ロジスティクス工学

10 戦略形ゲーム

宮本 裕一郎

miyamoto あっと sophia.ac.jp

上智大学 理工学部 情報理工学科

目次

戦略形ゲームとは？
- 囚人のジレンマと支配戦略
- 合理的な豚と最適反応戦略
- デートの行き先とナッシュ均衡
- 演習問題

戦略形ゲームとは？
- 囚人のジレンマと支配戦略
- 合理的な豚と最適反応戦略
- デートの行き先とナッシュ均衡
- 演習問題

囚人のジレンマ

共犯で重罪の 2 人がそれぞれ別件逮捕され，自分だけが罪を告白したならば無罪として釈放するという司法取引を持ちかけられた．

- 2 人とも黙秘 $\Longrightarrow$ ともに懲役 1 年
- どちらかだけが自白
  $\Longrightarrow$ 自白した方は無罪釈放，もう片方は懲役 10 年
- 2 人とも自白 $\Longrightarrow$ ともに懲役 5 年

どう解析する？

戦略形ゲームで考える．

戦略形ゲームの定義

- **プレイヤー（player）**：意思決定を行う主体
  - 囚人 1
  - 囚人 2
- **戦略（strategy）**：プレイヤーそれぞれが選択可能な行動
  - 囚人 1 の戦略 $=$ { 黙秘, 自白 }
  - 囚人 2 の戦略 $=$ { 黙秘, 自白 }
- **利得（payoff）**：プレイヤーそれぞれが各行動を選択した結果（多くの場合，数値で表され，その値が大きいほど望ましい）
  - (囚人 1 が黙秘, 囚人 2 が黙秘) $\Rightarrow$ (囚人 1 が -1, 囚人 2 が -1) 年獲得
  - (囚人 1 が黙秘, 囚人 2 が自白) $\Rightarrow$ (囚人 1 が -10, 囚人 2 が 0) 年獲得
  - (囚人 1 が自白, 囚人 2 が黙秘) $\Rightarrow$ (囚人 1 が 0, 囚人 2 が -10) 年獲得
  - (囚人 1 が自白, 囚人 2 が自白) $\Rightarrow$ (囚人 1 が -5, 囚人 2 が -5) 年獲得

定義 (戦略形ゲーム)

戦略形ゲーム（strategic game）は，プレイヤー，各プレイヤーの戦略，各プレイヤーの利得の三要素からなる．

戦略形ゲームの利得行列による表現

定義 (利得行列)

プレイヤー数が 2 のゲームの利得を表現する行列を**利得行列（payoff matrix）**という．第 1 プレイヤーを行に，第 2 プレイヤーを列に対応させる．行列の i 行 j 列成分には，第 1 プレイヤーが戦略 i を選択し，第 2 プレイヤーが戦略 j を選択したときの利得を

$$(\text{第 1 プレイヤーの利得}, \text{第 2 プレイヤーの利得})$$

の形で書く．

表 1: 囚人のジレンマの利得行列による表現

		囚人 2 が	
		黙秘	自白
囚人 1 が	黙秘	$(-1, -1)$	$(-10, 0)$
	自白	$(0, -10)$	$(-5, -5)$

戦略の支配関係

定義 (戦略の支配関係)

あるプレイヤーの 2 つの戦略 x と y を比べたときに，自分以外のプレイヤーがどんな戦略を選択しても，x のほうが y より高い利得を与える場合，そのプレイヤーの戦略 x は戦略 y を支配（dominate）するという．

		2		
		x_2	y_2	z_2
1	x_1	(4, 3)	(3, 1)	(2, 2)
	y_1	(3, 2)	(2, 1)	(1, 1)
	z_1	(2, 3)	(1, 2)	(0, 1)

- 戦略 x_1 は戦略 y_1 を支配する．
- 戦略 y_1 は戦略 z_1 を支配する．
- 戦略 x_1 は戦略 z_1 を支配する．
- 戦略 x_2 は戦略 y_2 と z_2 を支配する．
- 戦略 y_2 と z_2 の間には支配関係はない．

