ロジスティクス工学

08 配送計画

宮本 裕一郎
miyamoto **あっと** sophia.ac.jp

上智大学 理工学部 情報理工学科

目次

はじめに

- 例えば，郵便や宅配便において，集配所から各顧客にモノを配る状況を考え得る．このとき，配送する計画を立てることを配送計画という．
- 配送計画においては，
  - 集配所や顧客の集合，
  - 集配所・顧客間の移動費用，
  - 使える配送車，

  などが与えられた状態で，移動費用の最小化などを目的とする．
- 配送計画は，ロジスティクス（あるいはオペレーションズ・リサーチ）における意思決定では最もレベルの低い，作戦レベルに位置づけられる．一方で，配送計画ソフトなどの需要は多い．
- まずは，配送計画問題の特別な場合（配送車が 1 台の場合）である，巡回セールスマン問題を説明する．

巡回セールスマン問題

問題 (巡回セールスマン)

入力 都市の集合 $V = \{1, 2, \ldots, n\}$，都市間の移動費用 $c\colon V \times V \to \mathbb{R}_{>0}$

出力 全都市を巡る巡回路のうち，移動費用の総和が最小のもの，すなわち，順列 $\pi\colon \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ のうち

$c(\pi(n), \pi(1)) + \sum_{i=1}^{n-1} c(\pi(i), \pi(i+1))$ が最小となるもの

- 巡回セールスマン問題には，特に費用の設定において，様々なものがある．
  - 都市間の移動費用が対称のもの，
  - 都市間の移動費用が三角不等式を満たすもの，
  - 都市が距離空間内に埋め込まれており，都市間の移動費用が l_k ノルムのもの，

  などである．

巡回セールスマン問題について

- 巡回セールスマン問題に関しては，
http://www.math.uwaterloo.ca/tsp/
が詳しい．ゲームをやって，その難しさを体感するのも良い．
- 巡回セールスマン問題は NP 困難である．
- 多くのソルバーが開発されているが，2017 年現在の最強ソルバーは CONCORDE である（と思う）．
- 気軽に最適解を出せるのは 100 都市程度の問題までである．しかし，コンピューターに入力できる程度の大きさの問題であれば，実用上問題ない精度の解を見つけられる．

巡回セールスマン問題の解を得る方法

- CONCORDE を利用する．
  - お手軽，最強，ただしカスタマイズは難しい．
- 整数最適化問題として定式化し，整数最適化ソルバーに入力する．
  - プログラム開発は楽であり，カスタマイズも可能である．時間さえかければ，最適解を得られる．
- 一から解を構築するプログラムを開発する．
  - プログラム開発は楽でないが，カスタマイズの自由度は非常に大きい．最適解を得るのは難しい．

整数最適化問題としての定式化概要

変数

巡回路において都市 v の次に都市 w を訪れるとき 1，そうでないとき 0 となる変数を x_{vw} とする．

巡回セールスマン問題の整数最適化問題としての定式化概要

$$
\begin{array}{lll}
\text{min.} & \displaystyle\sum_{v\in V}\sum_{w\in V\setminus\{v\}} c(v,w)\cdot x_{vw} & \\
\text{s.t.} & \displaystyle\sum_{w\in V\setminus\{v\}} x_{vw} = 1 & (v\in V), \\
 & \displaystyle\sum_{w\in V\setminus\{v\}} x_{wv} = 1 & (v\in V), \\
 & \text{部分巡回路除去制約} & , \\
 & x_{vw}\in\{0,1\} & (v\in V,\ w\in V\setminus\{v\}).
\end{array}
$$

- **部分巡回路除去制約がないと，小さな巡回路が複数できてしまう可能性がある．**

部分集合型部分巡回路除去制約

- そこだけで巡回路が完結しているような，都市の真部分集合 $S \subsetneq V$ があるとまずい．
- すなわち，S 内だけで $|S|$ 回の移動をしているのがまずい．
- S 内では高々 $|S|-1$ の移動しか許さないことにしよう．

