ロジスティクス工学

06 施設配置その 1

宮本 裕一郎

miyamoto **あっと** sophia.ac.jp

上智大学 理工学部 情報理工学科

目次

施設配置とは

- ロジスティクスの文脈では，工場・倉庫などの重要な拠点（施設）の配置を考えることである．
- システム全体に与える影響は輸送計画や配送計画の比ではないため，最もレベルの高い戦略的意思決定として位置づけられる．
- ロジスティクスのみならず，都市計画や交通工学などにおいても重要であると認識されている．通信分野にも応用があり，応用範囲はとても幅広い．

様々な施設配置問題

施設配置問題には，

- 総移動距離最小化問題（p-median location problem），
- 最大移動距離最小化問題（p-center location problem），
- 集合被覆問題（set covering location problem），
- 最大被覆問題（maximal covering location problem），
- 容量なし施設配置問題（uncapacitated facility location problem），
- 容量あり施設配置問題（capacitated facility location problem）[1]，
- ハブ配置問題（hab location problem），

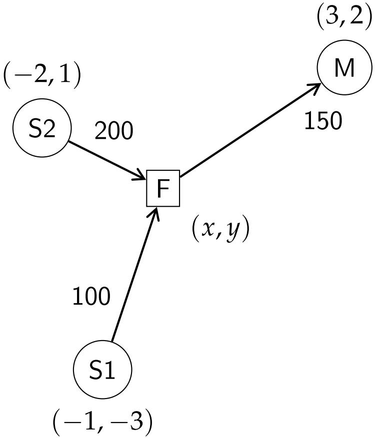
などなど，様々な種類の問題がある．

[1] この講義では省略する．

施設配置

- Weber 問題と Hotelling の問題
- p-median 問題
- p-center 問題
- 集合被覆問題（set cover）
- 最大被覆問題（max. cover）

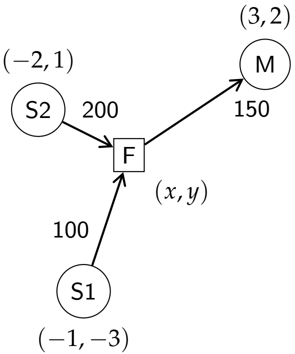
Weber 問題



- 初出は 1909 年であり，おそらく最初の施設配置問題である．
- 2 次元ユークリッド平面上に，2 つの供給源（S1, S2）と 1 つの市場（M）がある．
- 供給源から工場へ原料を輸送して製品を製造し，製造した製品を市場へ輸送したい．そのために，工場（F）を配置したい
- 単位期間あたりの輸送量は
  - S1 から F へ 100，
  - S2 から F へ 200，
  - F から M へ 150

  である．
- 輸送費用は，輸送量×輸送距離である．
- 単位期間あたりの総輸送費用を最小化するには，どこに工場を配置したら良い？

数理最適化問題としての Weber 問題の定式化



変数

(x, y): **工場の座標**

数理最適化問題としての定式化

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & 100\sqrt{(-1-x)^2+(-3-y)^2} \\ & +200\sqrt{(-2-x)^2+(1-y)^2} \\ & +150\sqrt{(3-x)^2+(2-y)^2} \\ \text{subject to} & x, y \in \mathbb{R}. \end{array}$$

Weber 問題の一般化

問題 (一般化された Weber)

問題例 ユークリッド平面上の点の部分集合 $P \subset \mathbb{R}^2$，座標 $a\colon P \to \mathbb{R}^2$，重み $w\colon P \to \mathbb{R}$

回答 重み付き重心の座標 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$

数理最適化問題としての定式化

$$
\begin{aligned}
\text{min.} \quad & \sum_{p \in P} w(p) \cdot \|a(p) - \boldsymbol{x}\| \\
\text{s. t.} \quad & \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2.
\end{aligned}
$$

- この問題に対しては，1936 年には，効率的な解法が知られている．
- この問題は凸最適化問題なので，局所最適解が大域的最適解となる．

Hotelling の問題

- 俗にアイスクリーム屋台問題ともよばれる．
- 立地競争問題の先駆的モデルである．
- 海岸線（1 次元的線分）上に 2 つのアイスクリーム屋台が立つ．
- 海水浴客は毎日一様に分布する．
- 日々のアイスクリーム屋台の出店場所はどうなる．その行き着く先は？

