Семинар 8. Методы оптимизации. МФТИ. Осень 2017. Тренин С.А.

Двойственность.

Рассмотрим следующую задачу условной оптимизации:

$$\min_{x\in Q} f_0(x) \;\; Q = \{\, x \in \mathbb{R}^n | f_i(x) \le 0, i = \overline{1,m}, h_j(x) = 0, j = \overline{1,q}\}$$

Задача условной оптимизации называется выпуклой, если $f_0(x)$ и $f_i(x)$ – выпуклые функции, а $h_j(x)$ - аффинные функции (для всех индексов i и j).

Функцией Лагранжа называется функция:

$$L(x,\lambda,\nu) = f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x) + \sum_{j=1}^{q} \nu_i h_j(x)$$

Двойственной задачей оптимизации называется следующая задача:

$$\max_{\lambda\ge 0} g(\lambda,\nu)\,, \text{где } g(\lambda,\nu) \triangleq \inf_{x\in\mathbb{R}^n} L(x,\lambda,\nu)$$

1. Докажите:

а) если существуют точки $x^* \in Q, \lambda^* \ge 0 \in \mathbb{R}^m, \nu^* \in \mathbb{R}^q$ такие, что $f_0(x^*) - g(\lambda^*,\nu^*) = 0$ (двойственный зазор), то для любых других точек $x \in \mathbb{R}^n, \lambda \ge 0 \in \mathbb{R}^m, \nu \in \mathbb{R}^q$верно следующее $L(x^*,\lambda,\nu) \le L(x^*,\lambda^*,\nu^*) \le L(x,\lambda^*,\nu^*)$.

б) при тех же условиях для любых пар прямо и двойственно оптимальных решений $\tilde{x}, \tilde{\lambda}, \tilde{\nu}$ выполнен следующий набор условий (ККТ):

$$f_i(\tilde{x}) \le 0, i = \overline{1,m};\; h_j(\tilde{x}) = 0, j = \overline{1,q};$$

$$\tilde{\lambda} \ge 0$$

$$\tilde{\lambda}_i f_i(\tilde{x}) = 0, i = \overline{1,m}$$

$$\nabla f_0(\tilde{x}) + \sum_{i=1}^{m} \tilde{\lambda}_i \nabla f_i(x) + \sum_{j=1}^{q} \tilde{\nu}_i \nabla h_j(x) = 0$$

Задача условной оптимизации удовлетворяет условию Слейтера, если существует точка $x \in Q$ такая, что в этой точке все ограничения неравенства выполняются строго $f_i(x) < 0$.

2. Для следующих задач изобразите множества:

$$G = \{\,(u,t) | \exists x \in \mathbb{R}: f_0(x) = t, f_1(x) = u\}$$

$$A = \{\,(u,t) | \exists x \in \mathbb{R}: f_0(x) \le t, f_1(x) \le u\}$$

Для каждой из них покажите: Является ли она выпуклой? Выполнено ли условие Слейтера? Имеет ли место сильная двойственность?

a) $\min f_0(x) = x, f_1(x) = x^2 \le 0;$

b) $\min f_0(x) = x, f_1(x) = x^2 - 1 \le 0;$

c) $\min f_0(x) = x, f_1(x) = |x| \le 0;$

d) $\min f_0(x) = x$, $f_1(x) \le 0$ $f_1(x) = \begin{cases} -x-2, & x \ge 1 \\ x, & -1 \le x \le 1 \\ -x-2, & x \ge 1 \end{cases}$

e) $\min f_0(x) = x^3$, $f_1(x) = -x+1 \le 0$;

Штрафные и барьерные функции.

Функция $p(x)$ называется (внешним) штрафом для задачи оптимизации $\min_{x \in Q} f_0(x)$, если $p(x) = 0$, если $x \in Q$ и $p(x) > 0$, если $x \notin Q$.

3. Функция $p(x) = \sum_{i=1}^{m} \max\{f_i(x), 0\}^2 + \sum_{j=1}^{q} (h_j(x))^2$ является примером штрафной функции. Приведите другие примеры.

Метод оптимизации с использованием штрафных функций строит последовательность $\{x_k\}$ следующим образом:

$$x_{k+1} = \underset{x \in \mathbb{R}^n}{\operatorname{argmin}} f_0(x) + t_k p(x)$$

Для некоторой последовательности $\{t_k\}$, которая монотонно стремиться к бесконечности. Аналитически можно сначала решить задачу на каждом шаге для произвольного t, а затем устремить t к бесконечности.

4. Решите методом штрафных функций следующие задачи:

a) $\min xy$, $x^2 + y^2 \le 25$;

b) $\min xy$, $x^2 + y^2 = 25$

c) $\min x^2 + y^2$, $x + y \le -1$

5. Покажите, что для следующей задачи квадратичный штраф не работает, однако можно выбрать такую штрафную функцию, для которой метод будет сходиться. Задача $\min -x^4$, $|x| \le 1$.

Функция $\mathrm{b}(x)$ называется барьером для задачи оптимизации $\min_{x \in Q} f_0(x)$, если $\mathrm{b}(x)$ определена для $x \in Q$ и $\mathrm{b}(x) \to \infty$ когда $x$ приближается к границе Q. Q должно иметь внутреннюю точку (все ограничения – неравенства).

5. Функция $\mathrm{b}(x) = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{(-f_i(x))^p}, p \ge 1$ является примером барьерной функции. Приведите другие примеры.

Метод оптимизации с использованием барьерных функций строит последовательность $\{x_k\}$ следующим образом:

$$x_{k+1} = \underset{x \in \mathbb{R}^n}{\operatorname{argmin}} f_0(x) + \frac{1}{t_k} p(x)$$

Для некоторой последовательности $\{t_k\}$, которая монотонно стремиться к бесконечности.

6. Решите методом барьерных функций следующие задачи:

a) $\min x^2 + y^2 + z^2$, $x + y + z \le -1$

b) $\min (x-1)^3$, $x \ge -1$