ロジスティクス工学

02 輸送計画問題と数理最適化

宮本 裕一郎
miyamoto あっと sophia.ac.jp

上智大学 理工学部 情報理工学科

目次

この講義の流れ

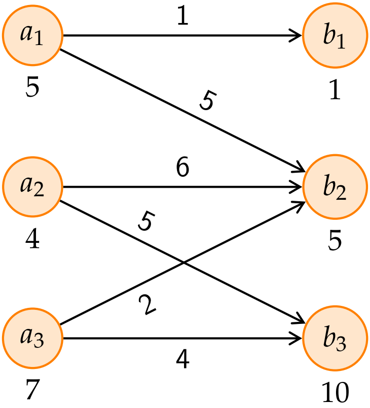
- まず，ロジスティクスにおける工学的アプローチで大きな割合を占めるロジスティクス・ネットワーク最適化（サプライ・チェイン最適化）を学ぶ．
  - ロジスティクス・ネットワーク最適化において有用な手法である数理最適化を以下の順に学ぶ．
    - 輸送計画
    - 最小費用流
    - 施設配置
    - ネットワーク設計
    - 配送計画

    これらは，ロジスティクス以外の分野でも役に立つと思われる．必要に応じてグラフ理論も学ぶ．
- 次に，ロジスティクスにおいても重要な手法となった価格付けを少しだけ学ぶ．
- 最後に，ロジスティクスにおける戦略や提携を語る場合に有用なゲーム理論の基礎を学ぶ．
- 他にも，情報の見える化や在庫などロジスティクスにおいて重要なテーマはあるが他の講義で扱われていると思われるので割愛する．

輸送計画問題と数理最適化

- 輸送計画問題
- 数理最適化

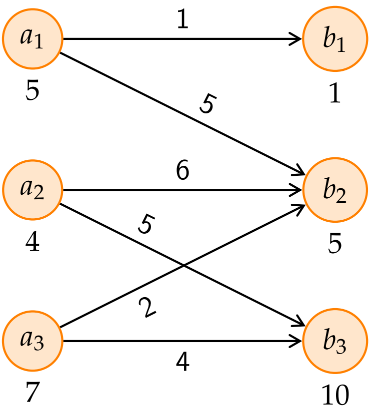
とある物資の輸送問題



- とある一種類の物資を供給点から需要点へ輸送したい．
- 今，3 つの供給点 a_1, a_2, a_3 と 3 つの需要点 b_1, b_2, b_3 がある．
- 各供給点から各需要点への，単位物資あたりの輸送費用は以下の表の通りである．

	b_1	b_2	b_3
a_1	1	5	∞
a_2	∞	6	5
a_3	∞	2	4

とある物資の輸送問題（続き）

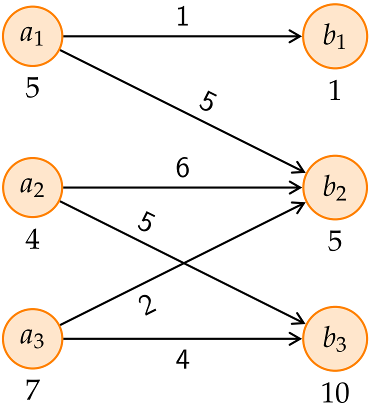


- 各供給点における供給量と，各需要点における需要量は以下の表の通りである．

供給点	供給量	需要点	需要量
a_1	5	b_1	1
a_2	4	b_2	5
a_3	7	b_3	10

- 供給可能な範囲で需要を満たしつつ総輸送費用を最小にするためには，それぞれの供給点からそれぞれの需要点へどれだけ輸送すれば良い？

とある物資の輸送問題を数式で表現



- 供給点 a から需要点 b への輸送量を変数 $x(a, b) \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ で表す．
- このとき，総輸送費用は

