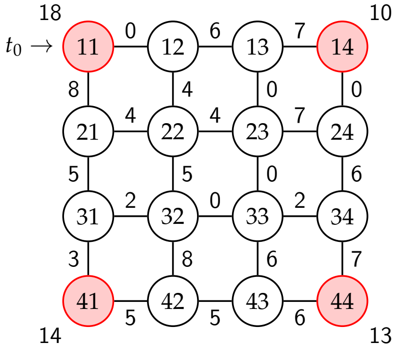

**問題 (グラフ Steiner 木)**

**問題例** グラフ $G$，枝費用 $c\colon E(G) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$，ターミナル集合 $T \subset V(G)$.

**回答** グラフ $G$ の $T$ に関する Steiner 木 $S$ のうち，その費用 $\sum_{e \in E(S)} c(e)$ が最小のもの.

- $S$ の頂点のうち $T$ に含まれないものを Steiner 点という.
- Steiner 木問題は NP 困難である.
- Steiner 木問題を実践的に拡張したモデルもいくつかある.
  - 賞金獲得型 Steiner 木問題，サバイバルネットワーク設計問題などがある.

# 賞金獲得型グラフ Steiner 木問題




## 問題 (賞金獲得型グラフ Steiner 木)

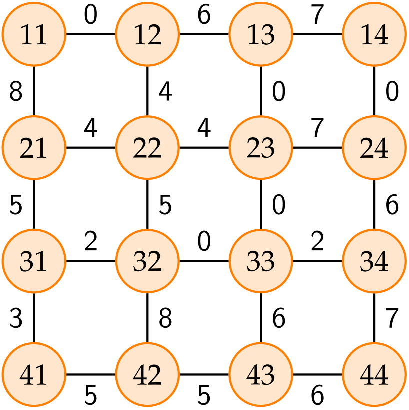
**問題例** グラフ $G$，枝費用 $c\colon E(G) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$，ターミナル集合 $T \subset V(G)$，ターミナルの利益 $p\colon T \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$，特別なターミナル $t_0 \in T$．

**回答** グラフ $G$ の $T' \subset T$ に関する *Steiner* 木 $S$ のうち，その利益から費用を引いたもの $\sum_{v \in T'} p(v) - \sum_{e \in E(S)} c(e)$ が最大のもの．

- Steiner 木問題や賞金獲得型（prize collecting）Steiner 木問題の整数最適化問題としての定式化は少し難しいので，準備としてまず最小全域木問題を考える．

# 最小全域木問題

**グラフ** Steiner **木問題のうち，すべての頂点がターミナルであるものを最小全域木**（minimum spanning tree）**問題という．**




**問題 (最小全域木)**

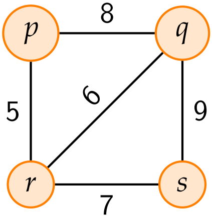
**入力** **グラフ** $G$**，枝費用** $c\colon E(G) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$**.**

**出力** **グラフ** $G$ **の** $V(G)$ **に関する** *Steiner* **木** $S$ **のうち，その費用** $\sum_{e \in E(S)} c(e)$ **が最小のもの．**

# 最小全域木問題の解法

- 最小全域木問題の最適解は，貪欲アルゴリズムという簡単なアルゴリズムで効率的に見つかることが知られている．
  - 貪欲アルゴリズムのうちの一つである Kruskal のアルゴリズムは「費用の小さい枝から順に解に加えていく．サイクルができるようならばその枝は加えない．全頂点がつながったら完成」というものである．
- 最小全域木の整数最適化問題としての定式化を必要とする場面はあまりない．しかし，Steiner 木問題を定式化する準備として，以降で定式化を説明する．

# 最小全域木問題の定式化概要




**変数**

**枝 $\{v, w\} \in E(G)$ を最小全域木に含むとき 1，そうでないとき 0 となる変数を $x_{vw}$ とする．**

**入力データ**

$V(G) = \{p, q, r, s\}$，$E(G) = \{\{p, q\}, \{p, r\}, \{q, r\}, \{q, s\}, \{r, s\}\}$，
$c(\{\{p, q\}) = 8$, $c(\{p, r\}) = 5$, $c(\{q, r\}) = 6$, $c(\{q, s\}) = 9$, $c(\{r, s\}) = 7$

