Семинар 7. Методы оптимизации. МФТИ. Осень 2017. Тренин С.А.

Выпуклость. Двойственность.

Множество называется выпуклым, если для любых $x, y \in X$ и $\alpha \in [0,1]$ верно, что $\alpha x + (1-\alpha)y \in X$. Функция $f: X \to \mathbb{R}$ называется выпуклой, если для любых $x, y \in X$ и $\alpha \in [0,1]$ верно, что $f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y)$ и выпуклой вверх, если для любых верно, что $f(\alpha x + (1-\alpha)y) \geq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y)$.

1. Какие из указанных операций над множествами сохраняют выпуклость:

   а) объединение;
   б) пересечение;
   в) аффинное преобразование;

2. Докажите, что функция выпукла тогда и только тогда, когда ее надграфик является выпуклым. (Надграфик – множество $\{(x, z) \in X \times \mathbb{R} | z \geq f(x)\}$).

3. Докажите, что для выпуклой функции любое множество $M = \{x \in X | f(x) \leq z\}$ - выпукло. Всегда ли верно обратное?

Рассмотрим следующую задачу условной оптимизации:

$$\min_{x \in Q} f_0(x)$$
$$Q = \{\, x \in \mathbb{R}^n |$$
$$f_i(x) \leq 0, i = \overline{1, m}$$
$$h_j(x) = 0, j = \overline{1, q}\}$$

Задача условной оптимизации называется выпуклой, если $f_0(x)$ и $f_i(x)$ – выпуклые функции, а $h_j(x)$ - аффинные функции (для всех индексов i и j).

Функцией Лагранжа называется функция:

$$L(x, \lambda, \nu) = f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x) + \sum_{j=1}^{q} \nu_i h_j(x)$$

Двойственной задачей оптимизации называется следующая задача:

$$\max_{\lambda \geq 0} g(\lambda, \nu)$$
$$g(\lambda, \nu) \triangleq \inf_{x \in \mathbb{R}^n} L(x, \lambda, \nu)$$

4. Покажите, что двойственная задача является выпуклой вверх (даже если исходная не выпукла).

5. Покажите, что для любых $x \in \mathbb{R}^n, \lambda \geq 0 \in \mathbb{R}^m, \nu \in \mathbb{R}^q$ верно следующее неравенство (слабая двойственность): $g(\lambda, \nu) \leq f_0(x)$.

6. Сформулируйте двойственную задачу для следующей задачи ЛП: $\max c^T x$, $Ax \leq b, x \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^m$.

7. Для следующей задачи составьте двойственную и решите обе: $\min x + y$, $x^2 + y^2 \leq 4$.

8. Для следующей задачи (матрица B положительно определена) составьте двойственную $\min_{Ax=b} \frac{1}{2} x^T B x + c^T x + c_0$.

9. Докажите:

а) если существуют точки $x^* \in Q, \lambda^* \geq 0 \in \mathbb{R}^m, \nu^* \in \mathbb{R}^q$ такие, что $f_0(x^*) - g(\lambda^*, \nu^*) = 0$, то для любых других точек $x \in Q, \lambda \geq 0 \in \mathbb{R}^m, \nu \in \mathbb{R}^q$верно следующее $L(x^*, \lambda, \nu) \leq L(x^*, \lambda^*, \nu^*) \leq L(x, \lambda^*, \nu^*)$.

б) при тех же условиях для любых пар прямо и двойственно оптимальных решений $\tilde{x}, \tilde{\lambda}, \tilde{\nu}$ выполнен следующий набор условий (ККТ):

$$
\begin{gathered}
f_i(\tilde{x}) \leq 0, i = \overline{1, m} \\
h_j(\tilde{x}) = 0, j = \overline{1, q} \\
\tilde{\lambda} \geq 0 \\
\tilde{\lambda}_i f_i(\tilde{x}) = 0, i = \overline{1, m} \\
\nabla f_0(\tilde{x}) + \sum_{i=1}^{m} \tilde{\lambda}_i \nabla f_i(x) + \sum_{j=1}^{q} \tilde{\nu}_i \nabla h_j(x) = 0
\end{gathered}
$$

Задача условной оптимизации удовлетворяет условию Слейтера, если существует точка x, принадлежащая допустимой области задачи и кроме того в этой точке все ограничения неравенства (кроме аффинных) выполняются строго $f_i(x) < 0$.

10. Рассмотрите следующую задачу: $\min -x,\ 0 \leq x \leq 1,\ x^2 \leq 0$. Решение этой задачи тривиальное. Постройте к ней двойственную. Имеет ли двойственная задача решение? Удовлетворяет ли задача условию Слейтера?