支配戦略均衡

- 戦略 x が戦略 y を支配し，戦略 y が戦略 z を支配 $\Longrightarrow$ 戦略 x は戦略 z を支配
- ある戦略がすべての戦略を支配 $\Longrightarrow$ その戦略は支配戦略
  - 戦略 x_1 は支配戦略

戦略の支配

合理的なプレイヤーは支配された戦略を選択しない．もしすべての戦略を支配する支配戦略があれば，それを選択する．

定義 (支配戦略均衡)

すべてのプレイヤーに支配戦略が存在するとき，その支配戦略の組合せを**支配戦略均衡**とよぶ．

囚人のジレンマと支配戦略均衡

表 2: 囚人のジレンマの利得行列による表現

		囚人 2 が	
		黙秘	自白
囚人 1 が	黙秘	$(-1,-1)$	$(-10,0)$
	自白	$(0,-10)$	$(-5,-5)$

囚人のジレンマの支配戦略均衡は

- 「2 人とも自白をすること」

である．しかし，双方にとってより良いのは

- 「2 人とも黙秘をすること」

である．

個人の合理性は社会の合理性と必ずしも一致しない．

主体の合理性

ゲーム理論は合理的（rational）な主体の意思決定に対する相互作用の研究である．

合理的な主体

- 起こりうる結果に対して，どの結果を望み，どの結果を望まないか，その好みの順序を自分で判断でき，それに一貫性がある．
- 自分が好む結果を得られるように，最適な選択をする．
- そのための計算は一瞬でできる（大変賢い！）．

経済学においては「合理的＝利己的」と思われることも少なくないが，合理的と利己的は異なる．

負けを好むもの，自己犠牲を優先するものも合理的である．

完全に合理的ではない主体を扱うゲーム理論も存在するが，発展的である．

戦略形ゲームとは？

- 囚人のジレンマと支配戦略
- 合理的な豚と最適反応戦略
- デートの行き先とナッシュ均衡
- 演習問題

合理的な豚

以下の状況を戦略形ゲームとしてモデル化し，利得行列で表現してみよう．それぞれのプレイヤーに支配戦略はあるか？ また，支配戦略均衡はあるか？

- **大きな豚と小さな豚が広い檻に入れられており，檻の片側にスイッチがある．**
- **スイッチを押すと檻の反対側から** 5kg **の餌が出る．**
- **スイッチを押さなければ餌は食べられない．**
- **豚が** 2 **匹ともスイッチを押しに行き，**2 **匹が餌のところに戻ってくると，大きな豚が全ての餌を食べてしまう．**
- **大きな豚だけがスイッチを押しに行くと，大きな豚が戻ってくるまでに小さな豚は** 2kg **だけ餌を食べられる．**
- **小さな豚だけがスイッチを押しに行くと，大きな豚が全ての餌を食べてしまう．**
- **スイッチを押しに行き戻ってくる労力は** 1kg **分の餌に相当する．**

合理的な豚

得られる餌の量（kg 単位）を利得として利得行列を作る．

		小さな豚が	
		行く	行かない
大きな豚が	行く	$(4,\ -1)$	$(2,\ 2)$
	行かない	$(5,\ -1)$	$(0,\ 0)$

- 小さな豚の支配戦略は
  - 「スイッチを押しに行かない」

  である．
- 大きな豚の支配戦略は
  - 「なし」

  である．
- 支配戦略均衡はない．

この状況では何がゲームの解なのか？

最適反応戦略

相手も意思決定するプレイヤー

ゲーム理論の思考方法では，各プレイヤーは自分以外のプレイヤーをでたらめに行動する機械や自然現象のようには考えない．また，相手の行動を，自分にとって都合の良いように楽観的に考えたり，都合悪く悲観的にも考えない．相手も自分と同じように，自分の利得を最大化するために合理的に行動すると考える．

定義 (最適反応戦略)

