

データ構造とアルゴリズム

01 アルゴリズムとは？データ構造とは？

宮本 裕一郎

miyamoto あつと sophia.ac.jp

上智大学 理工学部 情報理工学科

目次

アルゴリズムとは？データ構造とは？

言葉による説明

例 1: 総当り戦スケジュール表の作成

例 2: 安定マッチング

例 3: アル・フアリズミー (Al Khwarizmi) と乗算

アルゴリズムとデータ構造を学ぶ目的や意義

この講義の狙い

演習問題

文献紹介

おまけ: リーグ戦スケジュール表の不可能性

アルゴリズムとは？データ構造とは？

言葉による説明

例 1: 総当り戦スケジュール表の作成

例 2: 安定マッチング

例 3: アル・フアリズミー (Al Khwarizmi) と乗算

アルゴリズムとデータ構造を学ぶ目的や意義

この講義の狙い

演習問題

文献紹介

おまけ: リーグ戦スケジュール表の不可能性

アルゴリズムとは？

アルゴリズム 【algorithm; algorism】

（アラビアの数学者アル＝フワリズミーの名に因む）

1. アラビア記数法
2. 問題を解決する定型的な手法・技法．
コンピューターなどで，演算手続きを支持する規則．
算法．

「広辞苑（第六版）」より

- ▶ 他にも，Wikipedia などに説明がある．
- ▶ しかし，少ない言葉の説明だけでわかるものでもない．
- ▶ たくさんの例を見るのが理解への早道である．

アルゴリズムとは？データ構造とは？

言葉による説明

例 1: 総当り戦スケジュール表の作成

例 2: 安定マッチング

例 3: アル・フアリズミー (Al Khwarizmi) と乗算

アルゴリズムとデータ構造を学ぶ目的や意義

この講義の狙い

演習問題

文献紹介

おまけ: リーグ戦スケジュール表の不可能性

総当り戦スケジュール表の作成

| | | 日 | | | | | | | | |
|--------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| チ ム | A | B | D | F | H | J | | | | |
| | B | A | C | E | G | I | | | | |
| | C | D | B | J | F | H | | | | |
| | D | C | A | G | I | E | | | | |
| | E | F | H | B | J | D | | | | |
| | F | E | I | A | C | G | | | | |
| | G | H | J | D | B | F | | | | |
| | H | G | E | I | A | C | | | | |
| | I | J | F | H | D | B | | | | |
| | J | I | G | C | E | A | | | | |

- ▶ A～Jの10チームが総当りで対戦
- ▶ 各チームは1日に1試合

9日で全試合が完了するスケジュール表を作成せよ！

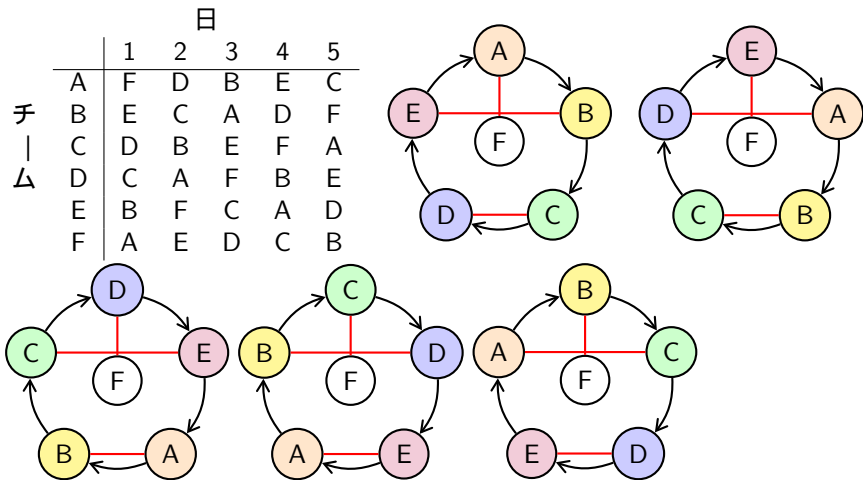
6 チームの場合

| | | 日 | | | | |
|-----|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| チーム | A | B | D | | | |
| | B | A | C | | | |
| | C | D | B | | | |
| | D | C | A | | | |
| | E | F | | | | |
| | F | E | | | | |