部分集合型部分巡回路除去制約

$$\sum_{v \in S} \sum_{w \in S \setminus \{v\}} x_{vw} \leq |S| - 1 \quad (\emptyset \neq S \subsetneq V)$$

長所 単純明快，それなりに強い．

短所 制約式の数がすごく多くなる可能性がある．最悪で 2^n 本くらいになる．

順序型部分巡回路除去制約

- 順番も変数で用意したら良さそう．
- 都市 $v \in V$ を訪れる順番を表す変数 $u_v \in \{1, 2, \ldots, n\}$ を用意する．

順序型部分巡回路除去制約

$$u_v - u_w + n \cdot x_{vw} \leq n - 1 \quad (v \in V \setminus \{1\},\ w \in V \setminus \{1, v\})$$

長所 増える変数は n 個だけ，制約式も n^2 本くらいしか増えない．

短所 弱い．

フロー型部分巡回路除去制約

- 都市 1 から他の都市に何かを流すためのパイプを設置すると考える．
- 都市 v から都市 w に流れる量を f_{vw} とする．

フロー型部分巡回路除去制約

$$f_{vw} \le (n-1)\cdot x_{vw} \quad (v \in V,\ w \in V \setminus \{v\}),$$

$$\sum_{w \in V \setminus \{v\}} (f_{vw} - f_{wv}) = \begin{cases} n-1 & (v = 1) \\ -1 & (v \neq 1) \end{cases} \qquad (v \in V),$$

$$f_{vw} \ge 0 \quad (v \in V,\ w \in V \setminus \{v\})$$

長所 実際にモノを運ぶという状況を直感的にイメージしやすい．増える変数は n^2 本くらい，増える制約も n^2 本くらい．

短所 弱い．多品種流にすると少し強くなる．

運搬車総移動費用制限版配送計画問題

- 運搬車の配送能力に何らかの制限があると，1 台ですべての顧客を回るわけにはいかなくなる．
- その場合には，運搬車は 1 回以上配送拠点に戻るか，あるいは複数の運搬車が同時に配送を行うことになる．
- ロジスティクスの文脈においては配送拠点のことをデポ（depot）という．
- この講義では，デポと顧客をあわせたものを拠点とよぶことにする．
- この講義では，簡単のため，1 台の運搬車が（デポ出発後に）1 度に巡れる総移動費用の上限が与えられている問題を考える．

問題 (運搬車総移動費用制限版配送計画)

入力 拠点の集合 $V = \{0, 1, \ldots, n\}$（ただしここで 0 はデポ），拠点間の移動費用 $c\colon V \times V \to \mathbb{R}_{>0}$，運搬車の集合 K，運搬車の総移動費用の上限 $U \in \mathbb{R}_{>0}$

出力 総費用が最小となるような，各運搬車 $k \in K$ の巡回路

運搬車の巡回路が満たすべき条件

運搬車総移動費用制限版配送計画問題を整数最適化問題として定式化する前に，それぞれの運搬車の巡回路が満たすべき条件を以下にまとめておく．

- それぞれの運搬車の巡回路は必ずデポ 0 を含む．
- それぞれの顧客は，いずれかの運搬車によって少なくとも 1 回訪問される．運搬車総移動費用制限版配送計画問題の最適解においては，それぞれの顧客はちょうど 1 回訪問される．
- 使われない，すなわち巡回路がない運搬車はあっても良い．
- それぞれの運搬車の巡回路の総費用は U 以下である．

以降では，多品種流を利用した定式化を示す．

整数最適化問題としての定式化

変数

- 運搬車 $k \in K$ が拠点 $v \in V$ から拠点 $w \in V$ へ移動するとき 1，そうでないとき 0 となる変数を x_{kvw} とする．
- 最終的に顧客 $t \in V \setminus \{0\}$ まで流すものを，拠点 $v \in V$ から拠点 $w \in V$ へ流すとき 1，そうでないとき 0 となる変数を f_{tvw} とする．