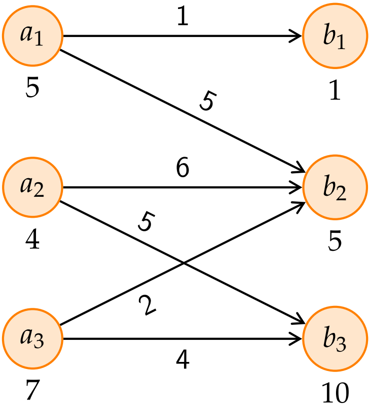
$$
\begin{aligned}
&1x(a_1, b_1) + 5x(a_1, b_2) + 6x(a_2, b_2) \\
&+ 5x(a_2, b_3) + 2x(a_3, b_2) + 4x(a_3, b_3)
\end{aligned}
$$

　である．
- また，供給量を考慮すると，供給点において

$$
\begin{aligned}
x(a_1, b_1) + x(a_1, b_2) &\leq 5, \\
x(a_2, b_2) + x(a_2, b_3) &\leq 4, \\
x(a_3, b_2) + x(a_3, b_3) &\leq 7,
\end{aligned}
$$

　が満たされなければならない．

とある物資の輸送問題を数式で表現（続き）

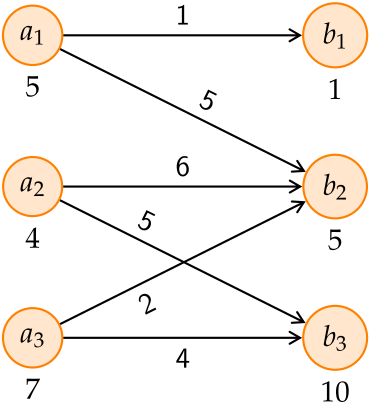


- さらに，需要を満たすためには，需要点において

$$
\begin{aligned}
&x(a_1, b_1) \geq 1, \\
&x(a_1, b_2) + x(a_2, b_2) + x(a_3, b_2) \geq 5, \\
&x(a_2, b_3) + x(a_3, b_3) \geq 10,
\end{aligned}
$$

が満たされなければならない．

とある物資の輸送問題を数式で表現（続き）



- まとめると

$$
\begin{aligned}
&x(a_1,b_1)+x(a_1,b_2)\le 5,\\
&x(a_2,b_2)+x(a_2,b_3)\le 4,\\
&x(a_3,b_2)+x(a_3,b_3)\le 7,\\
&x(a_1,b_1)\ge 1,\\
&x(a_1,b_2)+x(a_2,b_2)+x(a_3,b_2)\ge 5,\\
&x(a_2,b_3)+x(a_3,b_3)\ge 10,\\
&x(a_1,b_1)\ge 0,\ x(a_1,b_2)\ge 0,\\
&x(a_2,b_2)\ge 0,\ x(a_2,b_3)\ge 0,\\
&x(a_3,b_2)\ge 0,\ x(a_3,b_3)\ge 0,
\end{aligned}
$$

を満たす $x(a,b)$ のうち

$$
\begin{aligned}
&1x(a_1,b_1)+5x(a_1,b_2)+6x(a_2,b_2)\\
&+5x(a_2,b_3)+2x(a_3,b_2)+4x(a_3,b_3)
\end{aligned}
$$

が最小となるものを見つければよい．

輸送計画問題と数理最適化

- 輸送計画問題
- **数理最適化**

数理最適化問題

- とある物資の輸送問題は，より一般に，以下で定義される**数理最適化問題（mathematical optimization problem）**と見なせる．
- 数理最適化問題は数理計画問題ともよばれる．

問題 (数理最適化)

問題例 n 次元実数ベクトル集合の部分集合 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$，関数 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

回答 ベクトル $x \in \Omega$ のうち $f(x)$ を最大にするもの，あるいは Ω が空集合であること，あるいは $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \exists x \in \Omega,\ f(x) > \alpha$ であること.