- ▶ このままでは2日目のチームEとFの対戦相手が.....
- ▶ 「てきとうに作ればうまくいく」というわけではないらしい.

| | | 日 | | | | |
|-----|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| チーム | A | | | | | |
| | B | | | | | |
| | C | | | | | |
| | D | | | | | |
| | E | | | | | |
| | F | | | | | |

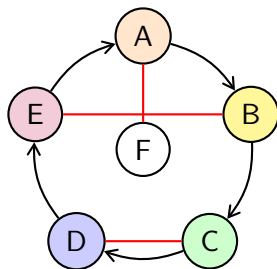
実際に作ってみましょう！

Circle method¹

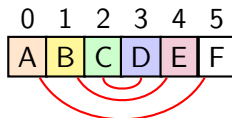
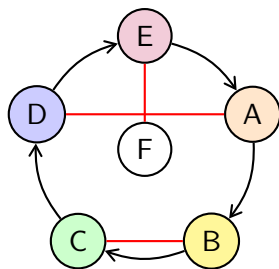
¹この circle method は、1847 年にはすでに存在していたことが確認されている。

データ構造とは？

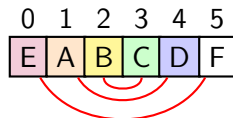
| 計算モデル | データの表現 |
|-------------|-----------|
| 人間 + 紙 + 鉛筆 | 紙上の図 |
| コンピューター | コンピューター内部 |



Circle
Method
の図



配列を
利用した
データ構造



作成途中の総当り戦スケジュール表再び

| | | 日 | | | | | | | | |
|--------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| チ ム | A | B | D | F | H | J | | | | |
| | B | A | C | E | G | I | | | | |
| | C | D | B | J | F | H | | | | |
| | D | C | A | G | I | E | | | | |
| | E | F | H | B | J | D | | | | |
| | F | E | I | A | C | G | | | | |
| | G | H | J | D | B | F | | | | |
| | H | G | E | I | A | C | | | | |
| | I | J | F | H | D | B | | | | |
| | J | I | G | C | E | A | | | | |

- ▶ この表の続きを埋めても表の作成は不可能である．
- ▶ 不可能性の確認には，グラフ理論を利用するとわかりやすい．
- ▶ Circle Method の正当性の厳密な確認には群論を用いる．

アルゴリズムとは？データ構造とは？

言葉による説明

例 1: 総当り戦スケジュール表の作成

例 2: 安定マッチング

例 3: アル・フアリズミー (Al Khwarizmi) と乗算

アルゴリズムとデータ構造を学ぶ目的や意義

この講義の狙い

演習問題

文献紹介

おまけ: リーグ戦スケジュール表の不可能性

安定マッチング

- ▶ 4 人の男性，有葉 (α)，米太 (β)，元馬 (γ)，出る太 (δ) と 4 人の女性，英子 (A)，美依子 (B)，椎子 (C)，泥子 (D) の合計 8 人がある．
- ▶ それぞれ，異性に対して以下の表のような嗜好を持っている．

| 人 | 好き \Leftarrow 嗜好 \Rightarrow 嫌い | | | | | | |
|----------|-------------------------------------|---|----------|---|----------|---|----------|
| α | A | > | B | > | C | > | D |
| β | A | > | D | > | C | > | B |
| γ | B | > | A | > | C | > | D |
| δ | D | > | B | > | C | > | A |
| A | δ | > | γ | > | α | > | β |
| B | β | > | δ | > | γ | > | α |
| C | δ | > | α | > | β | > | γ |
| D | γ | > | β | > | α | > | δ |