整数最適化問題としての定式化の概要

目的 運搬車の総移動費用最小化

制約
- 運搬車の移動整合性
- 顧客の訪問回数の保証
- 荷物はいずれかの運搬車で運ばれる
- 荷物の移動経路の整合性
- 各運搬車の移動費用上限
- 変数の 01 制約

配送計画

整数最適化問題としての定式化の解説

- 拠点間の移動費用は $c\colon V \times V \to \mathbb{R}_{>0}$ である．
- 運搬車 $k \in K$ が拠点 $v \in V$ から拠点 $w \in V$ へ移動するとき 1，そうでないとき 0 となる変数を x_{kvw} とする．

目的関数: 総移動費用最小化

$$\text{minimize} \sum_{k\in K} \sum_{v\in V} \sum_{w\in V\setminus\{v\}} c(v,w) \cdot x_{kvw}$$

- 「運搬車 k が拠点 v から拠点 w へ移動するならば，拠点 v から拠点 w への移動費用を総費用に組み込む」ということをすべての運搬車 k に関して行う．
- こうして見積もった総費用を最小化するのが目的である．
- ここでは簡単のため，どの運搬車でも移動費用は変わらないとしている．しかし，運搬車ごとに拠点間の移動費用が異なる場合でも，カスタマイズは容易である．

整数最適化問題としての定式化の解説

- **運搬車 $k \in K$ が拠点 $v \in V$ から拠点 $w \in V$ へ移動するとき 1，そうでないとき 0 となる変数を x_{kvw} とする．**

制約: 運搬車の移動の整合性

$$\sum_{w \in V \setminus \{v\}} x_{kwv} = \sum_{w \in V \setminus \{v\}} x_{kvw} \quad (v \in V,\ k \in K)$$

- **どの運搬車も，どの拠点においても，出る回数と入る回数は同じである．**

整数最適化問題としての定式化の解説

- 運搬車 $k \in K$ が拠点 $v \in V$ から拠点 $w \in V$ へ移動するとき 1，そうでないとき 0 となる変数を x_{kvw} とする．

制約: 顧客の訪問回数の保証

$$\sum_{w \in V \setminus \{v\}} x_{kwv} = 1 \quad (v \in V \setminus \{0\},\ k \in K)$$

- どの拠点でも，出て行く運搬車の数はちょうど 1 である．
- この制約だけだと，運搬車が入ってくる回数はなにも制約されていない．しかし，直前の制約「運搬車の移動の整合性」とあわせると，運搬車が入ってくる回数も 1 に限定される．
- ここまでの制約だけだと，部分巡回路ができる可能性がある．これらの可能性は以降のフローを使った制約でなくす．

整数最適化問題としての定式化の解説

- 運搬車 $k \in K$ が拠点 $v \in V$ から拠点 $w \in V$ へ移動するとき 1，そうでないとき 0 となる変数を x_{kvw} とする．
- 最終的に顧客 $t \in V \setminus \{0\}$ まで流すものを，拠点 $v \in V$ から拠点 $w \in V$ へ流すとき 1，そうでないとき 0 となる変数を f_{tvw} とする．

制約: 荷物はいずれかの運搬車で運ばれる

$$f_{tvw} \leq \sum_{k \in K} x_{kvw} \quad (t \in V \setminus \{0\},\ v \in V,\ w \in V \setminus \{v\})$$

- どの顧客への荷物も，いずれかの運搬車が移動している拠点間は移動できる．

整数最適化問題としての定式化の解説

- 最終的に顧客 $t \in V \setminus \{0\}$ まで流すものを，拠点 $v \in V$ から拠点 $w \in V$ へ流すとき 1，そうでないとき 0 となる変数を f_{tvw} とする．

