ULTIMATE-GUIDE по симплекс-методу

Типы задач ЛП

Есть несколько задач Линейного Программирования:
Нужно найти $x = (x_1, \dots, x_n)$, максимизирующую f(x) = $< c, x > = c_1x_1 + \dots + c_nx_n$ при заданных условиях.

1. Общая задача:

$< c, x > \to$ max,

$x_j \geq 0$, $j = 1, \dots, n$
$< a_i, x > \leq b_i$, $i = 1, \dots, s$,
$< a_i, x > = b_i$, $i = s + 1, \dots, m$

2. Стандартная задача - в условии только равенства:

$< c, x > \longrightarrow$ max,
$x_j \geq 0$, $j = 1, \dots, n$
$< a_i, x > = b_i$, $i = 1, \dots, m$

3. Каноническая задача - в условии только неравенства:

$< c, x > \longrightarrow$ max,
$x_j \geq 0$, $j = 1, \dots, n$
$< a_i, x > \leq b_i$, $i = 1, \dots, m$

Стандартная задача сводится к канонической:
Нужно равенство $< a_i, x > = b_i$ заменить на $< a_i, x > \leq b_i$ и $< -a_i, x > \leq -b_i$

Каноническая задача сводится к стандартной, для этого нужно ввести новые переменные:
$x_{si} = b_i - < a_i, x >$
Тогда неравенства $< a_i, x > \leq b_i$ нужно заменить на $< a_i, x > + x_{si} = b_i$ и $x_{si} \geq 0$, получим тем самым стандартную задачу.

Пример:
f(x) = $4x_1 + 3x_2 \to$ max
$x_1 - x_2 \leq 1$
$2x_1 - x_2 \leq 3$
$x_2 \leq 5$
$x \geq 0$

Вводим три новые переменные: x_{s1}, x_{s2}, x_{s3}. Тогда задача в стандартном виде выглядит так:
f(x) = $4x_1 + 3x_2 \to$ max
$x_{s1} + x_1 - x_2 = 1$

$x_{s2} + 2x_1 - x_2 = 3$
$x_{s3} + x_2 = 5$
$x \geq 0$

Симплекс-метод

Симплекс-метод - это способ решения стандартной задачи линейного программирования. Чтобы его применить, первым делом нужно привести вашу задачу к стандартному виду (с равенствами).

Общая идея: у нас есть набор иксов B (его называют базисом почему-то) и оставшийся набор иксов N.
|B| = m, |N| = n - m. (n ≥ m, то есть переменных больше, чем уравнений)
Сначала выберем начальное разбиение на B и N, а потом будем менять по одной переменной между B и N, пока не найдем ответ.
Все иксы из B будем выражать через переменные из N. И функцию f(x) тоже будем выражать через переменные из N.
Переменные, которые сейчас в N - это переменные, значения которых 0.
Значения переменных из B - это свободный член в выражении этой переменной из переменных их N.

Сам алгоритм:
1. Выбираем начальные B и N
2. Выбираем входящую переменную (которую надо переместить из N в B)
3. Выбираем выходящую переменную (которую надо переместить из B в N)
4. Меняем их местами, выражаем f(x) и всё B через переменные из N
5. Повторяем пункты 2-4, пока f(x) не будем выглядеть хорошо

А теперь подробнее, да еще и на примере:
Пусть у нас задача такая:
$f(x) = 4x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$
$x_{s1} + x_1 - x_2 = 1$
$x_{s2} + 2x_1 - x_2 = 3$
$x_{s3} + x_2 = 5$
$x \geq 0$

1. **Как выбрать начальную точку** (т. е. начальное разбиение на B и N)

Нужно подобрать B так, чтобы все значения переменных из B (то есть вон те свободные члены) были неотрицательными. Тогда такие значения действительно возможны.
Заметим, что проще всего за B брать вершины, появляющиеся в ходе перехода из канонического вида к стандартному - их очень легко выразить.
Однако может возникнуть проблема: начальная точка не выбирается. О том, как это решить, позднее.
В нашем случае: B = $\{x_{s1}, x_{s2}, x_{s3}\}$, N = $\{x_1, x_2\}$. Как видим, свободные члены положительные:
$x_{s1} = -x_1 + x_2 + 1$
$x_{s2} = -2x_1 + x_2 + 3$
$x_{s3} = -x_2 + 5$

f(x) = $4x_1 + 3x_2$

2. **Как выбрать входящую переменную**

Действуем по правилу максимального коэффициента:
Выбираем переменную из N, у которой в f(x) максимальный коэффициент.

В данном случае это x_1 (коэф. 4).

3. **Как выбрать выходящую переменную**

Смотрим на выражения B через N и выбираем x из B с максимальным отношением свободного члена к коэффициенту при входящей переменной. Но(!), только если знаменатель - отрицательный. Если коэффициент равен нулю или положительный, то игнорируем такую переменную.

В данном случае для x_{s1} это 1/(-1) = -1, для x_{s2} это 3/(-2) = -1.5, для x_{s3} это 5/0 = ??, игнорируем его. Максимум достигается в x_{s1} - это и есть выходящая переменная.

4. **Меняем B и N**

Теперь надо выразить B и f(x) через N снова.