得られる知見

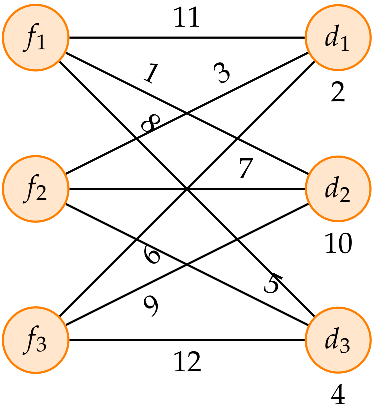
市場原理に任せても，社会全体として望ましい配置になるとは限らない．

- 市場原理に任せた結果として到達する先（均衡点）の考察も大事である．
- このことは講義の後半のゲーム理論で詳しく説明する．

施設配置

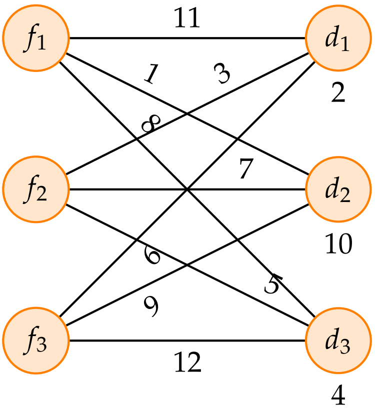
- Weber 問題と Hotelling の問題
- p-median 問題
- p-center 問題
- 集合被覆問題（set cover）
- 最大被覆問題（max. cover）

p-median 問題



- みんなが施設を利用したい．
- 移動人数×移動距離の総和を最小にするには，どの 2 箇所に施設を作れば良い？

p-median 問題



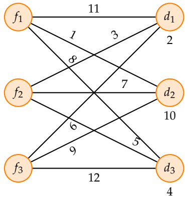
問題例

施設配置候補の集合 F，需要点の集合 D，施設配置数 p，需要量 $w\colon D \to \mathbb{R}_{>0}$，需要点から施設配置候補への距離 $c\colon D \times F \to \mathbb{R}_{\geq 0}$

例

$F = \{f_1, f_2, f_3\}$, $D = \{d_1, d_2, d_3\}$,
$p = 2$,
$w(d_1) = 2,\ w(d_2) = 10, w(d_3) = 4$,
$c(d_1, f_1) = 11,\ c(d_1, f_2) = 3,\ c(d_1, f_3) = 6,\ c(d_2, f_1) = 1,\ c(d_2, f_2) = 7,\ c(d_2, f_3) = 9,\ c(d_3, f_1) = 8,\ c(d_3, f_2) = 5,\ c(d_3, f_3) = 12$

p-median 問題



変数

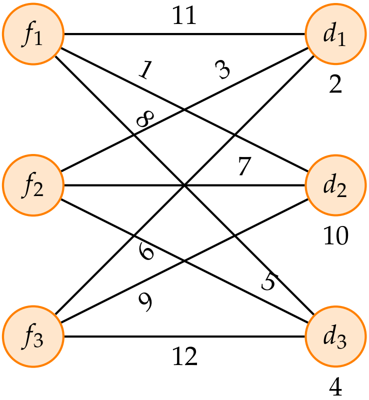
- **施設を $f \in F$ に配置するとき 1，そうでないとき 0 となる変数 $x(f)$**
- **需要点 $d \in D$ が施設 $f \in F$ を利用するとき 1，そうでないとき 0 となる変数 $y(d,f)$**