他のプレイヤーの戦略に対して，自分の利得を最大にする戦略を（その戦略に対する）**最適反応戦略（best response strategy）**とよぶ．

合理的な豚の解

合理的な豚の解は

- 小さな豚が強硬な態度「スイッチを押しに行かない」（支配戦略）を取り，
- 大きな豚が妥協策「スイッチを押しに行く」（最適反応戦略）を取る

である．この状況は俗に瀬戸際外交（brinkmanship）とよばれるものである．ここから分かる通り，瀬戸際外交は，感情的にはともかく，理論的には自然な現象である．

瀬戸際外交とゲーム理論的「背水の陣」

自分を後に引けなくすることで，交渉力を強めることができる．このときは，自分の気持を高めるだけでなく，相手にそれを知らせることが重要である．

ゲーム理論では，強者の思い通りになるとは限らない．

戦略形ゲームとは？

- 囚人のジレンマと支配戦略
- 合理的な豚と最適反応戦略
- デートの行き先とナッシュ均衡
- 演習問題

デートの行き先

A 男と B 子が週末に遊びに行く．A 男は山に行きたく，B 子は海に行きたい．

- 二人で山に行くならば A 男は 4 嬉しく，B 子は 3 嬉しい．
- A 男が山，B 子が海に行くならば，どちらも 2 嬉しい．
- A 男が海，B 子が山に行くならば，どちらも 1 嬉しい．
- 二人で海に行くならば A 男は 3 嬉しく，B 子は 4 嬉しい．

嬉しさの数値を利得として利得行列で表現してみよう．

		B 子が	
		山	海
A 男が	山	$(4,\ 3)$	$(2,\ 2)$
	海	$(1,\ 1)$	$(3,\ 4)$

このゲームには支配戦略はない．この状況におけるゲームの解は？

ナッシュ均衡と戦略ゲームの解

定義 (ナッシュ均衡)

ある戦略の組に対して，各プレイヤーが（他のプレイヤーは戦略を変化させないとして），どんな他の戦略を選んでも利得を高くできないようなときに，その戦略の組はナッシュ均衡（Nash equilibrium）であるとよばれる．

戦略形ゲームの解

ナッシュ均衡が戦略形ゲームの解である．

ナッシュ均衡の見つけ方

1. 各プレイヤー X ごとに以下を繰り返す．
   - 1.1 そのプレイヤー X 以外のすべてのプレイヤー Y に関して以下を繰り返す．
     - 1.1.1 プレイヤー Y のすべての戦略（3 人以上のゲームの場合はすべての戦略の組合せ）1 つ 1 つに対して X の最適反応戦略を求め，その戦略の組の X の利得を○で囲む．
2. すべてのプレイヤーの利得が○で囲まれている戦略の組がナッシュ均衡である．

ナッシュ均衡と均衡選択

ナッシュ均衡の自己拘束性（self-enforcing property）

すべてのプレイヤーが最適反応戦略を取るならば，ナッシュ均衡以外の解になるように，誰か 1 人だけが戦略を変えることはありえない．

ナッシュ均衡の存在性

ゲームによっては，ナッシュ均衡が存在しない場合もある．ゲームによっては，ナッシュ均衡が複数存在することもある．

均衡選択（equilibrium selection）

ナッシュ均衡が複数ある場合，どれをゲームの（唯一の）解とするか？これはゲーム理論の大きな課題となっている．ハルサニ（John C. Harsanyi）とゼルテン（Reinhard Selten）による理論もあるが，定着するには至っていない．

戦略形ゲームとしてのデートの行き先の解

		B 子が	
		山	海
A 男が	山	(4, 3)	(2, 2)
	海	(1, 1)	(3, 4)

デートの行き先のナッシュ均衡は

- 二人で山に行く
- 二人で海に行く

である.