- ▶ 男女ペアを 4 組作りたいのだが，後々面倒なことにならないようにできるだろうか？

ブロッキングペアと安定マッチング

- ▶ ここでは男女ペアの集合のうち，どの男性女性もちょうど1度だけ出現するものを**完全マッチング** (perfect matching) とよぶことにする .
- ▶ 例えば， $\{(\alpha, A), (\beta, B), (\gamma, C), (\delta, D)\}$ という完全マッチングを作るとする .
- ▶ このとき， β は現在の相手 B よりも D の方が好きであり，D もまた現在の相手 δ よりも β の方が好きである .
- ▶ これだと，いつ浮気されてもおかしくない！
- ▶ このように「お互いに，現在の相手よりも好きなもの同士」を**ブロッキングペア**という .
- ▶ そして「ブロッキングペアを含まないペアの集合」を**安定マッチング** (stable matching) という .
- ▶ 一般に，同数の男性女性と異性に対する完全なる嗜好が与えられたとき，安定マッチングを見つける簡単な方法はあるだろうか？

Gale-Shapley アルゴリズム

Step 1 すべての男女をフリーとする。

Step 2 フリーでかつまだ全ての女性にはプロポーズしていない男性がいる間、以下を繰り返す。

Step 2-1 フリーな男性を一人選び、その男性が、まだプロポーズしていない女性の中で最も好きな人にプロポーズする。

Step 2-2 もしプロポーズされた女性がフリーならば、2人は婚約する。

Step 2-3 もしプロポーズされた女性が婚約中ならば、女性は好きな方を婚約者にする（どちらかの男性はフリーに戻る。）

Step 3 婚約しているペアの集合を出力する。

このように問題の答えを見つける手続きを、一般に、**アルゴリズム**という。

Gale-Shapley アルゴリズムの例

- ▶ $\alpha, \beta, \gamma, A, B, C$ の 6 人の場合で，先ほどとは少し異なる以下の嗜好であるとして，Gale-Shapley アルゴリズムを実際に図に描いて実行してみる．

| 人 | 好き \Leftarrow | 嗜好 \Rightarrow | 嫌い |
|----------|-----------------|------------------|----------|
| α | C > | A > | B |
| β | B > | C > | A |
| γ | C > | B > | A |
| A | γ > | α > | β |
| B | α > | γ > | β |
| C | α > | β > | γ |

- ▶ ところで，この男女の集合と異性への嗜好は，コンピューター内部ではどのように表現すればよいであろうか？

Ranking Matrix で表現

- ▶ Gale-Shapley アルゴリズムを実行する際のデータ構造として，以下の様な行列（以下 Ranking Matrix とよぶ）が考えられる [Gale and Shapley, 1962] ．

| | A | B | C |
|----------|-----|-----|-----|
| α | 2,2 | 3,1 | 1,1 |
| β | 3,3 | 1,3 | 2,2 |
| γ | 3,1 | 2,2 | 1,3 |

この行列は，行が男性，列が女性に対応している．そして行列の i 行 j 列成分の第 1 要素は男性 i の女性 j に対する好きな順位，第 2 要素は女性 j の男性 i に対する好きな順位である．

この Ranking Matrix を用いて，再び Gale-Shapley アルゴリズムを実行してみよう．

せっかくなので安定マッチングについてもう少し

- ▶ 安定マッチングは必ず存在する．これは次回扱う．
- ▶ 安定マッチングは唯一とは限らない．以下の Ranking Matrix を考えれば明らかである．

| | A | B |
|----------|------|------|
| α | 1, 2 | 2, 1 |
| β | 2, 1 | 1, 2 |

- ▶ アルゴリズムにおいて，フリーな男性を選ぶ順番は任意である．
 - ▶ それでも同じ安定マッチングが得られる．
 - ▶ 証明は省略する．
- ▶ 1962 年に Gale と Shapley が問題と解法を提案した．
- ▶ アメリカ合衆国では研修医の病院配属に採用されている．
- ▶ 近年，日本でも採用されている．
 - ▶ 日本医師臨床研修マッチング協議会（2004 年～）
<http://www.jrmp.jp/>
 - ▶ 歯科医師臨床研修マッチング協議会（2006 年～）
<http://www.drmp.jp/>