**整数最適化問題としての定式化概要**

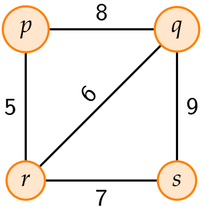
min. $8x_{pq} + 5x_{pr} + 6x_{qr} + 9x_{qs} + 7x_{rs}$

s. t. $x_{vw}$ **によってすべての頂点がつながっている，**

$x_{pq}, x_{pr}, x_{qr}, x_{qs}, x_{rs} \in \{0, 1\}.$

# 最小全域木問題の定式化: 具体例

**頂点の 1 つ，例えば $p$，を特別視し「特別な頂点から他の頂点になにか流すためのパイプを設置する問題」だと考える．**



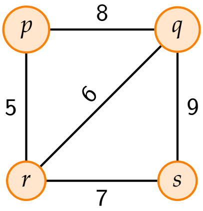

## 変数

- **枝 $\{v,w\} \in E(G)$ にパイプを設置するとき 1，そうでないとき 0 となる変数を $x_{vw}$ とする．**
- **パイプを $v$ から $w$ に何かが流れる量を $y_{vw} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ とする．**

## 整数最適化問題としての定式化

$$
\begin{array}{ll}
\text{min.} & 8x_{pq} + 5x_{pr} + 6x_{qr} + 9x_{qs} + 7x_{rs} \\
\text{s. t.} & y_{pq} \leq 3x_{pq},\ y_{qp} \leq 3x_{pq},\ y_{pr} \leq 3x_{pr},\ y_{rp} \leq 3x_{pr},\ y_{qr} \leq 3x_{qr}, \\
& y_{rq} \leq 3x_{qr},\ y_{qs} \leq 3x_{qs},\ y_{sq} \leq 3x_{qs},\ y_{rs} \leq 3x_{rs},\ y_{sr} \leq 3x_{rs}, \\
& y_{pq} + y_{pr} - y_{qp} - y_{rp} = 3, \\
& y_{qp} + y_{qr} + y_{qs} - y_{pq} - y_{rq} - y_{sq} = -1, \\
& y_{rp} + y_{rq} + y_{rs} - y_{pr} - y_{qr} - y_{sr} = -1,\ y_{sq} + y_{sr} - y_{qs} - y_{rs} = -1, \\
& y_{pq}, y_{qp}, y_{pr}, y_{rp}, y_{qr}, y_{rq}, y_{qs}, y_{sq}, y_{rs}, y_{sr} \geq 0, \\
& x_{pq}, x_{pr}, x_{qr}, x_{qs}, x_{rs} \in \{0,1\}.
\end{array}
$$

# 最小全域木問題の定式化




### 変数

- 枝 $\{v, w\} \in E(G)$ を最小全域木に含むとき $1$，そうでないとき $0$ となる変数を $x_{vw}$ とする．
- $v$ から $w$ に何かが流れる量を $y_{vw} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ とする．

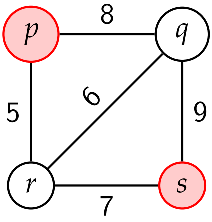
以下では，グラフ $G$ において頂点 $v \in V(G)$ に隣接する頂点の集合を $\Gamma(v)$ と記す．また，特別視された頂点を $v_0$ と記す．