戦略形ゲームとしてのジャンケンの解

ジャンケンを戦略形ゲームとしてモデル化してみよう！

- 勝ちならば利得 1
- 負けならば利得 -1
- 引き分けならば利得 0

として利得行列で表現してみよう．

		二郎が		
		グー	チョキ	パー
一郎が	グー	$(0,\ 0)$	$(1,\ -1)$	$(-1,\ 1)$
	チョキ	$(-1,\ 1)$	$(0,\ 0)$	$(1,\ -1)$
	パー	$(1,\ -1)$	$(-1,\ 1)$	$(0,\ 0)$

このゲームのナッシュ均衡は？

ゲーム理論を学ぶ意義・利点

- 日常生活やビジネスの場における戦略的思考方法
  - 経営戦略，政策決定
- 多くの学問分野の基礎
  - 経済学，経営学，社会学，政策科学，政治学，生物学
  - ナッシュ均衡，囚人のジレンマ
- 合理的な思考，論理的な思考の訓練
  - 経験や知識や勘に頼るだけでなく施行する訓練
- 戦略的・論理的な観点から自分の決定を説明する訓練
  - 「なんとなく（経験的に）こう思う」では誰も納得しない．
- 欧米的（特に米国的）「合理主義」の考え方の理解
  - 公正な競争の理解，交渉への対処

ゲーム理論の限界

現実世界においては

- 単純化が難しい
- 全ての行動の選択肢や代替案を列挙できない
- 良い方法に気がつかない
- 利得の見積りが困難
- 誰もが合理的に行動するとは限らない

などの問題がある．

戦略形ゲームとは？

囚人のジレンマと支配戦略
合理的な豚と最適反応戦略
デートの行き先とナッシュ均衡
演習問題

支配戦略均衡を見つける演習

問題 以下の利得行列で表現される，抽象化・記号化された戦略形ゲームに支配戦略均衡があるならば，それを見つけよ．

		2		
		x_2	y_2	z_2
1	x_1	$(9,\ 5)$	$(0,\ 6)$	$(-2,\ 4)$
	y_1	$(3,\ 2)$	$(-1,\ 3)$	$(-3,\ -1)$

解答例

- プレイヤー 1 には支配戦略 x_1 がある．
- プレイヤー 2 には支配戦略 y_2 がある．
- よって，プレイヤー 1 が戦略 x_1 を選びプレイヤー 2 が戦略 y_2 を選ぶことが支配戦略均衡である．

ナッシュ均衡を見つける演習

問題 以下の利得行列で表現される，抽象化・記号化された戦略形ゲームにナッシュ均衡があるならば，それをすべて見つけよ．

		2		
		x_2	y_2	z_2
1	x_1	$(2,\ 1)$	$(0,\ 2)$	$(-2,\ 0)$
	y_1	$(3,\ 9)$	$(-1,\ 3)$	$(2,\ 8)$

解答例

- (y_1, x_2), (x_1, y_2) がナッシュ均衡である．

短期的な視点からの成果主義

以下のゲームを戦略形ゲームとしてモデル化し，利得行列で表現し，ナッシュ均衡があるならばそれをすべて見つけよ．また，支配戦略均衡はあるか？

- とある企業のとある部署に務める A 君と B 君に，上司から職場改善の協力依頼
- 職場が改善されると 1 人あたり 10 万円に相当する利益
- 2 人が協力する場合，それぞれが 6 万円に相当する労力を消費
- 1 人だけが協力する場合，協力する方は 16 万円に相当する労力を消費
- どちらも協力しなければ，誰も労力を消費しないが，職場も改善されない．

短期的な視点からの成果主義の解答例

短期的な視点からの成果主義の利得を利得行列で表したものを以下に示す．

		B	
		協力する	協力しない
A	協力する	$(4,\ 4)$	$(-6,\ 10)$
	協力しない	$(10,\ -6)$	$(0,\ 0)$

- プレイヤー A には支配戦略「協力しない」がある．
- プレイヤー B には支配戦略「協力しない」がある．
- よって「2 人とも協力しない」という支配戦略均衡がある．
- 「2 人とも協力しない」はこのゲーム唯一のナッシュ均衡でもある．

参考文献

[1] 渡辺隆裕. ゼミナール ゲーム理論入門. 日本経済新聞社, 2008 年.