Семинар 1. Методы оптимизации. Весна 2017. МФТИ ФИВТ. Тренин С. А.

Метод наименьших квадратов.

1. Сформулируйте задачу, как задачу оптимизации и решите ее методом наименьших квадратов.
   a) Два радиоактивных вещества смешаны друг с другом в неизвестной пропорции. Известен период полураспада каждого из них (для первого вещество λ, для второго μ). Вы можете регистрировать показания счетчика Гейгера в разные моменты времени. Можно предполагать, что показания будут подчиняться следующей закономерности:
   $$b = Ce^{-\lambda t} + De^{-\mu t},$$
   где C и D – количество соответствующего вещества.
   На практике в силу случайности радиоактивного распада показания не подчиняются этому закону в точности. По результатам эксперимента вы получаете m пар (t, b). Требуется определить C и D.
   b) По каналу связи поступает сигнал. В результате действия помех сигнал оказывается зашумлен. Перед вами *n* цифровых отсчетов: x_1^{cor}, …, x_n^{cor}. Требуется произвести сглаживание сигнала. Один из способов это сделать: найти вектор x^*, который минимизирует значение функции
   $$f(x) = \|x - x^{cor}\|_2^2 + \mu \sum_{i=1}^{n-1}(x_{i+1} - x_i)^2,$$
   где μ - параметр. (Как влияет этот параметр на результат сглаживания?)

Задачи линейного программирования.

Общей задачей линейного программирования называется задача вида:
$$< c, x > \to max,$$
$$x_j \geq 0, j \in I_+,$$
$$< a_i, x > \leq b_i, i = 1, \dots, m,$$
$$< a_i, x > = b_i, i = m + 1, \dots, s,$$
где $I_+ \subset \{1, \dots, n\}, x \in \boldsymbol{R}^n$.

2. Перепишите задачу в матричной форме, считая что $I_+ = \{1, \dots, k\}$.

Канонической задачей (standard form) линейного программирования называется задача вида:
$$< c, x > \to max,$$
$$x \geq 0,$$
$$Ax = b.$$
Стандартной задачей (inequality form) линейного программирования называется задача вида:
$$< c, x > \to max,$$
$$x \geq 0,$$
$$Ax \leq b.$$

3. Можно ли свести:
   a) каноническую задачу к стандартной;
   b) стандартную задачу к канонической;

c) общую задачу к канонической;
d) общую задачу к стандартной.

4. Найти все угловые точки и их базисы для множеств:
   а) Q = { $x \in \boldsymbol{R}^4$ | $x \geq 0$, $x_1 - 2x_2 - x_3 = 0$, $x_1 + 3x_2 + x_4 = 1$}
   б) Q = { $x \in \boldsymbol{R}^5$ | $x \geq 0$, $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$, $-x_1 + 2x_2 + x_3 + x_5 = 1$}

Задача ЛП в канонической форме:

$$\max c^T x$$
$$Ax = b$$
$$x \geq 0, x \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^m, A - m \times \mathrm{n}\ \text{матрица}$$

Вектор x называется базисной допустимой точкой, если он принадлежит допустимому множеству и существует такой набор индексов $\mathcal{B} \subset \{1, 2, \dots, n\}$ (*базис*), такой что:

- $\mathcal{B}$ содержит ровно m индексов;
- $i \notin \mathcal{B} \ \Rightarrow x_i = 0$;
- Матрица $m \times m$ $A_B = [A_i]_{i \in \mathcal{B}}$ - невырожденная.

5. Приведите пример задачи для $m \leq n$. Пусть строки матрицы A линейно зависимы. Можно ли привести пример совместной задачи при этом условии? Можно ли найти для такой задачи базисную допустимую точку?

Будем считать, что у матрицы A полный строковый ранг.
Докажите, что:

6. Если задача совместна, то у нее есть, по крайней мере, одна базисная допустимая точка.
7. Если у задачи ЛП есть решения, то, по крайней мере, одно из них является базисной оптимальной точкой (решение задачи ЛП, которое является одновременно базисной допустимой точкой).
8. Решить задачу ЛП с помощью симплекс-метода:

$$\min -5x_1 - x_2$$
$$x_1 + x_2 \leq 5$$
$$2x_1 + 0.5x_2 \leq 8$$
$$x \geq 0$$