Семинар 9. Методы оптимизации. МФТИ. Осень 2017. Тренин С.А.

Барьерные функции.

Функция $\mathrm{b}(x)$ называется барьером для задачи оптимизации $\min\limits_{x\in Q} f_0(x)$, если $\mathrm{b}(x)$ определена для $x \in Q$ и $\mathrm{b}(x) \to \infty$ когда x приближается к границе Q. Q должно иметь внутреннюю точку (все ограничения – неравенства).

1. Функция $\mathrm{b}(x) = \sum_{i=1}^{m} -\ln(-f_i(x))$, является примером барьерной функции. Приведите другие примеры.

Метод оптимизации с использованием барьерных функций строит последовательность $\{x_k\}$ следующим образом:

$$x_{k+1} = \underset{x\in\mathbb{R}^n}{\operatorname{argmin}} f_0(x) + \frac{1}{t_k} p(x)$$

Для некоторой последовательности $\{t_k\}$, которая монотонно стремиться к бесконечности.

2. Решите методом барьерных функций следующие задачи:

a) $\min x^2 + y^2 + z^2, x + y + z \le -1$

b) $\min(x-1)^3, x \ge -1$

Чувствительность решения

Пусть дана выпуклая задача оптимизации.

$$p^* = inf\{f_0(x) |\, x \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}: f_i(x) \le 0, i = \overline{1,m}, Ax - b = 0\}$$

Назовем следующую задачу оптимизации – измененной по сравнению с обычной прямой задачей.

$$p^*(u,v) = inf\{f_0(x) |\, x \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}: f_i(x) \le u_i, i = \overline{1,m}, Ax - b = v_i\}$$

Тогда $p^*(0,0) = p^*$.

3. Докажите, что функция $p^*(u,v)$ – выпукла.

4. Докажите, что, если имеет место сильная двойственность и двойственная задача имеет решение $\mathrm{d}^* = \mathrm{g}(\lambda^*, \nu^*)$, то

$$\frac{\partial p^*(0,0)}{\partial u_i} = -\lambda_i^*, \quad \frac{\partial p^*(0,0)}{\partial v_i} = -\nu_i^*.$$

5. Для следующей задачи: найдите двойственную функцию; решите двойственную задачу; постройте $p^*(u)$; покажите справедливость утверждения задачи 4.

$$\min x^2 + 1$$

$$(x-2)(x-4) \le 0$$

Проекции на простые множества.

5. Найдите проекцию точки $u \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ на каждое из следующих множеств Q.

a) $Q = \{x \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}: \|x - x_0\|_2 \leq R\}$

b) $Q = \{x \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}: < c, x >= b\}$

c) $Q = \{x \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}: < c, x >\leq b\}$

d) $Q = \{x \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}: Ax = b\}\ b \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{m}}$

e) $Q = \{x \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}: a_i \leq x_i \leq b_i, i = \overline{1, n}\}$, где $a_i < b_i$- заданные числа для $i = \overline{1, n}$

f) $Q = \{x \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}: x_i \geq 0, i = \overline{1, n}\}$,

6. Постройте метод проекции градиента для функции $\|Ax - b\|_2{}^2$ $(x \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}, b \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{m}})$ с оптимальным выбором длины шага на множествах Q из задачи 5.