### 整数最適化問題としての定式化

$$
\begin{array}{ll}
\text{min.} & \displaystyle\sum_{\{v,w\}\in E(G)} c(\{v,w\}) \cdot x_{vw} \\
\text{s. t.} & y_{vw} \leq (|V(G)|-1)x_{vw} \ (\{v,w\} \in E(G)), \\
& y_{wv} \leq (|V(G)|-1)x_{vw} \ (\{v,w\} \in E(G)), \\
& \displaystyle\sum_{w\in\Gamma(v)} y_{vw} - \sum_{w\in\Gamma(v)} y_{wv} = \begin{cases} |V(G)|-1 & (v = v_0) \\ -1 & (v \neq v_0) \end{cases} \ (v \in V(G)), \\
& y_{vw} \geq 0 \ (\{v,w\} \in E(G)), \quad y_{wv} \geq 0 \ (\{v,w\} \in E(G)), \\
& x_{vw} \in \{0,1\} \ (\{v,w\} \in E(G)).
\end{array}
$$

# グラフ Steiner 木問題

- **最小全域木問題の定式化を少し拡張すれば，グラフ Steiner 木問題も整数最適化問題として定式化できる．**

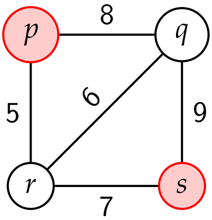



**問題 (グラフ Steiner 木)**

**問題例** グラフ $G$，枝費用 $c\colon E(G) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$，ターミナル集合 $T \subset V(G)$．

**回答** グラフ $G$ の $T$ に関する Steiner 木 $S$ のうち，その費用 $\sum_{e \in E(S)} c(e)$ が最小のもの．

# グラフ Steiner 木問題の定式化概要




**変数**

**枝 $\{v, w\} \in E(G)$ を Steiner 木に含むとき 1，そうでないとき 0 となる変数を $x_{vw}$ とする．**

**入力データ**

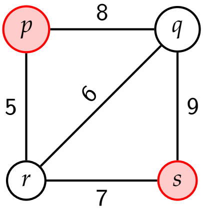
$V(G) = \{p, q, r, s\}$，$E(G) = \{\{p, q\}, \{p, r\}, \{q, r\}, \{q, s\}, \{r, s\}\}$，
$T = \{p, s\}$,
$c(\{\{p, q\}) = 8,\ c(\{p, r\}) = 5,\ c(\{q, r\}) = 6,\ c(\{q, s\}) = 9,\ c(\{r, s\}) = 7$

**整数最適化問題としての定式化概要**

min. $8x_{pq} + 5x_{pr} + 6x_{qr} + 9x_{qs} + 7x_{rs}$
s. t. $x_{vw}$ **によってすべてのターミナルがつながっている，**
$x_{pq}, x_{pr}, x_{qr}, x_{qs}, x_{rs} \in \{0, 1\}$.

# グラフ Steiner 木問題の定式化: 具体例

**ターミナルの 1 つ，例えば $p$，を特別視し「特別なターミナルから他のターミナルになにか流すためのパイプを設置する問題」だと考える．**



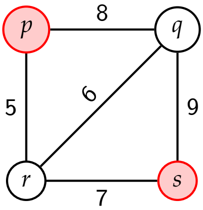

## 変数

- 枝 $\{v,w\} \in E(G)$ にパイプを設置するとき 1，そうでないとき 0 となる変数を $x_{vw}$ とする．
- パイプを $v$ から $w$ に何かが流れる量を $y_{vw} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ とする．

## 整数最適化問題としての定式化

$$
\begin{array}{ll}
\text{min.} & 8x_{pq} + 5x_{pr} + 6x_{qr} + 9x_{qs} + 7x_{rs} \\
\text{s. t.} & y_{pq} \leq 1x_{pq},\ y_{qp} \leq 1x_{pq},\ y_{pr} \leq 1x_{pr},\ y_{rp} \leq 1x_{pr},\ y_{qr} \leq 1x_{qr}, \\
& y_{rq} \leq 1x_{qr},\ y_{qs} \leq 1x_{qs},\ y_{sq} \leq 1x_{qs},\ y_{rs} \leq 1x_{rs},\ y_{sr} \leq 1x_{rs}, \\
& y_{pq} + y_{pr} - y_{qp} - y_{rp} = 1, \\
& y_{qp} + y_{qr} + y_{qs} - y_{pq} - y_{rq} - y_{sq} = 0, \\
& y_{rp} + y_{rq} + y_{rs} - y_{pr} - y_{qr} - y_{sr} = 0,\ y_{sq} + y_{sr} - y_{qs} - y_{rs} = -1, \\
& y_{pq}, y_{qp}, y_{pr}, y_{rp}, y_{qr}, y_{rq}, y_{qs}, y_{sq}, y_{rs}, y_{sr} \geq 0, \\
& x_{pq}, x_{pr}, x_{qr}, x_{qs}, x_{rs} \in \{0,1\}.
\end{array}
$$

