Московский физико-технический институт (ГУ)
Факультет инноваций и высоких технологий
Методы оптимизации, весна 2015
Семинар 11, методы условной оптимизации

1. Вычислите одну итерацию метода проекции градиента при выборе α_k методом минимизации значения функции на направлении для функции

$$f(x,y) = (x-1)^2 + (y+1)^2,$$

$$(x,y) \in U := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geqslant 0, y \geqslant 0\}.$$

Рассмотреть начальные приближения $(x_0,y_0) = (0,0)$, $(x_0,y_0) = (0,1)$, $(x_0,y_0) = (1,0)$, $(x_0,y_0) = (1,1)$.

2. Найдите проекцию любой точки $u \in \mathbb{R}^n$ на множество U, если

а) $U = \{u \in \mathbb{R}^n : |u - u_0| \leqslant R\}$ — шар радиуса $R > 0$ с центром в точке u_0;

б) $U = \{u \in \mathbb{R}^n : \langle c, u\rangle = \gamma\}$ — гиперплоскость;

в) $U = \{u \in \mathbb{R}^n : \langle a_i, u\rangle = b_i, i = 1, 2 \ldots, m\}$ — аффинное множество;

г) $U = \{u \in \mathbb{R}^n : \langle c, u\rangle \leqslant \gamma\}$ — замкнутое полупространство, определяемое гиперплоскостью $\langle c, u\rangle = \gamma$;

д) n-мерный параллелепипед, то есть множество $U = \{u = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n : \alpha_i \leqslant u_i \leqslant \beta_i, i = 1, 2, \ldots, n\}$, где $\alpha_i < \beta_i, i = 1, 2, \ldots, n$ — заданные числа;

е) $U = \{u = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n : u_i \geqslant 0, i = 1, 2, \ldots, n\}$ — неотрицательный октант пространства $\mathbb{R}^n$.

3. Рассмотрите метод проекции градиента для функции $f(u) = |Au - b|^2$ с оптимальным выбором длины шага, где A — матрица порядка $m \times n, b \in \mathbb{R}^m$, считая, что множество U имеет вид, описанный в задаче 2. Исследуйте сходимость метода.

Рассмотрим задачу:

$$f(u) \to \inf; \quad u \in U,$$

где U — выпуклое замкнутое ограниченное множество из $\mathbb{R}^n$, функция $f(u) \in \mathcal{C}^1(U)$. Пусть $u_0 \in U$ — некоторое начальное приближение. Если известно k-е приближение $u_k \in U (k \geqslant 0)$, то приращение функции $f(u)$ в точке u_k можно представить в виде $f(u) - f(u_k) = \langle f^{'}(u_k), u - u_k\rangle + o(|u - u_k|)$. Возьмем главную линейную часть этого приращения $f_k(u) = \langle f^{'}(u_k), u - u_k\rangle$, и определим вспомогательное приближение $\overline{u}_k$ из условий

$$\overline{u}_k \in U, \quad \inf_U f_k(u) = f_k(\overline{u}_k) = \langle f^{'}(u_k), \overline{u}_k - u_k\rangle. \tag{1}$$

Так как множество U замкнуто и ограничено, а линейная функция $f_k(u)$ непрерывна, то точка $\overline{u}_k$ из (1) всегда существует. Если функция $f_k(u)$ достигает своей нижней грани на U более чем в одной точке, то в качестве точки $\overline{u}_k$ возьмем любую из них.

Разумеется, так просто получить вспомогательное приближение $\overline{u}_k$ удается далеко не всегда, и вместо точного решения задачи (1) часто приходится довольствоваться определением какого-либо приближенного решения. А именно, будем предполагать, что оно определяется из следующих условий:

$$\overline{u}_k \in U, \quad f_k(\overline{u}_k) \leqslant \min_U f_k(u) + \varepsilon_k, \ \ \varepsilon_k \geqslant 0, \ \ \lim_{k\to\infty} \varepsilon_k = 0. \tag{2}$$

Допустим, что точка $\overline{u}_k$, удовлетворяющая условиям (2) (или (1)), уже найдена. Тогда следующее $(k+1)$-е приближение будем искать в виде

$$u_{k+1} = u_k + \alpha_k(\overline{u}_k - u_k), \quad 0 \leqslant \alpha_k \leqslant 1.$$

В силу выпуклости множества U всегда $u_{k+1} \in U$. Описанный метод называется *методом условного градиента.*

4. Вычислить несколько итераций метода условного градиента с оптимального выбора шага для функции $f(x,y) = x^2 + xy + y^2$ при $u \in U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant x \leqslant 1, -1 \leqslant y \leqslant 0\}$, выбирая $(x_0, y_0) = (1,-1), (-1,0), (1,0)$ или $(0,0)$.

5. Вычислите несколько шагов метода условного градиента с оптимальным выбором шага для функции $f(u) = \frac{1}{2}\langle Au, u\rangle - \langle b, u\rangle$ на $\mathbb{R}^n$.

6. Дайте описание различных вариантов метода условного градиента для функции $f(u) = |Au - b|^2$, где A — матрица $m \times n, b \in \mathbb{R}^m$, а множество U является шаром или параллелепипедом.