

Двойственная задача ЛП.

Пусть дана задача ЛП (прямая) в стандартной форме:

$$\max c^T x$$

$$Ax \leq b$$

$$x \geq 0$$

$$x \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^m, A - m \times n \text{ матрица}$$

тогда соответствующая ей двойственная задача имеет следующую формулировку:

$$\min b^T y$$

$$A^T y \geq c$$

$$y \geq 0$$

$y \in \mathbb{R}^m$; A, b и c такие же как в прямой задаче.

1. Сформулируйте двойственную задачу для следующей прямой:

$$\max 4x_1 + x_2 + 3x_3$$

$$x_1 + 4x_2 \leq 1$$

$$3x_1 - x_2 + x_3 \leq 3$$

$$x \geq 0$$

2. Сформулируйте двойственную задачу для двойственной.

Двойственная симплекс таблица, это симплекс таблица двойственной задачи в которой выбран комплементарный базис. Комплементарный базис – составлен из соответствующих индексов комплементарных переменных. Комплементарными называются переменные прямой и двойственной задачи сопоставленные по следующему правилу:

$$x_{s1} \leftrightarrow y_1$$

$$x_{s2} \leftrightarrow y_2$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$x_{sm} \leftrightarrow y_m$$

$$x_1 \leftrightarrow y_{s1}$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$x_n \leftrightarrow y_{sn}$$

3. Выпишите двойственную симплекс таблицу для первых двух шагов симплекс алгоритма, примененного к задаче 1.

4. Покажите, что двойственная симплекс таблица может быть получена из прямой с помощью транспонирования и отрицания всех элементов. Докажите, что это свойство сохраняется на шаге симплекс алгоритма для соответствующих таблиц.
5. Докажите, что, если прямая задача имеет решение, то соответствующая двойственная тоже имеет решение, причем значения целевых функций в задачах равны.
6. Если прямая задача не ограничена, может ли двойственная иметь решение? Может ли она быть также не ограничена? Может ли она быть не совместна?
7. Если прямая задача - не совместна, может ли двойственная иметь решение? Быть не ограниченной? Быть не совместной?
8. Пусть для задачи ЛП из пункта 1 известно, что точка $x^* = [0, \frac{1}{4}, 3\frac{1}{4}]^T$ является решением. Определите значения переменных y^* , которые дают решение соответствующей двойственной задачи.
9. Для следующей задачи ЛП симплекс таблица, в которой фиктивные переменные являются базисными, не является допустимой. Является ли допустимой комплементарная симплекс таблица? Будет ли допустима эта двойственная комплементарная симплекс таблица, если заменить целевую функцию на $m = -x_1 - x_2$? Решите задачу, двойственную к измененной. Как можно использовать полученное решение для решения исходной задачи? (Примечание: при применении симплекс метода к двойственной задаче не обязательно ее явно выписывать, достаточно производить замену базиса в том порядке, в котором она происходит в двойственной задаче на соответствующих комплементарных переменных.)

$$\begin{aligned}
 \max z &= -x_1 + 4x_2 \\
 -2x_1 - x_2 &\leq 4 \\
 -2x_1 + 4x_2 &\leq -8 \\
 -x_1 + 3x_2 &\leq -7 \\
 x &\geq 0
 \end{aligned}$$