# グラフ Steiner 木問題の定式化




## 変数

- 枝 $\{v,w\} \in E(G)$ を最小全域木に含むとき 1，そうでないとき 0 となる変数を $x_{vw}$ とする．
- $v$ から $w$ に何かが流れる量を $y_{vw} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ とする．

ここでは，特別視されたターミナルを $t_0$ と記す．

## 整数最適化問題としての定式化

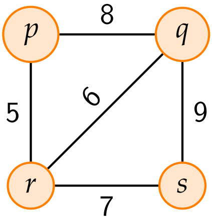
$$
\begin{array}{ll}
\text{min.} & \displaystyle\sum_{\{v,w\}\in E(G)} c(\{v,w\}) \cdot x_{vw} \\
\text{s. t.} & y_{vw} \leq (|T|-1)x_{vw} \quad (\{v,w\} \in E(G)), \\
& y_{wv} \leq (|T|-1)x_{vw} \quad (\{v,w\} \in E(G)), \\
& \displaystyle\sum_{w\in\Gamma(v)} y_{vw} - \sum_{w\in\Gamma(v)} y_{wv} = \begin{cases} |T|-1 & (v = t_0) \\ -1 & (v \in T \setminus \{t_0\}) \\ 0 & (v \notin T) \end{cases} \quad (v \in V(G)), \\
& y_{vw} \geq 0 \ (\{v,w\} \in E(G)), \quad y_{wv} \geq 0 \ (\{v,w\} \in E(G)), \\
& x_{vw} \in \{0,1\} \quad (\{v,w\} \in E(G)).
\end{array}
$$

# 最小全域木問題およびグラフ Steiner 木問題の別定式化

- 最小全域木問題およびグラフ Steiner 木問題に対しては，別の方針による整数（線形）最適化問題としての定式化も知られている．
- まず，簡単のために最小全域木問題のみを考える．
- 与えられたグラフの枝部分集合が最小全域木を構成するためには，
  - 木である，すなわち枝数が頂点数よりちょうど $1$ つ少ない，そして，
  - 全体がつながっている，すなわちどの頂点部分集合に注目しても，その頂点部分集合から誘導される部分グラフでは頂点数より少ない枝しか使われていない

  ことが必要条件である．
- 以上の方針に則ると次ページの定式化が得られる．

# 最小全域木問題の定式化: 部分集合型




## 変数

- 枝 $\{u,v\} \in E(G)$ を最小全域木に含むとき 1, そうでないとき 0 となる変数を $x_{uv}$ とする.
- 頂点数の指数個の制約式を含む.
- 多面体となっていることが知られている.

## 整数最適化問題としての定式化

$$
\begin{aligned}
\text{min.} \quad & \sum_{\{u,v\} \in E(G)} c(\{u,v\}) \cdot x_{uv} \\
\text{s. t.} \quad & \sum_{\{u,v\} \in E(G)} x_{uv} = |V(G)| - 1, \\
& \sum_{u \in S} \sum_{v \in S \setminus \{u\}} x_{uv} \leq |S| - 1 \quad (\emptyset \neq S \subsetneq V(G)), \\
& x_{uv} \in \{0,1\} \quad (\{u,v\} \in E(G)).
\end{aligned}
$$

# グラフ Steiner 木問題の別定式化

- 少々複雑になるが，グラフ Steiner 木問題に対しても，最小全域木問題と同様の方針により整数（線形）最適化問題としての定式化が得られる．
- 最小全域木問題の場合と同様に，頂点数の指数個の制約式を含む．