定式化の例

mim.　$2 \cdot 11 \cdot y(d_1,f_1) + 2 \cdot 3 \cdot y(d_1,f_2) + 2 \cdot 6 \cdot y(d_1,f_3) + 10 \cdot 1 \cdot y(d_2,f_1)$
$+10 \cdot 7 \cdot y(d_2,f_2) + 10 \cdot 9 \cdot y(d_2,f_3) + 4 \cdot 8 \cdot y(d_3,f_1) + 4 \cdot 5 \cdot y(d_3,f_2) + 4 \cdot 12 \cdot y($

s. t.　$x(f_1) + x(f_2) + x(f_3) = 2,$
$y(d_1,f_1) + y(d_1,f_2) + y(d_1,f_3) = 1,\ y(d_2,f_1) + y(d_2,f_2) + y(d_2,f_3) = 1,$
$y(d_3,f_1) + y(d_3,f_2) + y(d_3,f_3) = 1,$
$y(d_1,f_1) \le x(f_1),\ y(d_2,f_1) \le x(f_1),\ y(d_3,f_1) \le x(f_1),$
$y(d_1,f_2) \le x(f_2),\ y(d_2,f_2) \le x(f_2),\ y(d_3,f_2) \le x(f_2),$
$y(d_1,f_3) \le x(f_3),\ y(d_2,f_3) \le x(f_3),\ y(d_3,f_3) \le x(f_3),$
$x(f_1), x(f_2), x(f_3) \in \{0,1\},$
$y(d_1,f_1), y(d_1,f_2), y(d_1,f_3), y(d_2,f_1), y(d_2,f_2) \in \{0,1\},$
$y(d_2,f_3), y(d_3,f_1), y(d_3,f_2), y(d_3,f_3) \in \{0,1\}.$

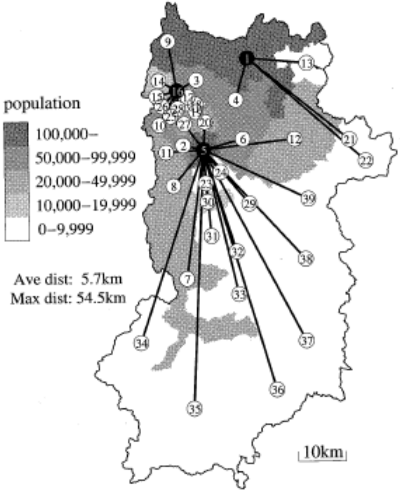
p-median 問題



定式化（一般形）

$$
\begin{aligned}
\text{mim.} \quad & \sum_{d \in D} \sum_{f \in F} w(d) \cdot c(d,f) \cdot y(d,f) \\
\text{s. t.} \quad & \sum_{f \in F} x(f) = p, \\
& \sum_{f \in F} y(d,f) = 1 \quad (d \in D), \\
& y(d,f) \le x(f) \quad (d \in D,\ f \in F), \\
& x(f) \in \{0,1\} \quad (f \in F), \\
& y(d,f) \in \{0,1\} \quad (d \in D,\ f \in F).
\end{aligned}
$$

p-median 問題のイメージ [1]



例えば奈良県で，人口密度に従って 3 つ施設を配置したいとすると，北部に 3 つ施設を配置することになる．

p-median 問題の定式化（一般形）

入力データ

施設配置候補の集合 F，需要点の集合 D，施設配置数 p，需要量 $w\colon D \to \mathbb{R}_{>0}$，需要点から施設配置候補への距離 $c\colon D \times F \to \mathbb{R}_{\geq 0}$

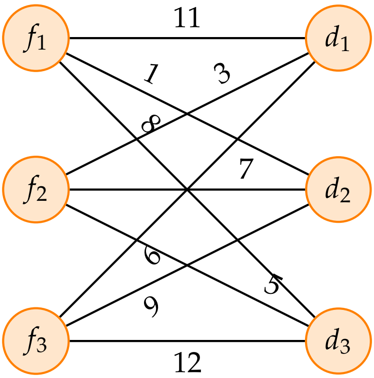
変数

- 施設を $f \in F$ に配置するとき 1，そうでないとき 0 となる変数 x_f
- 需要点 $d \in D$ が施設 $f \in F$ を利用するとき 1，そうでないとき 0 となる変数 $y_{d,f}$

