Семинар 5. Методы оптимизации. МФТИ. Осень 2017. Тренин С.А.

Скорость сходимости.

Пусть $\{x_k\}$ последовательность точек в $\mathbb{R}^n$, которая сходится к x^*. Говорят, что сходимость:

Линейная, если существует константа $r \in (0,1)$ такая, что для всех достаточно больших k

$$\frac{\|x_{k+1} - x^*\|}{\|x_k - x^*\|} \le r$$

Сверхлинейная, если

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\|x_{k+1} - x^*\|}{\|x_k - x^*\|} = 0$$

Квадратичная, если существует константа $\mathrm{M} > 0$ такая, что для всех достаточно больших k

$$\frac{\|x_{k+1} - x^*\|}{\|x_k - x^*\|^2} \le M$$

Порядка p, если при тех же условиях

$$\frac{\|x_{k+1} - x^*\|}{\|x_k - x^*\|^p} \le M$$

1. Определите скорость сходимости следующих последовательностей:

а) $1 + (0.5)^k$

б) $1 + \mathrm{k}^{-k}$

в) $1 + (0.5)^{2^k}$

Методом *дихотомии* называется следующий алгоритм:

$[l_0, r_0]$

$\mathrm{a}_k = \frac{l_k + r_k}{2} - \frac{\delta}{2};\ b_k = \frac{l_k + r_k}{2} + \frac{\delta}{2}$

Если $f(\mathrm{a}_k) \le f(b_k)$, то

$l_{k+1} = l_k; r_{k+1} = b_k$

Если $f(\mathrm{a}_k) > f(b_k)$, то

$l_{k+1} = \mathrm{a}_k; r_{k+1} = r_k$

Итерации продолжаются пока $|l_k - r_k| > \varepsilon$.

2. Докажите, что указанная последовательность сходится к точке минимума унимодальной функции. Докажите, что она сходится к точке локального минимума непрерывной функции на отрезке $[l_0, r_0]$.

3. Оцените количество обращений к значению функции f, которое потребуется совершить, чтобы достичь заданной точности ε.

Методом *золотого сечения* называется аналогичный алгоритм с другим выбором промежуточных точек.

4. Пусть дан алгоритм.

$[l_0, r_0]$
$a_k = \varphi l_k + (1-\varphi) r_k;\ b_k = (1-\varphi) l_k + \varphi r_k;$
Если $f(a_k) \le f(b_k)$, то
$l_{k+1} = l_k; r_{k+1} = b_k$
Если $f(a_k) > f(b_k)$, то
$l_{k+1} = a_k; r_{k+1} = r_k$
Итерации продолжаются пока $|l_k - r_k| > \varepsilon$.

Модифицируйте приведенную процедуру так, чтобы на каждой итерации требовалось совершить только одно новое обращение к значению функции f.

5. Сравните количество обращений к функции f в двух приведенных методах.

6. Охарактеризуйте скорость сходимости методов.

7. Дана функция

$$f(x,y) = x^2 + e^{y^2}$$

Выясните, при каких начальных приближениях метод градиентного спуска с постоянным шагом 0.5 сходится. Оцените скорость сходимости.

8. Сделайте два шага метода Ньютона для нахождения минимума функции

$$f(x) = x^5 - x^3 - x^2 + 1$$

Из точки $x_0 = 2$. Определите, куда сходится метод Ньютона и определите скорость сходимости.