さらにもう少し

- ▶ 安定マッチングは，ゲーム理論における戦略形ゲームのナッシュ均衡と解釈できる．
- ▶ 問題設定の対称性から，女性からプロポーズするアルゴリズムも同様に考えられる．
- ▶ このとき
 - ▶ 男性からプロポーズすると男性にとって望ましい安定マッチング，
 - ▶ 女性からプロポーズすると女性にとって望ましい安定マッチング
 が得られる．

アルゴリズムとは？データ構造とは？

言葉による説明

例 1: 総当り戦スケジュール表の作成

例 2: 安定マッチング

例 3: アル・フアリズミー (Al Khwarizmi) と乗算

アルゴリズムとデータ構造を学ぶ目的や意義

この講義の狙い

演習問題

文献紹介

おまけ: リーグ戦スケジュール表の不可能性

アル・フアリズミー (Al Khwarizmi) と乗算

$$\begin{array}{r}
 1 \ 1 \\
 \times \ 1 \ 3 \\
 \hline
 3 \ 3 \\
 1 \ 1 \\
 \hline
 1 \ 4 \ 3
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 11 \ 13 \\
 5 \ 26 \\
 2 \ 52 \quad (\text{削除}) \\
 1 \ 104 \\
 \hline
 143 \quad (\text{答})
 \end{array}$$

アル・フアリズミーの乗算のアルゴリズム

入力: 自然数 x, y

出力: 自然数 $x \times y$

Step 1 x_1 に x を代入し, y_1 に y を代入する.

Step 2 i に 1 を代入する.

Step 3 $x_i > 1$ の間, 以下を繰り返す.

Step 3-1 x_{i+1} に, x_i を 2 で割った商を代入する.

Step 3-2 y_{i+1} に, y_i の 2 倍の値を代入する.

Step 3-3 i を 1 増やす.

Step 4 x_i が奇数の i に関して, y_i の合計を計算し出力する.

アルゴリズムとは？データ構造とは？

言葉による説明

例 1: 総当り戦スケジュール表の作成

例 2: 安定マッチング

例 3: アル・フアリズミー (Al Khwarizmi) と乗算

アルゴリズムとデータ構造を学ぶ目的や意義

この講義の狙い

演習問題

文献紹介

おまけ: リーグ戦スケジュール表の不可能性

アルゴリズムとデータ構造を学ぶ目的や意義

- ▶ アルゴリズムやデータ構造を使えるようになる．
 - ▶ どのようなアルゴリズムやデータ構造があるか知る．
 - ▶ そして
 - ▶ 使える計算モデル（コンピューター），
 - ▶ 要求される性能（スピード，使用メモリ，計算精度）など場面に応じて使い分ける．
- ▶ アルゴリズムやデータ構造を作れるようになる．
そのためには
 - ▶ どのように作られているか知る，
 - ▶ 実際に作ってみる，ことが有効である．
- ▶ 知的好奇心を満たす．

アルゴリズムとは？データ構造とは？

言葉による説明

例 1: 総当り戦スケジュール表の作成

例 2: 安定マッチング

例 3: アル・フアリズミー (Al Khwarizmi) と乗算

アルゴリズムとデータ構造を学ぶ目的や意義

この講義の狙い

演習問題

文献紹介

おまけ: リーグ戦スケジュール表の不可能性

この講義の狙い

- ▶ アルゴリズムとデータ構造の例をカテゴリ分けして紹介する。
⇒ どのようなアルゴリズムやデータ構造があるか知る。
- ▶ アルゴリズムの性能（スピード，計算精度）を評価する。
⇒ 場面に応じて使い分けられるようになる。
- ▶ アルゴリズムの正しさを確認する。
⇒ どのように作られているかを知り，自ら構築できるようにする。
- ▶ 知的好奇心を満たす。

この講義では扱わないこと

- ▶ 「普通の」コンピューター以外の計算モデルは扱わない。
 - ▶ しかし「普通でない」コンピューターを用いる場合にも，「普通の」コンピューターを用いる場合の考え方が基礎となる（はず）
- ▶ 実際のプログラミングは扱わない。
 - ▶ 座学なので。
 - ▶ そして，特定のデバイスやプログラミング言語に依存してほしくない。

