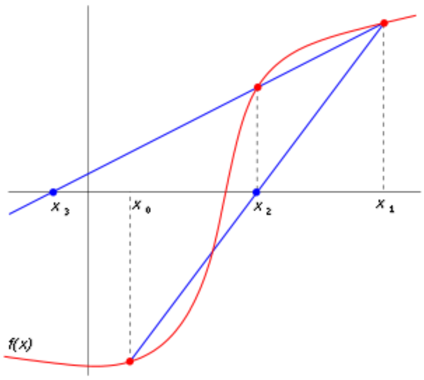
Семинар 6. Методы оптимизации. МФТИ. Осень 2017. Тренин С.А.

Метод секущих

1. Требуется найти численное значение $\frac{1}{a}$ $(a \in \mathbb{R})$ с точностью ϵ, используя только операции сложения, умножения и вычитания. Определите функцию f(x) так, чтобы число $\frac{1}{a}$ было корнем этой функции и решите уравнение f(x)=0 методом Ньютона. Пусть $a = 2.5$. С начальным приближением 0.5, с помощью калькулятора выполните 4 итерации метода.
2. Метод секущих для решения задачи f(x)=0 $(x \in \mathbb{R})$ формирует последовательность $\{x^k\}$ по следующему принципу. Дано: два начальных приближения x^0 и x^1. Следующая точка последовательности x^{k+1} вычисляется, как корень уравнения секущей, проходящей через точки x^k и x^{k-1} (схематично изображено на рисунке).
   a. Выпишете рекуррентную формулу, вычисления x^{k+1}.



   b. Выпишете рекуррентную формулу для метода нахождения корня уравнения $\nabla f(x) = 0$ для функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \in C^2$. Алгоритм, решающий такое уравнение методом секущих назовем методом секущих для минимизации функции.

3. Для каждой функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \in C^2$ и для любых двух соседних точек последовательности $\{x^k\}$ из предыдущей задачи (b) существует число $H_{k+1} \in \mathbb{R}$ такое, что

$$H_{k+1}\left(\nabla f\left(x^{k+1}\right) - \nabla f\left(x^k\right)\right) = x^{k+1} - x^k$$

Покажите, что если последовательность сходится к точке минимума функции f, т.е. x^*, то последовательность $H_k \to [f''(x^k)]^{-1}$, при $k \to \infty$.

4. Проведите 4 итерации метода секущих для поиска минимума функции

$$f(x) = 2.5x - \ln x$$

при начальных приближениях $x^0 = 0.1$ и $x^1 = 0.6$.

Квазиньютоновские методы

Пусть $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \in C^2$. Введем следующие обозначения:

$\nabla f(x^k)$ - градиент в точке x^k;

H_{k+1}- симметричная квадратная матрица;

$B_{k+1} = [H_{k+1}]^{-1}$ $s_k = x^{k+1} - x^k$, $y_k = \nabla f(x^{k+1}) - \nabla f(x^k)$;

Многомерным аналогом метода секущих может служить следующая схема:

$x^{k+1} = x^k - \alpha_k H_k \nabla f(x^k)$;

$H_k \to H_{k+1}$ (некоторое правило преобразования матриц).

Если последовательность H_{k+1} удовлетворяет уравнению из задачи 3b (уравнению секущей), то такая схема называется квазиньютоновским алгоритмом минимизации. Уравнение секущей в новых обозначениях имеет вид: $H_{k+1} y_k = s_k$.

Квазиньютоновские методы стремятся построить такую последовательность, для которой $H_k \to [\nabla^2 f(x^k)]^{-1}$.

5. Покажите, что для квадратической функции $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$:
$$f(x) = \frac{1}{2} x^T A x - b^T x,$$
если $A > 0$, то матрица то в качестве H_k можно взять $[\nabla^2 f(x^k)]^{-1} = A^{-1}$.
6. Приведите пример такой матрицы H_{k+1}, которая будет удовлетворять уравнению секущей, для любой функции $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \in C^2$.

Метод SR1-update.

Пусть дана некоторая симметричная строго положительно определенная матрица H_0. Метод SR1-update задает следующее правило обновление матрицы H в квазиньютоновской схеме:

$H_{k+1} = H_k + uv^T$, *где* $u, v \in \mathbb{R}^n$

7. Найдите такие u и v, для которых H_{k+1} будет всегда являться симметричной матрицей и условие касательной будет выполнено.
8. Выполните 3 шага метода SR1-update для минимизации следующей функции двух переменных $f(x, y)$ при $x^0 = (0,0)$, $H_0 = I$. $\alpha_k = \underset{\alpha \in \mathbb{R}}{\operatorname{argmin}} f(x^k + \alpha H_k \nabla f(x^k))$
$$f(x, y) = 2x^2 - 4xy + 4y^2 - 4x + 4$$
9. Пусть дано n линейно независимых направлений s: $s_0, \dots, s_{n-1}$. Докажите, что для квадратической функции $f(x) = \frac{1}{2} x^T A x - b^T x$,
если $A > 0$, то метод SR1-update завершиться на этих направлениях за n+1 шаг, причем $H_n = A^{-1}$.

10. Докажите, что для любой невырожденной квадратной матрицы Q размера mxm и любых двух векторов v и u размера m справедливо следующее соотношение (SMW – формула):
$$(Q + uv^T)^{-1} = Q^{-1} - \frac{Q^{-1} u v^T Q^{-1}}{1 + v^T Q^{-1} u}$$
11. С помощью SMW – формулы докажите, что $B_{k+1} = B_k + pq^T$, *где* $p, q \in \mathbb{R}^n$.
12. Если матрица $H_k > 0$, можно ли гарантировать, что $H_{k+1} > 0$?