# ロジスティクス工学

## 06 施設配置その 2

宮本 裕一郎
miyamoto あっと sophia.ac.jp

上智大学 理工学部 情報理工学科

# 目次

## 施設配置

### 容量なし施設配置問題

### ハブ配置

# 容量なし施設配置問題

- $p$-median location problem や $p$-center location problem では，配置する施設の数は $p$ と決められていた．
- しかし，状況によっては，配置する施設の数ではなく予算が与えられていることもある．
- そのような場合には以下で紹介する容量なし施設配置問題（uncapacitated facility location problem）が合う．

# 容量なし施設配置問題

## 問題 (容量なし施設配置)

**問題例** 顧客の集合 $D$，（潜在的）施設の集合 $F$，施設開設費用 $f\colon F \to \mathbb{R}_{\geq 0}$，サービス費用 $c\colon F \times D \to \mathbb{R}_{\geq 0}$．

**回答** 開設施設 $X \subset F$ と顧客の施設への割り当て $\sigma\colon D \to X$ のうち，

$$\sum_{x \in X} f(x) + \sum_{d \in D} c(\sigma(d), d)$$

を最小にするもの．

- 容量なし施設配置問題もまた，NP 困難問題であることが知られている[1]．

[1] サービス費用が距離的なものであってもなお NP-困難問題であることが知られている．

# 容量なし施設配置問題の整数最適化定式化

- 施設 $i \in F$ を開設するとき 1，そうでないとき 0 となる変数を $x(i)$，
- 施設 $i \in F$ に顧客 $j \in D$ を割り当てるとき 1，そうでないとき 0 となる変数を $y(i,j)$

とすると，容量なし施設配置問題は以下の整数最適化問題，

$$\begin{aligned}
\text{min.} \quad & \sum_{i \in F} x(i) \cdot f(i) + \sum_{i \in F} \sum_{j \in D} c(i,j) \cdot y(i,j) \\
\text{s. t.} \quad & \sum_{i \in F} y(i,j) = 1 \quad (j \in D), \\
& y(i,j) \leq x(i) \quad ((i,j) \in F \times D), \\
& x(i) \in \{0,1\} \quad (i \in F), \\
& y(i,j) \in \{0,1\} \quad ((i,j) \in F \times D),
\end{aligned}$$

として定式化できる．

# 施設配置

## 容量なし施設配置問題

## ハブ配置

# ハブ配置とは

- 乗り換え空港となる大きな空港をハブ空港という．
- $n$ 個の空港があり，全空港間を旅行可能にしたいとき，
  - 全空港間に直通便を設定する $\Longrightarrow n^2$ くらいの便が必要である．
  - ハブ空港を 1 つ設定し，各空港間の旅行はハブ空港を経由することにする $\Longrightarrow 2n$ くらいの便で済む．
  - より一般に，
    - ハブ空港を少数設定し，
    - ハブ空港間だけは全て直通便を用意し，
    - その他の空港間の旅行はハブ空港を経由することにすれば，

    各空港間の旅行は便利なままで便数を節約できる．
- これは，一般に，航空便に関してのみ成り立つ話ではない．輸送や物流のあらゆる場面でハブ配置は扱われている．

# Single allocation model [2, 3, 4]

## 入力

- 空港の集合 $A$,
- ハブ空港の数 $p$,
- discount factor $\alpha$ $(0 \leq \alpha \leq 1)$,
- 空港間の需要 $W\colon A \times A \to \mathbb{R}_{\geq 0}$,
- 空港間の単位量あたりの輸送費用 $C\colon A \times A \to \mathbb{R}_{\geq 0}$