定式化

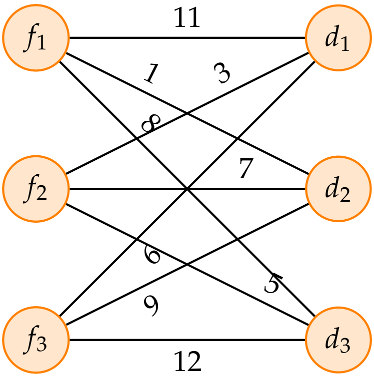
$$
\begin{aligned}
\text{mim.} \quad & \sum_{d\in D}\sum_{f\in F} w(d)\cdot c(d,f)\cdot y_{d,f} \\
\text{s. t.} \quad & \sum_{f\in F} x_f = p, \\
& \sum_{f\in F} y_{d,f} = 1 \quad (d \in D), \\
& y_{d,f} \leq x_f \quad (d \in D,\ f \in F), \\
& x_f \in \{0,1\} \quad (f \in F), \\
& y_{d,f} \in \{0,1\} \quad (d \in D,\ f \in F).
\end{aligned}
$$

p-center 問題



- みんなが施設を利用したい．
- 最大移動距離を最小にするには，どの 2 箇所に施設を作れば良い？

p-center 問題



入力データ

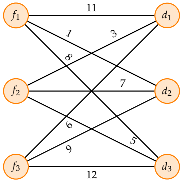
施設配置候補の集合 F，需要点の集合 D，施設配置数 p，需要点から施設配置候補への距離

$c\colon D \times F \to \mathbb{R}_{\geq 0}$

例

$F = \{f_1, f_2, f_3\}$, $D = \{d_1, d_2, d_3\}$, $p = 2$, $c(d_1, f_1) = 11$, $c(d_1, f_2) = 3$, $c(d_1, f_3) = 6$, $c(d_2, f_1) = 1$, $c(d_2, f_2) = 7$, $c(d_2, f_3) = 9$, $c(d_3, f_1) = 8$, $c(d_3, f_2) = 5$, $c(d_3, f_3) = 12$

p-center 問題



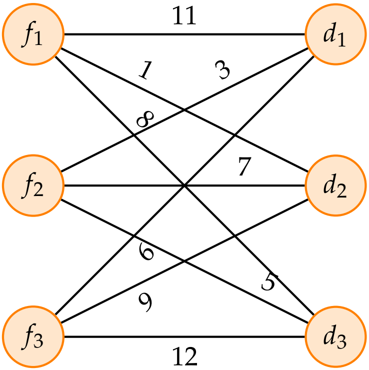
変数

- 施設を $f \in F$ に配置するとき 1，そうでないとき 0 となる変数 $x(f)$
- 需要点 $d \in D$ が施設 $f \in F$ を利用するとき 1，そうでないとき 0 となる変数 $y(d, f)$
- 移動距離の上界に対応する変数 t

定式化の例

$$
\begin{array}{ll}
\text{mim.} & t \\
\text{s. t.} & 11 \cdot y(d_1, f_1) + 3 \cdot y(d_1, f_2) + 6 \cdot y(d_1, f_3) \leq t, \\
& 1 \cdot y(d_2, f_1) + 7 \cdot y(d_2, f_2) + 9 \cdot y(d_2, f_3) \leq t, \\
& 8 \cdot y(d_3, f_1) + 5 \cdot y(d_3, f_2) + 12 \cdot y(d_3, f_3) \leq t, \\
& x(f_1) + x(f_2) + x(f_3) = 2, \\
& y(d_1, f_1) + y(d_1, f_2) + y(d_1, f_3) = 1,\ y(d_2, f_1) + y(d_2, f_2) + y(d_2, f_3) = 1, \\
& y(d_3, f_1) + y(d_3, f_2) + y(d_3, f_3) = 1, \\
& y(d_1, f_1) \leq x(f_1),\ y(d_2, f_1) \leq x(f_1),\ y(d_3, f_1) \leq x(f_1), \\
& y(d_1, f_2) \leq x(f_2),\ y(d_2, f_2) \leq x(f_2),\ y(d_3, f_2) \leq x(f_2), \\
& y(d_1, f_3) \leq x(f_3),\ y(d_2, f_3) \leq x(f_3),\ y(d_3, f_3) \leq x(f_3), \\
& x(f_1), x(f_2), x(f_3) \in \{0, 1\}, \\
& y(d_1, f_1), y(d_1, f_2), y(d_1, f_3), y(d_2, f_1), y(d_2, f_2) \in \{0, 1\}, \\
& y(d_2, f_3), y(d_3, f_1), y(d_3, f_2), y(d_3, f_3) \in \{0, 1\}.
\end{array}
$$