数理最適化問題としてのとある物資の輸送問題

とある物資の輸送問題は

$$
\begin{aligned}
\Omega = \{ & (x(a_1,b_1), x(a_1,b_2), x(a_2,b_2), x(a_2,b_3), x(a_3,b_2), x(a_3,b_3)) \in \mathbb{R}^6_{\geq 0} \mid \\
& x(a_1,b_1) + x(a_1,b_2) \leq 5, \\
& x(a_2,b_2) + x(a_2,b_3) \leq 4, \\
& x(a_3,b_2) + x(a_3,b_3) \leq 7, \\
& x(a_1,b_1) \geq 1, \\
& x(a_1,b_2) + x(a_2,b_2) + x(a_3,b_2) \geq 5, \\
& x(a_2,b_3) + x(a_3,b_3) \geq 10 \}, \\
f(\boldsymbol{x}) = & -1x(a_1,b_1) - 5x(a_1,b_2) - 6x(a_2,b_2) \\
& -5x(a_2,b_3) - 2x(a_3,b_2) - 4x(a_3,b_3)
\end{aligned}
$$

を問題例とする数理最適化問題とみなせる．

数理最適化問題の記述

- **数理最適化業界では，$\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ が問題例として与えられた数理最適化問題を以下の命令文**:

$$\begin{aligned} &\text{maximize } f(x) \\ &\text{subject to } x \in \Omega, \end{aligned}$$

  で記述することが多い．
- $f(x)$ **は目的関数（objective function）とよばれる．**
- $x \in \Omega$ **は制約（constraints）とよばれる．**

とある物資の輸送問題の記述

とある物資の輸送問題は数理最適化問題

$$
\begin{aligned}
\text{maximize} \quad & -1x(a_1,b_1) - 5x(a_1,b_2) - 6x(a_2,b_2) \\
& -5x(a_2,b_3) - 2x(a_3,b_2) - 4x(a_3,b_3) \\
\text{subject to} \quad & x(a_1,b_1) + x(a_1,b_2) \le 5, \\
& x(a_2,b_2) + x(a_2,b_3) \le 4, \\
& x(a_3,b_2) + x(a_3,b_3) \le 7, \\
& x(a_1,b_1) \ge 1, \\
& x(a_1,b_2) + x(a_2,b_2) + x(a_3,b_2) \ge 5, \\
& x(a_2,b_3) + x(a_3,b_3) \ge 10, \\
& x(a_1,b_1) \ge 0,\ x(a_1,b_2) \ge 0, \\
& x(a_2,b_2) \ge 0,\ x(a_2,b_3) \ge 0, \\
& x(a_3,b_2) \ge 0,\ x(a_3,b_3) \ge 0,
\end{aligned}
$$

と記述できる．

数理最適化問題の記述における略記

- 数理最適化問題

$$\text{maximize} \quad -f(x) \quad \text{subject to} \quad x \in \Omega,$$

　は

$$\text{minimize} \; f(x) \quad \text{subject to} \quad x \in \Omega,$$

　と記述されることもある．
- “maximize”（あるいは “minimize”）は “max.”（or “min.”）と略して書かれることもある．
- “subject to” も “s. t.” と略して書かれることがある．

とある物資の輸送問題を再び記述

とある物資の輸送問題は

$$
\begin{aligned}
\text{min.}\quad & 1x(a_1,b_1)+5x(a_1,b_2)+6x(a_2,b_2)\\
& +5x(a_2,b_3)+2x(a_3,b_2)+4x(a_3,b_3)\\
\text{s. t.}\quad & x(a_1,b_1)+x(a_1,b_2)\le 5,\\
& x(a_2,b_2)+x(a_2,b_3)\le 4,\\
& x(a_3,b_2)+x(a_3,b_3)\le 7,\\
& x(a_1,b_1)\ge 1,\\
& x(a_1,b_2)+x(a_2,b_2)+x(a_3,b_2)\ge 5,\\
& x(a_2,b_3)+x(a_3,b_3)\ge 10,\\
& x(a_1,b_1)\ge 0,\ x(a_1,b_2)\ge 0,\\
& x(a_2,b_2)\ge 0,\ x(a_2,b_3)\ge 0,\\
& x(a_3,b_2)\ge 0,\ x(a_3,b_3)\ge 0,
\end{aligned}
$$