アルゴリズムとは？データ構造とは？

言葉による説明

例 1: 総当り戦スケジュール表の作成

例 2: 安定マッチング

例 3: アル・フアリズミー (Al Khwarizmi) と乗算

アルゴリズムとデータ構造を学ぶ目的や意義

この講義の狙い

演習問題

文献紹介

おまけ: リーグ戦スケジュール表の不可能性

総当り戦スケジュール表作成の演習問題

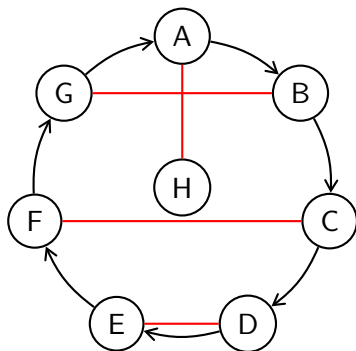
問題 チーム数が8の場合の総当り戦スケジュール表を作ってみよう！

解答例 解答例として、以下に総当り戦スケジュール表と対応する circle を図示する．

日

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | H | F | D | B | G | E | C |
| B | G | E | C | A | F | D | H |
| C | F | D | B | G | E | H | A |
| D | E | C | A | F | H | B | G |
| E | D | B | G | H | C | A | F |
| F | C | A | H | D | B | G | E |
| G | B | H | E | C | A | F | D |
| H | A | G | F | E | D | C | B |

チ
ー
ム



安定マッチングの演習問題

問題 先述の $\alpha, \beta, \gamma, \delta, A, B, C, D$ の嗜好が与えられた場合の安定マッチングを見つけてみよう！

解答例 Ranking matrix を用いて、安定マッチングが作られていく様子を Stage 1 から Stage 6 の順に次ページ以降に示す．緑字は前の Stage から変わらないペア，赤字は新たに作られたペアを表す．

表: Stage 1

| | A | B | C | D |
|----------|-----|-----|-----|-----|
| α | 1,3 | 2,4 | 3,2 | 4,3 |
| β | 1,4 | 4,1 | 3,3 | 2,2 |
| γ | 2,2 | 1,3 | 3,4 | 4,1 |
| δ | 4,1 | 2,2 | 3,1 | 1,4 |

表: Stage 2

| | A | B | C | D |
|----------|-----|-----|-----|-----|
| α | 1,3 | 2,4 | 3,2 | 4,3 |
| β | 1,4 | 4,1 | 3,3 | 2,2 |
| γ | 2,2 | 1,3 | 3,4 | 4,1 |
| δ | 4,1 | 2,2 | 3,1 | 1,4 |

表: Stage 3

| | A | B | C | D |
|----------|-----|-----|-----|-----|
| α | 1,3 | 2,4 | 3,2 | 4,3 |
| β | 1,4 | 4,1 | 3,3 | 2,2 |
| γ | 2,2 | 1,3 | 3,4 | 4,1 |
| δ | 4,1 | 2,2 | 3,1 | 1,4 |

表: Stage 4

| | A | B | C | D |
|----------|-----|-----|-----|-----|
| α | 1,3 | 2,4 | 3,2 | 4,3 |
| β | 1,4 | 4,1 | 3,3 | 2,2 |
| γ | 2,2 | 1,3 | 3,4 | 4,1 |
| δ | 4,1 | 2,2 | 3,1 | 1,4 |

表: Stage 5

| | A | B | C | D |
|----------|-----|-----|-----|-----|
| α | 1,3 | 2,4 | 3,2 | 4,3 |
| β | 1,4 | 4,1 | 3,3 | 2,2 |
| γ | 2,2 | 1,3 | 3,4 | 4,1 |
| δ | 4,1 | 2,2 | 3,1 | 1,4 |

表: Stage 6

| | A | B | C | D |
|----------|-----|-----|-----|-----|
| α | 1,3 | 2,4 | 3,2 | 4,3 |
| β | 1,4 | 4,1 | 3,3 | 2,2 |
| γ | 2,2 | 1,3 | 3,4 | 4,1 |
| δ | 4,1 | 2,2 | 3,1 | 1,4 |