# グラフ Steiner 木問題の別定式化

- 枝 $e \in E(G)$ が Steiner tree に含まれるならば 1，そうでなければ 0 となる変数を $x_e$ とする．
- $v \in V(G) \setminus T$ が Steiner tree に含まれるならば（すなわち Steiner Point ならば）1，そうでなければ 0 となる変数を $y_v$ とする．
- 整数（線形）最適化問題としての定式化は以下の通りである．

$$
\begin{aligned}
\text{min.}\quad & \sum_{e \in E(G)} c(e) \cdot x_e \\
\text{s. t.}\quad & \sum_{e \in E(G)} x_e = \sum_{v \in V(G) \setminus T} y_v + |T| - 1 \\
& \sum_{e \in E(W)} x_e \leq \sum_{v \in (V(G) \setminus T) \cap W} y_v + |T \cap V(W)| - 1 \\
& \qquad\qquad (W \subsetneq G \text{ ただし } V(W) \cap T \neq \emptyset), \\
& x_e \in \{0, 1\} \qquad (e \in E(G)), \\
& y_v \in \{0, 1\} \qquad (v \in V(G) \setminus T).
\end{aligned}
$$

# グラフ Steiner 木問題の定式化のまとめ

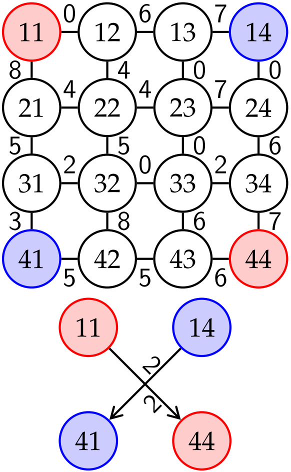
- グラフ Steiner 木問題を整数最適化問題として定式化したものを整数最適化ソルバーに入力すると，200 頂点くらいまでならば普通のパソコンで 1 分以内に最適解を得られる．
- 頂点数がより多い場合にはヒューリスティクスを開発するなどの方策も考えられるが，一方で整数最適化ソルバーの出力する近似解でも満足できるかもしれない．

ネットワーク設計

- Steiner 木
- サバイバルネットワーク設計

# サバイバルネットワーク設計問題

Steiner 木は「ギリギリつながっているだけ」である．より頑強なネットワークを設計しようという要求に応えるモデルとして**サバイバルネットワーク設計（survival network design）問題**がある．




**問題 (サバイバルネットワーク設計)**

**問題例** グラフ $G$，枝費用 $c\colon E(G) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$，接続要求有向グラフ $R$（ただし $V(R) \subset V(G)$）．接続要求量 $r\colon E(R) \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$．

**回答** グラフ $G$ の部分グラフ $H$ のうち，「枝接続要求 $(x, y) \in E(R)$ に対して，$H$ 上の $x$ から $y$ への枝を共有しない歩道が少なくとも $r((x, y))$ 本ある」もののうち，枝費用の重みの合計 $\sum_{e \in E(H)} c(e)$ が最小のもの

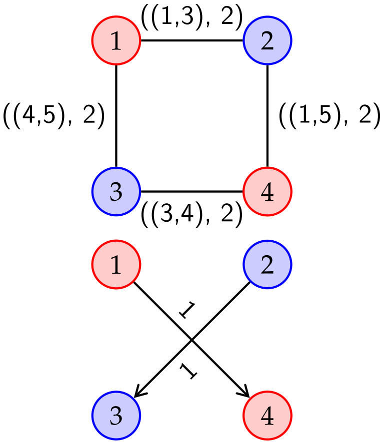
# サバイバルネットワーク設計問題の位置付け

- サバイバルネットワーク設計問題もまた NP 困難である．
- サバイバルネットワーク設計問題はグラフ Steiner 木問題を特別な場合として含む．

グラフ Steiner 木問題を整数最適化問題として定式化する際には，最小費用流問題のような「流れ」を利用した．サバイバルネットワーク設計問題に対する整数最適化問題としての定式化においても同様に考える．定式化をする前に準備として，無向多品種流問題を紹介する．