p-center 問題

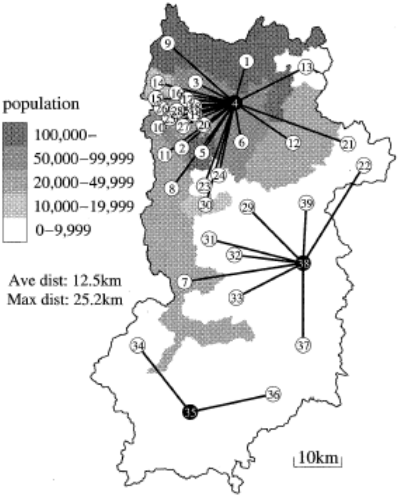


定式化（一般形）

$$
\begin{array}{ll}
\text{mim.} & t \\
\text{s. t.} & \displaystyle\sum_{f \in F} c(d,f) y(d,f) \le t \quad (d \in D), \\
& \displaystyle\sum_{f \in F} x(f) = p, \\
& \displaystyle\sum_{f \in F} y(d,f) = 1 \quad (d \in D), \\
& y(d,f) \le x(f) \quad (d \in D,\ f \in F), \\
& x(f) \in \{0,1\} \quad (f \in F), \\
& y(d,f) \in \{0,1\} \quad (d \in D,\ f \in F).
\end{array}
$$

- **この p-center 問題のように，変数の一部分に「整数でなければいけない」という制約がある線形最適化問題を混合整数最適化問題（**Mixed Integer optimization Problem; MIP**）という．**

p-center 問題のイメージ [1]



例えば奈良県で，3 つ施設を配置したいとすると，比較的南部にも施設を配置することになる．

p-median と p-center の比較

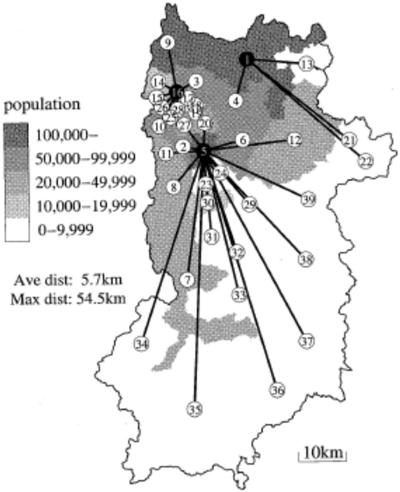


図: p-median

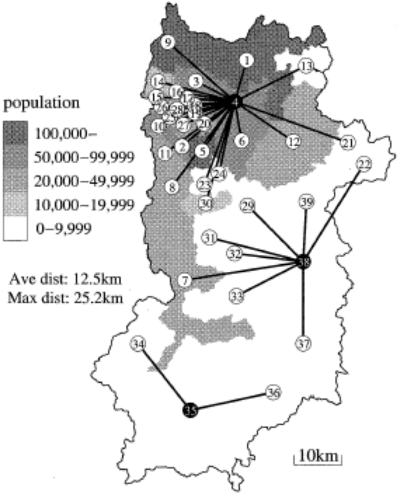
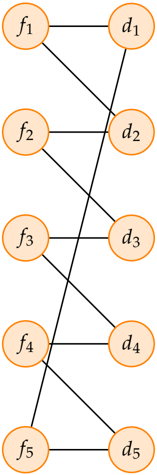


図: p-center

施設配置

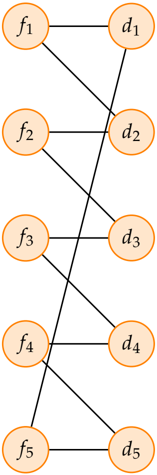
- Weber 問題と Hotelling の問題
- p-median 問題
- p-center 問題
- **集合被覆問題（set cover）**
- 最大被覆問題（max. cover）