## 出力

どの空港もちょうど１つのハブ空港に接続するという条件のもとで，総輸送費用を最小にする $p$ 個のハブ空港

# Single allocation model の数理最適化問題としての定式化

変数
空港 $i \in A$ がハブ空港 $k \in A$ に接続するとき 1，そうでないとき 0 となる変数を $x_{i,k}$ とする．[2]

$$
\begin{aligned}
\text{min.}\ & \sum_{i \in A} \sum_{j \in A} W(i,j) \left( \sum_{k \in A} x_{i,k} \cdot C(i,k) + \alpha \sum_{k \in A} \sum_{m \in A} x_{i,k} \cdot x_{j,m} \cdot C(k,m) + \sum_{m \in A} x_{j,m} \cdot C(j,m) \right) \\
\text{s. t.}\ & (n-p+1)x_{jj} - \sum_{i \in A} x_{ij} \geq 0 \quad (j \in A), \\
& \sum_{k \in A} x_{i,k} = 1 \quad (i \in A), \\
& \sum_{k \in A} x_{k,k} = p, \\
& x_{i,k} \in \{0,1\} \quad (i \in A,\ k \in A).
\end{aligned}
$$

- Single allocation model は $p$-median の発展形とも見なせる．
- このままの定式化では，整数最適化ソルバーに入力するのは難しい．

[2] ここで「空港 $k \in A$ がハブ空港 $k \in A$ に接続すること」は「空港 $k \in A$ をハブ空港に決めること」と解釈すると都合が良い．

# Multiple allocation model [1]

- 「どの空港もちょうど 1 つのハブ空港に接続する」という条件は必ずしも現実的ではない．

## 入力

- 空港の集合 $A$,
- ハブ空港の数 $p$,
- discount factor $\alpha$ $(0 \leq \alpha \leq 1)$,
- 空港間の需要 $W\colon A \times A \to \mathbb{R}_{\geq 0}$,
- 空港間の単位量あたりの輸送費用 $C\colon A \times A \to \mathbb{R}_{\geq 0}$

## 出力

どの空港も 1 つ以上のハブ空港に接続するという条件のもとで，総輸送費用を最小にする $p$ 個のハブ空港

# Multi allocation model の整数最適化問題としての定式化

## 変数

- 空港 $i \in A$ から空港 $j \in A$ への旅行において，ハブ空港 $k \in A$ とハブ空港 $m \in A$ を経由する割合をあらわす変数を $x_{i,j,k,m}$ とする．
- 空港 $k \in A$ をハブ空港にするとき 1，そうでないとき 0 となる変数を $y_k$ とする．

- ここで $i, j, k, m$ の 2 つ以上が同じとなる場合もあることに注意する．
- 次ページで定式化を示すが，ここでは「変数の定義次第で線形目的・線形制約の数理最適化問題として表現できる場合がある」というのが大事である．

$$
\begin{aligned}
\text{min.}\quad & \sum_{i\in A}\sum_{j\in A}\sum_{k\in A}\sum_{m\in A} W(i,j)\left(C(i,k)+\alpha C(k,m)+C(j,m)\right)x_{i,j,k,m} \\
\text{s. t.}\quad & \sum_{k\in A} y_k = p, \\
& \sum_{k\in A}\sum_{m\in A} x_{i,j,k,m} = 1 \quad (i\in A,\ j\in A), \\
& \sum_{m\in A} x_{i,j,k,m} \le y_k \quad (i\in A,\ j\in A,\ k\in A), \\
& \sum_{k\in A} x_{i,j,k,m} \le y_m \quad (i\in A,\ j\in A,\ m\in A), \\
& x_{i,j,k,m} \ge 0 \quad (i\in A,\ j\in A,\ k\in A,\ m\in A), \\
& y_k \in \{0,1\} \quad (k\in A).
\end{aligned}
$$

- Single allocation model も同様に整数最適化問題としても定式化できる．

# 参考文献

[1] J. F. Campbell.
Integer programming formulations of discrete hub location problems.
*European Journal of Operational Research*, 72:387–405, 1994.

[2] M. O'Kelly.
The location of intersecting hub facilities.
*Transportation Science*, 20:92–106, 1986.

[3] M. O'Kelly.
A quadratic integer program for the location of intersecting hub facilities.
*European Journal of Operational Research*, 32:393–404, 1987.

[4] 佐々木 美裕.
ハブ空港の配置モデル.
オペレーションズ・リサーチ, 45:437–443, 2000.