アル・ファリズミーの乗算の演習問題

問題 12×34 をアル・ファリズミーの乗算のアルゴリズムで計算してみよう！

解答例 筆算を以下に図示する．

$$\begin{array}{r}
 12 \quad 34 \quad (\text{削除}) \\
 6 \quad 68 \quad (\text{削除}) \\
 3 \quad 136 \\
 1 \quad 272 \\
 \hline
 408 \quad (\text{答})
 \end{array}$$

安定マッチングの演習問題（2016 年度期末試験問題より）

問題 安定マッチング問題の入力として，以下の ranking matrix が与えられた．

| | A | B | C | D |
|------------|-----|-----|-----|-----|
| α | 4,3 | 3,2 | 1,4 | 2,4 |
| β | 3,4 | 4,4 | 2,2 | 1,1 |
| γ | 4,2 | 3,1 | 1,3 | 2,3 |
| ϵ | 2,1 | 1,3 | 4,1 | 3,2 |

なお，ranking matrix は，行が男性，列が女性に対応している．そして行列の i 行 j 列成分の第 1 要素は男性 i の女性 j に対する好きな順位，第 2 要素は女性 j の男性 i に対する好きな順位である．以下の空欄を埋めよ．

- 安定マッチングの 1 つは

である．

- 男性からプロポーズするタイプの Gale-Shapley アルゴリズムを実行したとき，男性が

プロポーズする総数は

回である．女性からプロポーズするタイプの

Gale-Shapley アルゴリズムを実行したとき，女性がプロポーズする総数は

回である．

アルゴリズムとは？データ構造とは？

言葉による説明

例 1: 総当り戦スケジュール表の作成

例 2: 安定マッチング

例 3: アル・フアリズミー (Al Khwarizmi) と乗算

アルゴリズムとデータ構造を学ぶ目的や意義

この講義の狙い

演習問題

文献紹介

おまけ: リーグ戦スケジュール表の不可能性

さらなる勉強のために

- ▶ Circle method および作成途中の 10 チームの対戦表は [宮代隆平, 2007] より引用した .
- ▶ 安定マッチングは [Gale and Shapley, 1962] で初めて扱われ, 解法 (Gale-Shapley アルゴリズム) と問題の性質などが論じられた .
 - ▶ 他の前提知識を必要としないので, 初めて論文を読む方にもおすすめできる .
 - ▶ 有葉, 米太, 元馬, 出る太, 英子, 美依子, 椎子, 泥子の嗜好もこの文献からの引用である .
- ▶ Gale-Shapley アルゴリズムが初めて提案されたのはもちろん [Gale and Shapley, 1962] だが, このスライドのアルゴリズムの記述は [Kleinberg and Tardos, 2005] に近い . [Gale and Shapley, 1962] では, かなりざっくりと書かれている .
- ▶ Al Khwarizmi と乗算に関しては, [Dasgupta et al., 2006] からの引用である .

参考文献

[Dasgupta et al., 2006] Dasgupta, S., Papadimitriou, C., and Vazirani, U. (2006).

Algorithms.

McGraw-Hill Science/Engineering/Math.

[Gale and Shapley, 1962] Gale, G. and Shapley, L. S. (1962).

College admissions and the stability of marriage.

American Mathematical Monthly, 69:9–15.

[Kleinberg and Tardos, 2005] Kleinberg, J. and Tardos, E. (2005).

Algorithm Design.

Addison-Wesley.

[宮代隆平, 2007] 宮代隆平 (2007).

総当りリーグ戦とグラフ理論.

オペレーションズ・リサーチ, 52:547–550.

不可能性の説明

| チ ム | 日 | | | | | | | | |
|--------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| | A | B | D | F | H | J | | | |
| | B | A | C | E | G | I | | | |
| | C | D | B | J | F | H | | | |
| | D | C | A | G | I | E | | | |
| | E | F | H | B | J | D | | | |
| | F | E | I | A | C | G | | | |
| | G | H | J | D | B | F | | | |
| | H | G | E | I | A | C | | | |
| | I | J | F | H | D | B | | | |
| | J | I | G | C | E | A | | | |