集合被覆問題



- みんなが施設を利用したい．
- 作る施設の数を最小にするには，どこに施設を作れば良い？

集合被覆問題



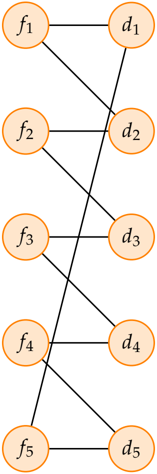
入力データ

施設配置候補の集合 F，需要点の集合 D，施設がカバーする需要点の集合 $S: F \to 2^D$

例

$F = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5\}$,
$D = \{d_1, d_2, d_3, d_4, d_5\}$,
$S(f_1) = \{d_1, d_2\}$, $S(f_2) = \{d_2, d_3\}$, $S(f_3) = \{d_3, d_4\}$, $S(f_4) = \{d_4, d_5\}$, $S(f_5) = \{d_1, d_5\}$

集合被覆問題



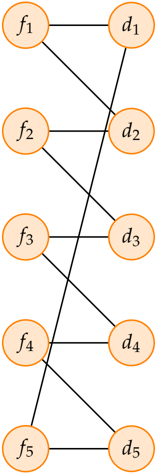
変数

- **施設を $f \in F$ に配置するとき 1，そうでないとき 0 となる変数 $x(f)$**

定式化の例

$$
\begin{array}{ll}
\text{mim.} & x(f_1)+x(f_2)+x(f_3)+x(f_4)+x(f_5) \\
\text{s. t.} & x(f_1)+x(f_2) \geq 1, \\
 & x(f_2)+x(f_3) \geq 1, \\
 & x(f_3)+x(f_4) \geq 1, \\
 & x(f_4)+x(f_5) \geq 1, \\
 & x(f_1)+x(f_5) \geq 1, \\
 & x(f_1), x(f_2), x(f_3), x(f_4), x(f_5) \in \{0,1\}.
\end{array}
$$

集合被覆問題



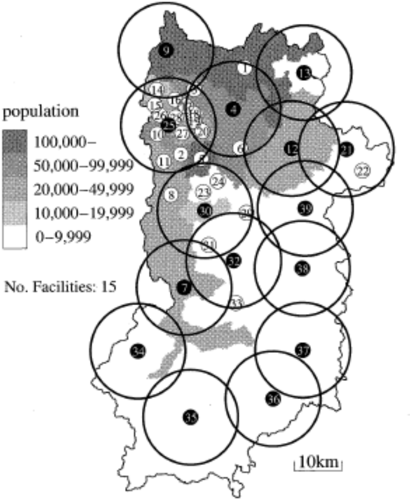
定式化（一般形）

$$\text{mim.} \quad \sum_{f \in F} x(f)$$

$$\text{s. t.} \quad \sum_{f \in S^{-1}(d)} x(f) \geq 1 \quad (d \in D),$$

$$x(f) \in \{0, 1\} \quad (f \in F).$$

集合被覆問題のイメージ [1]

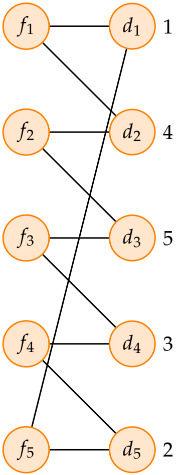


例えば奈良県の市町村中心点を半径 10km の円（中心は市町村中心点）でカバーしようとすると，15 個の円が必要になる．

施設配置

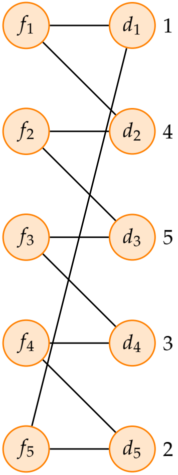
- Weber 問題と Hotelling の問題
- p-median 問題
- p-center 問題
- 集合被覆問題（set cover）
- **最大被覆問題（max. cover）**

最大被覆問題



- 例えば，2 つしか施設を作れない．
- 施設がカバーする需要点の重み和を最大にするには，どこに施設を作れば良い？

最大被覆問題



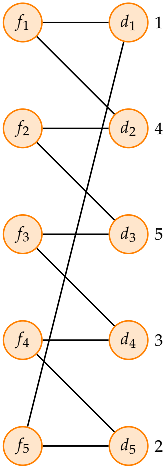
入力データ

施設配置候補の集合 F，需要点の集合 D，施設配置数 p，施設がカバーする需要点の集合 $S\colon F \to 2^D$，需要量 $w\colon D \to \mathbb{R}_{>0}$，