制約: 荷物の移動経路の整合性

$$\sum_{w \in V \setminus \{v\}} f_{tvw} - \sum_{w \in V \setminus \{v\}} f_{twv} = \begin{cases} 1 & (v = 0) \\ -1 & (v = t) \\ 0 & (v \notin \{0, t\}) \end{cases} \qquad (t \in V \setminus \{0\},\ v \in V))$$

- どの荷物も，どの拠点においても，出る回数と入る回数の整合性が取れている．すなわちどの荷物も，デポでは出る回数が 1 回多い，その荷物に該当する顧客では入る回数が 1 回多い，それ以外の拠点では出る回数と入る回数が同じである．
- この制約と直前の 2 つの制約「荷物はいずれかの運搬車で運ばれる」,「運搬車の移動の整合性」をあわせると，運搬車の移動経路はデポからいくつかの顧客を回る巡回路に限られる．

整数最適化問題としての定式化の解説

- 拠点間の移動費用は $c\colon V \times V \to \mathbb{R}_{>0}$ である．
- 運搬車の移動費用上限は $U \in \mathbb{R}_{>0}$ である．
- 運搬車 $k \in K$ が拠点 $v \in V$ から拠点 $w \in V$ へ移動するとき 1，そうでないとき 0 となる変数を x_{kvw} とする．

制約: 各運搬車の移動費用上限

$$\sum_{v \in V} \sum_{w \in V \setminus \{v\}} c(v,w) \cdot x_{kvw} \leq U \quad (k \in K)$$

- どの運搬車も，移動費用の合計は与えられた上限値以下である．
- この問題では簡単のため，移動費用上限は運搬車によらない（共通な）定数としている．移動費用および移動費用上限が運搬車ごとに異なるというカスタマイズは容易である．

容量制約付き配送計画問題

- 配送計画問題には様々なバリエーションがありうる．
- 例えば，先程の問題のように運搬車の移動費用上限が設定されているのではなく，運搬車の積載量上限が与えられていて，各顧客の（運搬）需要量が与えられているという問題もありがちである．
- 次に，そのような容量制約付き配送計画問題の定式化も考えてみる．

問題 (容量制約付き配送計画)

入力 拠点の集合 $V = \{0, 1, \ldots, n\}$（ただしここで 0 はデポ），拠点間の移動費用 $c\colon V \times V \to \mathbb{R}_{>0}$，運搬車の集合 K，顧客の需要量 $d\colon V \setminus \{0\} \to \mathbb{R}_{>0}$ 運搬車の容量 $U \in \mathbb{R}_{>0}$

出力 総移動費用が最小となるような，各運搬車 $k \in K$ の巡回路

整数最適化問題としての定式化

容量制約付き配送計画問題の定式化は，先程の運搬車の移動費用上限制約を除いて，以下の容量制約を加えれば良い．

- 運搬車の移動費用上限は $U \in \mathbb{R}_{>0}$ である．
- 運搬車 $k \in K$ が拠点 $v \in V$ から拠点 $w \in V$ へ移動するとき 1，そうでないとき 0 となる変数を x_{kvw} とする．
- 最終的に顧客 $t \in V \setminus \{0\}$ まで流すものを，拠点 $v \in V$ から拠点 $w \in V$ へ流すとき 1，そうでないとき 0 となる変数を f_{tvw} とする．

制約: 各運搬車の積載量上限

$$\sum_{t \in V \setminus \{0\}} d(t) \cdot f_{tvw} \leq U \cdot x_{kvw} \quad (k \in K,\ v \in V,\ w \in V \setminus \{v\})$$

- どの運搬車も，荷物の量の合計は与えられた上限値以下である．
- この問題では簡単のため，積載量上限は運搬車によらない（共通な）定数としている．積載量上限が運搬車ごとに異なるというカスタマイズは容易である．
- また，工夫次第では特殊用途運搬車両の混合運用も考えられる．