B = $\{x_1, x_{s2}, x_{s3}\}$, N = $\{x_{s1}, x_2\}$
$x_1 = - x_{s1} + x_2 + 1$
$x_{s2} = - 2x_1 + x_2 + 3 = -2(- x_{s1} + x_2 + 1) + x_2 + 3 = 2 x_{s1} - x_2 + 1$
$x_{s3} = - x_2 + 5$
f(x) = $4x_1 + 3x_2 = 4(- x_{s1} + x_2 + 1) + 3x_2 = -4x_{s1} + 7 x_2 + 4$

5. **Пора ли остановиться?**

Посмотрим на f(x), выраженное через N. Если все коэффициенты при переменных неположительные, то все, можно остановиться. Ответ - это свободный член, значения переменных из N - это 0, а значения переменных из B - это свободный член в выражении через N. Гарантируется, что если действовать по правилам, они будут неотрицательными, поэтому ответ корректный. Если же есть положительный коэффициент, то надо вернуться к пункту 2 и повторять.

В нашем случае f(x) = $-4x_{s1} + 7 x_2 + 4$. Есть положительный коэффициент при x_2, а значит продолжаем

Давайте досчитаем здесь ответ для этого примера:

2. входящая переменная: x_2
3. x_1: 1/1 = 1 - знаменатель положительный, игнорируем
   x_{s2}: 1/(-1) = -1 - максимум
   x_{s3}: 5/(-1) = -5
   выходящая переменная: x_{s2}
4. B = $\{x_1, x_2, x_{s3}\}$, N = $\{x_{s1}, x_{s2}\}$

$x_2 = 2 x_{s1} - x_{s2} + 1$
$x_1 = - x_{s1} + x_2 + 1 = - x_{s1} + (2 x_{s1} - x_{s2} + 1) + 1 = x_{s1} - x_{s2} + 2$
$x_{s3} = - x_2 + 5 = -2 x_{s1} + x_{s2} + 4$
f(x) = $-4x_{s1} + 7 x_2 + 4 = -4x_{s1} + 7 x_2 + 4 = -4x_{s1} + 7(2 x_{s1} - x_{s2} + 1) + 4 = 10x_{s1} - 7x_{s2} + 11$

2. …..

…..
….
…
…

..

Двухфазный симплекс-метод

Что делать, если мы не можем найти начальную точку?

f(x) = $-2x_1 - x_2 \to$ max

$x_{s1} - x_1 + x_2 = -1$

$x_{s2} - x_1 - 2x_2 = -2$

$x_{s3} + x_2 = 1$ f=x выпуклая функция

$x \geq 0$

Здесь свободные члены отрицательные и B = $\{x_{s1}, x_{s2}, x_{s3}\}$ не подходит

Тогда сначала решим вспомогательную систему (первая фаза):

g(x) = $-x_0 \to$ max

$-x_0 + x_{s1} - x_1 + x_2 = -1$

$-x_0 + x_{s2} - x_1 - 2x_2 = -2$

$-x_0 + x_{s3} + x_2 = 1$

$x \geq 0$

(то есть в каждую строчку добавляем $-x_0$)

Причем эту фазу надо начать <u>определенным образом:</u> нужно взять B = $\{x_{s1}, x_{s2}, x_{s3}\}$, например, забить на то, что свободные члены изначально отрицательные, и первым шагом <u>как входящую переменную взять x_0</u>, а как исходящую - ту, у которой в уравнении <u>наименьший</u> свободный член. После этого все должно пойти хорошо, утверждается. Будем теперь продолжать симплекс-метод, пока x_0 снова не попадет в N, посмотрим на получившееся B - утверждается, что оно будет корректным, с неотрицательными свобод

x_{s1}: (-1)

x_{s2}: (-2) - победитель, выходящая переменная.

g(x) = $-x_{s2} + 2x_2 + x_1 - 2$

$x_0 = 2 + x_{s2} - 2x_2 - x_1$

$x_{s1} = 1 + x_{s2} - 3x_2$

$x_{s3} = 3 + x_{s2} - 3x_2 - x_1$

Теперь x_2 - входящая, x_0: 2/(-2), x_{s1}: 1/(-3), x_{s3}: 3/(-3) -> x_{s1} - выходящая

g(x) = -4/3 - 1/3 * x_{s2} - 2/3 * x_{s1} + x_1

$x_2 = -x_{s1}/3 + 1/3 + x_{s2}/3$

x_0 = 4/3 + 1/3 * x_{s2} - x_1 + 2/3 * x_{s1}

$x_{s3} = 2 - x_1 + x_{s1}$

x_1 - входящая, x_0: 4/3/(-1), x_{s3}: 2/(-1) -> x_0 - выходящая

g(x) = $-x_0$

x_1 = 4/3 + 1/3 x_{s2} - x_0 + 2/3 x_{s1}

x_2 = 1/3 + 1/3 x_{s2} - 1/3 x_{s1}

x_{s3} = 2/3 - 1/3 x_{s2} + x_0 + 1/3 x_{s1}

В этот момент закончилась 1 фаза. Корректным решением в данном случае будет $x0$ = 0 => его можно считать нулем и выбросить везде.

2 фаза - максимизация исходной функции с B = $\{x_1, x_2, x_{s3}\}$, видим, что такая начальная точка корректна.

Господи, благослови Автора этого гайда!