例

$F = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5\}$,
$D = \{d_1, d_2, d_3, d_4, d_5\}$, $p = 2$,
$S(f_1) = \{d_1, d_2\}$, $S(f_2) = \{d_2, d_3\}$, $S(f_3) = \{d_3, d_4\}$, $S(f_4) = \{d_4, d_5\}$, $S(f_5) = \{d_1, d_5\}$，
$w(d_1) = 1$, $w(d_2) = 4$, $w(d_3) = 5$, $w(d_4) = 3$, $w(d_5) = 2$

最大被覆問題



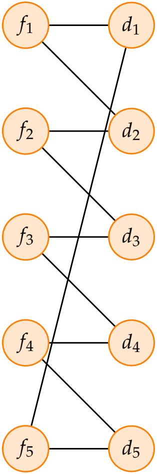
変数

- 施設を $f \in F$ に配置するとき 1，そうでないとき 0 となる変数 $x(f)$
- 需要点 $d \in D$ がいずれかの施設にカバーされるとき 1，そうでないとき 0 となる変数 $z(d)$

定式化の例

$$
\begin{array}{ll}
\text{max.} & z(d_1) + 4z(d_2) + 5z(d_3) + 3z(d_4) + 2z(d_5) \\
\text{s. t.} & x(f_1) + x(f_2) + x(f_3) + x(f_4) + x(f_5) = 2, \\
& x(f_1) + x(f_2) \geq z(d_2), \\
& x(f_2) + x(f_3) \geq z(d_3), \\
& x(f_3) + x(f_4) \geq z(d_4), \\
& x(f_4) + x(f_5) \geq z(d_5), \\
& x(f_1) + x(f_5) \geq z(d_1), \\
& x(f_1), x(f_2), x(f_3), x(f_4), x(f_5) \in \{0, 1\}, \\
& z(d_1), z(d_2), z(d_3), z(d_4), z(d_5) \in \{0, 1\}.
\end{array}
$$

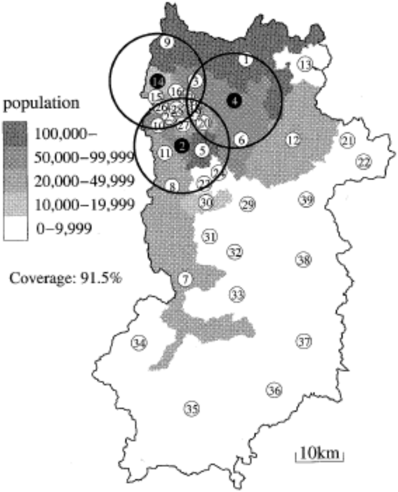
最大被覆問題

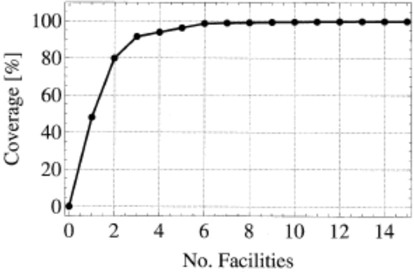


定式化

$$
\begin{aligned}
\text{max.} \quad & \sum_{d \in D} w(d) z(d) \\
\text{s. t.} \quad & \sum_{f \in F} x(f) = p, \\
& \sum_{f \in S^{-1}(d)} x(f) \geq z(d) \quad (d \in D), \\
& x(f) \in \{0,1\} \quad (f \in F), \\
& z(d) \in \{0,1\} \quad (d \in D).
\end{aligned}
$$

最大被覆問題のイメージ [1]





- 少数の施設でかなりの需要量をカバーできる場合もある.
- 携帯電話の基地局配置（人口カバー率）の話と似ている.

参考文献

[1] 田中 健一.
数理最適化入門（４）：施設配置の数理モデル.
応用数理, 23(4):178–183, 2013.