Семинар 1. Методы оптимизации. Весна 2015. МФТИ ФИВТ ПМФ. Тренин С. А.

Задачи линейного программирования.

Общей задачей линейного программирования называется задача вида:

$$< c, x > \to min,$$
$$x_j \geq 0, j \in I_+,$$
$$< a_i, x > \leq b_i, i = 1, \dots, m,$$
$$< a_i, x > = b_i, i = m + 1, \dots, s,$$

где $I_+ \subset \{1, \dots, n\}, x \in \boldsymbol{R}^n$.

1. Перепишите задачу в матричной форме, считая что $I_+ = \{1, \dots, k\}$.

Канонической задачей (standard form) линейного программирования называется задача вида:

$$< c, x > \to min,$$
$$x \geq 0,$$
$$Ax = b.$$

Стандартной задачей (inequality form) линейного программирования называется задача вида:

$$< c, x > \to min,$$
$$x \geq 0,$$
$$Ax \leq b.$$

2. Можно ли свести:
   a) каноническую задачу к стандартной;
   b) стандартную задачу к канонической;
   c) общую задачу к канонической;
   d) общую задачу к стандартной.
3. Формализуйте в виде задач линейного программирования следующие задачи:
   a) Производственная задача, максимизация прибыли.
      Имеется n товаров и m ресурсов. Запасы j-ого ресурса равны b_j. Прибыль от продажи i-ого товара равна p_i. Для производства единицы i-ого товара требуется a_{ij} единиц j-ого ресурса. Требуется максимизировать суммарную прибыль.
   b) Минимизация затрат.
      Имеется n блюд и m критериев по содержанию полезных веществ. Цена покупки порции i-ого блюда равна q_i. Про каждое i-ое блюдо известно, что оно содержит a_{ij} единиц j-ого полезного вещества. Требуется составить меню так, чтобы содержание каждого j-ого полезного вещества было не меньше y_j единиц. При этом нужно минимизировать общую стоимость.
   c) Транспортная задача.
      Имеется n производителей и m потребителей некоторой продукции. Производитель i может произвести не более x_i единиц продукции.

Потребителю j требуется не менее чем y_j единиц. Цена доставки одной единицы от производителя i к потребителю j - a_{ij}. Необходимо обеспечить все потребности при минимальных затратах.

d) Задача о назначении.
Имеется n работников и n работ. Время выполнения i-ым работником j-ой работы a_{ij}. Требуется произвести назначение работников на работы так, чтобы минимизировать суммарное время.

Структура допустимого множества.

Каждое линейное неравенство $< a_i, x > \leq b_i$ i=1,…,m $x \in \boldsymbol{R}^n$ задает полупространство. Пересечение полупространств образует полиэдр (многогранник) Q. Угловой точкой множества Q является такая точка v для которой справедливо, что, если v = αu + (1-α)w, α∈(0,1), u,w∈Q, то v = u = w.

4. Покажите, что точка является угловой точкой множества Q тогда и только тогда когда в этой точке по крайне мере n неравенств обращаются в равенства и среди них n линейно независимых.
5. Покажите, что если точка является угловой для множества {x|x≥0,Ax=b}, то она является угловой и для множества {x|x≥0,Ax≤b}. Верно ли обратное?
6. Если вы привели задачу ЛП с n переменными и m ограничениями в стандартной форме к каноническому виду,
   a) сколько строк и сколько столбцов в новой матрице A?
   b) сколько угловых точек может максимум быть в получившемся множестве?
   c) сколько может быть максимум линейно независимых столбцов в новой матрице A?

A – матрица канонической задачи ЛП. Любой набор из r = rank(A) линейно независимых столбцов матрицы A задает базис B. Любой угловой точке допустимого множества соответствует базис. Координаты угловой точки заданной некоторым базисом легко установить. Достаточно найти значения тех переменных, которые соответствуют выбранным линейно независимым столбцам (базисных переменных) и обращают уравнения в тождества, а оставшиеся не базисные переменные положить равными 0. Если получившиеся координаты не отрицательны, то базис задает допустимую угловую точку.

7. Найти все угловые точки и их базисы для множеств:
   a) Q = { $x \in \boldsymbol{R}^4$ | $x \geq 0$, $x_1 - 2x_2 - x_3 = 0$, $x_1 + 3x_2 + x_4 = 1$}
   b) Q = { $x \in \boldsymbol{R}^5$ | $x \geq 0$, $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$, $-x_1 + 2x_2 + x_3 + x_5 = 1$}