とも書ける．

実行可能解と最適解

- **数理最適化問題**:

$$\text{maximize } f(x) \quad \text{subject to} \quad x \in \Omega,$$

  において，制約を満たすベクトル $x \in \Omega$ **を実行可能解**（feasible solution）**という．**

- **目的関数を最大にする実行可能解を最適解**（optimum solution[1]）**という．最適解の目的関数値を最適値**（optimum value）**という．**

例

数理最適化問題:

$$\text{max. } x + y \quad \text{s. t. } x \le 1,\ y \le 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0,$$

の実行可能解の集合は $[0,1]^2$ **である．また，この数理最適化問題の最適解は** $x = 1,\ y = 1$ **であり，最適値は** 2 **である．**

[1] あるいは optimal solution

最適値の一意性

- 実行可能解や最適解は複数存在しうる．
- しかし，最適値は存在するならば唯一である．

例

数理最適化問題:

$$\text{max.}\ x+y \quad \text{s. t.}\ x+y \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0,$$

の最適解は $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y=1,\ 0 \leq x \leq 1\}$ **の任意の要素である．しかし，最適値は** 1 **のみである．**

実行不能と非有界

- **数理最適化問題**: maximize $f(x)$ subject to $x \in \Omega$ **は** $\Omega = \emptyset$ **の場合もありえる．このとき，その問題は実行不能（infeasible）であるという．**
- **また，実行可能な数理最適化問題であっても，目的関数をいくらでも大きくできる場合もありえる．すなわち** $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \exists x \in \Omega,\ f(x) > \alpha$ **ということもありえる．このとき，その問題は非有界（unbounded）であるという．**

例

- **数理最適化問題**: max. $x + y$ s. t. $x \le 1,\ y \le 1,\ x + y \ge 3$ **は実行不能である**.
- **数理最適化問題**: max. $x + y$ s. t. $x \ge 1,\ y \ge 1$ **は実行不能ではないが非有界である．**

数理最適化とは？

数理最適化問題を研究する分野を数理最適化といい，

- 数理的性質の探求，
- 解法の開発と実装，
- 現実問題への解法（あるいはモデリング）の適用

を扱う[2]．

[2] Mathematical Optimization Society, http://www.mathopt.org/

この講義における数理最適化の扱い

- この講義では数理最適化問題の解法（アルゴリズム）は，基本的には，解説しない．
- 数理最適化ソルバー（すなわちソフトウェア）に問題を入力すれば最適解は得られるという立場を取る．ただし，問題によっては最適解が得られるまでにかかる時間が膨大なものになることもある．
- 数理最適化ソルバーを上手に使うには，本来ならばその中身（アルゴリズム）の概要も理解する必要がある．興味のある方は大学院科目の「数理最適化特論」をいずれ履修してみて下さい．

数理最適化ソルバーで解いてみる

例えば SCIP **に以下のファイルを入力すると，とある物資の輸送問題の最適解が見つかる．**

例 (toaru.lp)

```
minimize
obj:  x(a1,b1) + 5 x(a1,b2) + 6 x(a2,b2) + 5 x(a2,b3)
    + 2 x(a3,b2) + 4 x(a3,b3)
subject to
const(a1):  x(a1,b1) + x(a1,b2) <= 5
const(a2):  x(a2,b2) + x(a2,b3) <= 4
const(a3):  x(a3,b2) + x(a3,b3) <= 7
const(b1):  x(a1,b1) >= 1
const(b2):  x(a1,b2) + x(a2,b2) + x(a3,b2) >= 5
const(b3):  x(a2,b3) + x(a3,b3) >= 10
end
```