# 最小費用無向多品種流問題

**最小費用流問題の拡張として，最小費用多品種流問題がある．ここでは最小費用無向多品種流問題を紹介する．**




### 問題 (最小費用多品種流)

**問題例** 無向グラフ $G$，有向グラフ $H$ (ただし $V(H) \subset V(G)$)，枝費用 $c\colon E(H) \times E(G) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$，枝容量 $u\colon E(G) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$，要求流量 $d\colon E(H) \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$．

**回答** 多品種流 $f\colon E(H) \times \{(v,w) \mid \{v,w\} \in E(G)\} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$，ただし，流れが整合性と枝容量を満たすもの

# 最小費用無向多品種流問題の定式化

## 線形最適化問題としての定式化

$$
\begin{aligned}
\text{min.} \quad & \sum_{k \in E(H)} \sum_{\{v,w\} \in E(G)} c(k, \{v,w\}) \cdot (f(k,(v,w)) + f(k,(w,v))) \\
\text{s. t.} \quad & \sum_{k \in E(H)} (f(k,(v,w)) + f(k,(w,v))) \leq C(\{v,w\}) \quad (\{v,w\} \in E(G)), \\
& \sum_{w \in \Gamma(v)} f(k,(v,w)) - \sum_{w \in \Gamma(v)} f(k,(w,v)) = \begin{cases} d(k) & (v = k_{\mathsf{s}}) \\ -d(k) & (v = k_{\mathsf{t}}) \\ 0 & (v \notin \{k_{\mathsf{s}}, k_{\mathsf{t}}\}) \end{cases} \\
& \qquad\qquad (v \in V(G),\ (k_{\mathsf{s}}, k_{\mathsf{t}}) \in E(H)), \\
& f(k,(v,w)) \geq 0 \quad (\{v,w\} \in E(G),\ k \in E(H)), \\
& f(k,(w,v)) \geq 0 \quad (\{v,w\} \in E(G),\ k \in E(H)).
\end{aligned}
$$

# サバイバルネットワーク設計問題の定式化

### 変数

- 品種 $k$ を枝 $\{v,w\} \in E(G)$ 上で $v$ から $w$ に流すとき 1，そうでないとき 0 となる変数を $f(k,v,w)$ とする．
- 枝 $\{v,w\} \in E(G)$ をサバイバルネットワークに含めるとき 1，そうでないとき 0 となる変数を $x_{\{v,w\}}$ とする．

### 整数最適化問題としての定式化

$$
\begin{array}{ll}
\text{min.} & \displaystyle\sum_{\{v,w\} \in E(G)} c(\{v,w\}) \cdot x_{\{v,w\}} \\
\text{s. t.} & f(k,v,w) \leq x_{\{v,w\}} \quad (\{v,w\} \in E(G), k \in E(R)), \\
& f(k,w,v) \leq x_{\{v,w\}} \quad (\{v,w\} \in E(G), k \in E(R)), \\
& \displaystyle\sum_{w \in \Gamma(v)} f(k,v,w) - \sum_{w \in \Gamma(v)} f(k,w,v) = \begin{cases} r(k) & (v = k_{\mathrm{s}})) \\ -r(k) & (v = k_{\mathrm{t}}) \\ 0 & (v \notin \{k_{\mathrm{s}}, k_{\mathrm{t}}\}) \end{cases} \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (v \in V(G),\ (k_{\mathrm{s}}, k_{\mathrm{t}}) \in E(R)), \\
& f(k,v,w) \in \{0,1\} \quad (\{v,w\} \in E(G),\ k \in E(R)), \\
& f(k,w,v) \in \{0,1\} \quad (\{v,w\} \in E(G),\ k \in E(R)), \\
& x_{\{v,w\}} \in \{0,1\} \quad (\{v,w\} \in E(G)).
\end{array}
$$

# 参考文献

[1] Bernhard Korte and Jens Vygen.
*Combinatorial Optimization: Theory and Algorithms*, volume 21 of *Algorithms and Combinatorics*.
Springer-Verlag, 5th edition, 2012.